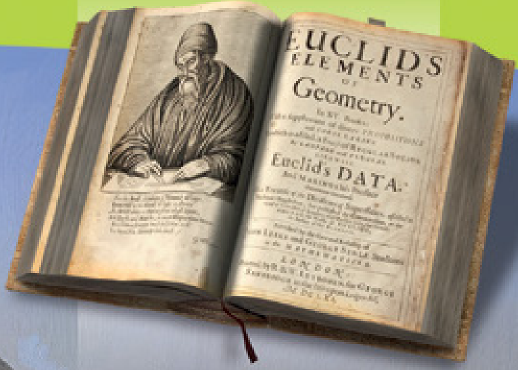
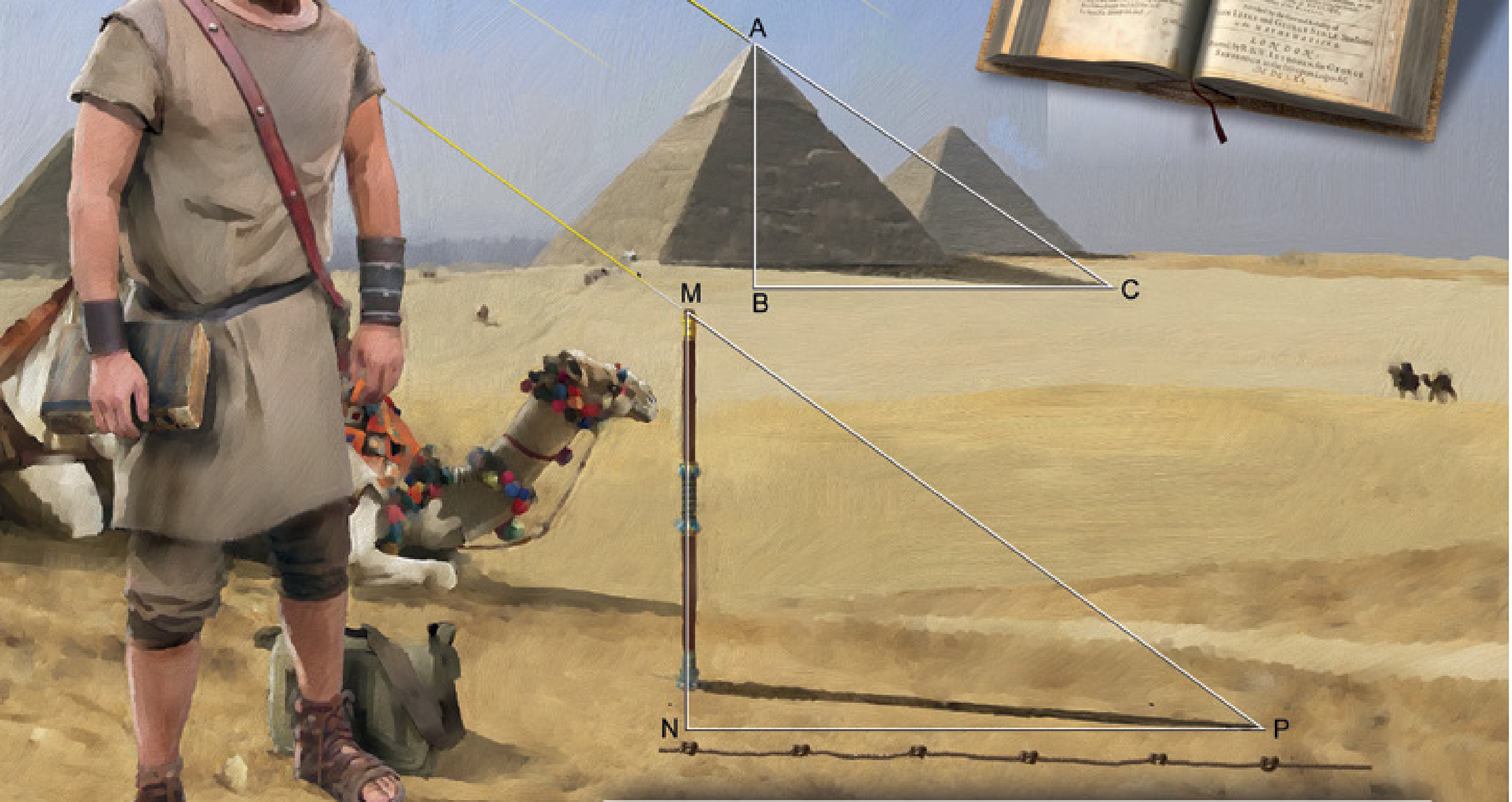
10 Semejanza

El saber geométrico de los antiguos egipcios y babilonios era muy extenso pero tenía un carácter exclusivamente práctico, utilitario. Los griegos lo recogieron y le dieron un sentido especulativo, cultural.





Tales de Mileto, el primero de los siete sabios de Grecia, impulsó el pensamiento griego y, junto con **Pitágoras** y sus discípulos, fue el creador de la matemática deductiva.

A raíz de sus numerosos viajes, aprendió las matemáticas egipcias y babilonias. Se cuenta que calculó la altura de una de las pirámides midiendo su sombra y comparándola con la sombra arrojada por su bastón. Se trata de una aplicación del teorema que lleva su nombre.

Sin embargo, no fue él quien demostró el teorema, sino que, una vez más, el mérito le corresponde a **Euclides.** La demostración, nada sencilla, se encuentra en el libro VI de sus *Elementos.*

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Figuras semejantes

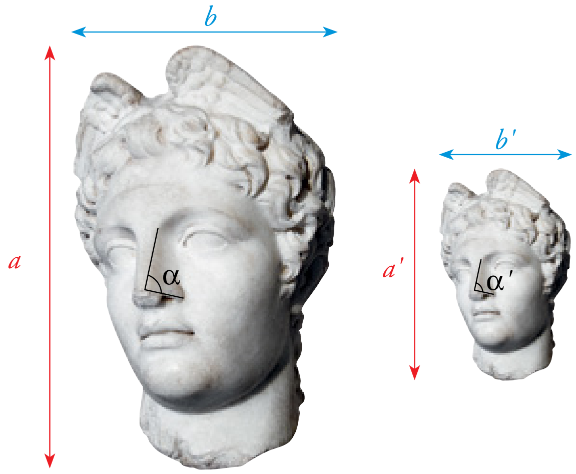
Las dos figuras del margen son iguales, salvo en el tamaño. Tienen la *misma forma*; es decir, son **semejantes.**

¿Cómo se caracteriza matemáticamente esa sensación que es tan clara visualmente? La muñeca de la derecha es el doble de alta que la de la izquierda y el doble de ancha. Y la base tiene un diámetro doble… Cada longitud de la figura de la derecha se obtiene multiplicando por 2 la correspondiente longitud de la figura de la izquierda.

Dos **figuras** distintas son **semejantes** cuando solo difieren en su tamaño. En tal caso, los segmentos correspondientes son proporcionales. Es decir, cada longitud en una de ellas se obtiene multiplicando la longitud correspondiente en la otra por un número fijo, llamado **razón de semejanza.**

En dos figuras semejantes se cumple que:

- Un ángulo medido en la primera = el ángulo correspondiente en la segunda.
- Una proporción en la primera = la proporción correspondiente en la segunda.



Por ejemplo, en estas dos cabezas:

- Los ángulos α y α' coinciden.
- La relación, a/b, entre el largo y el ancho de la primera es la misma que a'/b' en la segunda.

Razón de semejanza

Cuando decimos que la razón de semejanza entre dos figuras F y F' es 4, queremos decir que:

$$\frac{\text{long. de un segmento de } F}{\text{long. del correspondiente de } F'} = 4$$

Por tanto, cuando usamos la expresión *razón de semejanza*, es importante especificar el orden de las figuras.

Por ejemplo, si la razón de semejanza entre las figuras A y B es 2, la razón de semejanza entre B y A será 1/2.

En la web

Practica los conceptos de figuras semejantes y de razón de semejanza.

Ejercicio resuelto

La razón de semejanza entre dos triángulos semejantes es 0,4. Si el mayor tiene 3 cm de base y 5 cm de altura, ¿cuánto miden la base y la altura del menor?

Llamamos a y b a la altura y a la base del triángulo menor:

- $\frac{a}{5} = 0{,}4 \rightarrow a = 5 \cdot 0{,}4 = 2$ cm
- $\frac{b}{3} = 0{,}4 \rightarrow b = 3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2$ cm

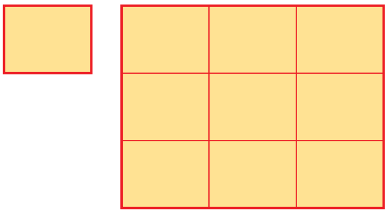
Por tanto, el triángulo menor tiene 1,2 cm de base y 2 cm de altura.

Piensa y practica

1. Dos rectángulos semejantes tienen una razón de semejanza de 0,8. Las dimensiones del menor son 4 cm de ancho por 12 cm de alto. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo mayor?

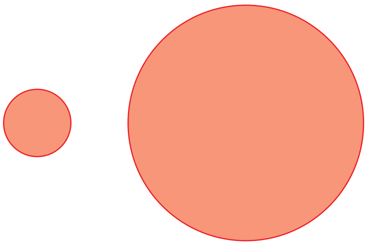
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Relación entre las áreas de dos figuras semejantes



Estos dos rectángulos son semejantes. La razón de semejanza es 3; es decir, cada longitud del rectángulo grande es triple de la correspondiente longitud en el pequeño. Por tanto, el área del grande es $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ veces el área del pequeño.

> Si la razón de semejanza de dos figuras es k, entonces la razón de sus áreas es k^2.

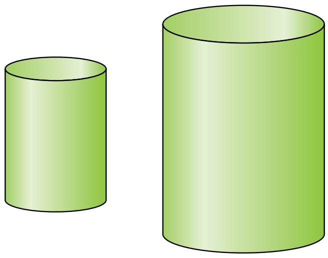


Dos círculos siempre son semejantes. La razón de semejanza es el cociente de sus radios.

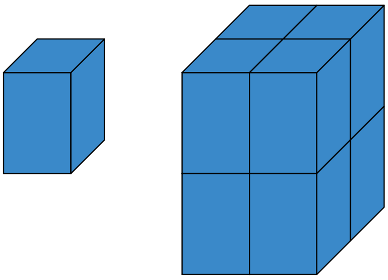
Ejemplos

- Si el radio de un círculo es 3,5 veces el de otro, el área del grande es $3{,}5^2 = 12{,}25$ veces el área del pequeño.
- Para pintar un depósito cilíndrico, se han gastado 12,5 kg de pintura. Otro depósito es semejante al anterior, con razón de semejanza 1,6. ¿Cuánta pintura se necesitará para pintarlo?

  El área del segundo cilindro es $1{,}6^2 = 2{,}56$ veces la del primero. Por lo tanto, se necesitará $12{,}5 \cdot 2{,}56 = 32$ kg de pintura.



Relación entre los volúmenes de dos figuras semejantes



Estos dos ortoedros son semejantes. La razón de semejanza es 2; es decir, cada longitud del grande es doble de la correspondiente en el pequeño. Por tanto, el volumen del grande es $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ veces el volumen del pequeño.

> Si la razón de semejanza de dos cuerpos es k, entonces la razón de sus volúmenes es k^3.

Ejemplos

- Si el radio de una esfera es 3,5 veces el de otra, el volumen de la grande es $3{,}5^3 = 42{,}875$ veces el volumen de la pequeña.
- Si un depósito cilíndrico es semejante a otro, con razón de semejanza 1,6, y el valor del petróleo que cabe en el pequeño es 3 750 €, entonces el valor del petróleo que cabe en el segundo es:

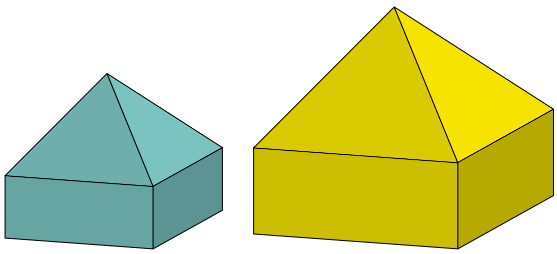
$$3\,750 \cdot 1{,}6^3 = 3\,750 \cdot 4{,}096 = 15\,360 \text{ €}$$

En la web

Practica la semejanza de áreas.

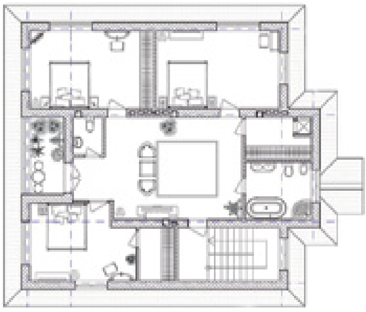
Piensa y practica

2. Estas dos casitas de cartulina son semejantes. La razón de semejanza es 1,5. Para fabricar la pequeña, se han necesitado 7,2 dm^2 de cartulina, y su volumen es 6,4 *l*. ¿Cuánta cartulina lleva la grande y qué volumen tiene?



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Planos, mapas y maquetas



Muchachas tocando el piano, de Renoir.

Quien se dispone a comprar o a alquilar una casa, la estudia con todo cuidado. Gran parte de este estudio se suele hacer sobre el plano.

El **plano** de una casa es (debe ser) una imagen fiel de la realidad. Tiene la misma distribución, la misma forma que la casa real, y sus dimensiones están reducidas según una escala. Es decir, la planta de la casa y el plano son **figuras semejantes.**

Por lo mismo, un **mapa** es una figura semejante a la porción de territorio que representa.

Cuando consultamos un plano o un mapa, cuando contemplamos una fotografía, lo hacemos sabiendo que son figuras semejantes a la realidad que representan.

Si de la realidad solo nos interesa la forma, la composición, el colorido…, contemplamos la reproducción como si fuera la auténtica. Sin embargo, al consultar un plano o un mapa, además de la forma, importan los tamaños y las distancias en la realidad. Por eso, un plano o un mapa siempre va acompañado de la escala con la que está construido.

- Los planos y los mapas son semejantes a la realidad que representan. En ellos, además de la distribución de lugares, importan los tamaños y las distancias. Por eso llevan una escala.
- La **escala** es el cociente entre cada longitud de la reproducción (mapa, plano o maqueta) y la correspondiente longitud en la realidad. Es decir, es la **razón de semejanza** entre la reproducción y la realidad.

Ejemplo

En este mapa de la costa del Levante y las islas Baleares, la escala 1:5 000 000 significa que cada distancia de la realidad se obtiene multiplicando por 5 000 000 la correspondiente en el mapa.

Vamos a comprobar que efectivamente las distancias correspondientes a la realidad son 5 000 000 de veces sus medidas sobre el mapa.

Distancia entre Valencia y Palma de Mallorca:

$$\frac{\text{Distancia real}}{\text{Distancia en el mapa}} = \frac{260 \text{ km}}{52 \text{ mm}} = \frac{260\,000\,000 \text{ mm}}{52 \text{ mm}} = 5\,000\,000$$

- Comprueba tú el resto de las medidas.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

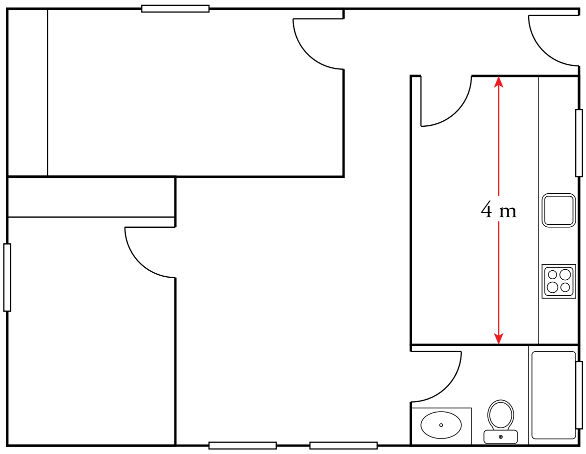
Obtención de la escala

Cuando se nos da una reproducción (plano, mapa o maqueta) sin indicar su escala, podemos averiguarla si conocemos la distancia real entre dos de sus puntos.

Por ejemplo, si en el camping que hay en el plano de la izquierda conocemos la distancia real de la fuente al embarcadero, podremos averiguar la escala y, con ella, calcular otras distancias reales a partir del plano.

Ejemplo

Tenemos el plano de nuestra casa, pero nos lo han dado sin escala. En lugar de medir todas las paredes, optamos por medir el largo de la cocina tanto en la realidad como en el plano.



Las medidas que obtenemos son:

En el plano: 4 cm

En la realidad: 4 m

Por tanto, la escala es 1:100.

Ahora podemos obtener cualquier otra distancia midiendo únicamente sobre el plano y multiplicando los resultados por 100.

En la web

Practica el concepto de escala.

Cálculo de la escala

$$\frac{4\text{ cm}}{4\text{ m}} = \frac{4\text{ cm}}{400\text{ cm}} = \frac{1}{100}$$

Piensa y practica

1. Tomando medidas sobre el mapa de la página anterior y teniendo en cuenta la escala:

a) Calcula la distancia entre Barcelona y Valencia.

b) ¿Cuánto tarda un ferry que va de Tarragona a Palma de Mallorca a 20 nudos?

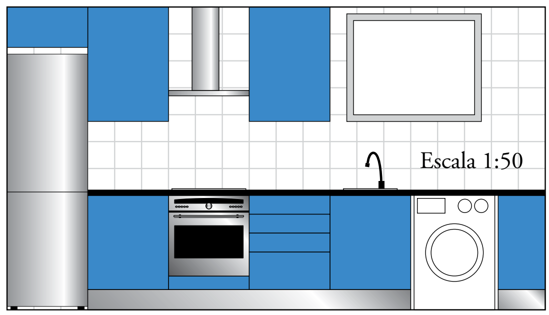
Cada nudo equivale a 1,852 km/h.

2. Sabiendo que la distancia que separa en la realidad el embarcadero de la fuente es 136 m, halla su escala y calcula las siguientes distancias:

a) Camping - playa. b) Playa - fuente.

c) Fuente - barbacoa. d) Fuente - camping.

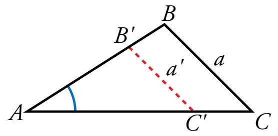
3. Este es el plano de la pared de una cocina:



Halla sus dimensiones (largo y ancho); la superficie de la ventana y la distancia entre los fogones y la campana.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Semejanza entre triángulos rectángulos. Aplicaciones

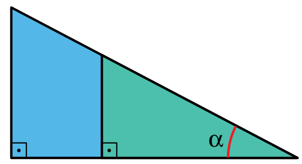


Los triángulos ABC y $AB'C'$ tienen un ángulo común, el $\hat{A}$. Es decir, el triángulo pequeño está "encajado" en el grande. Además, los lados opuestos a $\hat{A}$ son paralelos. Por eso, decimos que estos dos triángulos están en **posición de Tales.**

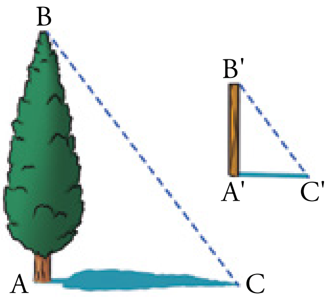
Dos triángulos en posición de Tales son semejantes.

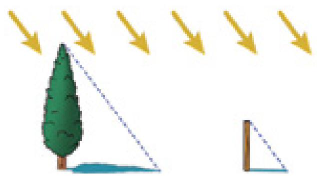
Dos triángulos rectángulos que tengan un ángulo agudo igual son semejantes.

Pues, en tal caso, se pueden poner en posición de Tales.



Cálculo de la altura de un objeto vertical a partir de su sombra





Los rayos del sol llegan a la Tierra paralelos unos a otros.

Para calcular la altura de un árbol, $\overline{AB}$, procedemos del siguiente modo:

- Clavamos en el suelo, verticalmente, una estaca $A'B'$.
- Medimos la longitud de la estaca, $\overline{A'B'}$, y de las sombras, $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$, del árbol y de la estaca, respectivamente, proyectadas por el sol en el mismo instante.

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes porque tienen dos ángulos respectivamente iguales:

$\hat{A} = \hat{A}'$ porque los dos son rectos.

$\hat{C} = \hat{C}'$ porque *los rayos del sol inciden sobre el árbol y la estaca con el mismo ángulo.*

Puesto que los triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Como conocemos $\overline{AC}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{A'C'}$, podemos calcular la altura del árbol, $\overline{AB}$.

Problema resuelto

En la descripción anterior, calcular la altura del árbol sabiendo que: longitud de la estaca = 1,6 m; sombra del árbol = 3,5 m; sombra de la estaca = 0,7 m.

$$\frac{\overline{AB}}{1,6} = \frac{3,5}{0,7} \rightarrow \overline{AB} = \frac{1,6 \cdot 3,5}{0,7} = 8$$

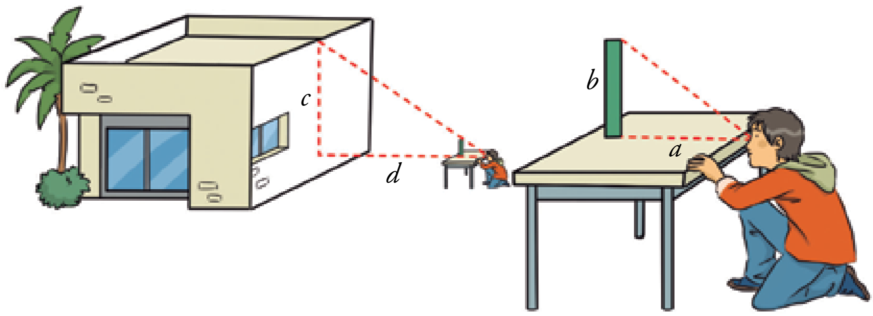
Solución: El árbol mide 8 m.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Cálculo de la altura de un objeto vertical sin recurrir a la sombra

En la web

Calcula la altura de un árbol por medio de un espejo.

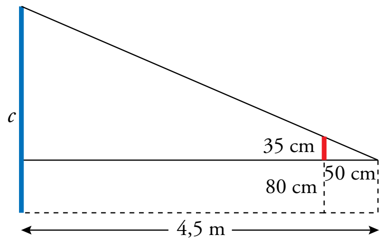


El chico lanza una visual desde el borde de la mesa al punto más alto de la casa. Estando en esa posición, mueve la regla, situándola de modo que su extremo quede alineado con la visual (la mesa debe estar en posición horizontal, y la regla, en vertical).

Los triángulos rectángulos, de catetos a, b y d, c, son semejantes, pues se encuentran en posición de Tales. Por tanto:

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a}$$

Conociendo a, b y d, se calcula c. La altura de la casa es igual a c más la altura de la mesa.



Problema resuelto

En la descripción anterior, calcular la altura de la casa sabiendo que: longitud de la regla, $b = 35$ cm; distancia del borde de la mesa al pie de la regla, $a = 50$ cm; distancia del borde de la mesa a la casa, $d = 4{,}5$ m; altura de la mesa = 80 cm.

Expresamos todas las distancias en metros.

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{c}{4{,}5} = \frac{0{,}35}{0{,}5} \rightarrow c = \frac{4{,}5 \cdot 0{,}35}{0{,}5} = 3{,}15 \text{ m}$$

$$3{,}15 + 0{,}8 = 3{,}95 \text{ m}$$

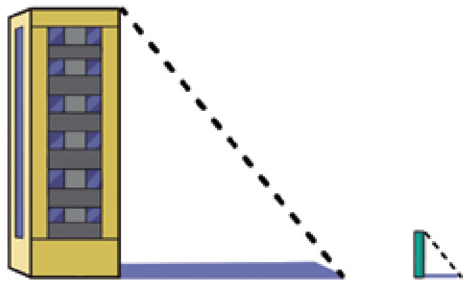
Solución: La altura de la casa es de 3,95 m.

En la web

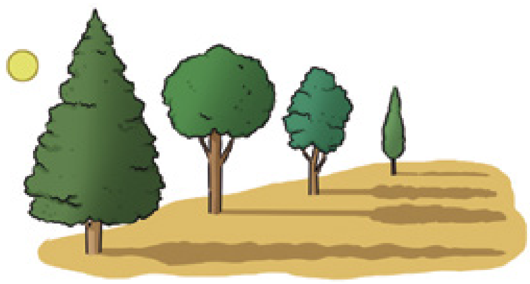
Problemas en los que hay que calcular medidas inaccesibles utilizando la semejanza de triángulos.

Piensa y practica

1. Calcula la altura de un edificio que proyecta una sombra de 49 m en el momento en que una valla de 2 m proyecta una sombra de 1,25 m.



2. Las sombras de estos árboles medían, a las cinco de la tarde, 12 m, 8 m, 6 m y 4 m, respectivamente. Si el árbol pequeño mide 2,5 m, ¿cuánto miden los demás?

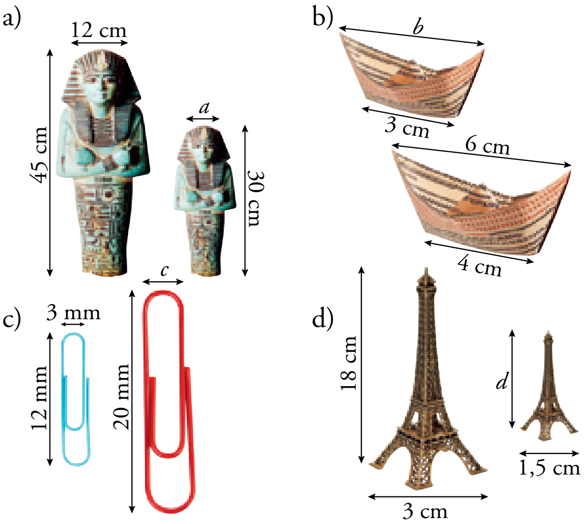


Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

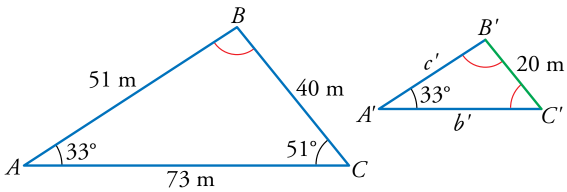
Ejercicios y problemas

Figuras semejantes

1. Suponiendo que en cada apartado hay dos figuras semejantes, calcula la razón de semejanza entre la primera y la segunda, y halla las longitudes que faltan.



2. Sabemos que los siguientes triángulos son semejantes. Halla los lados y los ángulos que faltan.

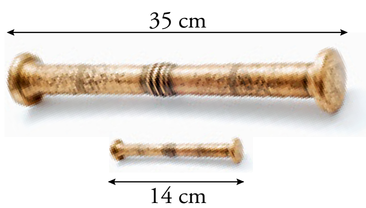


3. Los lados de un triángulo miden 7,5 cm, 18 cm y 19,5 cm. Se construye otro semejante a él cuyo lado menor mide 5 cm.

a) ¿Cuál es la razón de semejanza al pasar del primero al segundo?

b) ¿Cuánto medirán los otros dos lados del segundo triángulo?

4. Estos dos cetros de oro son semejantes, si el más grande tiene una superficie de 260 cm^2 y un volumen de 350 cm^3, ¿qué superficie y qué volumen tiene el pequeño?

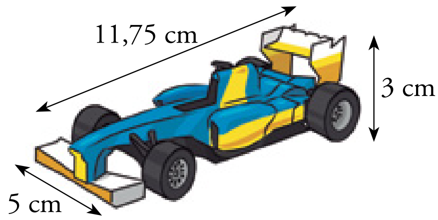


Escalas

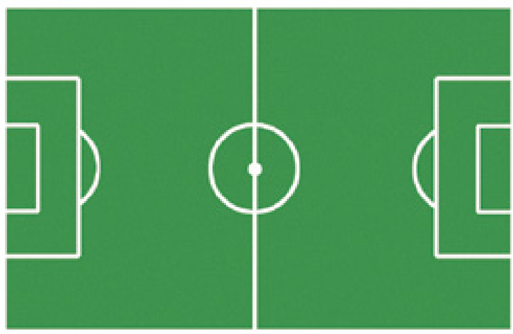
5. Una pareja que va a comprar una casa consulta un callejero a escala 1:30 000. Miden sobre el plano la distancia de esta al metro y resulta ser de 2,3 cm. ¿Cuál es la distancia real?

Por otro lado, saben que la distancia de esa casa a la guardería es de 1,5 km. ¿A qué distancia se encontrarán en el callejero?

6. El coche teledirigido de Pablo es una reproducción a escala 1:40 de los de “Fórmula 1”. Observa sobre el dibujo las dimensiones del coche de juguete y halla las dimensiones del coche real.



7. Averigua cuáles son las dimensiones reales de este campo de fútbol. Calcula la superficie del área de penalti (área grande) y la del círculo central.



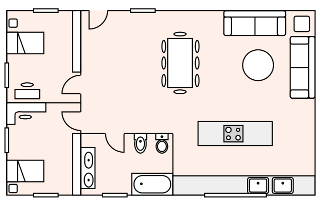
1:1 400

8. Ana ha dibujado el plano de su nueva casa. Sabemos que cada sofá mide 3 m de largo.

a) ¿Qué dimensiones reales tienen las camas?

b) Ana quiere pintar el techo. Si le cuesta 2 € por metro cuadrado, ¿cuánto se gastará en pintarlo?

c) Ana quiere poner una mesa de ping-pong de 2,70 m × 1,50 m. Halla sus dimensiones en el plano.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

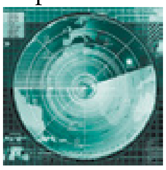
Ejercicios y problemas

Resuelve problemas

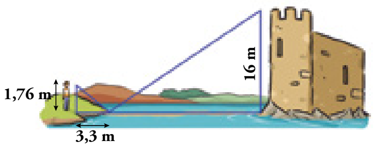
9. La altura de la puerta de la casa mide 3 m. ¿Cuál es la altura de la casa? ¿Y la del árbol más pequeño?

10. Para determinar que la altura de un eucalipto es de 11 m, Carlos ha medido la sombra de este (9,6 m) y la suya propia (1,44 m), ambas proyectadas por el Sol a la misma hora. ¿Cuánto mide Carlos?

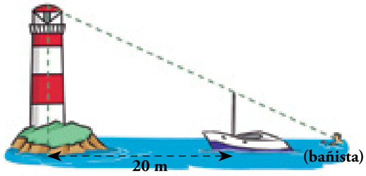
11. Sobre la pantalla del sonar de un submarino se ve que un objeto se acerca a 1 cm por minuto. Si la imagen en la pantalla tiene una escala de 1:1 000 000, ¿a cuántos kilómetros por hora se mueve el objeto?



12. Halla la distancia de Marcos a la base de la torre a partir de los datos del dibujo.

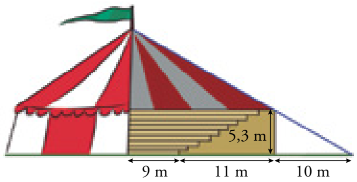


13. El bañista se encuentra a 5 m del barco. La borda del barco está a 1 m sobre el nivel del mar. El mástil del barco sobresale 3 m de la borda. El bañista ve alineados el extremo del mástil y el foco del faro.



¿A qué altura sobre el nivel del mar se encuentra el foco del faro?

14. ¿Qué altura tiene el circo del dibujo?



15. El Titanic fue un barco británico que se hundió en 1912 durante su viaje inaugural. James Cameron construyó, para rodar la película *Titanic*, una réplica de unos 15 m de largo. El Titanic medía, unos 270 m de largo, 30 m de ancho y 53 m de alto. Además, pesaba unas 46 000 toneladas.

a) ¿A qué escala construyó James Cameron el barco?

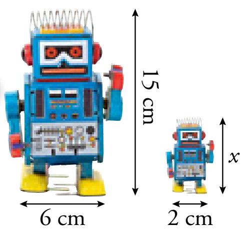
b) ¿Cuánto medían el ancho y alto de la maqueta?

c) Si la maqueta se hubiera construido con los mismos materiales que el barco, ¿cuánto pesaría?

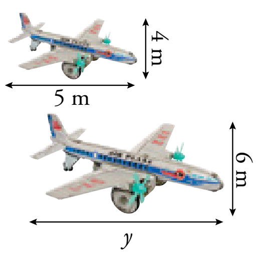
Autoevaluación

1. Calcula las longitudes que faltan en estas figuras semejantes y halla la razón entre ellas:

a)

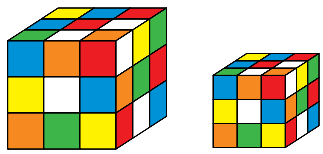


b)

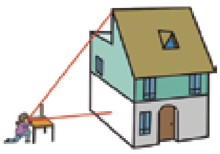


2. Un avión quiere viajar, en línea recta, entre Las Palmas de Gran Canaria y Palma de Mallorca. En un plano a escala 1:9 000 000, la distancia que medimos es de 24 cm. ¿Cuántos kilómetros recorrerá el avión?

3. La razón de semejanza entre estas dos figuras es 1,5. Para colorear la grande, se han necesitado 216 cm^2 de pegatina, y su volumen es 216 cm^3. ¿Qué superficie de pegatina se necesita para construir la pequeña? ¿Qué volumen tiene?



4. La regla mide 20 cm y está a 38 cm del borde de la mesa más cercano a Silvia. Halla la altura de la casa sabiendo que la mesa mide 75 cm de altura y que Silvia está a 7,6 m de la casa.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....