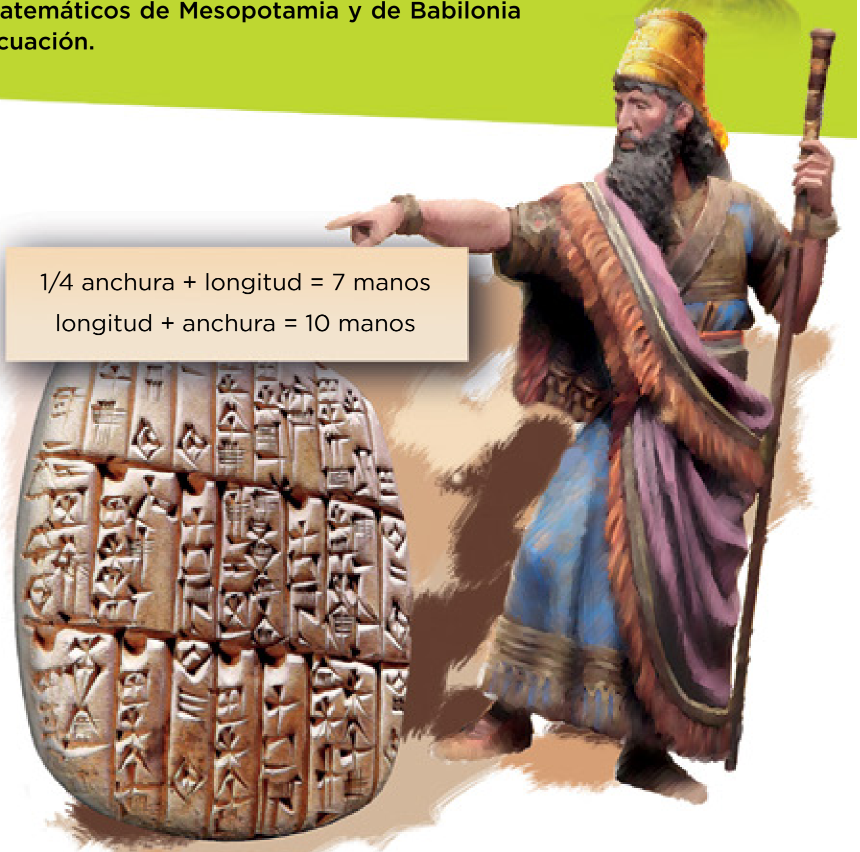
8 Sistemas de ecuaciones

Desde el siglo XVII a. C., los matemáticos de Mesopotamia y de Babilonia ya conocían el concepto de ecuación.

Los escritos de los matemáticos de Babilonia incluían ya sistemas de ecuaciones relacionados con sencillos problemas cotidianos, como el que ves aquí, traducido de una tablilla de barro.

Los resolvían apelando al ingenio en cada caso particular, sin desarrollar un método general. Y algo parecido les ocurrió a los egipcios y, después, a los griegos.



Los chinos, en el siglo II a. C., avanzaron mucho en ese terreno, llegando a resolver con toda soltura los sistemas de ecuaciones. Pero ese saber no llegó a Occidente hasta muchos siglos más tarde.

En Europa, la aparición del álgebra simbólica a partir del siglo XV permitió su despegue definitivo, abriendo camino al descubrimiento de los métodos de resolución de ecuaciones y, paralelamente, de los conjuntos de varias ecuaciones con varias incógnitas (sistemas de ecuaciones).

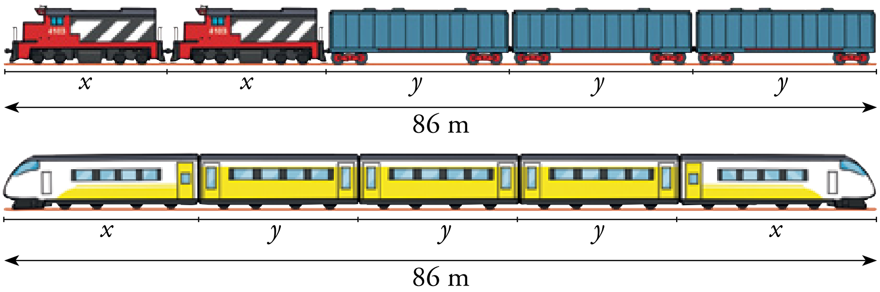
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Una ecuación de primer grado con dos incógnitas expresa la relación existente entre dos valores desconocidos.

Ejemplo

En cada uno de los siguientes trenes, no conocemos ni la longitud de una máquina, x, ni la de un vagón, y.



Pero en ambos podemos afirmar que: $2x + 3y = 86$.

Observa, también, que las longitudes x e y son distintas en cada tren. Es decir, la igualdad puede ser cierta para valores diferentes de x e y. Por ejemplo:

$$\left.\begin{matrix} x = 16 \\ y = 18 \end{matrix}\right\} \to \boxed{2 \cdot 16 + 3 \cdot 18 = 86} \qquad \left.\begin{matrix} x = 19 \\ y = 16 \end{matrix}\right\} \to \boxed{2 \cdot 19 + 3 \cdot 16 = 86}$$

Decimos entonces que esos pares de valores (x, y) son soluciones de la ecuación y vemos que la solución no es única.

En realidad, dando a x un valor cualquiera, se obtiene un valor correspondiente para y; es decir, la ecuación tiene infinitas soluciones.

Y si queremos determinar la longitud de cada máquina y la de cada vagón, necesitamos más datos.

- Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas reciben el nombre de **ecuaciones lineales.**
- Una **solución de una ecuación lineal** es un par de valores que hace cierta la igualdad.
- Una ecuación lineal tiene **infinitas soluciones.**

Ten en cuenta

La ecuación $2x + 3y = 86$ tiene infinitas soluciones.

x	16	19	20,5	…
y	18	16	15	…

Forma general

Toda ecuación lineal puede escribirse en esta forma:

$$ax + by = c$$

donde a, b y c son valores conocidos.

Piensa y practica

1. Averigua cuáles de los siguientes pares de valores son soluciones de la ecuación $3x - 4y = 8$.

a) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

2. Busca tres soluciones diferentes para la siguiente ecuación:

$$2x - y = 5$$

3. Copia y completa en tu cuaderno la tabla con soluciones de la ecuación $3x + y = 12$.

x	0		3		5	–1		–3
y		9		0			18	

4. Reduce a la forma general estas ecuaciones:

a) $2x - 5 = y$ b) $x - 3 = 2(x + y)$ c) $y = \dfrac{x + 1}{2}$

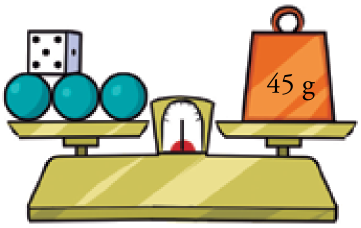
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Representación gráfica de una ecuación lineal

Para obtener distintas soluciones de una ecuación lineal, se suele despejar una de las incógnitas y dar valores a la otra.

Los valores se recogen, ordenados, en una tabla.

Tomemos, por ejemplo, la ecuación que relaciona el peso de una pelota (x) y de un dado (y) en la balanza que ves a la izquierda:



 $\rightarrow x$

 $\rightarrow y$

$3x + y = 45$

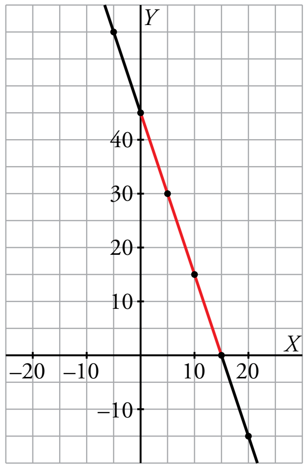
$3x + y = 45$

↓ Despejamos y.

$y = 45 - 3x$

↓ Dando distintos valores a x, obtenemos los correspondientes de y.

x	0	5	10	15	20	–5	…
y	45	30	15	0	–15	60	…



Al representar estos valores en el plano, quedan alineados en una recta.

Cada punto del segmento rojo corresponde a una posible solución para el peso de la pelota y el del dado (valores positivos).

- Cada ecuación lineal tiene una recta asociada en el plano.
- Cada punto de esa recta representa una de las infinitas soluciones de la ecuación lineal.

En la web Practica la representación gráfica de ecuaciones lineales.

Ejercicio resuelto

Representar gráficamente la ecuación $3x - 2y - 6 = 0$.

- Despejamos y para construir la tabla de valores:

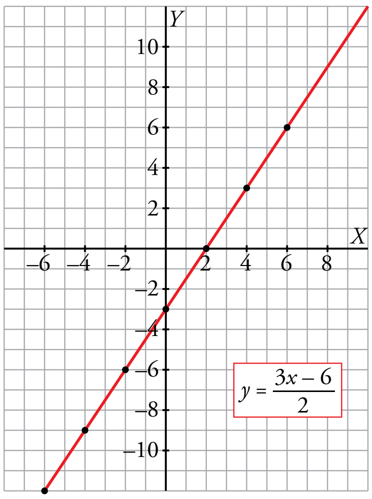
$3x - 2y - 6 = 0$

$3x - 6 = 2y$

$y = \dfrac{3x - 6}{2}$

x	–6	–4	–2	0	2	4	6	…
y	–12	–9	–6	–3	0	3	6	…

- A la izquierda puedes ver la representación gráfica.



Piensa y practica

5. Copia y completa la tabla para cada ecuación y representa la recta correspondiente.

a) $x - y = 0 \rightarrow y = x$ b) $x - 2y = 2 \rightarrow y = \dfrac{x-2}{2}$

x	–6	–4	–2	0	2	4	6	…
y								…

6. Representa gráficamente.

a) $2x - y = 1$ b) $2x + y = 1$ c) $y = \dfrac{x}{2} + 3$

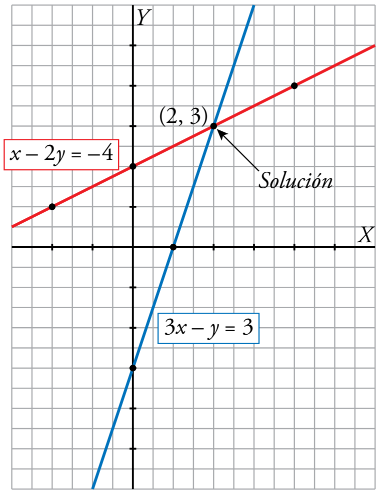
7. Escribe la ecuación y representa su recta.

 +  = 10 €

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Sistemas de ecuaciones lineales

- Dos ecuaciones lineales forman un **sistema:** $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$
- La **solución del sistema** es la solución común a ambas ecuaciones.



SOLUCIÓN DEL SISTEMA: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

Ejemplo

Las dos ecuaciones siguientes forman un sistema: $\begin{cases} 3x - \ \ y = \ \ 3 \\ \ \ x - 2y = -4 \end{cases}$

Observa las tablas de soluciones de cada ecuación:

$3x - y = 3 \ \rightarrow\ y = 3x - 3$

x	–1	0	1	2	3	…
y	–6	–3	0	3	6	…

$x - 2y = -4 \ \rightarrow\ y = \dfrac{x + 4}{2}$

x	–2	0	2	4	6	…
y	1	2	3	4	5	…

La solución del sistema es el par de valores $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ que satisface ambas ecuaciones.

Observa, en la representación gráfica, que las dos rectas pasan por el punto (2, 3); es decir, se cortan en dicho punto.

La *solución de un sistema* de ecuaciones lineales coincide con el *punto de corte* de las rectas asociadas a las ecuaciones.

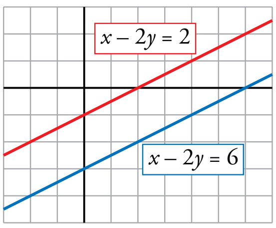
CASOS ESPECIALES

SISTEMAS SIN SOLUCIÓN

Las ecuaciones son incompatibles.

Las rectas son paralelas.

Por ejemplo: $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$

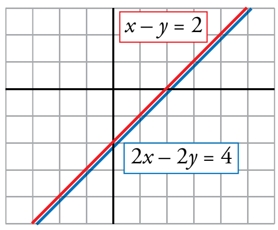


SISTEMAS CON INFINITAS SOLUCIONES

Las ecuaciones son equivalentes.

Las rectas se superponen.

Por ejemplo: $\begin{cases} \ \ x - \ \ y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$



En la web
Practica la resolución gráfica de ecuaciones lineales.

Piensa y practica

1. Representa gráficamente y escribe la solución.

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2 + x/2 \\ y = 4 - x/2 \end{cases}$

2. Representa gráficamente.

a) $\begin{cases} \ \ x - y = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y - 6 = 0 \\ 2x + \ \ y + 2 = 0 \end{cases}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Método algebraico para la resolución de sistemas lineales

En la web

Ayuda para resolver sistemas por el método de sustitución.

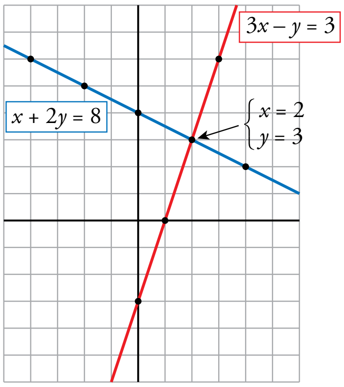
Practica la resolución de sistemas por el método de sustitución.

Vamos a aprender una técnica para resolver sistemas de ecuaciones. Consiste en obtener, a partir de las dos ecuaciones, otra *ecuación con una sola incógnita*. Resuelta esta, es fácil obtener el valor de la otra incógnita.

Método de sustitución

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y la expresión obtenida se sustituye en la otra ecuación.

Ejercicio resuelto



Resolver por sustitución este sistema: $\begin{cases} \boldsymbol{3x - y = 3} \\ \boldsymbol{x + 2y = 8} \end{cases}$

a) Despejamos, por ejemplo, x en la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \;\rightarrow\; x = \boxed{8 - 2y} \end{cases}$$

b) Sustituimos la expresión obtenida en la primera ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 3 \\ x = 8 - 2y \end{array}\right\} \rightarrow 3\underbrace{(8 - 2y)} - y = 3$$

c) Ya tenemos una ecuación con una sola incógnita. La resolvemos:

$$3(8 - 2y) - y = 3 \;\rightarrow\; 24 - 6y - y = 3 \;\rightarrow\; 7y = 21 \;\rightarrow\; y = \frac{21}{7} \;\rightarrow\; \boxed{y = 3}$$

d) Sustituimos el valor de $y = 3$ en la expresión obtenida al principio, al despejar x, y calculamos:

$$x = 8 - 2y \;\rightarrow\; x = 8 - 2 \cdot 3 \;\rightarrow\; \boxed{x = 2}$$

Solución del sistema $\rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

En la web

Practica el método de sustitución.

Piensa y practica

1. Resuelve por sustitución y comprueba que obtienes las soluciones que se adjuntan abajo.

a) $\begin{cases} y = x \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2y \\ x + 3y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x + 1 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$

SOLUCIONES

a) $x = 3$, $y = 3$ b) $x = 4$, $y = 2$ c) $x = 9$, $y = 10$ d) $x = 2$, $y = -1$

2. Resuelve por sustitución y comprueba las soluciones que se ofrecen.

a) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 7x - 3y = 5 \end{cases}$

SOLUCIONES

a) $x = 3$, $y = 4$ b) $x = 3$, $y = 5$ c) $x = 5$, $y = -2$ d) $x = -1$, $y = -4$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

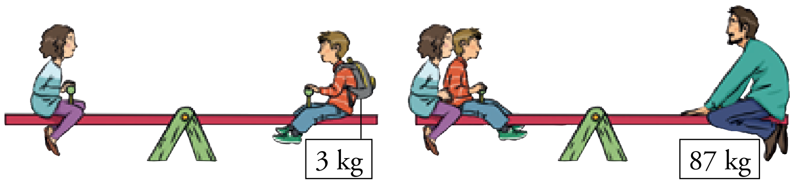
4 Resolución de problemas con ayuda de los sistemas de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones suponen una potente herramienta para resolver problemas.

Estudia con detenimiento los ejemplos que tienes a continuación. En ellos se resuelven problemas tipo que te servirán de modelo para abordar otros similares.

Problemas resueltos

1. ***Sara, en el balancín, se equilibra con Alberto, su hermano menor, que lleva una mochila de 3 kilos y juntos, sin mochila, se equilibran con su padre, que pesa 87 kilos. ¿Cuánto pesa cada uno?***



a) Identifica los elementos del problema y codifícalos algebraicamente.

PESO DE SARA $\rightarrow x$

PESO DE ALBERTO $\rightarrow y$

b) Expresa, mediante ecuaciones, las relaciones existentes entre esos elementos.

Sara pesa 3 kilos más que Alberto $\rightarrow x = y + 3$

Sara y Alberto, juntos, pesan 87 kilos $\rightarrow x + y = 87$

c) Resuelve el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x = y + 3 \\ x + y = 87 \end{array}\right\} \rightarrow (y + 3) + y = 87 \rightarrow 2y + 3 = 87 \rightarrow 2y = 87 - 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2y = 84 \rightarrow y = \frac{84}{2} \rightarrow \boxed{y = 42}$$

$$x = y + 3 \rightarrow x = 42 + 3 \rightarrow \boxed{x = 45}$$

d) Interpreta la solución en el contexto del problema y compruébala.

Solución: Sara pesa 45 kilos, y Alberto, 42 kilos.

Comprobación: $45 = 42 + 3$

$45 + 42 = 87$

Piensa y practica

1. Pepa tiene 5 años más que su hermano Enrique, y entre los dos suman 21 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

EDAD DE PEPA $\rightarrow x$ EDAD DE ENRIQUE $\rightarrow y$

$$\left.\begin{array}{r} \text{EDAD DE PEPA} = \text{EDAD DE ENRIQUE} + 5 \\ \text{EDAD DE PEPA} + \text{EDAD DE ENRIQUE} = 21 \end{array}\right\}$$

2. En una clase hay 29 alumnos y alumnas, pero el número de chicas supera en tres al de chicos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en la clase?

CHICOS $\rightarrow x$ CHICAS $\rightarrow y$

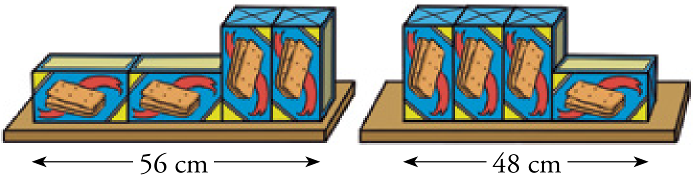
$$\left.\begin{array}{r} \text{CHICAS} = \text{CHICOS} + 3 \\ \text{CHICOS} + \text{CHICAS} = 29 \end{array}\right\}$$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2. ***Quiero colocar cuatro cajas iguales en una balda.***

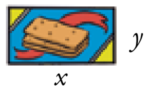
Si pongo dos tumbadas y dos de pie, ocupan 56 cm. Pero si pongo tres de pie y una tumbada, ocupan solo 48 cm.

¿Qué trozo de la balda ocupa una caja tumbada? ¿Y de pie?



a) Identifica los elementos del problema y codifícalos algebraicamente.

Dimensiones de la caja: $\left.\begin{array}{l}\text{LARGO} \rightarrow x \\ \text{ALTO} \rightarrow y\end{array}\right\}$



b) Expresa, mediante ecuaciones, las relaciones existentes entre los elementos.

Dos cajas tumbadas y dos de pie ocupan 56 cm $\rightarrow$ $2x + 2y = 56$

Una caja tumbada y tres de pie ocupan 48 cm $\rightarrow$ $x + 3y = 48$

c) Resuelve el sistema.

$$\left.\begin{array}{r}2x + 2y = 56 \\ x + 3y = 48\end{array}\right\} \begin{array}{c}\xrightarrow{\times(-1/2)} \\ \longrightarrow\end{array} \left.\begin{array}{r}-x - y = -28 \\ x + 3y = 48\end{array}\right\}$$

$$2y = 20 \rightarrow \boxed{y = 10}$$

$$x + 3y = 48 \rightarrow x + 3 \cdot 10 = 48 \rightarrow x + 30 = 48 \rightarrow x = 48 - 30 \rightarrow \boxed{x = 18}$$

d) Interpreta la solución en el contexto del problema y compruébala.

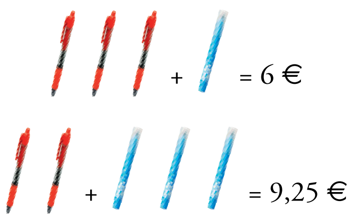
Solución: Una caja ocupa, en la balda, 18 cm si está tumbada y 10 cm si está de pie.

Comprobación: $2 \cdot 18 + 2 \cdot 10 = 56$

$18 + 3 \cdot 10 = 48$

Piensa y practica

3. He comprado tres bolígrafos y un rotulador por 6 €. Mi amiga Rosa ha pagado 9,25 € por dos bolígrafos y tres rotuladores. ¿Cuánto cuesta un bolígrafo? ¿Y un rotulador?



4. En la frutería, un cliente ha pagado 3,90 € por un kilo de naranjas y dos de manzanas. Otro cliente ha pedido tres kilos de naranjas y uno de manzanas, y ha pagado 5,70 €. ¿Cuánto cuesta un kilo de naranjas? ¿Y uno de manzanas?

5. La semana pasada, dos entradas para el cine y una caja de palomitas nos costaron 10 €.

Hoy, por cuatro entradas y tres cajas de palomitas hemos pagado 22 €. ¿Cuánto cuesta una entrada? ¿Y una caja de palomitas?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

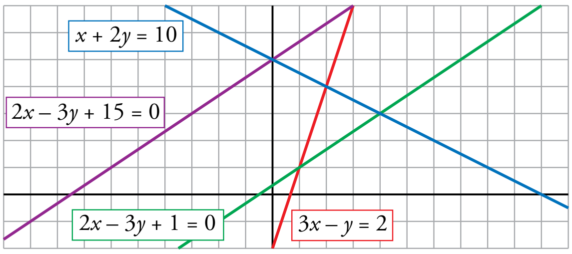
Ejercicios y problemas

Sistemas de ecuaciones. Resolución gráfica

1. Resuelve gráficamente.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - y = -3 \end{cases}$

2. Observa el gráfico y responde.



a) Escribe un sistema cuya solución sea $x = 2$, $y = 4$.

b) Escribe un sistema cuya solución sea $x = 0$, $y = 5$.

c) Escribe un sistema sin solución.

Sistemas de ecuaciones. Resolución algebraica

3. Resuelve por sustitución despejando la incógnita más adecuada.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 4y = 1 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 2y = -5 \\ 4x - 3y = 3 \end{cases}$

Resuelve problemas con sistemas de ecuaciones

4. La suma de dos números es 57, y su diferencia, 9. ¿Cuáles son esos números?

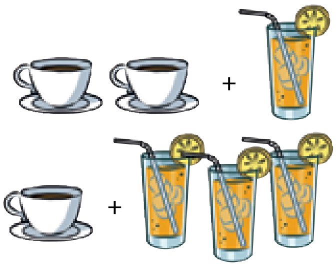
5. Calcula dos números sabiendo que su diferencia es 16 y que el doble del menor sobrepasa en cinco unidades al mayor.

6. Entre Alejandro y Palmira llevan 15 euros. Si él le diera a ella 1,50 €, ella tendría el doble. ¿Cuánto lleva cada uno?

7. Una caña de bambú, de 4,80 m de altura, se quiebra por la acción del viento, y el extremo superior, ahora apuntando hacia el suelo, queda a una altura de 60 cm. ¿A qué altura se ha quebrado la caña?

8. Un ciclista sube un puerto y, después, desciende por el mismo camino. Sabiendo que en la subida ha tardado 23 minutos más que en la bajada y que la duración total del paseo ha sido de 87 minutos, ¿cuánto ha tardado en subir? ¿Y en bajar?

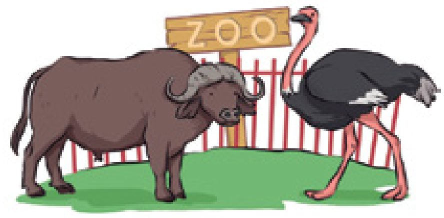
9. En cierta cafetería, por dos cafés y un refresco nos cobraron el otro día 2,70 €. Hoy hemos tomado un café y tres refrescos, y nos han cobrado 4,10 €. ¿Cuánto cuesta un café? ¿Y un refresco?



10. Un puesto ambulante vende los melones y las sandías a un precio fijo la unidad. Carolina se lleva 5 melones y 2 sandías, que le cuestan 13 €. Julián paga 12 € por 3 melones y 4 sandías. ¿Cuánto cuesta un melón? ¿Y una sandía?

11. Una tienda de artículos para el hogar pone a la venta 100 juegos de cama a 70 € el juego. Cuando lleva vendida una buena parte, los rebaja a 50 €, continuando la venta hasta que se agotan. La recaudación total ha sido de 6 600 €. ¿Cuántos juegos ha vendido sin rebajar y cuántos rebajados?

12. En el zoo, entre búfalos y avestruces hay 12 cabezas y 34 patas. ¿Cuántos búfalos son? ¿Y avestruces?



Búfalos $\to x$ *Avestruces* $\to y$

Patas de búfalo $\to 4x$ *Patas de avestruz* $\to 2y$

13. Cristina tiene el triple de edad que su prima María, pero dentro de diez años solo tendrá el doble. ¿Cuál es la edad de cada una?

	HOY	DENTRO DE 10 AÑOS
CRISTINA	x	$x + 10$
MARÍA	y	$y + 10$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

14. Para cercar una parcela rectangular, 25 metros más larga que ancha, se han necesitado 210 metros de alambrada. Calcula las dimensiones de la parcela.

15. Un concurso televisivo está dotado de un premio de 3 000 € para repartir entre dos concursantes, A y B.

El reparto se hará en partes proporcionales al número de pruebas superadas. Tras la realización de estas, resulta que el concursante A ha superado cinco pruebas, y el B, siete. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

A se lleva $\to x$ *B se lleva* $\to y$

El premio conseguido es proporcional al número de pruebas superadas $\to x/5 = y/7$

16. ¿Qué cantidades de aceite, uno puro de oliva, a 3 €/litro, y otro de orujo, a 2 €/litro, hay que emplear para conseguir 600 litros de mezcla a 2,40 €/litro?

17. Dos ciudades, A y B, distan 270 km. En cierto momento, un coche parte de A hacia B a 110 km/h, y, a la vez, sale de B hacia A un camión a 70 km/h. ¿Qué distancia recorre cada uno hasta que se encuentran?

La suma de las distancias es 270 $\to x + y = 270$

Los tiempos invertidos por el coche y el camión, hasta el encuentro, son iguales $\to x/110 = y/70$

Analiza y describe. Exprésate

18. A continuación tienes un problema resuelto de dos formas. Indica sus diferencias e incluye las explicaciones oportunas para aclarar su desarrollo.

Un camión parte de cierta población a 90 km/h. Diez minutos después sale un coche a 110 km/h. Calcula el tiempo que tarda en alcanzarlo y la distancia recorrida desde el punto de partida.

Solución A

	VELOCIDAD	TIEMPO	DISTANCIA
COCHE	110	x	y
CAMIÓN	90	$x + \frac{10}{60}$	y

$$\left.\begin{array}{l} y = 110x \\ y = 90\left(x + \frac{1}{6}\right) \end{array}\right\} 110x = 90\left(x + \frac{1}{6}\right) \to \begin{array}{l} x = \frac{3}{4} \text{ h} \\ y = 82,5 \text{ km} \end{array}$$

Solución: Tarda 45 minutos y recorren 82,5 km.

Solución B

Distancia coche = distancia camión $\to d$

Tiempo coche $\to$ distancia/velocidad $= \frac{d}{100}$

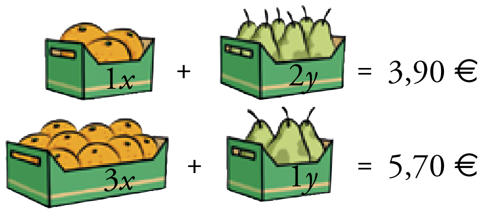
Tiempo camión $\to$ distancia/velocidad $= \frac{d}{90}$

$\frac{d}{90} = \frac{d}{110} + \frac{1}{6} \to d = 82,5$ km

Tiempo coche $\to \frac{d}{110} = \frac{82,5}{110} = \frac{3}{4}$ h = 45 min

Solución: Tarda 45 minutos y recorren 82,5 km.

19. Escribe el enunciado de un problema que se resuelva con el sistema que muestra la ilustración y resuélvelo.



Autoevaluación

1. Representa gráficamente las siguientes ecuaciones:

a) $y = 2x - 1$ b) $2x + 3y - 3 = 0$

2. Resuelve gráficamente este sistema:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$

3. Resuelve por el método de sustitución.

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

4. La suma de dos números es 977, y su diferencia, 31. ¿Cuáles son esos números?

5. En la cafetería, ayer pagamos 3 € por dos cafés y una tostada. Sin embargo, hoy nos han cobrado 6,30 € por tres cafés y tres tostadas. ¿Cuánto cuesta un café y cuánto una tostada?

6. La base de un rectángulo es 8 cm más larga que la altura y el perímetro mide 42 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....