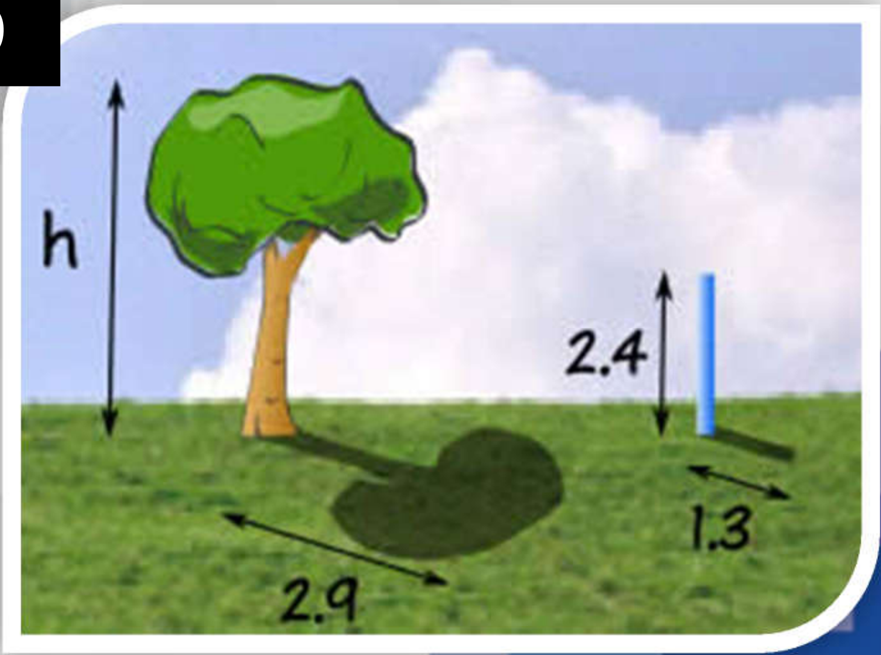
Unidad Didáctica 9

FIGURAS PLANAS

SEMEJANZA

2º ESO



En esta unidad vas a:

- ✓ *Aprender las partes de los distintos polígonos y de las figuras circulares.*
- ✓ *Calcular las áreas y perímetros de las figuras planas más importantes.*
- ✓ *Conocer y aplicar el teorema de Pitágoras*
- ✓ *Conocer y aplicar el Teorema de Thales*
- ✓ *Reconocer figuras semejantes*
- ✓ *Saber utilizar la escala de un mapa, plano o maqueta*
- ✓ *Resolver problemas de semejanza de triángulos*

Sumario

9.0.- Lectura comprensiva

Los pensadores griegos Heródoto y Aristóteles no quisieron arriesgarse a situar los orígenes de la geometría en una época anterior a la de la civilización egipcia, pero está claro que la geometría en la que ellos pensaban tenía sus raíces en una antigüedad mucho mayor. Heródoto sostenía que la geometría se había originado en Egipto, porque creía que dicha materia había surgido allí a partir de la necesidad práctica de volver a trazar los linderos de las tierras después de la inundación anual del valle del río del Nilo. Aristóteles, en cambio, sostenía que el cultivo y desarrollo de la geometría en Egipto se había visto impulsado por la existencia allí de una amplia clase sacerdotal ociosa. Podemos considerar que los puntos de vista de Heródoto y Aristóteles representan dos teorías opuestas acerca de los orígenes de la geometría, la primera defendiendo un origen basado en una necesidad práctica, y la segunda un origen basado en el ocio y el ritual sacerdotal. El hecho de que a los geómetras egipcios se les llamase a veces "los tensores de la cuerda" (o agrimensores) se puede utilizar para apoyar cualquiera de las dos teorías, porque las cuerdas se usaron tanto para bosquejar los planos de los templos como para reconstruir las fronteras borradas entre los terrenos.

No podemos rechazar con seguridad ni la teoría de Heródoto ni la de Aristóteles sobre los motivos que dieron origen a la geometría, pero lo que está bien claro es que ambos subestimaron la edad de dicha ciencia. El hombre neolítico pudo haber disfrutado de escaso tiempo de ocio y haber tenido pocas necesidades de utilizar la agrimensura, y sin embargo, sus dibujos y diseños relevan un interés en las relaciones espaciales que prepararon el camino a la geometría. La alfarería, la cestería y los tejidos muestran en sus dibujos ejemplos de congruencias y simetrías que son, en esencia, partes de la geometría elemental. No hay documentos disponibles de la época prehistórica y, por lo tanto, es imposible seguir la pista a la evolución matemática de un diseño concreto a un teorema conocido; sin embargo, las ideas son como esporas muy resistentes, y a veces el presunto origen de un concepto puede no ser más que la reaparición de una idea mucho más antigua en estado latente.

El interés del hombre primitivo por los diseños y las relaciones espaciales puede haber surgido de su sentido estético, para disfrutar de la belleza de la forma, motivo que también anima a los matemáticos de hoy en día. A quien escribe estas notas le gustaría pensar que por lo menos algunos de los geómetras primitivos realizaba su trabajo sólo por el puro placer de hacer matemáticas y no como una ayuda práctica a la medición.

Lee nuevamente el texto anterior y luego selecciona la respuesta correcta:

1.- Los siguientes enunciados son verdaderos, con excepción de:
a) Tanto Heródoto como Aristóteles subvaloraron la antigüedad de la geometría.
b) Los dibujos y diseños de los antiguos demuestran que éstos abrieron el camino a la geometría.
c) La geometría entre los antiguos estuvo ligada a la belleza y a la estética.
d) El hombre neolítico disfrutó de tiempo de ocio y poco necesitó de la agrimensura.

2.- En el texto se mencionan la alfarería y la cestería. Estas se refieren a:
a) El arte de trabajar la arcilla y las telas.
b) La elaboración de artículos de cuero y mimbre.

3.- El propósito del autor del texto anterior es:
a) Sustentar la tesis de Aristóteles sobre la aparición de la geometría.
b) Explicar cómo el clero egipcio impulsó el desarrollo de la geometría.
c) Defender la posición de Heródoto y Aristóteles sobre los orígenes de la geometría.
d) Exponer los diferentes puntos de vista sobre los orígenes de la geometría.

9.1.- Introducción

Para analizar los orígenes de la semejanza tenemos que remontarnos al periodo 1900-1600 a.C, periodo de esplendor del Imperio Babilónico. Esta civilización alcanzó grandes logros en álgebra pero también en geometría. Los avances más notables en geometría, que precedían el trabajo de los griegos, se produjeron en dos áreas en las que podían conjugar sus conocimientos algebraicos: trabajos sobre el teorema de Pitágoras y sobre los triángulos semejantes.

El estudio de la geometría se origina por las necesidades prácticas de sus pobladores, como la medida de la tierra destinada a la agricultura, construcción de sistemas de drenaje para contrarrestar las inundaciones (babilonios y mesopotámicos), así como, edificios y monumentos emblemáticos, por ejemplo, las pirámides de Keops (egipcios), entre otras. La medida de la tierra de cultivo y las construcciones mencionadas muestran que las culturas antiguas tenían conocimientos sólidos de figuras geométricas. A esta geometría se le conoce como geometría empírica (práctica), por surgir como necesidades cotidianas de las culturas mencionadas. Esta geometría fue retomada por los griegos dándole una orientación de geometría deductiva, basada en una cadena de razonamientos lógicos sustentados por definiciones de objetos geométricos, postulados, axiomas y teoremas.

El primero de los geómetras griegos que desarrolló la geometría con una orientación deductiva fue ***Thales de Mileto*** y debido a sus aportaciones filosóficas, científicas y matemáticas, lo consideraron como uno de los siete sabios de la antigüedad. El segundo geómetra que realizó aportaciones relevantes al desarrollo de la ciencia fue ***Pitágoras*** discípulo de Thales, dentro de sus desarrollos en la geometría se encuentra el teorema que lleva su nombre y su demostración formal.

9.2.- Polígonos

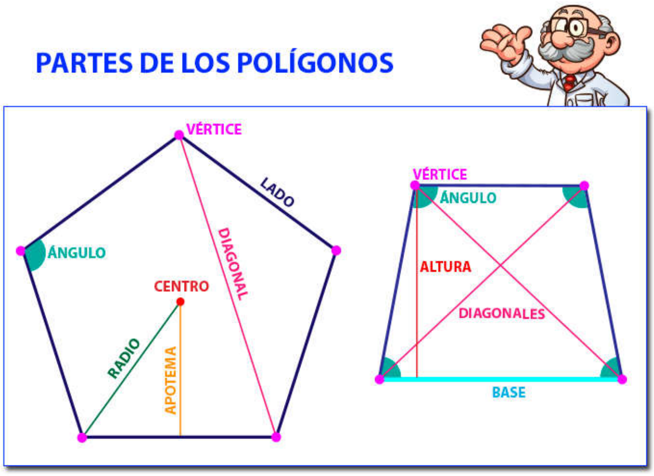
Un ***polígono*** es el área de un plano que está delimitado por líneas que tienen que ser rectas.

Si hacemos caso a la etimología de la palabra, polígono proviene de los términos griegos *"poli"* y *"gono"*. *"Poli"* podría traducirse como "muchos" y *"gono"* como "ángulo". Atendiendo a esto podríamos decir que un polígono es literalmente aquello que tiene muchos ángulos.

Para considerar polígono a una figura, ésta debe cumplir que sus líneas siempre deben ser rectas y que no puede estar abierto. En la imagen de la izquierda puedes ver varios ejemplos de polígonos y otros que no lo son.

Las partes de un polígono son:

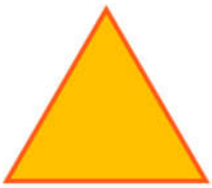
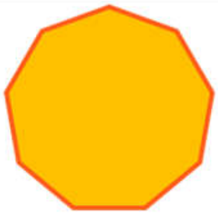
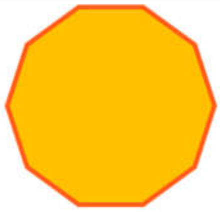
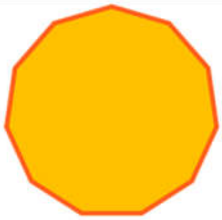
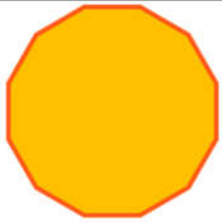
- **Lados:** son los segmentos que forman la línea poligonal.
- **Vértices:** son los puntos donde se unen los lados.
- **Ángulos:** son las regiones del plano que delimitan dos lados.
- **Diagonal:** es la recta que une dos vértices no consecutivos.
- **Centro:** es el punto desde el que todos los ángulos y lados están a la misma distancia.
- **Radio:** es el segmento que une el centro del polígono con cualquiera de sus vértices
- **Apotema:** es el segmento que une el centro del polígono con el centro de cualquiera de sus lados.
- **Base:** Es el lado inferior de un polígono. Normalmente es el lado donde se "apoya" la figura.



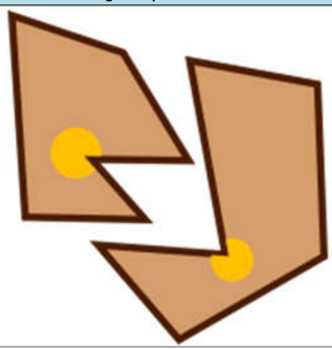
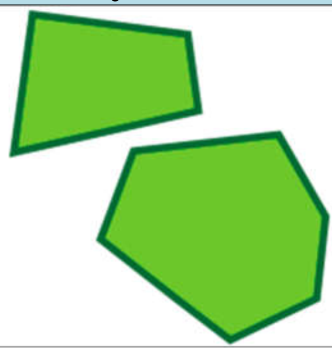
9.2.1.- Clasificación de polígonos:

Podemos clasificar los polígonos de tres formas diferentes, según sus lados, según sus ángulos y según sus lados y sus ángulos:

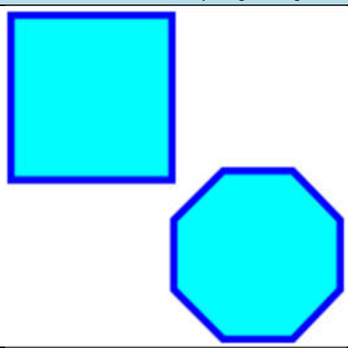
- Clasificación de polígonos según sus lados:

Triángulo: 3 lados	Cuadrilátero: 4 lados	Pentágono: 5 lados	Hexágono: 6 lados	Heptágono: 7 lados
				
Octógono: 8 lados	Eneágono: 9 lados	Decágono: 10 lados	Endecágono: 11 lados	Dodecágono:12 lados
				

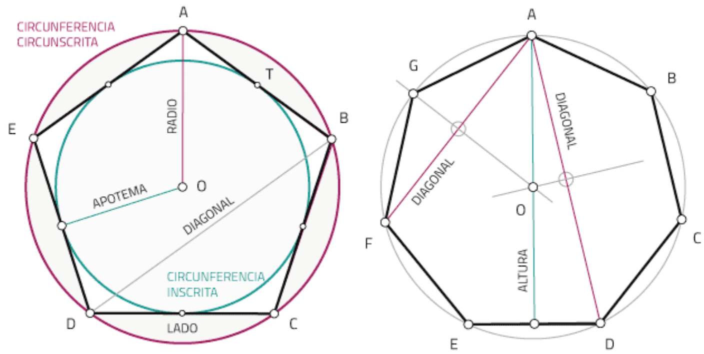
- Clasificación de polígonos según sus ángulos:

Polígonos cóncavos	**Polígonos convexos**
Si tiene un ángulo que mide más de 180º.	*Si todos los ángulos miden menos de 180º*
	

- Clasificación de polígonos según sus lados y sus ángulos:

Polígonos regulares	**Polígonos irregulares**
Si tiene todos sus lados y ángulos iguales.	*Si tiene algunos lados y ángulos diferentes.*
	

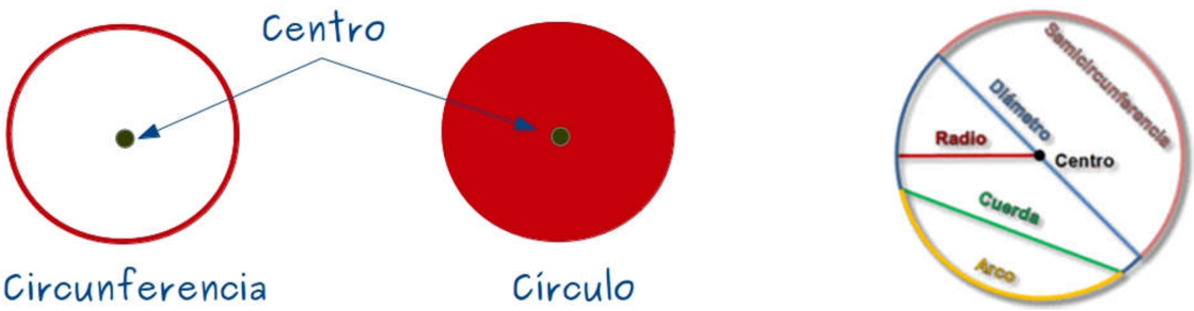
Todos los polígonos regulares están inscritos en una circunferencia de radio r. La distancia desde el centro a un lado es la ***apotema*** del polígono.



9.3.- Figuras circulares

La más importante es el círculo. Llamamos ***círculo*** a la región plana encerrada por una circunferencia.

De forma más precisa, si O es el centro de la circunferencia, el círculo es la región del plano formada por todos los puntos cuya distancia al centro O es menor o igual que el radio de la circunferencia.

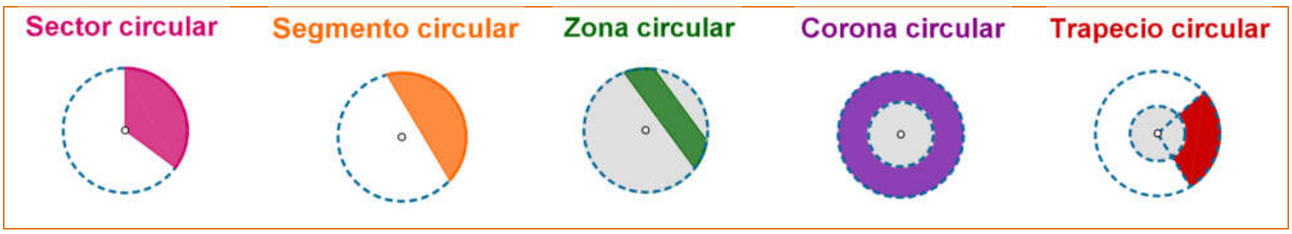


Así, el círculo comprende a todos los puntos de la circunferencia y también a todos los puntos interiores a ella. La circunferencia es por lo tanto el contorno, la "frontera" del círculo.

Se llaman centro, radio y diámetro del círculo al centro, radio y diámetro de su circunferencia.

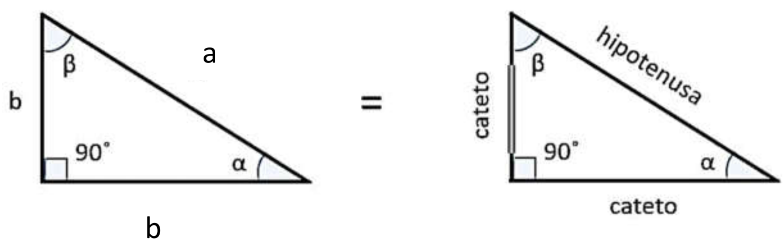
Hay diferentes formas de hacer partes de un círculo y algunas de ellas reciben nombres especiales.

- ***Sector circular:*** Región del círculo limitada por dos radios y el arco que determinan.
- ***Segmento circular:*** Región del círculo limitada por una cuerda y el arco correspondiente.
- ***Zona circular:*** Región del círculo determinada por dos cuerdas paralelas.
- ***Corona circular:*** Región del círculo limitada por dos circunferencias concéntricas.
- ***Trapecio circular:*** Parte de una corona circular limitada por dos radios.



9.4.- Triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras

Un triángulo rectángulo es aquel en el que los dos lados menores forman un ángulo recto y se llaman catetos, y el lado mayor se llama hipotenusa. En general, llamaremos *a* a la hipotenusa y *b* y *c* a los catetos.

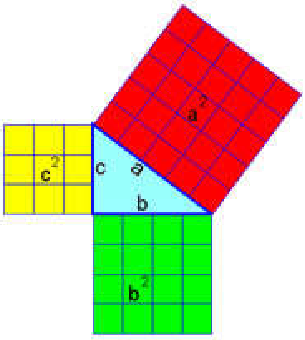


9.4.1.- Teorema de Pitágoras:

En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, y matemáticamente se expresa:

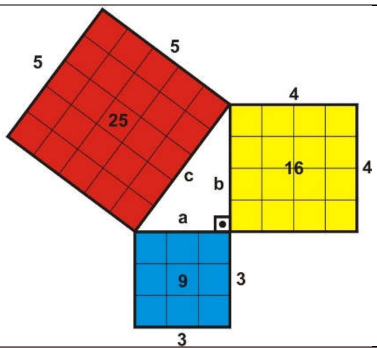
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Según Pitágoras, el área de un cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.



$a^2 = b^2 + c^2$

El área del cuadrado rojo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados amarillo y verde



$a^2 = b^2 + c^2$

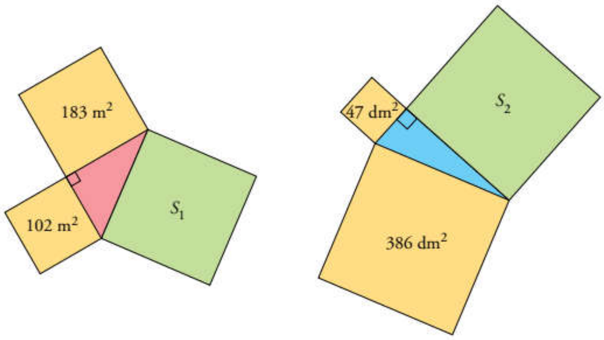
$5^2 = 4^2 + 3^2$

$25 = 16 + 9$

Vemos que el área del cuadrado rojo $5^2 = 25$ es igual a la suma del azúl $3^2 = 9$ + la del amarillo $4^2 = 16$

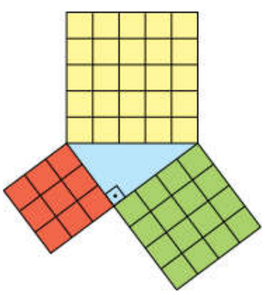
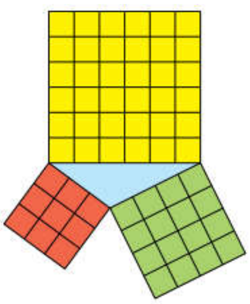
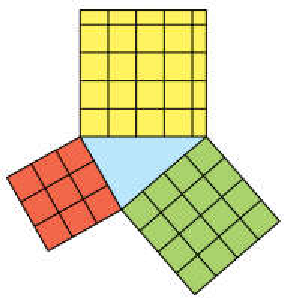
Ejemplo

1.- Con la ayuda del teorema de Pitágoras, calcula las áreas de los cuadrados desconocidos en las siguientes figuras



- ✓ En la figura de la izquierda, el área S_1 es: $S_1 = 183 + 102 = 285\ m^2$
- ✓ Mientras que en la derecha el área S_2 es: $S_2 = 386 - 47 = 339\ dm^2$

Si conocemos los lados de un triángulo, y con la ayuda del teorema de Pitágoras, podemos averiguar si es o no rectángulo, comparando el cuadrado del lado mayor con la suma de los cuadrados de los otros dos.

Rectángulo	**Obtusángulo**	**Acutángulo**
Si $a^2 = b^2 + c^2$	Si $a^2 > b^2 + c^2$	Si $a^2 < b^2 + c^2$
		

Piensa y practica			
1.- Clasifica los siguientes triángulos:			
a=13, b=12, c=5	a=245, b=70, c=240	a=39, b=36, c=15	a=83, b=80, c=18

9.5.- Aplicaciones del Teorema de Pitágoras

Si sabemos que un triángulo es rectángulo, y conocemos la longitud de dos de sus lados, el teorema de Pitágoras nos permite calcular la longitud del tercero

9.5.1.- Cálculo de la hipotenusa conociendo los dos catetos

Para calcular el valor de la hipotenusa conocidos los catetos hemos de despejar a en el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Ejemplo

2.- En un triángulo rectángulo, sus catetos miden 88 m y 105 m. Calcula la longitud de la hipotenusa.

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{b^2 + c^2} \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{88^2 + 105^2} = \sqrt{18769} = 137$$

Solución: La hipotenusa mide 137 m.

9.5.2.- Cálculo de uno de los catetos conocida la hipotenusa y el otro cateto

Para calcular el valor de un cateto conocida la hipotenusa y el otro hemos de despejar a en el teorema de Pitágoras:

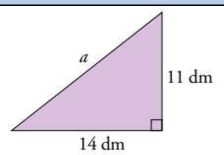
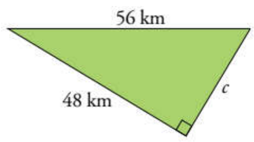
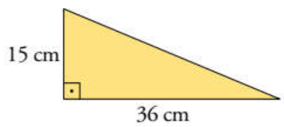
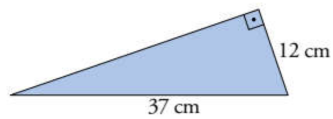
$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} b^2 = a^2 - c^2 & \rightarrow \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} \\ c^2 = a^2 - b^2 & \rightarrow \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$

Ejemplo

3.- En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 130 cm, y uno de los catetos, 32 cm. Halla la longitud del otro cateto.

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2 \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{130^2 - 32^2} = \sqrt{15876} = 126$$

Solución: El otro cateto mide 126 m.

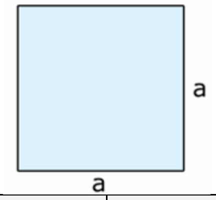
Piensa y practica			
2.- Halla la longitud del lado desconocido en estos triángulos rectángulos aproximando cuando haga falta hasta dos cifras decimales:			
			

Hay multitud de polígonos en los que algunos de sus elementos son lados de un triángulo rectángulo. Eso permite relacionarlos mediante el teorema de Pitágoras y calcular la longitud de uno de ellos conociendo los otros dos.

Es probable que nos encontremos con ejercicios en los que se nos pida calcular el área y el perímetro de una figura en concreto, y para ello vamos a repasar sus fórmulas:

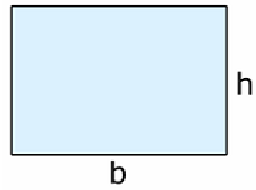
9.5.3.- Áreas y Perímetros de Figuras Planas

Cuadrado



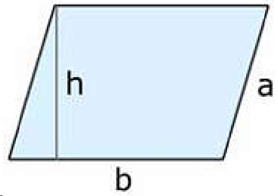
$P = 4 \cdot a$ | $A = a^2$

Rectángulo



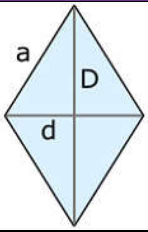
$P = 2(b+h)$ | $A = b \cdot h$

Paralelogramo



$P = 2(a+b)$ | $A = b \cdot h$

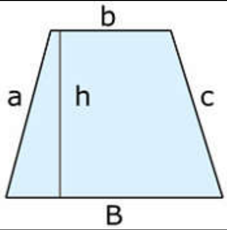
Rombo



$$P = 4 \cdot a = 4 \cdot \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2}$$

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

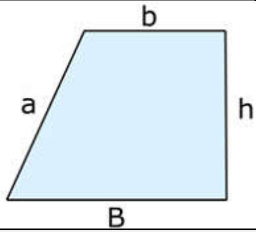
Trapecio



$$P = a + B + c + b$$

$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h$$

Trapecio Recto

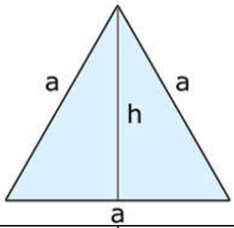


$$P = a + B + h + b$$

$$P = B + b + h + \sqrt{(B-b)^2 + h^2}$$

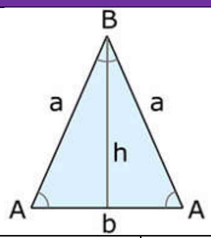
$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h$$

Triángulo Equilátero



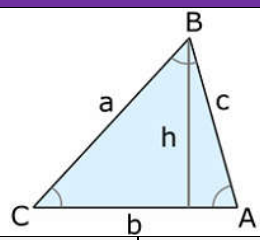
$P = 3 \cdot a$ | $A = \frac{a \cdot h}{2}$

Triángulo Isósceles



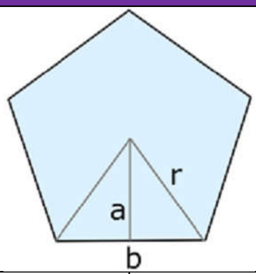
$P = 2 \cdot a + b$ | $A = \frac{b \cdot h}{2}$

Triángulo Escaleno



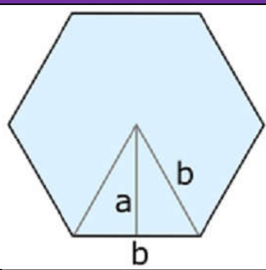
$P = a + b + c$ | $A = \frac{b \cdot h}{2}$

Pentágono Regular



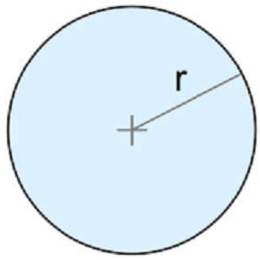
$P = 5 \cdot b$ | $A = \frac{P \cdot a}{2}$

Hexágono Regular



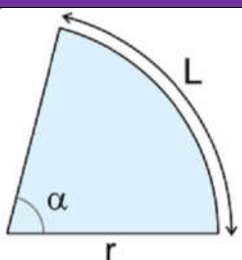
$P = 6 \cdot b$ | $A = \frac{P \cdot a}{2}$

Círculo



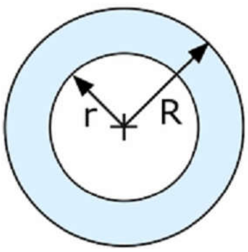
$P = 2 \cdot \pi \cdot r$ | $A = \pi \cdot r^2$

Sector Circular



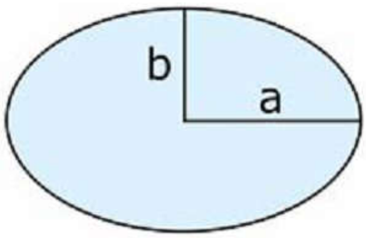
$L = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180}$ | $A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360}$

Corona Circular



$P = 2\pi(R+r)$ | $A = \pi(R^2 - r^2)$

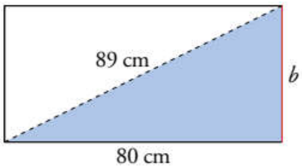
Elipse



$P = \pi(a+b)$ | $A = \pi \cdot a \cdot b$

9.5.4.- Ejemplos de aplicación del Teorema de Pitágoras

1.- La diagonal de un rectángulo mide 89 cm, y la base 80 cm. Calcula su área.



Vamos a resolver este problema con la ayuda de un dibujo.

Sabemos que el área de un rectángulo es base por altura: A = b · a

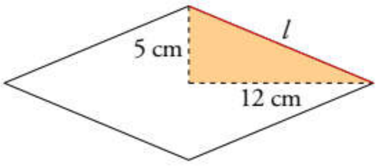
Empezamos por calcular el otro lado con la ayuda de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = a^2 - c^2 \quad \rightarrow \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad \rightarrow \quad b = \sqrt{89^2 - 80^2} = \sqrt{1521} = 39$$

Por tanto la altura b=39 cm, así que el área es: $A = b \cdot a = 80 \cdot 39 = 3.120\ cm^2$

2.- Las diagonales de un rombo miden 10 cm y 24 cm. Hallar su perímetro.

Antes de nada, hacemos un dibujo de la figura:



El perímetro de una figura es la suma de todos sus lados, así que empecemos por calcular el lado l con el Teorema de Pitágoras:

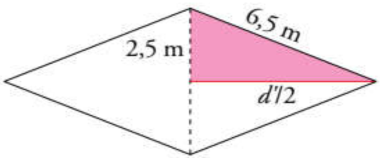
$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{b^2 + c^2} \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Como cada lado mide 13 cm, el perímetro será: $P = 4 \cdot l = 4 \cdot 13 = 52\ cm$

3.- El lado de un rombo mide 6,5 m y una de sus diagonales, 5 m. Hallar su área

Para resolverlo nos ayudaremos de un dibujo:

El área de un rombo viene dada por la mitad del producto de sus dos diagonales: $A = \dfrac{D \cdot d}{2}$



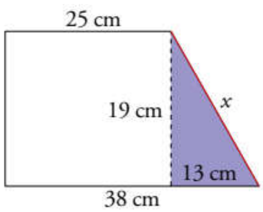
Como conocemos una diagonal, el teorema de Pitágoras nos permite calcular la otra:

$$\frac{d}{2} = \sqrt{6,5^2 - 2,5^2} = \sqrt{36} = 6 \quad \rightarrow \quad d = 2 \cdot 6 = 12cm$$

La diagonal mayor mide 12 cm y por tanto el área: $A = \dfrac{D \cdot d}{2} = \dfrac{5 \cdot 12}{2} = \dfrac{60}{2} = 30\ cm^2$

4.- Las bases de un trapecio rectángulo miden 25 cm y 38 cm, y la altura, 19 cm. Hallar su perímetro.

Dibujamos el trapecio y empezamos calculando la longitud del lado oblicuo otra vez mediante Pitágoras:



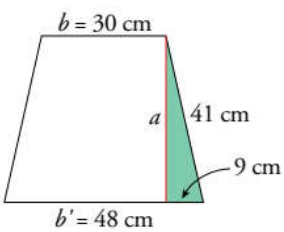
$$x = \sqrt{19^2 + 13^2} = \sqrt{530} = 23,021\ cm$$

Por comodidad en los cálculos, el lado oblicuo se puede aproximar a 23 cm.

Y así, el perímetro sería: $P = 38 + 19 + 25 + 23 = 105\ cm$

5.- Hallar el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 30 cm y 48 cm, y el lado oblicuo, 41 cm.

Con la ayuda de un dibujo:



Recordemos que el área de un trapecio se calcula como el producto entre la semisuma de sus bases y su altura: $A = \dfrac{b + b'}{2} \cdot a$

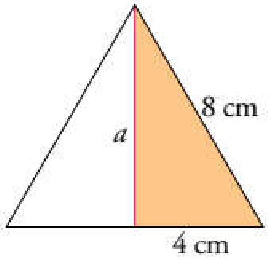
Empezamos calculando su altura con la ayuda del triángulo verde en el que su base mide 9 cm, puesto que la diferencia entre las bases es 18 y como tenemos dos triángulos iguales a izquierda y derecha, la base de cada uno mide 9 cm.

$$a=\sqrt{41^2-9^2}=\sqrt{1600}=40\ cm$$

Y una vez conocida su altura ya podemos calcular su área: $A=\frac{b+b'}{2}\cdot a=\frac{30+48}{2}\cdot 40=1560\ cm^2$

6.- Calcular el área de un triángulo equilátero de lado 8 cm.

Lo primero es dibujar el triángulo:



Sabemos que el área de un triángulo viene dada por: $A=\frac{base\cdot altura}{2}$

Así que empezaremos por calcular su altura, y para ello Pitágoras:

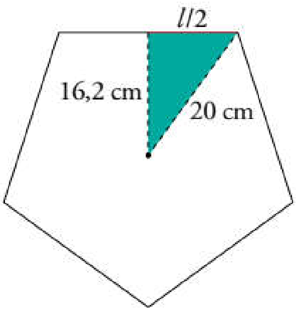
$$a=\sqrt{8^2-4^2}=\sqrt{48}=6,93$$

Y conocida la altura ya podemos calcular su área:

$$A=\frac{base\cdot altura}{2}=\frac{8\cdot 6,93}{2}=27,71\ cm^2$$

7.- Calcular el área y el perímetro de un pentágono regular cuya apotema mide 16,2 cm, y el radio, 20 cm.

Una vez dibujado el pentágono, sabemos que su perímetro es igual a 5 veces su lado:



$$P=5\cdot l$$

y su área viene dada por: $A=\frac{Perímetro\cdot Apotema}{2}$

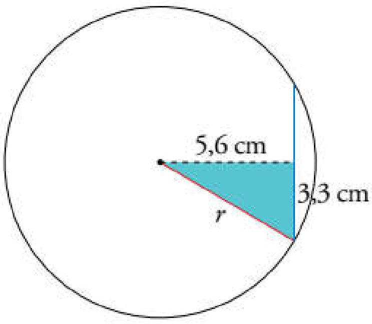
Primero calculamos el perímetro, y para ello usamos el Teorema de Pitágoras:

$$\frac{l}{2}=\sqrt{20^2-16,2^2}=\sqrt{137,56}=11,73\ cm$$

Por tanto el lado del hexágono es: $l=2\cdot 11,73=23,46\ cm$

El perímetro es $P=5\cdot l=117,30\ cm$ y su área $A=\frac{Perímetro\cdot Apotema}{2}=\frac{117,30\cdot 16,2}{2}=950\ cm^2$

8.- Hallar el perímetro de una circunferencia en la que se ha trazado una cuerda de 6,6 cm a una distancia de 5,6 cm del centro. Calcular el área del círculo correspondiente.



Después de realizar el dibujo, comenzaremos calculando el valor del radio. En el triángulo rectángulo coloreado, el lado pequeño mide la mitad de la cuerda; 6,6 : 2 = 3,3 cm.

Una vez hecho esto, ya podemos calcular el radio mediante Pitágoras:

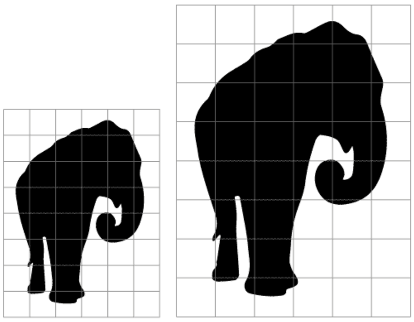
$$r=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{5,6^2+3,3^2}=\sqrt{\frac{169}{4}}=\frac{13}{2}=6,5\ cm$$

Conocido el radio, ya podemos calcular su área y su perímetro.

$P=2\cdot\pi\cdot R=2\cdot\pi\cdot 6,5=13\pi\ cm=40,84\ cm$ $\qquad$ $A=\pi\cdot R^2=\pi\cdot(6,5)^2=\frac{169}{4}\cdot\pi\ cm^2=132,73\ cm^2$

Piensa y practica
3.- Calcula el lado de un rombo cuyas diagonales miden 32 cm y 24 cm.
4.- Halla la diagonal de un cuadrado cuyo perímetro mide 28 dam.

9.6.- Figuras Semejantes



Como podemos ver, los dos elefantes de la izquierda son iguales, salvo en el tamaño. Los dos tienen la misma forma, por tanto decimos que ***son semejantes.***

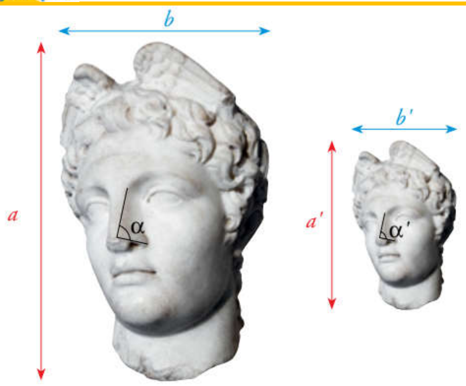
Dos ***figuras distintas son semejantes*** cuando solo difieren en su tamaño. En tal caso, los segmentos correspondientes son proporcionales. Es decir, cada longitud en una de ellas se obtiene multiplicando la longitud correspondiente en la otra por un número fijo, llamado ***razón de semejanza, k.***

En dos figuras semejantes se cumple que:

- Un ángulo medido en la primera **es igual** al ángulo correspondiente en la segunda.
- Una proporción en la primera ***es igual a*** la proporción correspondiente en la segunda.

Dos figuras son semejantes si sus longitudes son proporcionales y sus ángulos son iguales.

Ejemplo



En estas dos cabezas:

- Los ángulos trazados en la nariz, α y α' son iguales.
- La razón, a/b, entre el largo y el ancho de la primera figura es la misma que la razón a'/b' en la segunda:

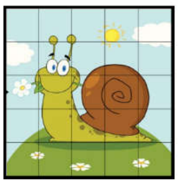
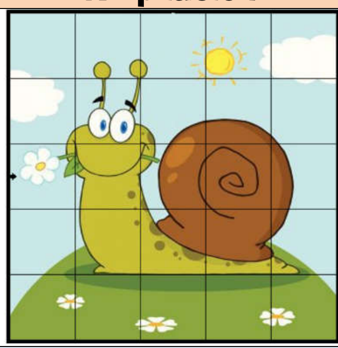
$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=k$$

4.- Si la razón de semejanza entre las dos cabezas es 0,4 y la mayor mide b=3 cm de ancho y a=5 cm de alto, ¿Cuáles son las dimensiones de la cabeza pequeña?

$$\frac{a'}{5}=0,4 \quad \rightarrow \quad a'=5\cdot 0,4=2\ cm \qquad\qquad \frac{b'}{3}=0,4 \quad \rightarrow \quad b'=3\cdot 0,4=1,2\ cm$$

Por tanto la cabeza pequeña mide 2 cm de alto por 1,2 cm de ancho.

Gracias a la constante de proporcionalidad podemos comprender como funciona una fotocopiadora a la hora de ampliar o reducir una imagen, simplemente multiplica por la constante de proporcionalidad.

Reducción	Original	Ampliación
		
Dimensiones 1x1 cm	*Dimensiones 2x2 cm*	*Dimensiones 4x4 cm*
Reducción : $k=\frac{1}{2}=0,5$		Ampliación : $k=\frac{4}{2}=2$

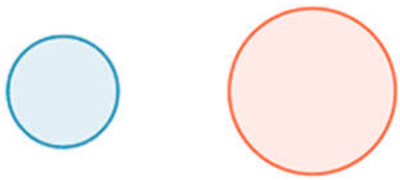
Piensa y practica

5.- Dos cuadrados semejantes tienen una razón de semejanza de 0,8. El área del menor es de 16 cm². ¿Cuál es el lado del cuadrado mayor?

9.6.1.- Relación entre las áreas y los volumen de dos figuras semejantes

- ***Si la razón de semejanza de dos figuras es k, entonces la razón de sus áreas es k².***

Ejemplo



Si el radio del círculo rojo (grande) es 1,5 veces el del azul (pequeño), el área del grande es $1{,}5^2$ = 2,25 veces el área del pequeño:

$$A = \pi \cdot R^2 \quad \rightarrow \quad A = \pi \cdot (1{,}5 \cdot R)^2 = 2{,}25 \cdot \pi \cdot R^2$$

$$A = 2{,}25 \cdot A$$

- ***Si la razón de semejanza de dos cuerpos es k, entonces la razón de sus volúmenes es k³.***

Ejemplo

El radio del balón de baloncesto talla 7 (oficial masculino) es 1,05 veces el radio del balón de talla 6 (oficial femenino). Por tanto su volumen será $(1{,}05)^3 = 1{,}158$ veces mayor.

$$V_6 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \qquad V_7 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1{,}05 \cdot R)^3 = 1{,}158 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3\right)$$

$$V_7 = 1{,}158 \cdot V_6$$

9.7.- Planos, Mapas y Maquetas

Los dibujos, fotografías, planos, mapas o maquetas representan objetos, personas, edificios, superficies, distancias...

Para que la representación sea perfecta, deben guardar en todos sus elementos una misma razón de proporcionalidad que denominamos ***escala***.

Cuando alguien quiere comprar una casa, la estudia cuidadosamente con la ayuda de un plano.

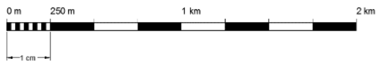
El plano de una casa es (debe ser) una imagen fiel de la realidad. Tiene la misma distribución y la misma forma que la casa real, pero sus dimensiones están reducidas según una escala. Es decir, la planta de la casa y el plano son figuras semejantes.

Por lo mismo, un mapa es una figura semejante a la porción del territorio que representa.

Cuando consultamos un plano o un mapa, cuando contemplamos una fotografía, lo hacemos sabiendo que son figuras semejantes a la realidad que representan.

La ***escala*** es una razón de proporcionalidad entre la medida representada y la medida real, expresadas en una misma unidad de medida.

Las escalas se pueden expresar de 3 formas:

Escala Numérica	Escala unidad por unidad	Escala Gráfica
$1:500$	$1\ cm : 5\ km$	
Expresa la relación entre el valor de la representación y el valor real.	*Expresa la igualdad de una longitud en la representación y en la realidad.*	*Muestra la relación entre la longitud de la representación y la de la realidad.*

Ejemplo

5.- En un mapa de Andalucía, la distancia entre Sevilla y Granada es de 6 cm, si la escala es 1:4.000.000, ¿a qué distancia real están ambas ciudades?

La escala 1:4.000.000 quiere decir que lo que mide 1 u.l. en el mapa mide en realidad 4.000.000 de u.l, por tanto para calcular la distancia entre ambas ciudades multiplicaremos y cambiaremos de unidad:

$$6\cdot 4.000.000 = 24.000.000\ cm = 240\ km$$

La distancia entre Granada y Sevilla es de 240 Km.

Piensa y practica

6.- Si la distancia entre Huelva y Almería es de 510 km, ¿Cuál será la distancia en el plano del ejemplo anterior donde la escala era 1:4.000.000?

9.7.1.- Obtención de la Escala

Cuando nos den un plano, mapa o maqueta sin indicarnos su escala, podremos calcularla siempre y cuando conozcamos la distancia real entre dos de sus puntos.

Para ello dividiremos la distancia en el plano, entre la distancia real, pero eso sí, sin olvidarnos de ponerlas en las mismas unidades (no podemos dividir centímetros entre kilómetros).

$$Escala = \frac{Medida\ en\ plano\ (cm)}{Medida\ real\ (cm)}$$

Ejemplo

6.- Un avión viaja, en línea recta, entre la isla del Hierro (Canarias) y la isla de Ibiza (Baleares). Si en un plano la distancia entre ambas islas es de 20 cm, ¿Cuál sería la escala de dicho plano si la distancia real es de 2.200 km?

Calcularemos la escala dividiendo la distancia en el plano, entre la distancia real:

$$\frac{Medida\ en\ plano\ (cm)}{Medida\ real\ (cm)} = \frac{20\ cm}{2200\cancel{km}\cdot\frac{1000\cancel{m}}{1\cancel{km}}\cdot\frac{10cm}{1\cancel{m}}} = \frac{20\ \cancel{cm}}{22.000.000\ \cancel{cm}} = \frac{1}{1.100.000}$$

Luego la escala es: 1:1.100.000

Piensa y practica

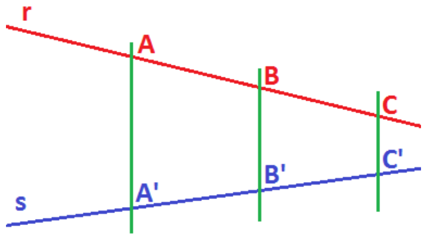
7.- Calcula la escala correspondiente en cada caso:

Dibujo	Medida Real	Escala
1,4 cm	700 m	
7 dam	0,7 hm	
4 mm	20 km	

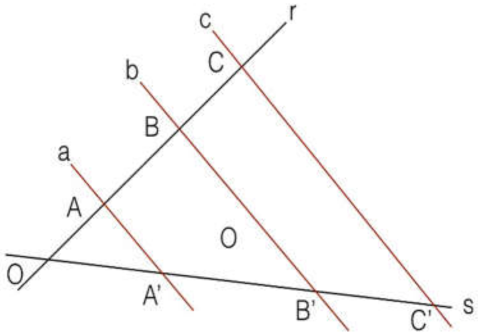
9.8.- Teorema de Tales

El teorema de Tales establece una relación entre los segmentos formados cuando dos rectas cualesquiera (*r* y *s*) son cortadas por varias rectas paralelas entre sí.

Dichas intersecciones entre las rectas dan como resultado los puntos A,B,C en la recta *r* y A',B',C' en la recta *s*.



9.8.1.- Teorema de Tales



Cuando dos rectas (r y s) son cortadas por una serie de rectas paralelas (a, b, c,....), los segmentos que determinan en una de las rectas son proporcionales a los que determinan en la otra.

Matemáticamente:

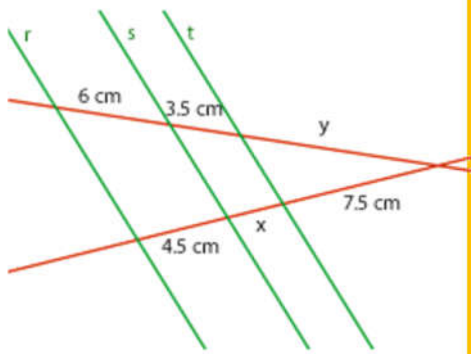
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Esto se aplica igualmente al punto de intersección O de las rectas r y s.

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Ejemplo

7.- Con la ayuda del Teorema de Tales, calcula el valor de x e y en la siguiente figura:



Según el teorema de Tales, los segmentos que determinan las rectas r, s y t son proporcionales, por tanto, para calcular x:

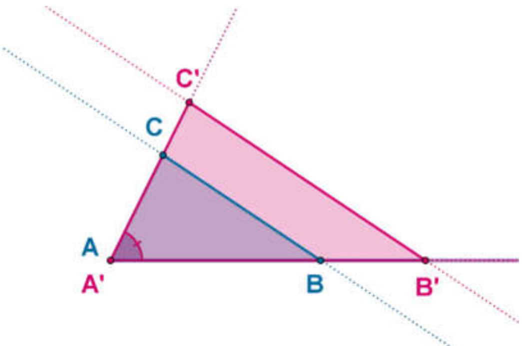
$$\frac{6}{4{,}5} = \frac{3{,}5}{x} \quad \rightarrow \quad 6x = 3{,}5 \cdot 4{,}5 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3{,}5 \cdot 4{,}5}{6} = 2{,}625$$

Para calcular y:

$$\frac{6}{4{,}5} = \frac{y}{7{,}5} \quad \rightarrow \quad 4{,}5y = 6 \cdot 7{,}5 \quad \rightarrow \quad y = \frac{6 \cdot 7{,}5}{4{,}5} = 10$$

Por tanto x=2,625 cm e y=10 cm.

Decimos que ***dos triángulos están en posición Tales*** cuando dos de sus lados están sobre las mismas rectas y los otros dos lados son paralelos.



Por tanto aquí también podemos aplicar Thales:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{CB}{C'B'} \quad y \quad \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$$

En el dibujo de la izquierda, vemos que el lado AC del triángulo azul y el lado A'C' del triángulo rosa están sobre la misma recta, al igual que los lados AB y A'B', mientras que los lados CB y C'B' están sobre rectas paralelas.

Los triángulos ABC y AB'C' tienen un ángulo común, el Â. Es decir, el triángulo pequeño (ABC) está ***"encajado"*** en el grande (A'B'C'). Además, los lados opuestos a Â son paralelos. Por eso, decimos que estos dos triángulos están en posición de Tales.

Ejemplo

8.- Calcula el valor de x e y en la siguiente figura:

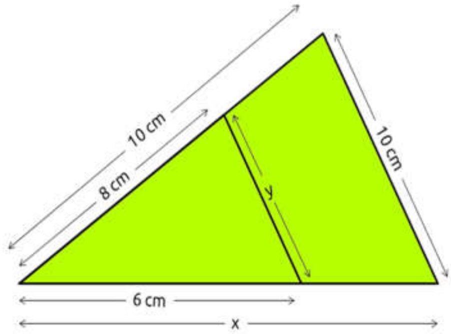
Tenemos dos triángulos en posición Tales, por tanto sus lados son proporcionales y para calcular x haremos lo siguiente:

$$\frac{8}{10}=\frac{6}{x} \quad \to \quad 8x=6\cdot 10 \quad \to \quad x=\frac{60}{8}=7{,}5\ cm$$

Para calcular y haremos:

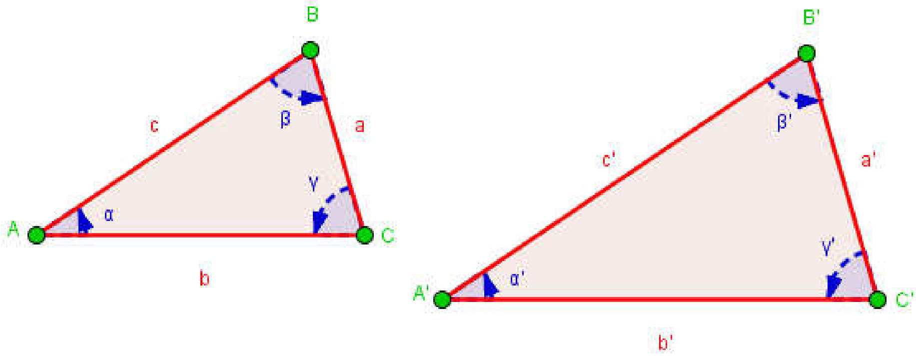
$$\frac{8}{y}=\frac{10}{10} \quad \to \quad 10y=8\cdot 10 \quad \to \quad y=\frac{80}{10}=8\ cm$$

Por tanto x=7,5 cm e y=8 cm.



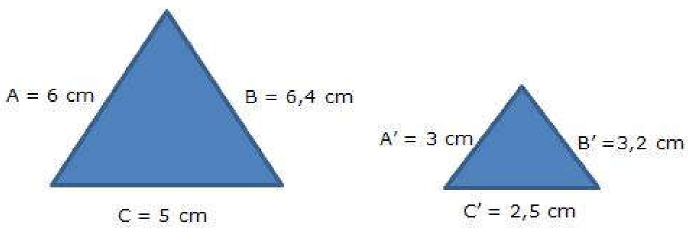
9.9.- Semejanza de Triángulos

Dos triángulos son ***semejantes*** si tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño, es decir, si sus ángulos son iguales y sus lados son proporcionales.

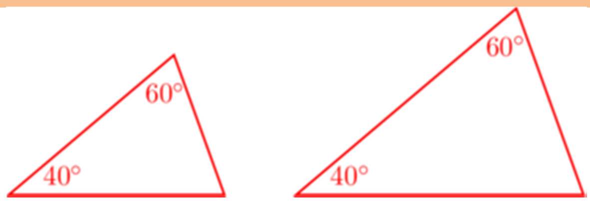


Existen varios criterios para averiguar si dos triángulos son semejantes.

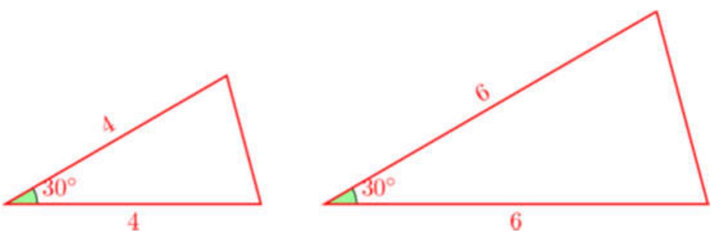
Criterio 1: Tienen los tres lados proporcionales. $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$



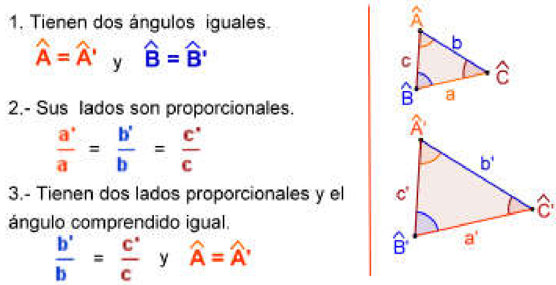
Criterio 2: Tienen dos ángulos iguales. $\alpha=\alpha'$ $\beta=\beta'$



Criterio 3: Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman coincide. $\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ y $\alpha=\alpha'$



Otra forma de enunciar el Teorema de Tales sería: *Toda paralela a un lado de un triángulo, que corta a los otros dos lados, determina un triángulo pequeño ABC semejante al grande A'B'C'.*



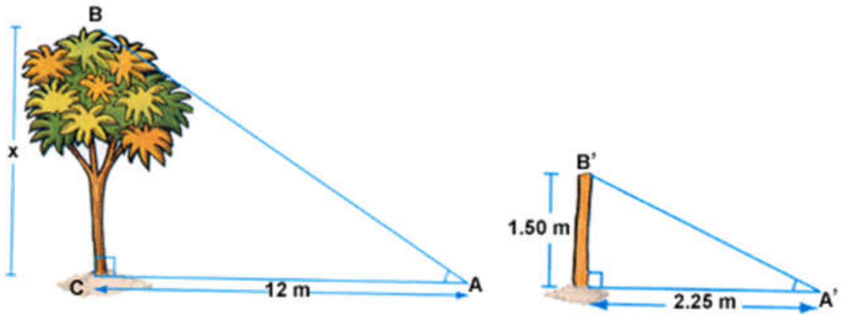
9.10.- Aplicaciones del Teorema de Thales

Las aplicaciones del teorema de Tales son diversas y muy importantes. Entre ellas están, la división de un segmento en partes proporcionales, la división de un segmento en partes iguales. Este curso nos centraremos sobre todo en el cálculo de alturas de pie inaccesible.

9.10.1.- Cálculo de la altura de un objeto vertical a partir de su sombra

Para calcular la altura de un árbol x, procedemos del siguiente modo:

- Clavamos en el suelo, verticalmente, una estaca $\overline{B'C'}$.
- Medimos la longitud de la estaca $\overline{B'C'}$
- Medimos las sombras del árbol $\overline{CA}$ y de la estaca $\overline{C'A'}$, proyectadas por el sol en el mismo instante



Como podemos observar en la figura, los triángulos rectángulos ABC y A'B'C' son semejantes porque tienen dos ángulos respectivamente iguales:

- $\hat{A} = \hat{A}'$ porque los dos son rectos
- $\hat{C} = \hat{C}'$ porque los rayos del sol inciden sobre el árbol y la estaca con el mismo ángulo puesto que llegan a la tierra paralelos los unos a los otros.

Puesto que los triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales, así que aplicando Thales:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$$

Como conocemos los segmentos $\overline{CA}$, $\overline{C'A'}$ y $\overline{B'C'}$ podemos calcular el segmento $\overline{BC}$ que corresponde a la altura del árbol.

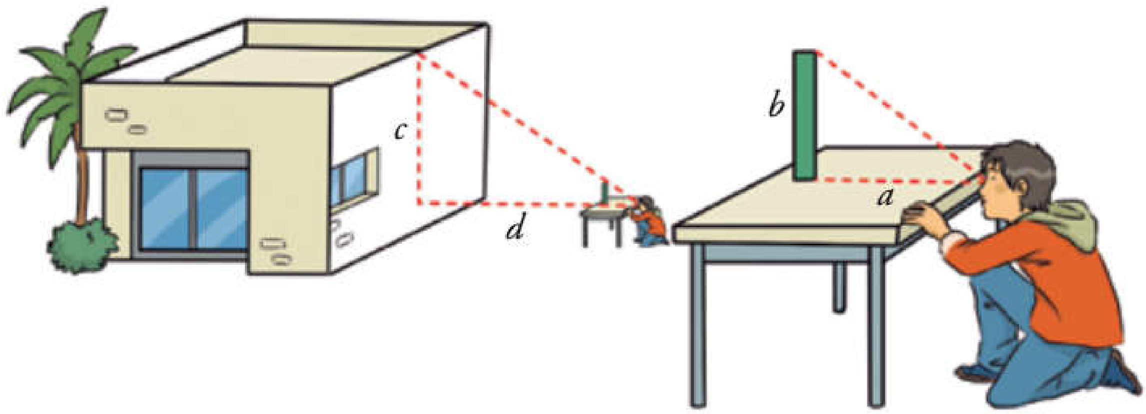
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{1,50} = \frac{12}{2,25} \quad \rightarrow \quad x = \frac{1,5 \cdot 12}{2,25} = 8\ m$$

Por tanto la altura del árbol es de 8 metros.

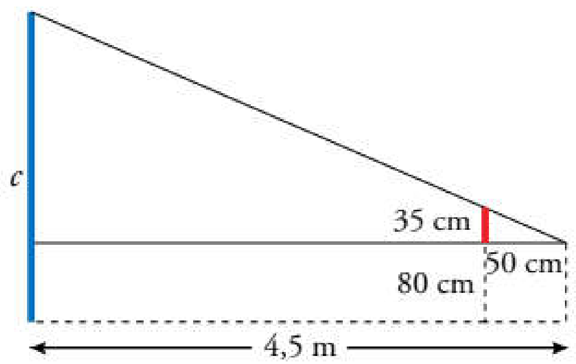
9.10.2.- Cálculo de la altura de un objeto vertical sin recurrir a su sombra

Fijémonos en el siguiente ejemplo en el que un chico quiere calcular la altura de su casa, lanzando una visual desde el borde de la mesa al punto más alto de la casa.

Estando en esa posición, mueve la regla, situándola de modo que su extremo quede alineado con la visual (la mesa debe estar en posición horizontal, y la regla, en vertical).



Los triángulos rectángulos, de catetos a, b y d, c, son semejantes, pues se encuentran en posición de Tales.



Si la longitud de la regla es b=35 cm; la distancia del borde de la mesa al pie de la regla es a=50 cm; la distancia del borde de la mesa a la casa es d = 4,5 m; y la altura de la mesa es de 80 cm, tenemos la siguiente figura en la que:

$$\frac{c}{d}=\frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad c=\frac{d\cdot b}{a}=\frac{450\cdot 35}{50}=315\ cm$$

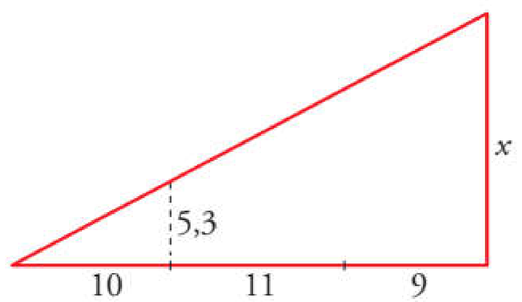
Y la altura de la casa será:

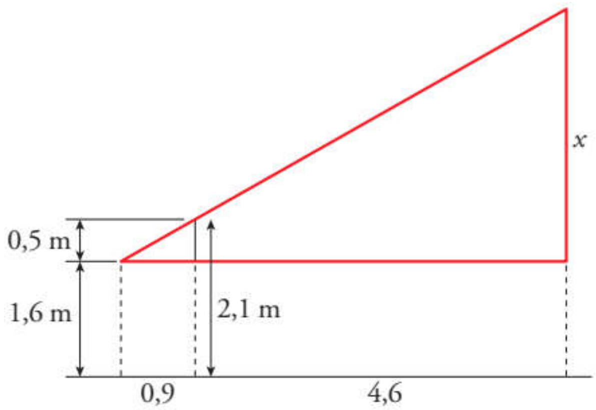
$$h=315+80=395\ cm$$

Por tanto la casa mide 3,95 metros de altura

Piensa y practica

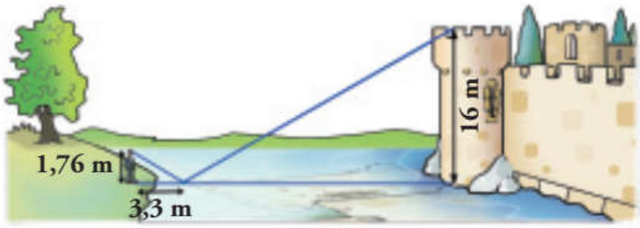
8.- Calcula el valor de x en cada caso:



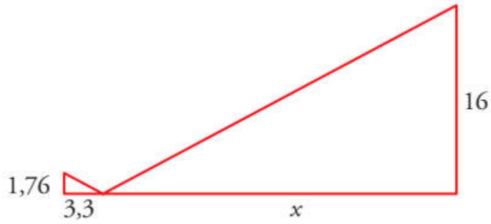


Ejemplo

9.- ¿Cuál es la distancia entre el chico y la base de la torre si el chico ve la torre reflejada en el agua?



Si observamos el dibujo tenemos la siguiente figura:



Por tanto, tenemos dos triángulos en posición Tales, cuyos lados son proporcionales.

Para calcular x haremos lo siguiente:

$$\frac{1,76}{3,3} = \frac{16}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{3,3 \cdot 16}{1,76} = 30\ m$$

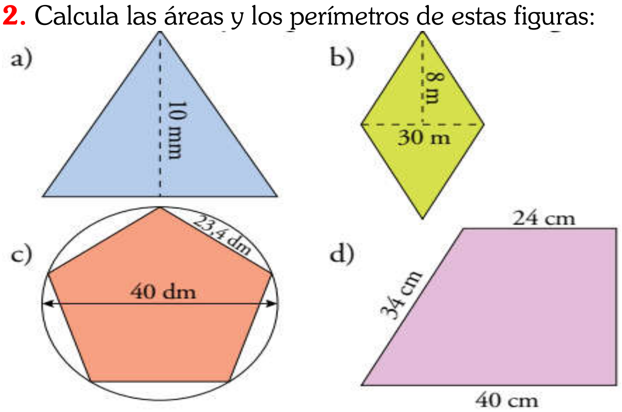
Así que la distancia entre el chico y la torre será de 30 + 3,3 = 33,3 metros.

9.11.- Autoevaluación

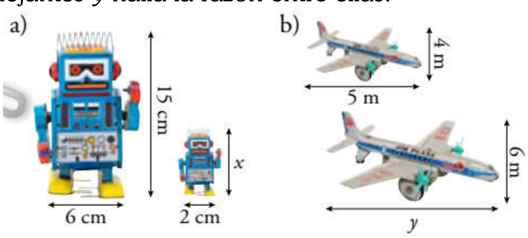
1. Clasifica los siguientes triángulos en rectángulo, acutángulo u obtusángulo.

a) 20 cm, 24 cm, 30 cm **b)** 5 m, 6 m, 10 m
c) 10 mm, 24 mm, 26 mm **d)** 7 dm, 7 dm, 7 dm

2. Calcula las áreas y los perímetros de estas figuras:

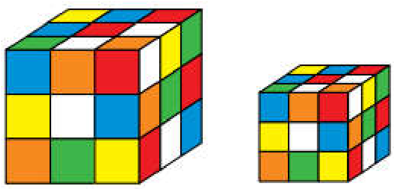


3. Calcula las longitudes que faltan en estas figuras semejantes y halla la razón entre ellas:



4. Un avión quiere viajar, en línea recta, entre Las Palmas de Gran Canaria y Palma de Mallorca. En un plano a escala 1:9 000 000, la distancia que medimos es de 24 cm. ¿Cuántos kilómetros recorrerá el avión?

5. La razón de semejanza entre estas dos figuras es 1,5. Para colorear la grande, se han necesitado 216 cm^2 de pegatina, y su volumen es 216 cm^3. ¿Qué superficie de pegatina se necesita para construir la pequeña? ¿Qué volumen tiene?



6. Para determinar que la altura de un eucalipto es de 11 m, Carlos ha medido la sombra de este (9,6 m) y la suya propia (1,44 m), ambas proyectadas por el Sol a la misma hora. ¿Cuánto mide Carlos?

7. Si DF=5 cm, ¿cuál es el área y el perímetro del pentágono FECGA?