3 Polinomios

INTRODUCCIÓN

Son múltiples los contextos en los que aparecen los polinomios: fórmulas económicas, químicas, físicas…, de ahí la importancia de comprender el concepto de polinomio y otros asociados a él, como son: grado del polinomio, término independiente, polinomio reducido, polinomio completo, polinomio opuesto y valor numérico de un polinomio.

Después de comprender y practicar cada uno de estos conceptos se estudiará cómo operar con polinomios: sumar, restar, multiplicar y dividir, aplicando el método más adecuado en cada caso. En las operaciones con polinomios, las mayores dificultades pueden surgir en la multiplicación (en la colocación correcta de los términos de cada grado) y en la división (en la determinación de cada término del cociente y en la resta de los productos obtenidos).

Es importante que los alumnos aprendan a deducir por sí mismos el desarrollo de las fórmulas de las igualdades notables: cuadrado de una suma, cuadrado de una diferencia y producto de una suma por una diferencia.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Un *polinomio* es una expresión algebraica formada por la suma de varios monomios, que son los *términos* del polinomio.
- El *grado* de un polinomio reducido es el del término de mayor grado.
- El *valor numérico de un polinomio*, para cierto valor de la variable $x = a$, se obtiene sustituyendo x por a y operando.
- La *suma de dos polinomios* se calcula sumando los términos semejantes de ambos.
- La *resta de dos polinomios* se calcula sumando al primero el opuesto del segundo.
- El *producto de dos polinomios* se calcula multiplicando cada uno de los monomios de uno de ellos por todos los monomios del otro, y sumando después los polinomios obtenidos.
- *División de polinomios:* $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$
- Igualdades notables:
  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer el grado, el término y los coeficientes de un polinomio.	• Grado, término independiente y coeficientes de un polinomio. • Polinomio ordenado. • Polinomio reducido. • Polinomio completo.	• Identificación del grado, el término independiente y los coeficientes de un polinomio. • Redución de polinomios. • Ordenación de los términos de un polinomio. • Distinción de polinomios completos e incompletos.
2. Determinar el valor numérico de un polinomio.	• Valor numérico de un polinomio.	• Cálculo del valor numérico de un polinomio.
3. Realizar sumas y restas con polinomios.	• Suma y resta de polinomios.	• Suma y resta de polinomios.
4. Realizar multiplicaciones con polinomios.	• Multiplicación de polinomios.	• Multiplicación de polinomios: aplicar la propiedad distributiva.
5. Realizar divisiones con polinomios.	• División de polinomios: dividendo, divisor, cociente y resto.	• División de polinomios: divisiones enteras o exactas. • Comprobación de las divisiones.
6. Identificar y desarrollar igualdades notables.	• Cuadrado de una suma. • Cuadrado de una diferencia. • Producto de una suma por una diferencia.	• Identificación y desarrollo de igualdades notables.

RECONOCER EL GRADO, EL TÉRMINO Y LOS COEFICIENTES DE UN POLINOMIO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma de monomios, que son los **términos** del polinomio.
- Un polinomio es **reducido** cuando no tiene monomios semejantes.
- El **grado** de un polinomio reducido coincide con el grado de su término de mayor grado.
- Un polinomio es **completo** cuando tiene términos de todos los grados inferiores al grado del polinomio. En caso contrario, es **incompleto**.

EJEMPLO

Dado el polinomio $P(x) = 5x^2 - 3x + 2x + 1 - 3$:

a) Obtén el polinomio reducido.

b) Determina el grado del polinomio.

c) ¿Cuántos términos tiene el polinomio? ¿Cuál es su término independiente?

d) ¿Es un polinomio completo? Si el polinomio es incompleto, di qué término falta.

a) Para reducir un polinomio hay que resolver las operaciones que se puedan:

$$P(x) = 5x^2 - \underbrace{3x + 2x} + \overbrace{1 - 3} = P(x) = 5x^2 - x - 2 \longrightarrow \text{Polinomio reducido}$$

b) El grado del polinomio es 2: $P(x) = 5x^{2} - x - 2$.

c) El polinomio tiene tres términos y -2 es el término independiente.

$$P(x) = 5x^2 - x - \boxed{2} \longrightarrow -2 \text{ es el término independiente.}$$

$\longrightarrow$ Tiene tres términos.

d) $P(x) = \underset{2}{\underline{5x^2}} - \underset{1}{\underline{x}} - \underset{0}{\underline{2}}$ es un polinomio completo.

Grado

EJEMPLO

¿Es $Q(x) = 7x^3 + 2x^2 + 3$ un polinomio completo o incompleto?

$Q(x) = \underset{3}{\underline{7x^3}} + \underset{2}{\underline{2x^2}} + \underset{0}{\underline{3}}$ Es un polinomio incompleto, pues no tiene término de grado 1.

Grado

1 **Calcula el polinomio reducido.**

a) $P(x) = 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1$

b) $P(x) = x^4 - 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1 - 3x^4 - 3x$

2 **Calcula el polinomio reducido y ordena sus términos de mayor a menor grado.**

$P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 3x + 4x^4 - 3x + 2x^2 + 5$

$P(x) =$

- Tiene .... términos.
- El término independiente es ....
- El grado del polinomio es ....
- ¿Cómo es el polinomio, completo o incompleto? ....

3 **Reduce el polinomio y ordena sus términos de mayor a menor grado.**

$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3 + 5 - 7x + 3x^2 - 2x^3$

$P(x) =$

- Tiene .... términos.
- El término independiente es ....
- El grado del polinomio es ....
- ¿Cómo es el polinomio, completo o incompleto? ....

4 **Señala si los siguientes polinomios son completos o incompletos. Completa la tabla.**

POLINOMIO	COMPLETO	INCOMPLETO	FALTA EL TÉRMINO
$P(x) = -4x^2 + 5x - 2$			
$Q(x) = 2x^3 + 40$			
$R(x) = -10x^2 - 20x + 40$			
$S(x) = 40$			
$T(x) = x^3 + x^2 + 1$			

5 **Dado el polinomio $Q(x) = 2x^5 + x^2 - x$, indica.**

a) Si es o no ordenado.
b) Si es o no reducido.
c) Si es o no completo.
d) Su grado.
e) Su término independiente.

OBJETIVO 2

DETERMINAR EL VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

El **valor numérico** de un polinomio $P(x)$, para cierto valor de la variable $x = a$, se obtiene sustituyendo x por a y operando.

EJEMPLO

En un polinomio, por ejemplo, $P(x) = 2x^2 + 1$, se puede dar cualquier valor a la x.

Para $x = 2 \longrightarrow P(2) = 2 \cdot (2)^2 + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 8 + 1 = 9$

El valor numérico del polinomio para $x = 2$ es 9.

Para $x = 10 \rightarrow P(10) = 2 \cdot (10)^2 + 1 = 2 \cdot 100 + 1 = 200 + 1 = 201$

El valor numérico del polinomio para $x = 10$ es 201.

1 **Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios para $x = 1$.**

a) $P(x) = x + 1$

$x = 1 \rightarrow P(\ \ ) = (\ \ ) + 1$

b) $P(x) = x^2 + 1$

c) $P(x) = x^3 + 1$

d) $P(x) = x^4 + 1$

2 **Calcula el valor numérico de cada polinomio para el valor de la variable indicado.**

a) $A(x) = x + 1$, para $x = 1$.

b) $B(x) = 4x^5 - 6x^2 + 3$, para $x = -1$.

c) $C(x) = -9x^4 + 7x^2 + 5$, para $x = 1$.

d) $D(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, para $x = -2$.

REALIZAR SUMAS Y RESTAS CON POLINOMIOS

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- La **suma** de dos polinomios se calcula sumando los términos semejantes de ambos.
- La **resta** de dos polinomios se obtiene sumando el primero con el polinomio opuesto del segundo.
- Recuerda que la regla básica de las sumas y restas de polinomios es que **solo se pueden sumar y restar los términos semejantes**.

EJEMPLO

Suma los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ y $Q(x) = 4x^2 - 3x + 2$.

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** solo se suman los elementos iguales.

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 \boxed{-2x^2} \boxed{+5x} \boxed{-3} \boxed{+4x^2} \boxed{-3x} \boxed{+2} = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

- **En columna:** hay que poner en columna los términos semejantes.

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\ + \ Q(x) = & \qquad\ \ 4x^2 - 3x + 2 \\ \hline P(x) + Q(x) = & 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 \end{array}$$

EJEMPLO

Resta los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5$ y $Q(x) = 5x^2 - 2x + 7$.

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** el signo negativo delante del paréntesis afecta a todos los términos.

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5 - (5x^2 - 2x + 7) =$$

$$= 3x^3 \boxed{-5x^2} \boxed{+5} \boxed{-5x^2} + 2x \boxed{-7} = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

- **En columna:** hay que poner en columna los términos semejantes.

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 3x^3 - \ \ 5x^2 \qquad\quad + 5 \\ - \ Q(x) = & \qquad - \ (5x^2 - 2x + 7) \\ \hline P(x) - Q(x) = & 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2 \end{array}$$

1 **Dados los polinomios $P(x) = x^3 - 2x + 1$ y $Q(x) = x^2 - 3x + 2$, halla $P(x) + Q(x)$ y $P(x) - Q(x)$, resolviendo las operaciones en línea y en columna.**

2 **Calcula la suma y resta de cada par de polinomios.**

a) $P(x) = 3x + 2x^2 - x - 4$ $\qquad Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 3$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$
$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$
$P(x) - Q(x) =$

b) $P(x) = x^7 - 8x^4 + 3$ $\qquad Q(x) = x^5 + 3x^3 - 6$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$
$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$
$P(x) - Q(x) =$

c) $P(x) = 10x^4 + x^2 + 1$ $\qquad Q(x) = x^5 + 7x^2 - x$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$
$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$
$P(x) - Q(x) =$

d) $P(x) = -x^4 - x^3 - 2$ $\qquad Q(x) = -3x^4 - 2x^3 - x - 5$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$
$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$
$P(x) - Q(x) =$

e) $P(x) = -3x^3 - 2x^2 - 2$ $\qquad Q(x) = 6x^4 - x^3 - 3x + 7$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$
$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$
$P(x) - Q(x) =$

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- El **producto** de dos polinomios se halla multiplicando cada uno de los monomios de un polinomio por los monomios del otro, y sumando, después, los polinomios obtenidos en esas multiplicaciones.
- Para multiplicar dos polinomios es necesario aplicar la **propiedad distributiva**.

EJEMPLO

Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 3$.

Vamos a resolverlo multiplicando en línea:

$P(x) \cdot Q(x) = (7x^3 + 2x^2 + x - 7) \cdot (x^2 + 3) =$

Se multiplican todos los monomios de un polinomio por los monomios del otro polinomio.

$= \boxed{7x^3 \cdot x^2 + 7x^3 \cdot 3} \boxed{+ 2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot 3} \boxed{+ x \cdot x^2 + x \cdot 3} \boxed{- 7 \cdot x^2 - 7 \cdot 3}$

$= 7x^5 + 21x^3 + 2x^4 + 6x^2 + x^3 + 3x - 7x^2 - 21 =$

$= 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$

Se suman los términos semejantes.

$P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$

1 **Multiplica los siguientes polinomios.**

a) $P(x) = 5x^2 - 7x + 3$ y $Q(x) = 2x^2 + 1$

$P(x) \cdot Q(x) = (5x^2 - 7x + 3) \cdot (2x^2 + 1)$

Multiplicamos los monomios.

$= \boxed{} \boxed{- } \boxed{+ }$

$=$

Sumamos los términos semejantes.

$P(x) \cdot Q(x) =$

b) $P(x) = x^3 - 1$ y $Q(x) = 5x^2 - x + 2$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

EJEMPLO

Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 3$.

Resolvemos el ejercicio multiplicando en columna:

$$\begin{array}{rr}
 & 7x^3 + 2x^2 + x - 7 \\
\times & x^2 + 3 \\
\hline
 & 21x^3 + 6x^2 + 3x - 21 \\
7x^5 + 2x^4 + & x^3 - 7x^2 \\
\hline
P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + & 22x^3 - x^2 + 3x - 21
\end{array}$$

← *Producto de 3 por $7x^3 + 2x^2 + x - 7$*

← *Producto de x^2 por $7x^3 + 2x^2 + x - 7$*

← *Suma de monomios semejantes*

2 **Multiplica los polinomios: $P(x) = 5x^2 - 3x + 4$ y $Q(x) = 3x + 2$.**

$$\begin{array}{rr}
 & 5x^2 - 3x + 4 \\
\times & 3x + 2 \\
\hline
\end{array}$$

← *Producto de 2 por $5x^2 - 3x + 4$*

← *Producto de $3x$ por $5x^2 - 3x + 4$*

$P(x) \cdot Q(x) = \boxed{}$ ← *Suma de monomios semejantes*

3 **Calcula el producto del polinomio $R(x) = x^3 - 1$ y el monomio $S(x) = x + 3$, utilizando la propiedad distributiva.**

4 **Halla el producto de los siguientes polinomios.**

a) $R(x) = x^3 - 1$ y $S(x) = x$

b) $R(x) = x^4 - x + 1$ y $S(x) = x^2 + 1$

REALIZAR DIVISIONES CON POLINOMIOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

- Lo primero que hay que tener en cuenta para dividir los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es que el grado del polinomio $P(x)$ debe ser mayor o igual que el del polinomio $Q(x)$.
- En estas condiciones, dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, existen otros dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ que cumplen:

  $$\boldsymbol{P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)}$$

  ***P*(*x*)** es el polinomio **dividendo**.

  ***Q*(*x*)** es el polinomio **divisor**.

  ***C*(*x*)** es el polinomio **cociente**.

  ***R*(*x*)** es el polinomio **resto**.
- Si el resto de la división es nulo, es decir, si $R(x) = 0$:
  - La **división** es **exacta**.
  - El polinomio ***P*(*x*) es divisible por *Q*(*x*)**.
- En caso contrario, se dice que la división no es exacta.

EJEMPLO

Divide los siguientes polinomios: $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 5$.

$$\begin{array}{l|l} 5x^3+3x^2+5x-7 & x^2+5 \\ \cline{2-2} & \bigcirc \end{array}$$

Hay que elegir un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $5x^3$:

$\bigcirc \cdot x^2 = 5x^3$. En este caso, $\bigcirc = 5x$.

$$\begin{array}{rrrr|l} \cancel{5x^3} & +\,3x^2 & +\;\;5x & -\,7 & x^2+5 \\ \cline{5-5} -\cancel{5x^3} & & -\,25x & & 5x+3 \\ \cline{1-4} & 3x^2 & -\,20x & -\,7 & \end{array}$$

Multiplicamos 5x por cada uno de los términos del polinomio cociente ($x^2 + 5$), cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna. A continuación, sumamos.

$$\begin{array}{rrrr|l} \cancel{5x^3} & +\,3x^2 & +\;\;5x & -\;\;7 & x^2+5 \\ \cline{5-5} -\cancel{5x^3} & & -\,25x & & 5x+3 \\ \cline{1-4} & \cancel{3x^2} & -\,20x & -\;\;7 & \\ & -\cancel{3x^2} & & -\,15 & \\ \cline{1-4} & & -\,20x & -\,22 & \end{array}$$

Hay que buscar un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $3x^2$, en este caso 3.

Multiplicamos 3 por $x^2 + 5$, cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna. A continuación, sumamos.

Hay que buscar un monomio que multiplicado por x^2 nos dé 20x, pero no existe ninguno. Por tanto, la división finaliza.

Polinomio dividendo:	$P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$
Polinomio divisor:	$Q(x) = x^2 + 5$
Polinomio cociente:	$C(x) = 5x + 3$
Polinomio resto:	$R(x) = -20x - 22$

En este caso, la división no es exacta, ya que el resto obtenido es distinto de cero.

1 **Calcula las divisiones de polinomios y señala si son exactas o enteras.**

a) $P(x) = x - 1$, $Q(x) = x$

c) $P(x) = x^2 - 1$, $Q(x) = x + 1$

b) $P(x) = x^2 - 5x + 6$, $Q(x) = x - 2$

d) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $Q(x) = x$

2 **Haz las divisiones y comprueba que $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.**

a) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x$

c) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x^2 - 2$

b) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x + 1$

d) $P(x) = x^3 + 1$, $Q(x) = x^3$

NOMBRE: ________________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

CUADRADO DE UNA SUMA

- El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

- Esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + \underbrace{a \cdot b + a \cdot b}_{} + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

EJEMPLO

$\mathbf{(x + 3)^2} = (x + 3) \cdot (x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$

$\mathbf{(4x + y)^2} = (4x + y) \cdot (4x + y) = 16x^2 + 4xy + 4xy + y^2 = 16x^2 + 8xy + y^2$

1 **Desarrolla estas igualdades.**

a) $(x + 2y)^2 = (x + 2y) \cdot (x + 2y) =$

b) $(3x^3 + 3)^2 =$

c) $(2x + 3y)^2 =$

d) $(4a + b^2)^2 =$

CUADRADO DE UNA DIFERENCIA

- El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

- Esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - \underbrace{a \cdot b - a \cdot b}_{} + b \cdot b = a^2 - 2ab + b^2$$

EJEMPLO

$\mathbf{(2y - 3)^2} = (2y - 3) \cdot (2y - 3) = 4y^2 - 6y - 6y + 9 = 4y^2 - 12y + 9$

$\mathbf{(x^2 - 2)} = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 2) = x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 + 4$

2 **Desarrolla las siguientes igualdades.**

a) $(6x - 4y)^2 = (6x - 4y) \cdot (6x - 4y) =$

b) $(5x^4 - 2)^2 =$

c) $(2x - 3y)^2 =$

d) $(4x^3 - a^2)^2 =$

PRODUCTO DE UNA SUMA POR UNA DIFERENCIA

- El producto de una suma por una diferencia es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

$$\mathbf{(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$$

- Esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a + b)^2 \cdot (a - b) = a \cdot a - \cancel{a \cdot b} + \cancel{a \cdot b} + b \cdot b = a^2 - b^2$$

EJEMPLO

$\mathbf{(3x + 2) \cdot (3x - 2)} = 9x^2 - 6x + 6x - 4 = 9x^2 - 4$

$\mathbf{(5x - 3y) \cdot (5x + 3y)} = 25x^2 + 15xy - 15xy - 9y^2 = 25x^2 - 9y^2$

3 **Desarrolla las siguientes igualdades.**

a) $(7x + x^4) \cdot (7x - x^4) =$

b) $(y + x^2) \cdot (y - x^2) =$

c) $(x + x^3) \cdot (x - x^3) =$

d) $(a^4 - b) \cdot (a^4 + b) =$

4 **Desarrolla.**

a) $(x + 5)^2 =$

b) $(2y - 7)^2 =$

c) $(3xy + 2yz) \cdot (3xy - 2yz) =$

d) $(abc + 1)^2 =$

e) $(7 - 3x)^2 =$

f) $(9v + 2z) \cdot (9v - 2z) =$

g) $(3xy + x^3)^2 =$

5 **Desarrolla las igualdades.**

a) $(4x + 2)^2 - (5x + 1) \cdot (2x - 3) =$

b) $(x + 3)^2 - (x - 2)^2 =$