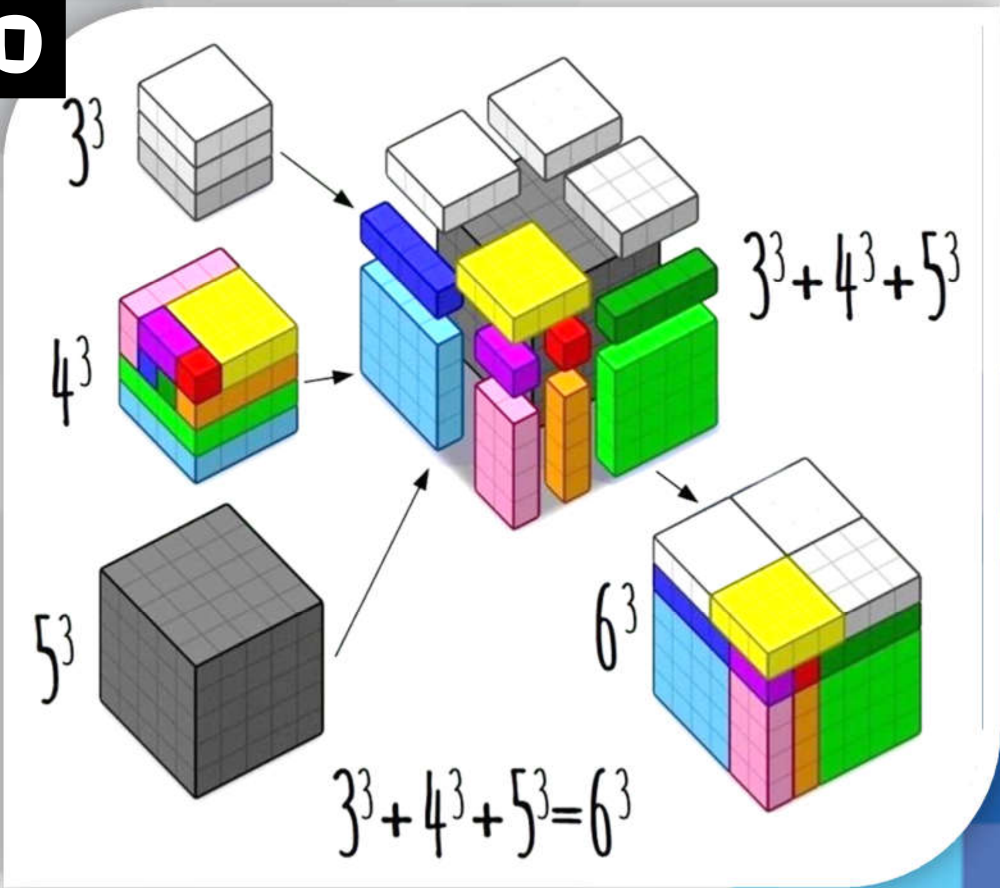
Unidad Didáctica 3

POTENCIAS Y RAÍCES

2º ESO



En esta unidad vamos a:

1.- Comprender el significado de potencia y conocer sus propiedades.

2.- Realizar operaciones con potencias.

3.- Comprender el significado de raíz cuadrada.

4.- Calcular raíces cuadradas.

5.- Realizar operaciones combinadas con potencias y raíces.

6.- Expresar números en notación científica.

Sumario

3.0.- Lectura comprensiva

Cuenta la leyenda que hace mucho tiempo reinaba en cierta parte de la India un rey llamado Sheram. En una de las batallas en las que participó su ejército perdió a su hijo, y eso le dejó profundamente consternado. Nada de lo que le ofrecían sus súbditos lograba alegrarle.

Un buen día un tal Sissa se presentó en su corte y pidió audiencia. El rey la aceptó y Sissa le presentó un juego que, aseguró, conseguiría divertirle y alegrarle de nuevo: ***el ajedrez.***

Después de explicarle las reglas y entregarle un tablero con sus piezas el rey comenzó a jugar y se sintió maravillado: jugó y jugó y su pena desapareció en gran parte. Sissa lo había conseguido.

Sheram, agradecido por tan preciado regalo, le dijo a Sissa que como recompensa pidiera lo que deseara. Éste rechazó esa recompensa, pero el rey insistió y Sissa pidió lo siguiente:

> *"Deseo que ponga un grano de trigo en el primer cuadro del tablero, dos, en el segundo, cuatro en el tercero, y así sucesivamente, doblando el número de granos en cada cuadro, y que me entregue la cantidad de granos de trigo resultante."*

El rey se sorprendió bastante con la petición creyendo que era una recompensa demasiado pequeña para tan importante regalo y aceptó.

- ¿No quieres nada más? preguntó.

- Con eso me bastará, le respondió el matemático.

El rey dio la orden a su gran visir de que, inmediatamente, quedaran satisfechos los deseos del sabio. Mandó a los calculistas más expertos de la corte que calcularan la cantidad exacta de granos de trigo que había pedido Sissa, es decir:

$$1+2+2^2+2^3+2^4+\dots\dots\dots\dots+2^{60}+2^{61}+2^{62}+2^{63}$$

Pero cuál no sería el asombro del rey, cuando éstos le comunicaron que no podía entregar esa cantidad de trigo después de hacer el cálculo, ya que ascendía a:

18.446.744.073.709.551.615 granos de trigo

Para darle al inventor la cantidad que pedía, no había trigo bastante en los reales graneros, ni en los de toda Persia, ni en todos los de Asia.

El rey Sheram tuvo que confesar a Sissa que no podía cumplir su promesa, ya que no era lo suficientemente rico. En ese momento Sissa renunció al presente. Tenía suficiente con haber conseguido que el rey volviera a estar feliz y además les había dado una lección matemática que no se esperaban.

Lee nuevamente el texto anterior y responde a las siguientes preguntas:

1.- ¿De qué trata el texto?

2.- ¿Cómo hubieras reaccionado tú?

3.- ¿Cuál es la moraleja de esta historia?

3.01.- Introducción

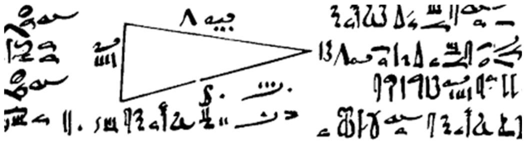
Euclides 325 A.C. - 265 A.C.

El concepto básico de los exponentes se remonta al menos hasta la antigua Grecia, cuando *Euclides* usó el término "***potencia***" para indicar el número de veces que un número debía multiplicarse por sí mismo. Un estudioso del siglo XIV, *Nicolás Oresme,* escribió números para indicar el uso de potencias en este sentido. Sin embargo, ninguno de estos primeros ejemplos del concepto usó la notación simbólica para expresar las matemáticas.

El uso de los números elevados para señalar los exponentes data del siglo XVII. *Hérigone* usó símbolos como *a3* para indicar a por a por a, aunque no elevó el exponente. El primero que utilizó los exponentes elevados fue *David Hume*, en 1636, escribió números romanos (como III o IX). En 1637, Rene Descartes usó exponentes positivos escritos a la manera moderna.

Los primeros usos de notación exponencial fueron invariablemente con exponentes positivos. Isaac Newton fue el primero que usó la notación moderna para un exponente negativo, en 1676. *Nicolás Oresme* utilizó exponentes fraccionarios en el siglo XIV, pero no con la notación moderna, que no aparecieron hasta Newton, en 1676.

Las primeras raíces cuadradas son expresiones matemáticas que surgieron al plantear diversos problemas geométricos como la longitud de la diagonal de un cuadrado, o la hipotenusa de un triángulo.



Trozo del papiro de Ahmes

El *Papiro de Ahmes* datado hacia 1650 a. C., que copia textos más antiguos, muestra cómo los egipcios ya extraían raíces cuadradas.

En la antigua India, el uso del cuadrado y la raíz cuadrada fue al menos tan antiguo como los *Sulba Sutras,* fechados entre el 500 y el 300 a. C. Un método para encontrar muy buenas aproximaciones a las raíces cuadradas de 2 y 3 es dado en el *Baudhaiana-sulba-sutra.*

Ariabhatta (476-550) en su tratado *Ariabhatíia*, dio un método para encontrar la raíz cuadrada de números con varios dígitos.

Los babilonios también usaron las raíces cuadradas para hacer cálculos repitiendo las mismas divisiones una y otra vez.

Las raíces cuadradas fueron uno de los primeros desarrollos de las matemáticas, siendo particularmente investigadas durante el periodo pitagórico, cuando el descubrimiento de que la raíz cuadrada de 2 era irracional (no se podía medir) o no expresable como cociente alguno, lo que supuso un hito en la matemática de la época.

Posteriormente se fue ampliando la definición de raíz cuadrada.

Inicialmente mostraron su utilidad para la resolución de problemas trigonométricos y geométricos, como la diagonal de un cuadrado o el *teorema de Pitágoras*. Posteriormente fueron ganando utilidad para operar con polinomios y resolver ecuaciones de segundo grado o superior, siendo una de las herramientas matemáticas más elementales hoy en día.

$\sqrt{}$ El símbolo de la raíz cuadrada fue introducido en 1525 por el matemático *Christoph Rudolff*. El signo no es más que una forma estilizada de la letra r minúscula para hacerla más elegante, alargándola con un trazo horizontal, hasta adoptar el aspecto actual, que representa la palabra latina *radix*, que significa raíz.

3.02.- Potencias de números enteros

Una ***potencia*** de un número entero es una forma abreviada de expresar una multiplicación de un número por sí mismo varias veces, es decir, es una multiplicación de factores iguales.

En una potencia, la ***base*** representa el factor que se repite, y el ***exponente*** las veces que se repite el producto.

$$a^c = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots\cdots\cdots a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{El producto de a por sí mismo se repite c veces}}$$

Ejemplo

$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{el 3 se repite 9 veces}} = 3^9$ $\quad \underbrace{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}_{\text{el (-2) se repite 5 veces}} = (-2)^5$ $\quad \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)}_{\text{el 2/3 se repite 6 veces}} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$

3.2.1.- Potencias de números negativos

En las sucesivas potencias de un entero negativo obtenemos, alternativamente, resultados positivos y negativos:

$$(-3)^1 = -3 \qquad (-3)^2 = +9 \qquad (-3)^3 = -27 \qquad (-3)^4 = +81$$

<u>En general:</u>

✓ Si la base es positiva, el resultado es siempre positivo $\begin{cases} (+)^+ = + & \rightarrow \quad (+2)^2 = +4 \\ (+)^- = + & \rightarrow \quad (+2)^{-2} = +\frac{1}{4} \end{cases}$

✓ Si la base es negativa, dependerá del exponente: $\begin{cases} (-)^{par} = + & \rightarrow \quad (-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = +16 \\ (-)^{impar} = - & \rightarrow \quad (-3)^3 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -27 \end{cases}$

Piensa y practica

1.- Completa la siguiente tabla:

Potencia	Base	Exponente	Valor	Se lee
$(-1)^7$				
$(-2)^5$				
$(+3)^3$				
$(-4)^3$				
8^2				

2.- ¿Qué signo tienen las potencias siguientes?

a) 6^3 **b)** $(-3)^{12}$ **c)** 3^{21} **d)** $(-3)^{21}$ **e)** $(-2)^4$ **f)** 5^{32} **g)** $(-3)^5$ **h)** 4^{51} **i)** 3^{35} **j)** $(-1)^{17}$ **k)** 3^{-3} **l)** $(-2)^{-3}$

3.03.- Potencias de fracciones

Para elevar una fracción a una potencia, elevamos el numerador y el denominador a dicha potencia:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\cdots\cdots\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}}_{\text{El producto de } \frac{a}{b} \text{ por sí misma se repite c veces}} = \frac{a^c}{b^c}$$

Ejemplo

$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{El producto se repite 4 veces}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1^4}{2^4} = \frac{1}{16}$ $\qquad \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)}_{\text{Se repite 3 veces}} = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$

Al igual que las potencias de números enteros, si la base es positiva, la potencia es positiva, y si la base es negativa, la potencia será positiva si el exponente es par y negativa si es impar.

3.04.- Propiedades de las potencias

A la hora de trabajar con potencias, es conveniente aprenderse algunas propiedades que nos van a facilitar su cálculo. Por eso, es conveniente que las memorices y que ensayes su aplicación en diferentes situaciones.

Por definición:

- Una potencia de exponente 0 es igual a la unidad. *Todo número elevado a cero es 1*. $a^0=1$ $\quad (-2)^0=1 \quad \left(\frac{5}{7}\right)^0=1$
- Una potencia de exponente 1 es igual a la base. $a^1=a \quad 3^1=3 \quad \left(-\frac{4}{5}\right)^1=-\frac{4}{5}$

3.4.1.- Producto de potencias de la misma base

Al multiplicar potencias de la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$a^b\cdot a^c=a^{b+c} \qquad 2^3\cdot 2^4=\underbrace{2\cdot2\cdot2}_{2^3}\cdot\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2}_{2^4}=\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}_{2^{3+4}}=2^7$$

3.4.2.- Cociente de potencias de la misma base

Al dividir potencias de la misma base, se deja la misma base y se restan los exponentes. En este caso, tiene que ocurrir que el primer exponente sea mayor que el segundo, $b>c$.

$$a^b:a^c=\frac{a^b}{a^c}=a^{b-c} \qquad 2^6:2^4=\frac{2^6}{2^4}=\frac{\overbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}^{2^6}}{\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2}_{2^4}}=\underbrace{\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot2\cdot2}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}}}_{2^{6-4}}=2^2$$

Piensa y practica			
3.- Expresa estas operaciones como una sola potencia y calcula su valor:			
a) $3^3\cdot 3^4\cdot 3=$	b) $2^5\cdot 2^4\cdot 2=$	c) $(-5)^7:(-5)^3=$	d) $(-2)^{-2}\cdot(-2)^3\cdot(-2)^4=$
e) $\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5=$	f) $\left(\frac{2}{5}\right)^8:\left(\frac{2}{5}\right)^3=$	g) $\left(-\frac{3}{5}\right)^7:\left(-\frac{3}{5}\right)^2=$	h) $3^4:3^3\cdot 3^8:3^6=$

3.4.3.- Potencia de potencia

Al elevar una potencia a otra potencia, se deja la base y se multiplican los exponentes.

$$\left(a^b\right)^c=a^{b\cdot c} \qquad \left(2^4\right)^2=2^4\cdot2^4=\overbrace{\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2}_{2^4}\cdot\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2}_{2^4}}^{\text{el } 2^4 \text{ se repite 2 veces}}=\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}_{2^{4+4}=2^{4\cdot2}}=2^{4\cdot2}=2^8$$

3.4.4.- Potencia un producto

La potencia del producto de dos números es igual al producto de sus potencias.

$$(a\cdot b)^c=a^c\cdot b^c \qquad (2\cdot5)^4=2^4\cdot5^4\underset{*}{=}10^4$$

* *Cuando multiplicamos potencias de distinta base pero de igual exponente, se multiplican las bases.*

3.4.5.- Potencia un cociente

La potencia del cociente de dos números es igual al cociente de sus potencias.

$$(a:b)^c=a^c:b^c \qquad (8:2)^3=8^3:2^3\underset{*}{=}4^3$$

* *Cuando dividimos potencias de distinta base pero de igual exponente, se dividen las bases.*

3.4.5.- Casos especiales de potencias

Es posible que nos encontremos con ejercicios de productos o cocientes en los que ni la base ni el exponente son iguales y por tanto no podremos calcular el resultado, porque no podremos aplicar ninguna de las propiedades de las potencias. Lo único que podremos hacer es calcular cada una de las potencias y operar después.

Ejemplo

$2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72 \qquad 3^3 \cdot 5^2 = 27 \cdot 25 = 675 \qquad 7^2 \cdot 5^3 = 49 \cdot 125 = 6.125$

Existen potencias que en principio no se podrán realizar, pero que si somos observadores encontraremos alguna forma de hacerlas. En estos casos, suele ocurrir que aunque las bases sean distintas, unas serán potencias de otras.

Ejemplo

$2^3 \cdot \underbrace{4^2}_{4=2^2} = 2^3 \cdot \left(2^2\right)^2 = 2^3 \cdot 2^4 = 2^7 \qquad \underbrace{9^3}_{9=3^2} \cdot \underbrace{27^2}_{27=3^3} = \left(3^2\right)^3 \cdot \left(3^3\right)^2 = 3^6 \cdot 3^6 = 3^{12}$

Resumen de propiedades de las potencias					
Producto		**Cociente**		**Potencia**	
$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$	$2^3 \cdot 2^5 = 2^7$	$a^b : a^c = a^{b-c}$	$6^5 : 6 = 6^4$	$a^0 = 1$	$a^1 = a$
$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$	$2^4 \cdot 3^4 = 12^4$	$a^c : b^c = (a : b)^c$	$6^3 : 3^3 = 2^3$	$\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$	$\left(2^3\right)^4 = 2^{3 \cdot 4} 2^{12}$

Piensa y practica			
4.- Expresa estas operaciones como una sola potencia:			
a) $\left(5^8 \cdot 5^4\right) : \left(5^2\right)^5 =$	b) $\left[\left(-2^6\right) \cdot (+2)^3\right] : \left[(+2)^3\right]^2 =$	c) $(-12)^7 : \left[\left(-3^5 \cdot 4^5\right)\right]$	d) $25^3 : \left[(-15)^5 : 3^5\right]$
e) $6^3 : \left[\left(2^7 : 2^6\right) \cdot 3\right]^2$	f) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^8 : \left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^2 : \frac{4}{25} =$	g) $8^4 : \left(2^5 \cdot 4^2\right)$	h) $\left[\left(6^2\right)^2 \cdot 4^4\right] : \left(2^3\right)^4$

3.05.- Raíz cuadrada de números enteros

Recuerda que la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado, es decir la ***raíz cuadrada*** exacta de un número *a* es otro número *b* que, elevado al cuadrado, nos da el número *a*.

$$\sqrt{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = a$$

El ***radicando*** es el número ***a***, $\sqrt{\ }$ es el ***símbolo de la raíz*** y decimos que ***b*** es la ***raíz cuadrada*** de a.

Resultado
Raíz → $\sqrt{25} = 5$ **porque** $5 \cdot 5 = 25$
Radicando

3.5.1.- Raíz cuadrada exacta

Los números con raíz cuadrada exacta, se llaman ***cuadrados perfectos.***

- Un número entero positivo tiene siempre dos raíces cuadradas, una positiva y otra negativa.

$$\sqrt{25} = \begin{cases} +5 & \textit{porque} \quad (+5)^2 = 25 \\ -5 & \textit{porque} \quad (-5)^2 = 25 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \sqrt{25} = \pm 5$$

Sin embargo, para evitar ambigüedades, por convenio, tomaremos: $+\sqrt{25} = +5 \quad y \quad -\sqrt{25} = -5$

- Un número negativo no tiene raíz cuadrada, porque, utilizando la definición, no hay ningún número que elevado al cuadrado sea negativo.

$$Si \ \sqrt{-16} = x \quad \rightarrow \quad x^2 = -16 \quad \rightarrow \quad \text{Imposible}$$

Piensa y practica			
5.- Escribe las dos soluciones enteras, si existen:			
a) $\sqrt{1}=$	*b*) $\sqrt{(-1)}=$	*c*) $\sqrt{4}=$	*d*) $\sqrt{-4}=$
e) $\sqrt{36}=$	*f*) $\sqrt{-49}=$	*g*) $\sqrt{-81}=$	*h*) $\sqrt{100}=$

3.5.2.- Raíz cuadrada entera

Si el radicando no es un cuadrado perfecto, su raíz cuadrada no será exacta y estará comprendida entre dos números enteros.

$$\sqrt{20}= \quad \rightarrow \quad \begin{cases}(+4)^2=16 \ (\text{no llega}) \\ (+5)^2=25 \ (\text{se pasa})\end{cases} \quad \rightarrow \quad 4<\sqrt{20}<5$$

La ***raíz cuadrada entera*** de un número a es el mayor número b cuyo cuadrado es menor que a. El resto de la raíz entera es la diferencia entre el radicando a, y el cuadrado de la raíz entera b.

$$\text{Resto}=a-b^2$$

Ejemplo

$\sqrt{20}=4 \quad y \quad \text{Resto}=20-4^2=20-16=4$ $\qquad$ $\sqrt{30}=5 \quad y \quad \text{Resto}=30-5^2=30-25=5$

Piensa y practica			
6.- Halla las raíces enteras y los restos de los siguientes números:			
a) 38	*b*) 89	*c*) 120	*d*) 145

3.06.- Raíz cuadrada de fracciones

La ***raíz cuadrada de una fracción*** es el cociente entre la raíz cuadrada del numerador y la raíz cuadrada del denominador.

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Una fracción tiene raíz cuadrada exacta si su numerador y su denominador son cuadrados perfectos, en otro caso no será exacta.

Ejemplo

$$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{\pm 2}{\pm 3}=\pm\frac{2}{3} \qquad \sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{\pm 3}{\pm 4}=\pm\frac{3}{4} \qquad \sqrt{\frac{16}{49}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}}=\frac{\pm 4}{\pm 7}=\pm\frac{4}{7} \qquad \sqrt{\frac{36}{25}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}}=\frac{\pm 6}{\pm 5}=\pm\frac{6}{5}$$

Si aplicamos la definición, *la raíz cuadrada de una fracción* es un número cuyo cuadrado es igual a dicha fracción.

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{c}{d} \iff \left(\frac{c}{d}\right)^2=\frac{a}{b} \qquad \qquad \sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3} \iff \left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

3.07.- Operaciones combinadas con potencias y raíces cuadradas

Una vez estudiadas las operaciones con potencias y raíces tanto de números enteros como de fracciones, podemos dar un paso más mezclándolas todas a la vez creando operaciones combinadas con todas ellas.

Para ello es importante recordar el ***Orden de prioridad en las operaciones:***

- ***i)*** *Las expresiones encerradas entre corchetes y paréntesis, de los interiores a los exteriores.*
- ***ii)*** *Las potencias y radicales.*
- ***iii)*** *Los productos y cocientes.*
- ***iv)*** *Las sumas y restas.*

$$\left[(-2)^3\cdot\frac{1}{2}\right]^2:\sqrt{16}-\left(6^5:6^4\right)\cdot\sqrt{\frac{81}{36}}+1= \quad i) \quad =\left[-8\cdot\frac{1}{2}\right]^2:\sqrt{16}-(6)\cdot\sqrt{\frac{81}{36}}+1=\left[-\frac{8}{2}\right]^2:\sqrt{16}-(6)\cdot\sqrt{\frac{81}{36}}+1=$$

$$=[-4]^2:\sqrt{16}-6\cdot\sqrt{\frac{81}{36}}+1=[-4]^2:\sqrt{16}-6\cdot\sqrt{\frac{81}{36}}+1= \quad ii) \quad =16:4-6\cdot\frac{9}{6}+1= \quad iii) \quad =4-9+1=$$

$$= \quad iv) \quad =-4$$

Aunque el orden de prioridad en las operaciones es muy importante, podemos ir aplicando a la vez algunas de las prioridades dependiendo de los ejercicios, sobre todo para ahorrar tiempo y papel. Veamos el mismo ejercicio hecho de esta forma:

$$\left[(-2)^3\cdot\frac{1}{2}\right]^2:\sqrt{16}-\left(6^5:6^4\right)\cdot\sqrt{\frac{81}{36}}+1= \quad i) \quad =\left[-8\cdot\frac{1}{2}\right]^2:4-6\cdot\frac{9}{6}+1= \quad ii) \quad =\left[\frac{-8}{2}\right]^2:4-9+1=$$

$$=(-4)^2:4-8= \quad iii) \quad =16:4-8= \quad iv) \quad =4-8= \quad v) \quad =-4$$

i) En este punto hemos calculado (-2)^3*, para hacer el corchete, pero también hemos calculado* $\sqrt{16}=4$, *la operación* $\left(6^5:6^4\right)=6$ *y la raíz* $\sqrt{\frac{81}{36}}=\frac{9}{6}$

ii) En este punto hacemos el producto del corchete $\left[-8\cdot\frac{1}{2}\right]=\left[-\frac{8}{4}\right]$, *el cociente* $\left[-\frac{8}{4}\right]=-2$, *el producto* $6\cdot\frac{9}{6}=6$ *y la suma* $-9+1=8$

iii) En este otro punto realizamos la potencia $(-4)^2=16$

iv) Aquí la división $16:4=4$

v) por último en este realizamos la suma $4-8=4$

Vemos que ambas tienen el mismo resultado, pero en la segunda la hacemos en menos pasos. Así que tú decides cual es la que más te gusta. A mí, personalmente, me gusta más la segunda.

Piensa y practica	
7.- Resuelve las siguientes operaciones:	
a) $\sqrt{\frac{16}{25}}-\frac{7}{2}+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2+4-\frac{1}{8}\right]=$	b) $6^2-\left[3+\left(\frac{5}{8}\right)^3-\frac{3}{4}\right]\cdot\left(\sqrt{\frac{49}{4}}-1\right)=$
c) $2\cdot\sqrt{\frac{13}{9}+\frac{4}{3}}-\left[3-\left(1+\frac{4}{5}\right)\cdot 2\right]\div 2+\frac{1}{3}=$	d) $\sqrt{-\frac{5}{9}+1}\cdot\left(-2+\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot(-2)^2=$

3.08.- Notación científica

La ***notación científica*** nos permite escribir números muy grandes o muy pequeños de forma abreviada.

Esta notación consiste simplemente en multiplicar por una potencia de base 10 con exponente positivo si el número es muy grande o negativo si es muy pequeño.

$$4752,3 = \underbrace{4}_{\text{un número entero}}\underbrace{,7523}_{\text{varios decimales}}\cdot\underbrace{10}_{\text{base } 10}{}^{\overset{\text{exponente}}{3}} = 4,7523\cdot 10^3$$

$4752,3 = 4,7523\times 10^3$

Siempre el exponente es igual al número de cifras decimales que deben correrse para convertir un número escrito en notación científica en el mismo escrito en notación decimal. Se desplazará la coma a la derecha si el exponente es positivo y hacia la izquierda si es negativo. Cuando se trata de convertir un número a notación científica el proceso es a la inversa.

Ejemplo

$500 = 5\cdot10^2$	$600.000 = 6\cdot10^5$	$300.000.000 = 3\cdot10^8$	$5.000.000.000.000.000 = 5\cdot10^{15}$
$0,05 = 5\cdot10^{-2}$	$0,000\ 12 = 1,2\cdot10^{-4}$	$0,000\ 000\ 000\ 4 = 4\cdot10^{-10}$	$0,000\ 000\ 002\ 5 = 2,5\cdot10^{-9}$

Piensa y practica

8.- Supón que en el ordenador puedes teclear 110 cifras por minuto. ¿Cuántas podrías teclear en 100 días si te dedicas a ello durante 8 horas diarias?

9.- ¿Qué edad tendría una persona que haya vivido mil doscientos cuarenta mil millones de segundos?

3.09.- Resolución de problemas de potencias y raíces

Como ya deberías saber, la resolución de problemas es considerada la parte más importante del aprendizaje de matemáticas. Mediante la resolución de problemas, experimentarás la utilidad de las Matemáticas en el mundo que te rodea aplicando de forma práctica los conocimientos teóricos que ya tienes.

Como ya hemos visto en capítulos anteriores, para resolver problemas en matemáticas podemos seguir el siguiente esquema:

- **a)** Lectura y comprensión del enunciado.
- **b)** Análisis de los datos del enunciado. (A veces es importante ayudarse con un dibujo)
- **c)** Plantear las operaciones a realizar y realizarlas sin olvidar el orden de prioridad.
- **d)** Resolver el problema paso a paso intentando explicar los pasos seguidos para resolverlo y dando la solución pedida.
- **e)** Evaluar e interpretar los resultados. ¿Son lógicos? ¿se corresponden con lo pedido en el enunciado? ¿puedo comprobar si la solución es correcta?

3.9.1.- Ejemplos de problemas de potencias y raíces

1.- Un tipo de bacteria se reproduce por mitosis dividiéndose por la mitad cada minuto. ¿Cuántas bacterias serán al cabo de cinco minutos? Escribe el resultado en forma de potencia y calcula su valor.

Si cada minuto, la bacteria se divide en dos partes, al cabo de un minuto habrá dos bacterias, al cabo de dos $2\cdot2=4$ bacterias, al cabo de tres, $4\cdot2=8$….. y así sucesivamente, por tanto al cabo de 5 minutos tendremos:

$$2^5\, bacterias = 32 \text{ bacterias}$$

Así que a los 5 minutos habrá 32 bacterias

2.- Los terrenos de dos parcelas miden 3^8 y 3^4 metros cuadrados, respectivamente. Mohamed duda si la primera parcela es doble que la segunda o no. De no ser doble, ¿cuántas veces es mayor la primera que la segunda?

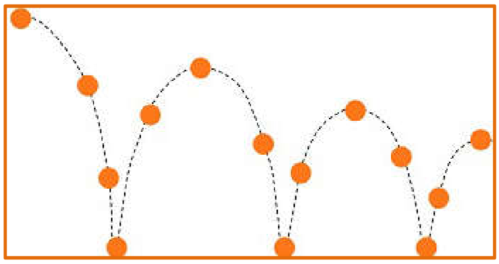
Sabemos que $3^8 = \left(3^4\right)^2$, por tanto no es el doble, sino el cuadrado. Para vez cuantas veces es una mayor que la otra, bastaría con dividir:

$$3^8 : 3^4 = 3^4 = 81$$

Por tanto la primera parcela es 81 veces mayor que la segunda.

3.- Una pelota rebota cada vez a una altura igual a los 2/5 de la altura de la que cae. Si después de 3 botes se eleva a 32 centímetros, ¿cuál es la altura desde la que cae?

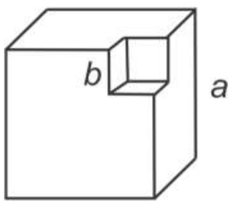
Si cae desde una altura h, y en cada bote llega a los $\frac{2}{5}$ de su altura anterior, después de tres botes llegará a: $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$ de la altura desde la que cae, y como dicen que después de los tres botes llega a 32 cm, entonces:



$$\frac{8}{125} de\ h = 32 \quad \rightarrow \quad \frac{8}{125}\cdot h = 32 \quad \rightarrow \quad h = \frac{32\cdot 125}{8} = 500\ cm = 5\ m$$

Por tanto cae desde una altura de 5 metros.

4.- Si tuviéramos un terrón de azúcar gigante con forma de cubo de 8 m³ de volumen y nos dispusiéramos a dividirlo en pequeños terrones de 1 cm de lado, ¿Cuántos terrones obtendríamos?



Si los terrones tienen de lado 1 cm, el volumen de un cubo de 1 cm de lado será:

$$V = a^3 = (1cm)^3 = 1\ cm^3$$

Por tanto, para calcular cuántos los cubitos que se obtienen del gran cubo, no tenemos más que dividir:

$$\frac{8\ m^3}{1\ cm^3} = \left\{\begin{array}{l} 8\ m^3 = 8\ \cancel{m^3}\cdot\frac{10^3\ \cancel{dm^3}}{1\ \cancel{m^3}}\cdot\frac{10^3\ cm^3}{1\ \cancel{dm^3}} = 8\cdot 10^3\cdot 10^3 = 8\cdot 10^6\ cm^3 \\ 1\ cm^3 = 1\ cm^3 \end{array}\right\} = \frac{8\cdot 10^6\ cm^3}{1\ cm^3} = 8\cdot 10^6\ \ Terrones$$

Con el terrón de 8 m³, obtendríamos 8·10⁶ Terrones, o lo que es lo mismo 8 millones de terrones de 1 cm de lado.

3.10.- Autoevaluación

1.- Reduca a una única potencia:

a)	$3^3 \cdot 3^4 \cdot 3$	**b)**	$5^7 : 5^3$
c)	$(5 \cdot 2 \cdot 3)^4$	**d)**	$(3^4)^4$
e)	$(8^2)^3$	**f)**	$[(2^3)^4]^0$
g)	$x^7 : x^6$	**k)**	$[(5^3)^4]^2$
m)	$(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4$	**n)**	$m^8 : m^3 : m^2$

2.- Calcula:

a) $\left(5^8 \cdot 5^4\right) : \left(5^2\right)^5$ **b)** $\left[\left(-2^6\right) \cdot (+2)^3\right] : \left[(+2)^3\right]^2$

3.- Opera y calcula:

a) $8^4 : \left(2^5 \cdot 4^2\right)$ **b)** $25^3 : \left[(-15)^5 : 3^5\right]$

4.- Calcula si es posible

a)	$\sqrt{8^2}$	**d)**	$\sqrt{-49}$	**g)**	$\sqrt{15^2}$
b)	$\sqrt{-225}$	**e)**	$\sqrt{2500}$	**h)**	$\sqrt{50^2}$
c)	$\sqrt{x^2}$	**f)**	$\sqrt{(-144)^2}$	**i)**	$\sqrt{a^4}$

5.- Calcula con la ayuda de las propiedades de las potencias:

a)	$-(+3)^2+(-3)^3 \cdot 5^0=$	**d)**	$-(-2^2)^3=$
b)	$-(-2^0-(-2)^1-(-2)^2)=$	**e)**	$100^5:10^3=$
c)	$(-10)^3 \cdot (-10)^4 \cdot 10^3:100^2=$	**f)**	$(-9)^3 \cdot (-9^4):81$
d)	$1000^3 \cdot 100^5:10000=$	**ñ)**	$10^3:(-10)^3=$
e)	$(-100)^3 \cdot (-1000):(-10)^4=$	**o)**	$625 \cdot 25^2:125=$

6.- Una finca tiene forma cuadrada y su área mide 81 m^2. ¿Cuánto mide cada uno de sus lados?

7.- Calcula y simplifica:

a) $\sqrt{\frac{4}{16}} \cdot \left(\frac{24}{8} - \frac{5}{2}\right)^2 : \frac{2}{7} + 3 \cdot \frac{5}{7} =$

b) $\frac{2}{5} : \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{5} + \frac{2}{15}\right) \cdot \sqrt{\frac{9}{16}} + 1 : \left(-\frac{3}{4}\right)^2 =$

c) $-3 - \sqrt{\frac{4}{25}} \cdot \left[(-3) : \left(\frac{1}{5} : \frac{1}{10}\right)\right]^3 =$

d) $\left(4 + \frac{1}{3}\right)^3 : \sqrt{\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - 3\right) =$

8.- Realiza las siguientes operaciones combinadas y calcula el resultado: *(usa potencias si es necesario)*

a) $3 \cdot 4^2 - 3^2 : 3^0 + \sqrt{81} : 3^2 =$
b) $5 \cdot (7-2)^2 : 25 - 4^4 : 4^3 + \sqrt{36} : 6 =$
c) $5^2 + 5^3 - 5 + 5^0 =$
d) $25 - 5 \cdot 2 + 8^4 : 4^5 + 2 \cdot \sqrt{49} =$

9.- ¿Verdadero o falso?

a) $5^2 = 25$ *c)* $(2+3)^2 = 2^2 + 3^2$

b) $(-2)^3 = 8$ *d)* $(7-4)^2 = 3^2$

10.- En un restaurante hay para elegir 5 platos de primero, 5 platos de segundo y 5 platos de postre. ¿Cuántos días puedo ir a comer sin repetir el menú?

11.- Un tablero de ajedrez tiene 8 filas y 8 columnas. Expresa como potencia del menor número entero posible el número total de cuadros que tiene el ajedrez.