Los números enteros

Los Números Enteros

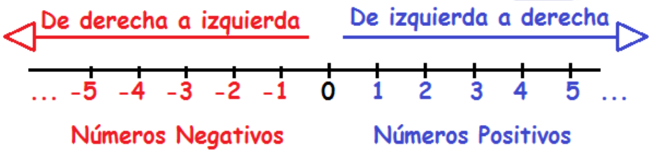
Si tomamos el conjunto $\mathbb{N}$ de los *números naturales* y, por cada elemento distinto de cero, $+a$, añadimos otro con el signo negativo, $-a$, obtenemos un nuevo conjunto que se conoce en matemáticas como el conjunto de los *números enteros* y se designa por la letra $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \underbrace{\ldots,-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1}_{\text{Números Negativos}},\ 0,\ \underbrace{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots}_{\text{Números Naturales } \mathbb{N}}$$

Representación en la recta numérica

Los números enteros se representan ordenados en la recta numérica.

- ✓ Dibujamos una recta y ponemos el 0 en el centro.
- ✓ Colocamos los números positivos a la derecha del cero.
- ✓ Colocamos los números negativos a la izquierda del cero.



Valor Absoluto de un número

El *valor absoluto* de un número es el número que resulta de quitarle su signo. Se representa entre dos barras verticales y es siempre positivo.

$$|\pm a| = a \qquad |-5| = 5 \qquad |+8| = 8 \qquad |-13| = 13$$

Opuesto de un número

El *opuesto* de un número entero, a, es otro número entero con el mismo valor absoluto, pero con signo contrario. Se representa *Op(a)*.

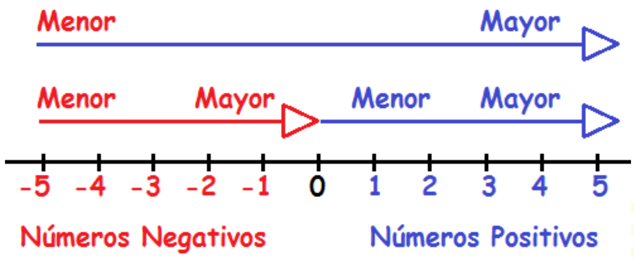
$$Op(\pm a) = \mp a \qquad Op(-7) = 7 \qquad Op(5) = -5$$

De forma reiterativa, el opuesto del opuesto es el mismo número:

$$Op(Op(a)) = Op(-a) = a \qquad Op(Op(-7)) = Op(7) = -7$$

Comparación de números enteros

Un número entero, *a*, es mayor que otro, *b*, cuando está situado más a la derecha que él en la recta numérica.



Calcula:

a) $Op(Op(|-3|)) = Op(Op(3)) = Op(-3) = 3$

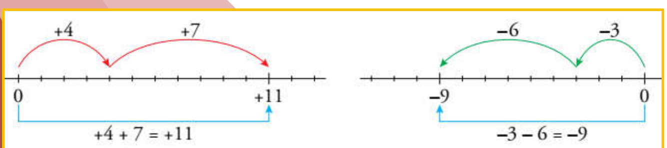
b) $|Op(|-4|)| = |Op(4)| = |-4| = 4$

¿Qué es mayor: el valor absoluto del opuesto de un número o el opuesto de su valor absoluto?

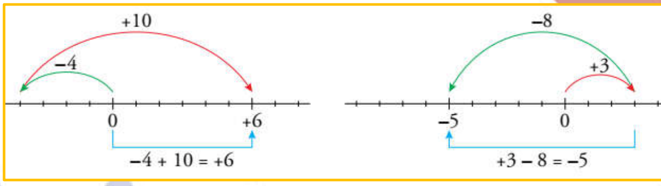
El valor absoluto de algo siempre es positivo, mientras que el opuesto de un valor absoluto es siempre negativo, por tanto, es mayor el valor absoluto del opuesto de un número.

Suma y resta de números enteros

Para sumar dos números enteros que tienen el mismo signo, se suman sus valores absolutos y se pone el signo que tenían los sumandos.



Para sumar dos números enteros de distinto signo, se restan los valores absolutos y se pone el signo del que tiene mayor valor absoluto.



Al suprimir un paréntesis, *un menos delante de un paréntesis* cambia todos los signos que haya dentro del paréntesis.

Producto de números enteros

Para *multiplicar* dos números enteros primero se multiplican sus valores absolutos *(los números sin su signo)* y después, el resultado tendrá el signo + si los dos factores tienen el mismo signo, y signo – si tienen signos distintos.

$$(+6)\cdot(+6) = +36 \qquad (+6)\cdot(-6) = -36$$
$$(-6)\cdot(+6) = -36 \qquad (-6)\cdot(-6) = +36$$

Cociente de números enteros

Para *dividir* dos números enteros primero se dividen sus valores absolutos *(los números sin su signo)* y después, el resultado tendrá el signo + si los dos factores tienen el mismo signo, y signo – si tienen signos distintos.

$$(+18):(+6) = +3 \qquad (+18):(-6) = -3$$
$$(-12):(+6) = -2 \qquad (-36):(-6) = +6$$

Criterio de Signos

Producto	Cociente
+ x + = +	+ ÷ + = +
− x − = +	− ÷ − = +
+ x − = −	+ ÷ − = −
− x + = −	− ÷ + = −

Operaciones Combinadas con números enteros

Para realizar operaciones combinadas con números enteros sin cometer errores es conveniente establecer un orden de prioridad en las operaciones.

Orden de prioridad en las operaciones

1. *Efectuar las operaciones entre paréntesis y corchetes del interior al exterior.*
2. *Efectuar las potencias y raíces (si las hubiera).*
3. *Efectuar los productos y cocientes.*
4. *Realizar las sumas y restas.*

Cuando tengamos operaciones de igual prioridad se ejecutan de manera natural, es decir, de izquierda a derecha.

Calcula:

a) $(4-1)\cdot 3+4-16\div 2 = (3)\cdot 3+4-8 = 9+4-8 = 13-8 = 5$

b) $8+(4-9+7)\cdot 2+4\cdot(3-8+4) = 8+(+2)\cdot 2+4\cdot(-1) = 8+4-4 = 8$

c) $(3+7)\div 2-35\div(10-3) = (10)\div 2-35\div(7) = 5-5 = 0$

d) $\left[3\cdot\left(5^2-\sqrt{16}\right)\cdot 2^2\right]:\left(2\cdot\sqrt{49}\right) = \left[3\cdot(25-4)\cdot 4\right]:(2\cdot 7) == \left[3\cdot(21)\cdot 4\right]:$
$:(14) = (3\cdot 21\cdot 4):14 = 252:14 = 18$

e) $\sqrt{36}-3\cdot(3-5)+3^2-4^0+5^9:5^7 = 6-3\cdot(-2)+9-1+5^2 = 6+6+$
$9-1+25 = 45$

f) $\left[\left(2^6:8\right)\cdot 3\right]:12+\left(\sqrt{49}-5\right):2 = \left[\left(2^6:2^3\right)\cdot 3\right]:12+(7-5):2 =$
$= \left[2^3\cdot 3\right]:12+(2):2 = 24:12+1 = 2+1 = 3$

Múltiplos y divisores de números enteros

Dos números están emparentados por la relación de divisibilidad cuando su cociente es exacto.

$$\text{Si la division } a:b \text{ es exacta, se cumple que}: \begin{cases} a \text{ es múltiplo de } b \\ b \text{ es divisor de } a \\ a \text{ es divisible por } b \end{cases}$$

Los múltiplos de un número lo contienen una cantidad exacta de veces y se obtienen multiplicándolo por cualquier otro número natural.

Los múltiplos de 12 son: $12 \cdot 1 = 12;\quad 12 \cdot 2 = 24;\quad 12 \cdot 3 = 36;\quad 12 \cdot 4 = 48.....$

- Un número tiene infinitos múltiplos.
- Todo número es múltiplo de sí mismo y de la unidad.

$$a \cdot 1 = a \begin{cases} a \text{ es múltiplo de } 1. \\ a \text{ es múltiplo de } a. \end{cases}$$

- Cualquier múltiplo de un número contiene, al menos, todos los factores primos de ese número.

Los *divisores* de un número están contenidos en él una cantidad exacta de veces y, por tanto, lo dividen con cociente exacto.

Los divisores de 12 : $\begin{array}{l|l} 12 & 12 \\ 00 & 1 \end{array}\quad \begin{array}{l|l} 12 & 6 \\ 00 & 2 \end{array}\quad \begin{array}{l|l} 12 & 4 \\ 00 & 3 \end{array}\quad \begin{array}{l|l} 12 & 3 \\ 00 & 4 \end{array}\quad \begin{array}{l|l} 12 & 2 \\ 00 & 6 \end{array}\quad \begin{array}{l|l} 12 & 1 \\ 00 & 12 \end{array}$

Los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6, 12

Observa que van emparejados y que su producto siempre es 12 : $12 \cdot 1 = 6 \cdot 2 = 3 \cdot 4 = 12$

- Un número tiene una cantidad finita de divisores.
- Un número tiene al menos dos divisores: él mismo y la unidad.
- De cada división exacta, obtenemos dos divisores de ese número: el divisor y el cociente.
- Los divisores de un número están formados por algunos de los factores primos de ese número.

Los Números Primos

Un número es primo cuando es positivo y sus únicos divisores son él mismo y el 1. En caso contrario se dice que es compuesto.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Criterios de Divisibilidad

Los criterios de divisibilidad son las reglas que nos permiten averiguar de forma sencilla y sin hacer la división, si un número es divisible por otro.

Por	Criterio
2	Un número es divisible por 2 si es par, es decir si termina en 0, 2, 4, 6 y 8.
3	Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
5	Para saber si un número es divisible entre 5, dicho número tiene que acabar en 0 o 5.
7	Para saber si un número es divisible entre 7 hay que restar el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades. Si el resultado es 0 o múltiplo de 7 entonces el número es divisible entre 7. Si el resultado es diferente, el número no es divisible entre 7.
11	Un número es divisible entre 11 cuando la suma de los números que ocupan la posición par menos la suma de los números que ocupan la posición impar es igual a 0 ó a un múltiplo de 11.
13	Para saber si un número es divisible entre 13 hay que restar el número sin la cifra de las unidades y 9 veces la cifra de las unidades. Si esa resta tiene como resultado 0 múltiplo de 13 entonces el número es divisible entre 13.
17	Para saber si un número es divisible por diecisiete hay que tomar la última cifra de la derecha multiplicada por 5 y restar esta cantidad al número que resulta de quitar dicha cifra. Si el resultado es cero o múltiplo de 17 el número es divisible por 17.

Descomposición en factores Primos

Para descomponer un número en factores primos:

1) Dividimos el número entre los sucesivos números primos (2, 3, 5, 7, 11, 13,….) tantas veces como se pueda hasta obtener la unidad utilizando los criterios de divisibilidad.
2) Si el número acaba en cero quitamos el cero y añadimos los factores 2 y 5.
3) Escribimos el número como producto de los factores primos y si hay algunos repetidos los expresamos como potencias.

$$\left.\begin{array}{l} 750 = 75 \cdot 10 \\ \begin{array}{r|l} 75 & 5 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \end{array}\right\} 750 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$$

$$\begin{cases} 72 = 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2 \\ 64 = 8 \cdot 8 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^6 \\ 36 = 6 \cdot 6 = 2^2 \cdot 3^2 \\ 12 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 4 \end{cases}$$

Máximo Común Divisor (M.C.D.)

El máximo común divisor de varios números es el mayor de los divisores comunes de ellos y se representa por: M.C.D. Para calcularlo:

1) Se descomponen los números en factores primos.
2) Se toman solamente los factores primos comunes, elevado cada uno al menor exponente con el que aparece.
3) Se multiplican los factores elegidos.

Mínimo Común Múltiplo (m.c.m.)

El mínimo común múltiplo de varios números es el menor de los múltiplos comunes de ellos y se representa por: m.c.m. Para calcularlo:

1) Se descomponen los números en factores primos.
2) Se toman todos los factores primos (comunes y no comunes) elevado cada uno al mayor exponente con el que aparece.
3) Se multiplican los factores elegidos

Calcula el MCD y el mcm de los números 54, 72 y 110

Descomponemos en factores primos:

$$\left.\begin{array}{l} 54 = 6 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^3 \\ 72 = 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2 \\ 110 = 11 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \end{array}\right\} \begin{array}{l} M.C.D.(54,72,110) = 2 \\ m.c.m.(54,72,110) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 = 11.880 \end{array}$$

Resolución de problemas

Todos estos conceptos se aplican después en la resolución de problemas, cosa para la que estudiamos matemáticas.

En general, a la hora de resolver problemas en matemáticas, seguiremos el siguiente esquema:

a) Lectura y comprensión del enunciado.
b) Análisis de los datos del enunciado. (A veces es importante ayudarse con un dibujo)
c) Plantear las operaciones a realizar y realizarlas sin olvidar el orden de prioridad.
d) Resolver el problema paso a paso intentando explicar los pasos seguidos para resolverlo y dando la solución pedida.
e) Evaluar e interpretar los resultados. ¿Son lógicos? ¿se corresponden con lo pedido en el enunciado? ¿puedo comprobar si la solución es correcta?