7 Ecuaciones

Algunos consideran a Diofanto el "padre del álgebra", debido a su significativa aportación en la mejora de la terminología algebraica.

Diofanto dio los primeros pasos hacia la utilización de símbolos para expresar los procesos matemáticos (álgebra simbólica), abandonando el lenguaje corriente (álgebra retórica). Su obra se tradujo al árabe en el siglo X y al latín en el XVI, teniendo gran influencia en los matemáticos de distintas épocas.

DIOFANTO (siglo III)

Matemático griego de la Escuela de Alejandría.

No obstante, la mayor parte de los autores otorgan la paternidad del álgebra a **Al-Jwarizmi,** a pesar de que con él la simbología algebraica dio un gran paso atrás volviendo a la retórica. El nivel de Al-Jwarizmi es, además, mucho más elemental que el de Diofanto.

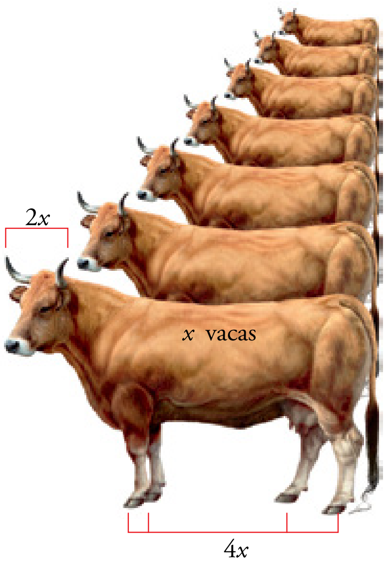
Sin embargo, Al-Jwarizmi, en su libro *Al-jabr* (álgebra), expone de forma directa cómo se resuelven ecuaciones mediante una argumentación lógica, clara y sistemática, lo que propició que fuera seguida y aprendida en su época, y difundida en épocas posteriores.

AL-JWARIZMI (siglo IX)

Matemático de la cultura árabe. Casa de la Sabiduría. Bagdad.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Ecuaciones: significado y utilidad



Una ecuación expresa, mediante una igualdad algebraica, una relación entre cantidades cuyo valor, de momento, no conocemos.

Esas cantidades se representan con letras.

Ejemplos

- En el establo, entre cuernos y patas, he contado 42:

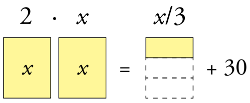
$$\left.\begin{array}{l} \text{Vacas} \to x \\ \text{Cuernos} \to 2x \\ \text{Patas} \to 4x \end{array}\right\} \to \text{Ecuación} \to 2x + 4x = 42$$

- Raquel tuvo a su hijo Daniel a los 26 años y en la actualidad triplica su edad:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Edad de Raquel} \to x \\ \text{Edad de Daniel} \to x - 26 \end{array}\right\} \to \text{Ecuación} \to x = 3 \cdot (x - 26)$$

- La luna de un escaparate es un metro más larga que ancha y su superficie mide $3{,}75\ m^2$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ancho} \to x \\ \text{Largo} \to x + 1 \end{array}\right\} \to \text{Ecuación} \to x \cdot (x + 1) = 3{,}75$$



- El doble de un número es igual a su tercera parte más treinta unidades:

$$\left.\begin{array}{l} \text{El número} \to x \\ \text{Su doble} \to 2x \\ \text{Su tercera parte} \to \dfrac{x}{3} \end{array}\right\} \to \text{Ecuación} \to 2x = \frac{x}{3} + 30$$

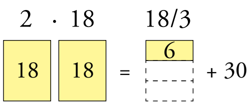
Las ecuaciones permiten codificar relaciones en lenguaje algebraico y, a partir de ahí, manejarlas matemáticamente. Eso, como comprobarás más adelante, supone una **potentísima herramienta para resolver problemas.**

Pero antes, debes aprender a resolverlas.

Qué es resolver una ecuación

Resolver una ecuación es encontrar el valor, o los valores, que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.

Ejemplo



En la ecuación del último ejemplo, $2x = \frac{x}{3} + 30$, la igualdad se cumple solamente para el valor $x = 18$.

$$\left.\begin{array}{l} 2x = \dfrac{x}{3} + 30 \\ x = 18 \end{array}\right\} \underbrace{2 \cdot 18}_{36} = \underbrace{\frac{18}{3} + 30}_{36}$$

Diremos, entonces, que la solución de la ecuación es $x = 18$.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ecuaciones con infinitas soluciones y ecuaciones sin solución

- En la ecuación $\mathbf{0 \cdot x = 0}$, cualquier valor que tome x hace cierta la igualdad.

$$\mathbf{0 \cdot x = 0} \rightarrow \textbf{Tiene infinitas soluciones}$$

- En la ecuación $\mathbf{0 \cdot x = k}$, con $k \neq 0$, no hay ningún valor de x, que haga cierta la igualdad.

$$\mathbf{0 \cdot x = k} \rightarrow \textbf{No tiene solución}$$

Resuelve ecuaciones "con lo que ya sabes"

Antes de aprender ninguna técnica específica, ten en cuenta que razonando con lo que ya sabes, o tanteando, puedes resolver muchas ecuaciones.

Ejemplos

- $5x - 20 = 0$ → Piensa primero: ¿A qué número hay que restarle 20 para que el resultado sea 0?

  Y, después: ¿Cuánto debe valer x?

- $\dfrac{4x+3}{5} = 3$ → Piensa primero: ¿Qué número dividido entre 5 da 3? ¿Cuál es el valor de $4x + 3$?

  Y, después: ¿Cuánto debe valer $4x$? ¿Cuánto debe valer x?

Piensa y practica

1. ¿Qué enunciado asocias a cada ecuación?

a) La tercera parte de un número es igual a su cuarta parte más 20 unidades. (Número → x)

b) La edad de Andrés es el triple que la de su hermana, y entre los dos suman 20 años. (Andrés → x años)

c) Un rectángulo es 3 metros más largo que ancho, y su perímetro mide 30 metros. (Ancho → x metros)

d) He pagado 30 € por 3 blocs de dibujo y una caja de acuarelas. Pero la caja costaba el doble que un bloc. (Bloc → x euros)

e) Un ciclista ha recorrido la distancia desde A hasta B a la velocidad de 15 km/h y un peatón, a 5 km/h, ha tardado una hora más. (Ciclista → x horas)

f) Un grillo avanza, en cada salto, un metro menos que un saltamontes. Pero el grillo, en 15 saltos, llega igual de lejos que el saltamontes en 5. (Saltamontes → x metros)

$x + \dfrac{x}{3} = 20$	$2x + 2(x+3) = 30$	$15(x-1) = 5x$
$\dfrac{x}{3} = \dfrac{x}{4} + 20$	$3x + 2x = 30$	$15x = 5(x+1)$

2. Resuelve en el orden en que aparecen.

a) $3x = 21$ b) $3x - 1 = 20$

c) $\dfrac{3x-1}{5} = 4$ d) $\sqrt{\dfrac{3x-1}{5}} = 2$

3. Resuelve con lo que sabes.

a) $7x = 35$ b) $4x - 12 = 0$

c) $x + 3 = 10$ d) $2x - 4 = 6$

e) $\dfrac{x}{3} = 9$ f) $\dfrac{x-2}{2} = 5$

g) $\dfrac{x+1}{3} = 2$ h) $\dfrac{3x-4}{2} = 1$

i) $\dfrac{7}{x+1} = 1$ j) $\dfrac{10}{2x-3} = 2$

k) $x^2 + 1 = 26$ l) $\sqrt{3x+1} = 5$

4. Encuentra alguna solución por tanteo.

a) $x^2 + 2x + 1 = 4$ b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $\dfrac{x}{4} + \dfrac{8}{x} = 3$ d) $x^3 - \sqrt{x} = 0$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Ecuaciones: elementos y nomenclatura

- **Miembros de una ecuación:** son cada una de las expresiones que aparecen a ambos lados del signo de igualdad.
- **Términos:** son los sumandos que forman los miembros.

PRIMER MIEMBRO — SEGUNDO MIEMBRO

$$3x + 1 = 9 - x$$

TÉRMINOS

- **Incógnitas:** son las letras que aparecen en la ecuación.

Ejemplos

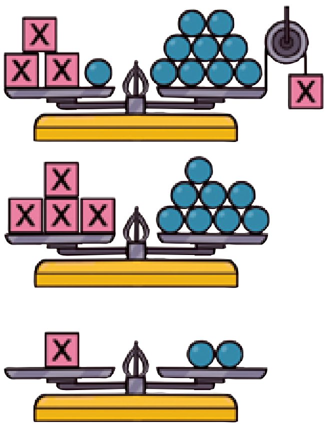
$3x + 1 = 9 - x \rightarrow$ Ecuación con una incógnita, x.

$5x + 3y = y + 2 \rightarrow$ Ecuación con dos incógnitas, x e y.

- **Soluciones:** son los valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.

Ejemplo

$$3x + 1 = 9 - x \begin{cases} x = 2 & \text{es solución, ya que } 3 \cdot 2 + 1 = 9 - 2. \\ x = 1 & \text{no es solución, ya que } 3 \cdot 1 + 1 \neq 0 - 1. \end{cases}$$



- **Grado de una ecuación:** es el mayor de los grados de los monomios que forman los miembros, una vez reducida la ecuación.

Ejemplos

$3x + 1 = 9 - x \rightarrow$ Ecuación de primer grado.

$x^2 - 3x + 1 = 2x - 5 \rightarrow$ Ecuación de segundo grado.

- **Ecuaciones equivalentes:** dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas incógnitas y las mismas soluciones.

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 1 = 9 - x \\ 4x = 8 \end{array}\right\}$$ Son equivalentes. Las dos tienen como solución $x = 2$.

Piensa y practica

1. ¿Verdadero o falso?

a) La ecuación $x^2 + 6x - x^2 = 7x - 1$ es de segundo grado.

b) La ecuación $2x + x \cdot y = 6$ es de segundo grado.

c) Los términos de una ecuación son los sumandos que forman los miembros.

d) Una ecuación puede tener más de dos miembros.

e) Todas las ecuaciones de primer grado son equivalentes.

f) La ecuación $x + 1 = 5$ es equivalente a la ecuación $x + 2 = 6$.

2. Copia en tu cuaderno y asocia cada ecuación con su solución:

$4x + 4 = 5$

$4x - 3 = x + 3$

$x^2 - 3 = 2x$

$3x = x + 1$

$\boxed{3}$ $\boxed{\frac{1}{2}}$ $\boxed{-1}$ $\boxed{\frac{1}{4}}$ $\boxed{2}$

3. Agrupa las ecuaciones equivalentes.

a) $4x = 20$

b) $3x - 1 = 8$

c) $5x - 4 = x$

d) $3x = 9$

e) $4x - 5 = 15$

f) $4x - 4 = 0$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Primeras técnicas para la resolución de ecuaciones

Ahora vas a estudiar los procedimientos básicos para resolver ecuaciones. Aunque los ejemplos son muy sencillos y la solución salta a la vista, sigue las técnicas que se exponen, pues te servirán para resolver casos más complejos.

Resolución de la ecuación $x + a = b$

Ejemplo: $x + 4 = 7$

$$x + 4 = 7$$
$$\downarrow$$
$$x + \cancel{4} - \cancel{4} = 7 - 4$$
$$\downarrow$$
$$x = 3$$

- Restando 4 a los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.
- La solución es $x = 3$.

Para resolver la ecuación $x + a = b$, restamos a en ambos miembros.

$$x + a = b \;\rightarrow\; x + \cancel{a} - \cancel{a} = b - a \;\rightarrow\; x = b - a$$

En la práctica

REGLA

Lo que está sumando en uno de los miembros, pasa restando al otro.

EJEMPLOS

a) $x + 4 = 7 \;\downarrow\; x = 7 - 4 \;\downarrow\; x = 3$

b) $x + 5 = 1 \;\downarrow\; x = 1 - 5 \;\downarrow\; x = -4$

Resolución de la ecuación $x - a = b$

Ejemplo: $x - 2 = 6$

$$x - 2 = 6$$
$$\downarrow$$
$$x - \cancel{2} + \cancel{2} = 6 + 2$$
$$\downarrow$$
$$x = 8$$

- Sumando 2 a los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.
- La solución es $x = 8$.

Para resolver la ecuación $x - a = b$, sumamos a en ambos miembros.

$$x - a = b \;\rightarrow\; x - \cancel{a} + \cancel{a} = b + a \;\rightarrow\; x = b + a$$

En la práctica

REGLA

Lo que está restando en uno de los miembros, pasa sumando al otro.

EJEMPLOS

a) $x - 2 = 6 \;\downarrow\; x = 6 + 2 \;\downarrow\; x = 8$

b) $5 - x = 2 \;\downarrow\; 5 - 2 = x \;\downarrow\; x = 3$

Piensa y practica

1. Resuelve aplicando las técnicas recién aprendidas.

a) $x + 3 = 4$ b) $x - 1 = 8$ c) $x + 5 = 11$

d) $x - 7 = 3$ e) $x + 4 = 1$ f) $x - 2 = -6$

g) $9 = x + 5$ h) $5 = x - 4$ i) $2 = x + 6$

2. Resuelve aplicando las técnicas anteriores.

a) $x + 6 = 9$ b) $x - 4 = 5$ c) $2 - x = 4$

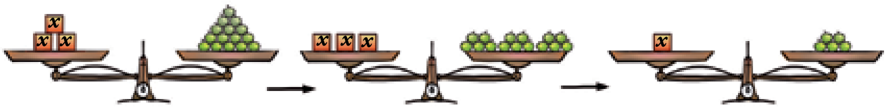
d) $5 + x = 4$ e) $3 + x = 3$ f) $6 = x + 8$

g) $0 = x + 6$ h) $1 = 9 - x$ i) $4 = x - 8$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Resolución de la ecuación $a \cdot x = b$

Ejemplo: $3x = 15$



$$3x = 15 \;\downarrow\; \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{15}{3} \;\downarrow\; x = 5$$

- Dividiendo por 3 los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.
- La solución es $x = 5$.

Para resolver la ecuación $ax = b$, dividimos ambos miembros por a. $\Big\}$ $ax = b \;\rightarrow\; \dfrac{\cancel{a}x}{\cancel{a}} = \dfrac{b}{a} \;\rightarrow\; x = \dfrac{b}{a}$

En la práctica

REGLA: Lo que está multiplicando a un miembro (a todo él) pasa dividiendo al otro.

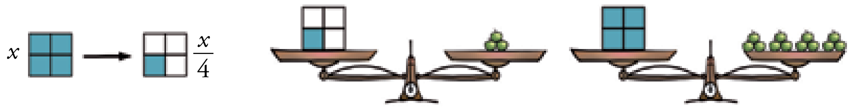
EJEMPLOS

a) $3x = 15 \;\rightarrow\; x = \dfrac{15}{3} \;\rightarrow\; x = 5$

b) $7x = 2 \;\rightarrow\; x = \dfrac{2}{7}$

Resolución de la ecuación $x/a = b$

Ejemplo: $\dfrac{x}{4} = 3$



$$\frac{x}{4} = 3 \;\downarrow\; \frac{x}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4} = 3 \cdot 4 \;\downarrow\; x = 12$$

- Multiplicando por 4 los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.
- La solución es $x = 12$.

Para resolver la ecuación $\dfrac{x}{a} = b$, multiplicamos ambos miembros por a. $\Big\}$ $\dfrac{x}{a} = b \;\rightarrow\; \dfrac{x}{\cancel{a}} \cdot \cancel{a} = b \cdot a \;\rightarrow\; x = b \cdot a$

Casos especiales

- La ecuación $0 \cdot x = 6$ no tiene solución. No hay ningún número que multiplicado por cero dé seis.
- La ecuación $0 \cdot x = 0$ tiene infinitas soluciones. Cualquier número multiplicado por cero da cero.

En la práctica

REGLA: Lo que está dividiendo a un miembro (a todo él) pasa multiplicando al otro.

EJEMPLOS

a) $\dfrac{x}{4} = 3 \;\rightarrow\; x = 3 \cdot 4 \;\rightarrow\; x = 12$

b) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{7}{10} \;\rightarrow\; x = \dfrac{7}{10} \cdot 2 \;\rightarrow\; x = \dfrac{7}{5}$

Piensa y practica

3. Resuelve con las técnicas que acabas de aprender.

a) $4x = 20$ b) $\dfrac{x}{2} = 1$ c) $3x = 12$

d) $\dfrac{x}{5} = 2$ e) $8 = 4x$ f) $4 = \dfrac{x}{2}$

4. Resuelve combinando las técnicas anteriores.

a) $3x - 2 = 0$ b) $4x + 5 = 13$ c) $2x - 5 = 9$

d) $8 - 3x = 2$ e) $\dfrac{x}{2} + 4 = 7$ f) $\dfrac{x}{3} - 2 = 3$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Resolución de ecuaciones sencillas

El método para resolver una ecuación consiste en ir transformándola, mediante sucesivos pasos, en otras equivalentes más sencillas hasta despejar la incógnita.

> Para transformar una ecuación en otra equivalente más sencilla, utilizaremos dos recursos:
> - Reducir sus miembros.
> - Transponer los términos.

Analiza los siguientes ejemplos y resuelve las ecuaciones que siguen. Para que puedas evaluar tu trabajo, tienes las soluciones al margen.

Recuerda

- La ecuación $0 \cdot x = 0$ tiene infinitas soluciones.
- La ecuación $0 \cdot x = k$, con $k \neq 0$, no tiene solución.

Ejemplo 1

TRANSPONER

$2x - 5 = 3$

$2x = 3 + 5$ Sumamos 5 en ambos miembros.

REDUCIR

$2x = 8$

TRANSPONER

$x = \frac{8}{2}$ Dividimos ambos miembros entre 2.

REDUCIR

$x = 4$

Soluciones

1) 1	2) 1	3) 2
4) –2	5) 1	6) 2
7) –4	8) 3	9) 1
10) –1	11) 2/3	12) –1/3
13) –1/2	14) I. S.(*)	15) S. S.(**)

(*) → I. S. (infinitas soluciones).

(**) → S. S. (sin solución).

PRACTICA

1) $2x - 1 = 1$	2) $5x - 3 = 2$	3) $7x - 5 = 9$
4) $10 + 3x = 4$	5) $2x - 3 = -1$	6) $8 = 5x - 2$
7) $0 = 3x + 12$	8) $5 - x = 2$	9) $6 - 2x = 4$
10) $4 - 5x = 9$	11) $3x - 1 = 1$	12) $4 = 3x + 5$
13) $5 = 4x + 7$	14) $0x + 2 = 2$	15) $0x + 1 = 4$

Ejemplo 2

$5x + 1 - 3x = 7$

R

$2x + 1 = 7$

T

$2x = 7 - 1$

R

$2x = 6$

T

$x = \frac{6}{2}$

R

$x = 3$

Ejemplo 3

$4x - x + 3 = 7 - 5$

R

$3x + 3 = 2$

T

$3x = 2 - 3$

R

$3x = -1$

T

$x = \frac{-1}{3}$

$x = -\frac{1}{3}$

En la web

Actividades guiadas para afianzar la resolución de ecuaciones.

Soluciones

16) 1	17) 3	18) –2
19) 2	20) –4	21) 1/2
22) –3	23) –1	24) 1
25) 0	26) 1/5	27) –4
28) 3/4	29) I. S.	30) S. S.

PRACTICA

16) $8x - 4 + x = 5$	17) $5x - 8 - x = 7 - 3$	18) $3x + 10 + x = 2$
19) $7x - 2x - 3 = 7$	20) $3x + 15 + 2x = -5$	21) $5 + 2x + 1 = 7$
22) $5 - x + 2 = 10$	23) $7x + 3 - 9x = 5$	24) $5 - 1 = x + 5 - 2x$
25) $1 = x + 1 + 2x$	26) $4 = x + 5 - 6x$	27) $9 = 4x + 1 - 6x$
28) $5 = 3x - 1 + 5x$	29) $7x + 2 - 7x = 3 - 1$	30) $5x + 3 - 5x = 7$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

A medida que las ecuaciones se complican, se abren diferentes opciones de resolución. Cualquiera es válida, siempre que operes correctamente.

A continuación, puedes ver un ejemplo resuelto de dos formas:

Ejemplo 4

OPCIÓN A

La incógnita, en el miembro de la izquierda.

$$2x - 1 - 5x = 2 + 3x + 1$$
R
$$-3x - 1 = 3 + 3x$$
T
$$-3x - 3x = 3 + 1$$
R
$$-6x = 4$$
T
$$x = \frac{4}{-6}$$
R
$$x = -\frac{2}{3}$$

OPCIÓN B

La incógnita, en el miembro en el que tome coeficiente positivo.

$$2x - 1 - 5x = 2 + 3x + 1$$
R
$$-3x - 1 = 3 + 3x$$
T
$$-1 - 3 = 3x + 3x$$
R
$$-4 = 6x$$
T
$$\frac{-4}{6} = x$$
R
$$x = -\frac{2}{3}$$

PRACTICA

31 $2x - 1 = x + 2$

32 $3x + 2 = x + 6$

33 $2x + 1 = 5x - 5$

34 $1 - x = 4 - 2x$

35 $x - 6 = 5x - 2$

36 $3 + 7x = 2x + 5$

37 $6x - 2 + x = 2x + 3$

38 $8x + 3 - 5x = 7 - 2x - 1$

39 $4x + 5 + x = 7 + 3x - 3$

40 $8 - x + 1 = 4x - 1 - 7x$

41 $7x - 4 - 3x = 2 + 4x - 6$

42 $2 + 3x - 5 = 4x - 2 - x$

Soluciones

31 3	32 2	33 2
34 3	35 –1	36 2/5
37 1	38 3/5	39 –1/2
40 –5	41 I. S.	42 S. S.

Cuando una ecuación contiene paréntesis, comenzaremos suprimiéndolos y reduciendo.

Ejemplo 5

$$5x - 2(2x - 2) = 8 - (3 + 2x)$$
R
$$5x - 4x + 4 = 8 - 3 - 2x$$
R
$$x + 4 = 5 - 2x$$
T
$$x + 2x = 5 - 4$$
R
$$3x = 1$$
T
$$x = \frac{1}{3}$$

PRACTICA

43 $x - 7 = 6 - (x - 3)$

44 $x - (1 - 3x) = 8x - 1$

45 $1 - (3x - 9) = 5x - 4x + 2$

46 $13x - 15 - 6x = 1 - (7x + 9)$

47 $7x - (4 + 2x) = 1 + (x - 2)$

48 $2(3x - 1) - 5x = 5 - (3x + 11)$

49 $1 - 2(2x - 1) = 5x - (5 - 3x)$

50 $7 - (2x + 9) = 11x - 5(1 - x)$

51 $4(5x - 3) - 7x = 3(6x - 4) + 10$

52 $4 - 7(2x - 3) = 3x - 4(3x - 5)$

53 $16x - 7(x + 1) = 2 - 9(1 - x)$

54 $6 - (8x + 1) = 4x - 3(2 + 4x)$

Soluciones

43 8	44 0	45 2
46 1/2	47 3/4	48 –1
49 2/3	50 1/6	51 –2
52 1	53 I. S.	54 S. S.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 Ecuaciones con denominadores

Cuando en los términos de una ecuación aparecen denominadores, la transformaremos en otra equivalente que no los tenga. Para ello, *multiplicaremos los dos miembros* de la ecuación por un número que sea múltiplo de todos los denominadores. El múltiplo más adecuado es el más pequeño; es decir, el *mínimo común múltiplo de los denominadores*.

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{5x}{6}-1=\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{4}\\[2mm] 12\cdot\left(\dfrac{5x}{6}-1\right)=12\cdot\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{4}\right)\end{array}\right\}$$

mín.c.m. (6, 3, 4) = 12

Multiplicamos los dos miembros por 12.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{60x}{6}-12=\dfrac{12x}{3}-\dfrac{36}{4}\\[2mm] 10x-12=4x-9\end{array}\right\}$$

Al quitar paréntesis y reducir, desaparecen los denominadores.

$$\left.\begin{array}{l}10x-4x=-9+12\\ 6x=3\\ x=\dfrac{3}{6}\ \rightarrow\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}$$

A partir de ahí, actuaremos como ya sabemos.

Una estrategia similar

- Reducir a común denominador:

$$\frac{5x}{6}-\frac{1}{1}=\frac{x}{3}-\frac{3}{4}$$

Común denominador $\rightarrow$ 12

$$\frac{10x}{12}-\frac{12}{12}=\frac{4x}{12}-\frac{9}{12}$$

- Eliminar denominadores:

$$10x-12=4x-9$$

En la web

Ayuda para la resolución de ecuaciones con denominadores.

Para **eliminar** los **denominadores** en una ecuacion, se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de todos ellos.

Piensa y practica

1. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\frac{x}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ b) $\frac{2x}{3}+\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$

c) $4-\frac{2x}{3}=x+\frac{2}{3}$ d) $1+\frac{2x}{5}=\frac{1}{5}-2x$

e) $\frac{1}{4}-x=\frac{3x}{4}-1$ f) $\frac{3x}{2}+5=2x-\frac{1}{2}$

2. Halla x en cada caso.

a) $1-\frac{x}{4}=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ b) $\frac{3x}{2}-\frac{x}{4}=1$

c) $\frac{5x}{6}+1=x-\frac{1}{3}$ d) $\frac{7x}{10}+1=\frac{2}{5}+x$

3. Resuelve.

a) $\frac{x}{3}=\frac{1}{15}+\frac{2x}{5}$ b) $\frac{1}{2}+\frac{x}{3}=\frac{2}{3}-x$

c) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=x-1$ d) $\frac{3x}{4}-\frac{1}{6}=\frac{5x}{6}-1$

SOLUCIONES

1. a) 3 b) –2 c) 2 d) –1/3 e) 5/7 f) 11

2. a) 2 b) 4/5 c) 8 d) 2

3. a) –1 b) 1/8 c) 6 d) 10 e) 3/8 f) –3

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

6 Resolución de problemas con ecuaciones

En la información que aporta el enunciado de un problema, encontramos elementos conocidos (*datos*) y elementos desconocidos (*incógnitas*).

Si conseguimos *codificar algebraicamente* todos esos elementos, y relacionarlos mediante una igualdad, habremos construido una *ecuación*.

Resolviendo la ecuación e interpretando las soluciones en el contexto del enunciado, habremos resuelto el problema.

En esta página, y en las siguientes, verás varios ejemplos del proceso a seguir.

Problema resuelto

1. ***Un hipermercado ha sacado hoy, en oferta, una partida de lavadoras y ha vendido la mitad por la mañana y la tercera parte por la tarde. Si en total ha vendido 20 unidades, ¿cuántas lavadoras ha sacado en oferta?***

a) Identifica los elementos del problema, expresando algebraicamente los que son desconocidos.

- Lavadoras en oferta $\longrightarrow x$
- Las vendidas por la mañana $\longrightarrow \frac{x}{2}$
- Las vendidas por la tarde $\longrightarrow \frac{x}{3}$

b) Relaciona, con una igualdad, los elementos conocidos y los desconocidos.

$$\boxed{\text{VENDIDAS POR LA MAÑANA}} + \boxed{\text{VENDIDAS POR LA TARDE}} = 20$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 20$$

c) Resuelve la ecuación.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 20 \to 3x + 2x = 120 \to 5x = 120 \to x = \frac{120}{5} \to x = 24$$

d) Interpreta la solución de la ecuación dentro del enunciado del problema y comprueba si es correcta.

Solución: El lote de lavadoras se componía de 24 unidades.

Comprobación:

$$\frac{24}{2} + \frac{24}{3} = 12 + 8 = 20$$

Piensa y practica

1. Si al triple de un número le restas 8, obtienes 25.

¿Qué número es?

2. Hemos sumado 13 a la mitad de un número y hemos obtenido el mismo resultado que restando 11 a su doble.

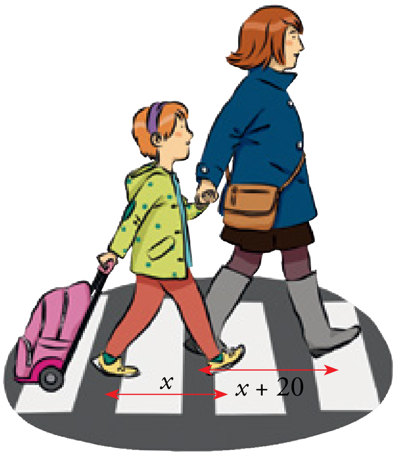
¿De qué número se trata?

3. Anteayer salieron a la venta las entradas para un concierto y, en ese mismo día, se vendió un tercio; ayer, una cuarta parte, y hoy, se han vendido las 200 restantes.

¿Cuántas entradas se pusieron a la venta?

$$\boxed{\text{VENDIDAS ANTEAYER}} + \boxed{\text{VENDIDAS AYER}} + \boxed{\text{VENDIDAS HOY}} = \boxed{\text{TOTAL}}$$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....



Problema resuelto

2. ***Ana y su madre cruzan una calle por el paso de cebra. Ana necesita 35 pasos, y su madre, solo 25. Si un paso de la madre es 20 cm más largo que uno de Ana, ¿cuánto mide el paso de cada una?***

a) Los datos:

- Paso de Ana (cm) $\longrightarrow x$
- Paso de la madre (cm) $\longrightarrow x + 20$

b) La ecuación:

ANCHURA DE LA CALLE 35 PASOS DE ANA	=	ANCHURA DE LA CALLE 25 PASOS DE LA MADRE

$$35x = 25(x + 20)$$

c) Resuelve la ecuación:

$$35x = 25(x + 20) \rightarrow 35x = 25x + 500 \rightarrow 35x - 25x = 500 \rightarrow$$

$$\rightarrow 10x = 500 \rightarrow x = \frac{500}{10} \rightarrow x = 50$$

d) *Solución:*

Paso de Ana $\rightarrow$ 50 cm

Paso de la madre $\rightarrow 50 + 20 = 70$ cm

Comprobación:

35 pasos de Ana 25 pasos de la madre

$$\underbrace{35 \cdot 50}_{1\,750} \Leftrightarrow \underbrace{25 \cdot 70}_{1\,750}$$

$$1\,750 = 1\,750$$

Piensa y practica

4. Un kilo de manzanas cuesta 0,50 € más que uno de naranjas. Marta ha comprado tres kilos de naranjas y uno de manzanas por 5,30 €. ¿A cómo están las naranjas? ¿Y las manzanas?

$$\left.\begin{array}{l}\text{NARANJAS} \rightarrow x \\ \text{MANZANAS} \rightarrow x + 0,5\end{array}\right\}$$

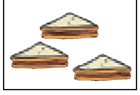
NARANJAS COSTE 3 kg	+	MANZANAS COSTE 1 kg	= 5,30 €

5. Rosa tiene 25 años menos que su padre, Juan, y 26 años más que su hijo Alberto. Entre los tres suman 98 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

$$\left.\begin{array}{l}\text{ROSA} \rightarrow x \\ \text{JUAN} \rightarrow x + 25 \\ \text{ALBERTO} \rightarrow x - 26\end{array}\right\}$$

EDAD DE ROSA	+	EDAD DE JUAN	+	EDAD DE ALBERTO	= 98 años

6. La pandilla ha entrado a merendar en una bocadillería. Un bocadillo cuesta un euro más que un sándwich. Por tres sándwiches y dos bocadillos pagan 11 euros. ¿Cuánto cuesta un sándwich? ¿Y un bocadillo?

COSTE 	+	COSTE 	= 11 €

7. Un frutero ha cargado en su furgoneta 26 cajas: unas de kiwis, de 12 kilos, y otras de plátanos, de 10 kilos. Si en total pesan 290 kilos, ¿cuántas cajas eran de cada clase?

Cajas kiwis $\rightarrow x$	Cajas plátanos $\rightarrow 26 - x$

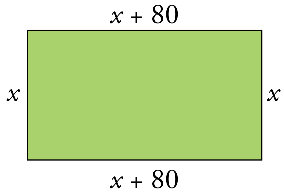
8. En un test de 50 preguntas se consiguen dos puntos por cada respuesta correcta y se pierden dos por cada respuesta errónea o en blanco. ¿Cuántos aciertos son necesarios para superar la prueba si se exige un mínimo de 75 puntos?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Problema resuelto

4. ***Calcular las dimensiones de una finca rectangular, sabiendo que es 80 metros más larga que ancha y que la valla que la rodea tiene una longitud de 560 metros.***

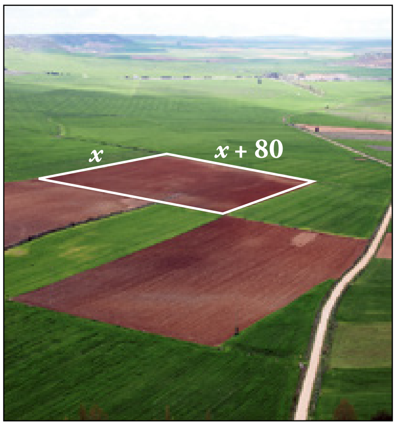
a) Los datos:



Lado menor (ancho) $\rightarrow$ x

Lado mayor (largo) $\rightarrow$ $x + 80$

Longitud de la valla $\rightarrow$ 560 m



b) La ecuación:

$$2x + 2 \cdot (x + 80) = 560$$

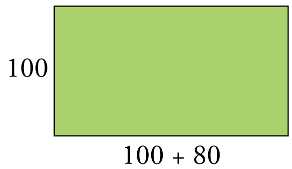
c) Resolución de la ecuación:

$$2x + 2 \cdot (x + 80) = 560$$

$$2x + 2x + 160 = 560$$

$$4x = 560 - 160 \rightarrow 4x = 400 \rightarrow x = 100$$

d) *Solución:*



Lado menor $\rightarrow$ 100 m

Lado mayor $\rightarrow$ 100 + 80 = 180 m

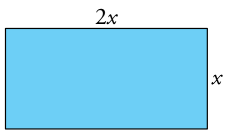
La finca mide 180 m de larga por 100 m de ancha.

Comprobación:

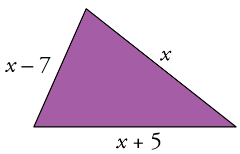
Longitud de la valla: $2 \cdot 100 + 2 \cdot 180 = 200 + 360 = 560$ metros

Piensa y practica

9. Se han necesitado 150 metros de alambrada para cercar una finca rectangular que es el doble de larga que de ancha. ¿Cuáles son las dimensiones de la finca?

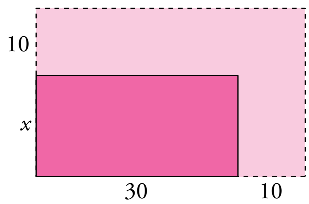


10. En un triángulo escaleno, el lado mediano mide 7 cm más que el lado menor y 5 cm menos que el lado mayor. Si el perímetro mide 52 cm, ¿cuál es la longitud de cada lado?



11. De una parcela rectangular se han cedido, para calles, 10 m a lo largo y otros 10 m a lo ancho, por lo que la parcela ha perdido una superficie de 480 m^2.

Si el rectángulo resultante mide 30 metros de largo, ¿cuál es su anchura?



SUPERFICIE ORIGINAL $\rightarrow$ $40 \cdot (x + 10)$

SUPERFICIE RESULTANTE $\rightarrow$ $30 \cdot x$

SUPERFICIE PERDIDA $\rightarrow$ $40 \cdot (x + 10) - 30 \cdot x$; $\rightarrow$ 480 m^2

En la web Resuelve problemas con ecuaciones de primer grado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Ecuaciones sencillas

1. Resuelve mentalmente.

a) $x + 4 = 5$ b) $x - 3 = 6$ c) $7 + x = 10$

d) $7 - x = 5$ e) $9 = 15 - x$ f) $2 - x = 9$

2. Resuelve.

a) $2x - 5 + 3x + 1 = 3x - 2$

b) $x + 7 = 12x - 3 - 8x + 1$

c) $6x - 1 + x = 4 - 5x + 3$

d) $x + 2x + 3x - 5 = 4x - 9$

e) $5x + 4 - 6x = 7 - x - 3$

f) $4x + 2 + 7x = 10x + 3 + x$

3. Quita paréntesis y resuelve.

a) $6(x + 1) - 4x = 5x - 9$

b) $18x - 13 = 8 - 4(3x - 1)$

c) $3x + 5(2x - 1) = 8 - 3(4 - 5x)$

d) $5 - (4x + 6) = 3x + (7 - 4x)$

e) $x - 7(2x + 1) = 2(6 - 5x) - 13$

f) $11 - 5(3x + 2) + 7x = 1 - 8x$

g) $13x - 5(x + 2) = 4(2x - 1) + 7$

Ecuaciones de primer grado con denominadores

4. Quita denominadores y resuelve.

a) $\frac{5x}{3} + 1 = \frac{5}{6} + x$

b) $\frac{3x}{5} - \frac{1}{4} = x - \frac{7x}{10} - \frac{1}{5}$

c) $\frac{x}{3} + \frac{4}{15} - x = \frac{1}{6} - \frac{7x}{10}$

d) $\frac{7x}{4} - 1 - \frac{x}{8} = x + \frac{5x}{8} + 1$

e) $\frac{x}{2} + \frac{1}{6} - \frac{x}{3} = \frac{5}{6} + \frac{x}{6} - \frac{2}{3}$

5. Elimina los paréntesis y los denominadores, y resuelve.

a) $2x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(x - 3)$ b) $\frac{5}{6}(2x - 1) - x = \frac{x}{6}$

c) $\frac{x}{5} - 1 = 2\left(x - \frac{4}{5}\right)$ d) $x - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(2x - 5)$

Resuelve problemas con ecuaciones de primer grado

6. Calcula, primero, mentalmente y, después, con la ayuda de una ecuación.

a) Si a un número le sumas 12, obtienes 25. ¿De qué número se trata?

b) Si a un número le restas 10, obtienes 20. ¿Qué número es?

c) Un número, x, y su siguiente, $x + 1$, suman 13. ¿Cuáles son esos números?

d) En mi clase somos 29 en total, pero hay tres chicos más que chicas. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en la clase?

7. Busca un número cuyo doble más tres unidades sea igual a su triple menos cinco unidades.

8. Multiplicando un número por 5, se obtiene el mismo que sumándole 12.

¿Cuál es ese número?

9. La suma de tres números consecutivos es 135. ¿Cuáles son esos números?

10. Teresa es siete años mayor que su hermano Antonio y dos años menor que su hermana Blanca. Calcula la edad de cada uno sabiendo que entre los tres suman 34 años.

ANTONIO $\rightarrow x - 7$; TERESA $\rightarrow x$; BLANCA $\rightarrow x + 2$

11. Una ensaimada cuesta 10 céntimos más que un cruasán. Tres cruasanes y cuatro ensaimadas han costado 6 euros. ¿Cuál es el coste de cada pieza?

12. Nicolás ha comprado en las rebajas dos pantalones y tres camisetas por 161 €. ¿Cuál era el precio de cada artículo, sabiendo que un pantalón costaba el doble que una camiseta?

13. Reparte 280 € entre tres personas, de forma que la primera reciba el triple que la segunda, y esta, el doble que la tercera.

1.ª PERSONA $\rightarrow 6x$; 2.ª $\rightarrow 2x$; 3.ª $\rightarrow x$

14. Tres agricultores reciben una indemnización de 100 000 € por la expropiación de terrenos para la construcción de una autopista. ¿Cómo han de repartirse el dinero, sabiendo que el primero ha perdido el doble de terreno que el segundo, y este, el triple de terreno que el tercero?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

15. En la caja de un supermercado hay 1 140 euros repartidos en billetes de 5, 10, 20 y 50 euros.

Sabiendo que:

— Hay el doble de billetes de 5 € que de 10 €.

— De 10 € hay la misma cantidad que de 20 €.

— De 20 € hay seis billetes más que de 50 €.

¿Cuántos billetes de cada clase tiene la caja?

16. Se han repartido 500 litros de gasóleo, a partes iguales, en dos barriles. ¿Cuántos litros se han de pasar de uno al otro para que el segundo quede con el triple de cantidad que el primero?

17. Un hortelano siembra la mitad de su huerta de melones, la tercera parte de tomates, y el resto, que son 200 m^2, de patatas. ¿Qué superficie tiene la huerta?

SUPERFICIE HUERTA → x MELONES → $x/2$

TOMATES → $x/3$ PATATAS → 200 m^2

18. **Ejercicio resuelto**

Joaquín tiene 14 años; su hermana, 16, y su madre, 42. ¿Cuántos años han de transcurrir para que entre ambos hijos igualen la edad de la madre?

	EDAD HOY	EDAD DENTRO DE x AÑOS
JOAQUÍN	14	$14 + x$
HERMANA	16	$16 + x$
MADRE	42	$42 + x$

Dentro de x años, debe ocurrir que:

EDAD DE JOAQUÍN + EDAD DE LA HERMANA = EDAD DE LA MADRE

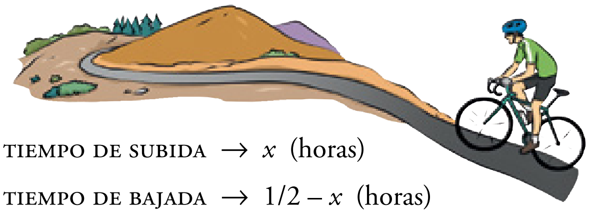
$$(14 + x) + (16 + x) = 42 + x$$

$$2x + 30 = 42 + x \rightarrow x = 12$$

Solución: Deben transcurrir 12 años.

19. Un padre tiene 38 años, y su hijo, 11. ¿Cuántos años han de transcurrir para que el padre tenga solo el doble de edad que el hijo?

20. Un ciclista sube un puerto a 15 km/h y, después, desciende por el mismo camino a 35 km/h. Si la ruta ha durado 30 minutos, ¿cuánto tiempo ha invertido en la subida?



TIEMPO DE SUBIDA → x (horas)

TIEMPO DE BAJADA → $1/2 - x$ (horas)

DISTANCIA RECORRIDA SUBIENDO → $15x$

DISTANCIA RECORRIDA BAJANDO → $35\left(\frac{1}{2} - x\right)$

21. Dos ciclistas parten simultáneamente; uno, de A hacia B, a la velocidad de 24 km/h, y el otro, de B hacia A, a 16 km/h. Si la distancia entre A y B es de 30 km, ¿cuánto tardarán en encontrarse?

TIEMPO HASTA EL ENCUENTRO → x (horas)

DISTANCIA RECORRIDA POR EL PRIMERO → $24x$

DISTANCIA RECORRIDA POR EL SEGUNDO → $16x$

22. Dos trenes se encuentran, respectivamente, en las estaciones de dos ciudades separadas entre sí 132 km. Ambos parten a la misma hora, por vías paralelas, hacia la ciudad contraria. Si el primero va a 70 km/h, y el segundo, a 95 km/h, ¿cuánto tardarán en cruzarse?

23. Un ciclista sale de cierta población, por carretera, a la velocidad de 22 km/h. Hora y media después, sale en su búsqueda un motorista a 55 km/h. ¿Cuánto tardará en darle alcance?

24. Se han pagado 66 € por una prenda que estaba rebajada un 12 %. ¿Cuál era el precio sin rebaja?

PRECIO ORIGINAL → x

REBAJA → $\frac{12x}{100}$

ECUACIÓN → $x - \frac{12x}{100} = 66$

25. Laura ha comprado una falda y una blusa por 66 €. Ambas tenían el mismo precio, pero en la falda le han hecho un 20 % de rebaja, y en la blusa, solo un 15 %. ¿Cuánto costaba cada prenda?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

26. Para delimitar una zona rectangular, el doble de larga que de ancha, se han necesitado 84 m de cinta. ¿Cuáles son las dimensiones del sector delimitado?

27. Un fabricante de queso ha mezclado cierta cantidad de leche de vaca, a 0,50 €/*l*, con otra cantidad de leche de oveja, a 0,80 €/*l*, obteniendo 300 litros de mezcla a un precio medio de 0,70 €/*l*. ¿Cuántos litros de cada tipo de leche empleó?

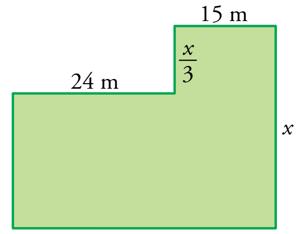
	CANTIDAD (*l*)	PRECIO (€/*l*)	COSTE (€)
VACA	x	0,50	$0{,}5x$
OVEJA	$300 - x$	0,80	$0{,}8(300 - x)$
MEZCLA	300	0,70	$0{,}7 \cdot 300$

COSTE LECHE VACA + COSTE LECHE OVEJA = COSTE MEZCLA

Analiza y exprésate

28. Analiza las soluciones que siguen al problema y explica cómo se ha construido la ecuación en cada caso.

Calcula el perímetro de esta finca, sabiendo que tiene una superficie de 930 metros cuadrados.



Resolución A

$$24 \cdot \left(x - \frac{x}{3}\right) + 15 \cdot x = 930$$

$$24 \cdot \frac{2x}{3} + 15 \cdot x = 930 \rightarrow 16x + 15x = 930$$

$$31x = 930 \rightarrow x = \frac{930}{31} \rightarrow x = 30 \text{ m}$$

Perímetro = 30 + 15 + 10 + 24 + 20 + 39 = 138 m

Resolución B

$$(24 + 15) \cdot x - 24 \cdot \frac{x}{3} = 930$$

$$39x - 8x = 930 \rightarrow 31x = 930$$

$$x = \frac{930}{31} \rightarrow x = 30 \text{ m}$$

Perímetro = 24 + 10 + 15 + 30 + 39 + 20 = 138 m

Autoevaluación

1. ¿Cuál de los valores $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$, $x = 9$, $x = -1/2$ es solución de la ecuación $\frac{x^2 - 1}{5} = \sqrt{x} + 1$?

2. Despeja la incógnita y resuelve la ecuación.

a) $x + 4 = 3$ b) $3 = x - 2$

c) $5 - x = 3$ d) $20 = 5x$

3. Resuelve.

a) $7x - 3 - 2x = 6 + 3x + 1$

b) $1 - 4x - 6 = x - 3 \cdot (2x - 1)$

4. Resuelve.

a) $1 - \frac{x}{5} = x + \frac{2}{5}$

b) $x - \frac{1}{2} = \frac{5x}{8} - \frac{3}{4}$

c) $\frac{2x}{3} - 4\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{15}$

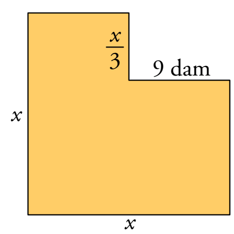
5. Si la tercera parte de un número le sumas su cuarta parte, obtienes 14. ¿Cuál es el número?

6. Por seis tortas y cuatro bollos, Raquel ha pagado seis euros. Averigua el precio de unas y otros, sabiendo que una torta cuesta el doble que un bollo.

7. Un hortelano ha plantado 1/3 de la superficie de su huerta de acelgas y 3/10 de zanahorias. Si aún le quedan 110 m^2 libres, ¿cuál es la superficie total de la huerta?

SUPERFICIE ACELGAS + SUPERFICIE ZANAHORIAS + SUPERFICIE LIBRE = SUPERFICIE TOTAL

8. Calcula el perímetro de esta finca, sabiendo que ocupa una superficie de 180 decámetros cuadrados.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....