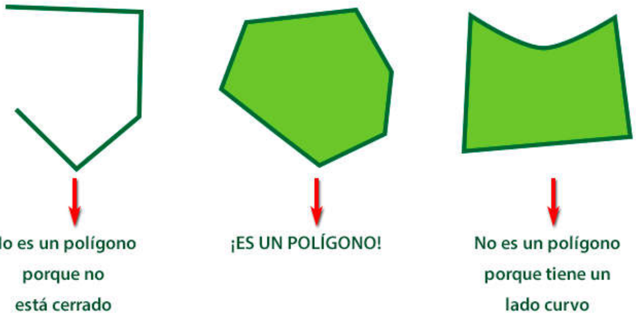
Departamento de Matemáticas
http://selectividad.intergranada.com
Raúl González Medina

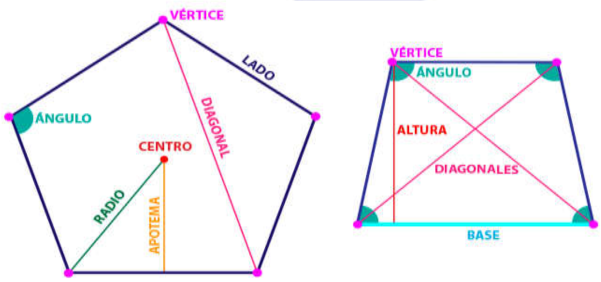
Polígonos

Un polígono es el área de un plano que está delimitado por líneas que tienen que ser rectas.



Partes de un Polígono

- Lados: son los segmentos que forman la línea poligonal.
- Vértices: son los puntos donde se unen los lados.
- Ángulos: son las regiones del plano que delimitan dos lados.
- Diagonal: es la recta que une dos vértices no consecutivos.
- Centro: es el punto desde el que todos los ángulos y lados están a la misma distancia.
- Radio: es el segmento que une el centro del polígono con cualquiera de sus vértices.
- Apotema: es el segmento que une el centro del polígono con el centro de cualquiera de sus lados.
- Base: Es el lado inferior de un polígono. Normalmente es el lado donde se "apoya" la figura.

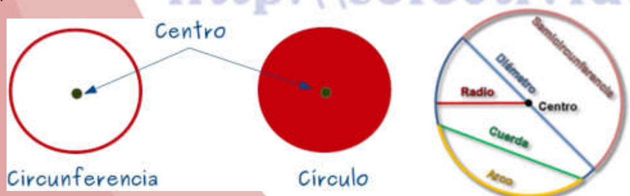


Tipos de Polígonos

- *Polígonos cóncavos:* Si tiene un ángulo que mide más de 180º
- *Polígonos convexos:* Si todos los ángulos miden menos de 180º
- *Polígonos regulares:* Si tiene todos sus lados y ángulos iguales.
- *Polígonos irregulares:* Si tiene algunos lados y ángulos diferentes.

Figuras Circulares

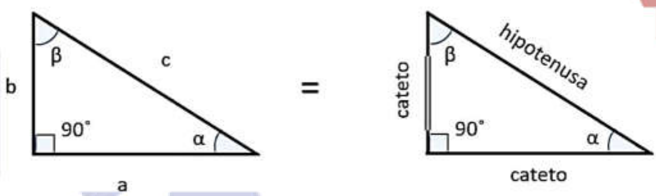
Si O es el centro de la circunferencia, el círculo es la región del plano formada por todos los puntos cuya distancia al centro O es menor o igual que el radio de la circunferencia.



Hay diferentes formas de hacer partes de un círculo y algunas de ellas reciben nombres especiales.

- *Sector circular:* Región del círculo limitada por dos radios y el arco que determinan.
- *Segmento circular:* Región del círculo limitada por una cuerda y el arco correspondiente.
- *Zona circular:* Región del círculo determinada por dos cuerdas paralelas.
- *Corona circular:* Región del círculo limitada por dos circunferencias concéntricas.
- *Trapecio circular:* Parte de una corona circular limitada por dos radios.

Teorema de Pitágoras



En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, y matemáticamente se expresa:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Si conocemos los lados de un triángulo, y con la ayuda del teorema de Pitágoras, podemos averiguar si es o no rectángulo, comparando el cuadrado del lado mayor con la suma de los cuadrados de los otros dos.

Rectángulo	Obtusángulo	Acutángulo
Si $a^2 = b^2 + c^2$	Si $a^2 > b^2 + c^2$	Si $a^2 < b^2 + c^2$

Aplicaciones del teorema de Pitágoras

- Cálculo de la hipotenusa conociendo los dos catetos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

- Cálculo de un cateto conocida la hipotenusa y el otro cateto:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} b^2 = a^2 - c^2 & \rightarrow \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} \\ c^2 = a^2 - b^2 & \rightarrow \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$

En un triángulo rectángulo, sus catetos miden 88 m y 105 m. Calcula la longitud de la hipotenusa.

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} \rightarrow a = \sqrt{88^2 + 105^2} = \sqrt{18769} = 137$$

Solución: La hipotenusa mide 137 m.

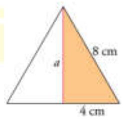
En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 130 cm, y uno de los catetos, 32 cm. Halla la longitud del otro cateto.

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2 \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{130^2 - 32^2} = \sqrt{15876} = 126$$

Solución: El otro cateto mide 126 m.

Calcular el área de un triángulo equilátero de lado 8 cm.



Sabemos que el área de un triángulo es la mitad del producto de su base por su altura.

Así que empezaremos por calcular su altura, y para ello Pitágoras:

$$a = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 6{,}93$$

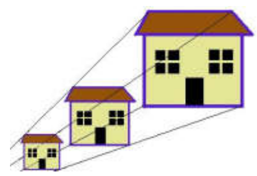
Y conocida la altura ya podemos calcular su área:

$$A = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}71\ cm^2$$

Su área es de 27,71 cm^2

Figuras Semejantes

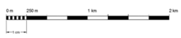
- Dos figuras distintas son *semejantes* cuando solo difieren en su tamaño. En tal caso, los segmentos correspondientes son proporcionales. Es decir, cada longitud en una de ellas se obtiene multiplicando la longitud correspondiente en la otra por un número fijo, llamado razón de semejanza, *k*.



- Si la razón de semejanza de dos figuras es *k*, entonces la razón de sus áreas es k^2.
- Si la razón de semejanza de dos cuerpos es *k*, entonces la razón de sus volúmenes es k^3.

Escala en mapas, planos y figuras

La *escala* es una razón de proporcionalidad entre la medida representada y la medida real, expresadas en las mismas unidades.

Escala Numérica	Unidad por unidad	Escala Gráfica
$1:500$	$1\ cm : 5\ km$	
Expresa la relación entre el valor de la representación y el valor real.	Expresa la igualdad de una longitud en la representación y en la realidad.	Muestra la relación entre la longitud de la representación y la de la realidad.

En un mapa de Andalucía, la distancia entre Sevilla y Granada es de 6 cm, si la escala es 1:4.000.000, ¿a qué distancia real están ambas ciudades?

$$6 \cdot 4.000.000 = 24.000.000\ cm = 240\ km$$

La distancia entre Granada y Sevilla es de 240 Km.

Para obtener la escala dividiremos la distancia en el plano entre la distancia real, sin olvidarnos de ponerlas en las mismas unidades (no podemos dividir centímetros entre kilómetros).

$$Escala = \frac{Medida\ en\ plano\ (cm)}{Medida\ real\ (cm)}$$

Un avión viaja, en línea recta, entre la isla del Hierro y la isla de Ibiza. Si en un plano la distancia entre ambas islas es de 20 cm, ¿Cuál sería la escala de dicho plano si la distancia real es de 2.200 km?

Calcularemos la escala dividiendo la distancia en el plano, entre la real:

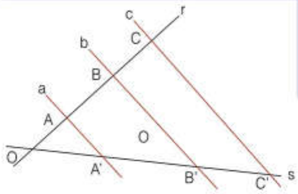
$$\frac{Medida\ en\ plano\ (cm)}{Medida\ real\ (cm)} = \frac{20\ cm}{2200\ \cancel{km} \cdot \frac{1000\ \cancel{m}}{1\ \cancel{km}} \cdot \frac{10 cm}{1\ \cancel{m}}} = \frac{20\ \cancel{cm}}{22.000.000\ \cancel{cm}} = \frac{1}{1.100.000}$$

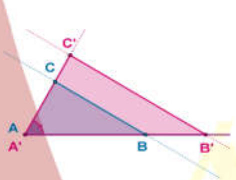
Luego la escala es: 1:1.100.000

Teorema de Thales

Cuando dos rectas (r y s) son cortadas por una serie de rectas paralelas (a, b, c,....), los segmentos que determinan en una de las rectas son proporcionales a los que determinan en la otra. Matemáticamente:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$





Decimos que dos *triángulos* están *en posición Tales* cuando dos de sus lados están sobre las mismas rectas y los otros dos lados son paralelos. Por tanto, aquí también podemos aplicar Thales:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{CB}{C'B'} \quad y \quad \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$$

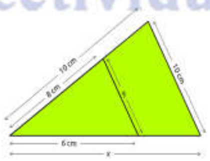
Calcula el valor de x e y en la siguiente figura:

Tenemos dos triángulos en posición Tales, por tanto, sus lados son proporcionales y para calcular x haremos lo siguiente:

$$\frac{8}{10} = \frac{6}{x} \quad \to \quad 8x = 6 \cdot 10 \quad \to \quad x = \frac{60}{8} = 7{,}5\ cm$$

Para calcular y haremos:

$$\frac{8}{y} = \frac{10}{10} \quad \to \quad 10y = 8 \cdot 10 \quad \to \quad y = \frac{80}{10} = 8\ cm$$



Por tanto, x=7,5 cm e y=8 cm.

Semejanza de Triángulos

Dos *triángulos* son *semejantes* si:

Tienen dos ángulos iguales.

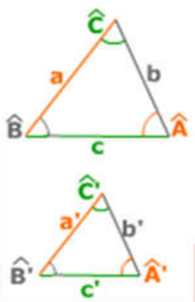
$$\hat{A} = \hat{A}' \ y \ \hat{B} = \hat{B}'$$

Tienen sus tres lados proporcionales.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

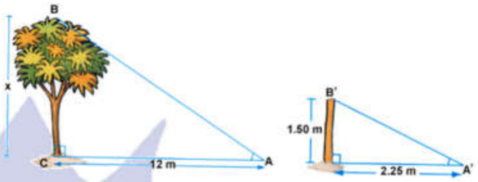
Tienen dos lados proporcionales e iguales el ángulo comprendido entre ellos.

$$\hat{A} = \hat{A}' \ y \ \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$



Aplicaciones de la semejanza de Triángulos

Calcula la altura del árbol con los datos del dibujo.

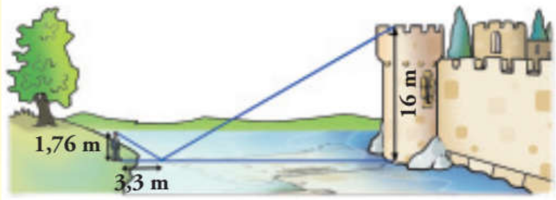


Como podemos observar en la figura, los triángulos rectángulos ABC y A'B'C' son semejantes porque tienen dos ángulos iguales, por tanto:

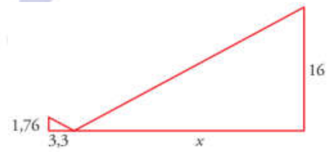
$$\frac{x}{1{,}50} = \frac{12}{2{,}25} \quad \to \quad x = \frac{1{,}5 \cdot 12}{2{,}25} = 8\ m$$

Por tanto, la altura del árbol es de 8 metros.

¿Cuál es la distancia entre el chico y la base de la torre si el chico ve la torre reflejada en el agua?



Si observamos el dibujo tenemos la siguiente figura:



Por tanto, tenemos dos triángulos en posición Tales, cuyos lados son proporcionales.

Para calcular x haremos lo siguiente:

$$\frac{1{,}76}{3{,}3} = \frac{16}{x} \quad \to \quad x = \frac{3{,}3 \cdot 16}{1{,}76} = 30\ m$$

Así que la distancia será de 30 + 3,3 = 33,3 metros.

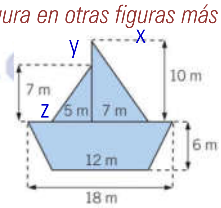
Áreas y Perímetros

El *perímetro* de una figura plana es la distancia alrededor de la figura, es decir, si la figura es poligonal, es la suma de sus lados.

El *área* de una figura plana describe la cantidad de superficie que cubre la figura, es decir, es la superficie que ocupa la figura.

A veces para calcular el área se suele partir la figura en otras figuras más elementales:

Calcula el área y el perímetro de la siguiente figura:



Para calcular el perímetro de la figura, necesitamos las dos hipotenusas (Teorema de Pitágoras) de los dos triángulos que forman la vela y que llamaremos x e y:

$$x^2 = b^2 + c^2 = 7^2 + 10^2 = 49 + 100 = 149 \quad \to \quad x = \sqrt{149} = 12{,}2\ cm$$

$$y^2 = b^2 + c^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74 \quad \to \quad x = \sqrt{74} = 8{,}6\ cm$$

Además, necesitamos los lados inclinados del trapecio que forman el casco del barco, a los que llamaremos z. Para ello usaremos de nuevo Pitágoras. Ambos son iguales:

$$z^2 = b^2 + c^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45 \quad \to \quad x = \sqrt{45} = 6{,}7\ cm$$

Por tanto, el perímetro es: 12,2+3+8,6+3+6,7+12+6,7+3=55,2 cm

Para calcular el área, nos fijamos en que tenemos dos triángulos y un trapecio, así que calculamos el área de cada uno de ellos y después las sumamos:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{B+b}{2} \cdot h + \frac{b \cdot h}{2} + \frac{B \cdot H}{2} = \frac{18+12}{2} \cdot 6 + \frac{5 \cdot 7}{2} + \frac{10 \cdot 7}{2} =$$

$$90 + 17{,}5 + 35 = 142{,}5\ cm^2$$

Y su área es de 142,5 cm²