Unidad Didáctica 6: Algebra

1º ESO

En esta unidad vas a:

Aprender a expresar de forma algebraica ciertas situaciones.

Distinguir y operar con monomios.

Distinguir e identificar ecuaciones e identidades.

Resolver ecuaciones de primer grado.

Resolver problemas utilizando ecuaciones

Sumario

6.0.- Lectura comprensiva

Todos los pueblos que se han preocupado por el avance de las ciencias han creado centros en los cuales los sabios podían trabajar e intercambiar ideas, como ocurre en nuestras actuales universidades y academias.

En *Bagdag*, capital del mundo árabe en el siglo IX, se reunieron artistas, escritores y científicos (filósofos, matemáticos, físicos, astrónomos, médicos…..). Allí se escribieron, bajo el reinado del Califa *Al Raschid*, los cuentos de *Las Mil y una Noches*, *Aladino y la lámpara maravillosa*, *Simbad el Marino*,….. Años más tarde, el cargo de Califa lo ocupa su hijo *Al Mamoun*. Cuentan que una noche *Al Mamoun* tuvo un sueño en el que se le apareció el gran filósofo *Aristóteles*. Al despertar, *Al Mamoun*, impresionado, mandó traducir al árabe todas las obras griegas que se habían encontrado hasta entonces. También mandó construir una *casa de la sabiduría* en la que se pudieran reunir los sabios para estudiar y hacer avanzar la ciencia. Entre esos sabios estuvo el matemático y astrónomo *Al Khwarizmi*, uno de los más famosos del mundo árabe, cuyo nombre mal pronunciado dio lugar a la palaba *algoritmo.*

Lee nuevamente el texto anterior y completa el siguiente cuestionario:

1.- El término matemático Algoritmo proviene de una mala pronunciación del nombre del sabio árabe: ________________________________

2.- La capital del mundo árabe antiguo era:___________________________

3.- El famoso filósofo griego que se le apareció en sueños al Califa Al Mamoun era: ____________________________

4.- Los cuentos árabes más famosos escritos en el siglo IX fueron:__________________________

5.- Nuestras actuales universidades y academias equivalen a los:____________________ de la antigüedad y del medioevo.

6.- Todas las obras griegas que se conocían en la época de Al Mamoun fueron traducidas al árabe por: _________________________________

7.- En la ________________ se reunían los sabios del mundo árabe en tiempos del Califa Al Mamoun.

8.- En los centros de la ciencia re reunían: _____________, ____________ y ______________.

9.- ¿Al Raschid y al Mamoun fueron realmente, sabios o mecenas?: ___________________

10.- ¿Por qué?: ____

6.01.- Introducción

Al Khwarizmi (siglo IX d.C.), considerado uno de los «padres del álgebra»

Álgebra, del árabe: الجبر *al-ŷabr*, es el nombre que identifica a una rama de la Matemática que emplea números, letras y signos para poder hacer referencia a múltiples operaciones aritméticas.

La palabra álgebra proviene del título de un libro *Al-jabr w'al-muqabalah*, escrito en Bagdad alrededor del año 825 por el matemático y astrónomo *Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi*, que muestra en sus trabajos la primera fórmula general para la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado.

El álgebra comienza en realidad cuando los matemáticos empiezan a interesarse por las "operaciones" que se pueden hacer con cualquier cifra, más que por los mismos números. Desde 1.700 a.C. a 1.700 d.C. ésta se caracterizó por la invención de símbolos y la resolución de ecuaciones. En esta etapa encontramos un álgebra desarrollada por los griegos (300 a.C.), llamada álgebra geométrica, rica en métodos geométricos para resolver ecuaciones algebraicas.

Hubo que esperar a la Edad Moderna para que los franceses *Vieta* (siglo XVI) y *Descartes* (siglo XVII) dotaran al álgebra de un lenguaje definitivamente simbólico, prácticamente igual al que usamos en la actualidad

Gracias a ellos, hoy entendemos como ***álgebra*** al área matemática que se centra en las relaciones, estructuras y cantidades. La disciplina que se conoce como álgebra elemental, en este marco, sirve para llevar a cabo operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división) pero que, a diferencia de la aritmética, se vale de símbolos (a, x, y) en lugar de utilizar números. Esto permite formular leyes generales y hacer referencia a números desconocidos (incógnitas), lo que posibilita el desarrollo de ecuaciones y el análisis correspondiente a su resolución.

El álgebra elemental postula distintas leyes que permiten conocer las diferentes propiedades que poseen las operaciones aritméticas. Por ejemplo, la suma de números (a + b) es conmutativa (a + b = b + a), asociativa a + (b+c) = (a+b)+c, tiene una operación inversa (la resta), a-a=0 y posee un elemento neutro (0), a+0=a.

6.02.- Expresiones Algebraicas. El Lenguaje algebraico

El lenguaje que utiliza letras y números unidos por los signos de las operaciones aritméticas se denomina lenguaje algebraico.

Una ***expresión algebraica*** es un conjunto de números y letras unidos por los signos de las operaciones aritméticas.

Son ejemplo de expresiones algebraicas:

Área de un círculo	Densidad de una sustancia	El cuadrado de un número
$A=\pi\cdot R^2$	$d=\dfrac{m}{v}$	x^2

El ***lenguaje algebraico*** es una forma de traducir a símbolos y números lo que normalmente tomamos como expresiones particulares. De esta forma se pueden manipular cantidades desconocidas con símbolos fáciles de escribir lo que permite simplificar teoremas, formular ecuaciones e inecuaciones y el estudio de cómo resolverlas. Este lenguaje nos ayuda a resolver problemas matemáticos mostrando generalidades.

En general las letras *X*, *Y* y *Z* se utilizan como las incógnitas o variables de la expresión algebraica. Los siguientes son ejemplos de las expresiones algebraicas más usadas, en forma verbal y escrita:

Enunciado	Expresión algebraica
La suma de dos números	a + b
La resta o diferencia de dos números	x-y
El cociente de dos números	x/y

Enunciado	Expresión algebraica
El doble de un número	2x
El doble de la suma de dos números	2(a+b)
La mitad de un número	x/2

Piensa y practica

1.- Si representamos la edad de María con x, escribe en lenguaje algebraico:

La edad que tendrá María dentro de tres años	
La edad que tendrá dentro de quince años	
La edad que tenía María hace siete años	
El doble de la edad de María	
La mitad de su edad aumentada en treinta años	
La suma de la edad de María y la de su madre, que es el triple de la suya	
La suma de las edades de María y de su primo, que es la mitad de la de María	

2.-Traduce del lenguaje algebraico:

x	
$5x$	
$x+(x+1)$	
$x^2-(x+1)$	
$\frac{x}{3}$	
$2x+c^2$	
$3\cdot m^2$	
$(2x)\cdot(x-1)$	
$(x-1)\cdot(x+1)$	

6.03.- Monomios

De todas las expresiones algebraicas con las que vamos a trabajar, los monomios son las expresiones algebraicas más sencillas.

Un ***monomio*** es el producto de un número por una o varias letras, donde el número (incluido su signo) es a lo que llamamos *coeficiente* y a las letras *parte literal*.

$$\textit{coeficiente} \rightarrow 4x^2tz^3 \leftarrow \textit{parte literal}$$

Llamamos ***grado de un monomio*** al número de factores que forman la parte literal, o lo que es lo mimo, al número de letras de la parte literal.

$$\textit{parte literal} \rightarrow x^2tz^3 = \underbrace{x\cdot x\cdot t\cdot z\cdot z\cdot z}_{\text{dos x, una t y tres z son 6 letras}} \rightarrow \textit{grado} = 6$$

Ejemplo

$-5ax^2 \longrightarrow$ MONOMIO

- COEFICIENTE $\longrightarrow -5$
- PARTE LITERAL $\longrightarrow ax^2$
- GRADO $\longrightarrow 3$

$\underbrace{a \cdot x \cdot x}_{3}$

$$4a^2 \to \begin{cases} \text{Monomio de} \\ \text{segundo grado} \end{cases} \qquad 4x^2y^2 \to \begin{cases} \text{Monomio de} \\ \text{cuarto grado} \end{cases}$$

$$\underset{a \cdot a}{\downarrow} \qquad \underset{x \cdot x \cdot y \cdot y}{\downarrow}$$

Dos ***monomios*** son ***opuestos*** si son semejantes y sus coeficientes son números opuestos.

6.3.1.- Monomios semejantes

Decimos que dos ***monomios*** son ***semejantes*** si tienen la misma parte literal, es decir si tienen las mismas letras, aunque estas estén desordenadas.

$$4x^2z^3 \qquad -3x^2z^3 \qquad x^2z^3 \qquad 5xz^3x \qquad 7z^3x^2 \qquad 8zxzxz$$

Todos estos monomios son semejantes porque tienen 5 letras en la parte literal, 2 equis (x) y 3 zetas (z).

Ejemplo

$$3x^2 \xrightarrow{\text{semejante}} 7x^2 \qquad 3y^2 \xrightarrow{\text{no semejante}} 7z^2 \qquad 3y^2 \xrightarrow{\text{no semejante}} 2y$$

$$3z^5 \xrightarrow{\text{semejante}} \frac{4}{5}z^5 \qquad 3y^2x \xrightarrow{\text{no semejante}} 7x^2y \qquad 3yzx \xrightarrow{\text{semejante}} 2xyz$$

Piensa y practica

Completa la siguiente tabla:

Monomio	Coeficiente	Parte Literal	Grado	Monomio Semejante
$8a$				
$-3x$				
a^2b				
$\frac{2}{3}xy^2$				
				$5abc$
	5			$8z^4$
$-m$				
	-7		5	

El ***valor numérico de un monomio*** es el valor que se obtiene al cambiar la letra o letras por números y realizar la operación.

Ejemplo

Por ejemplo, sea el monomio $3x^2$:

- ✓ el valor numérico para $x=-1$ será: $3x^2 = 3(-1)^2 = 3 \cdot 1 = 3$
- ✓ el valor numérico para $x=-3$ será: $3x^2 = 3(-3)^2 = 3 \cdot 9 = 27$
- ✓ el valor numérico para $x=\frac{3}{5}$ será: $3x^2 = 3\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 3 \cdot \frac{9}{25} = \frac{27}{25}$

Sea el polinomio $2a^2b$:

- ✓ el valor numérico para $a=-1$ y $b=2$ será: $2a^2b = 2 \cdot (-1)^2 \cdot (2) = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$

6.04.- Operaciones con monomios

A la hora de operar con monomios hemos de recordar el orden de preferencia de las operaciones, las tablas de multiplicar y las propiedades de las potencias, puesto que las letras representan números

6.4.1.- Suma y resta de Monomios

Para poder sumar *(o restar)* dos o más monomios estos han de ser ***monomios semejantes***, es decir, monomios que tienen la misma parte literal, si no son semejantes no se pueden sumar *(o restar)*.


1 tomate
+

2 tomates
=

3 tomates

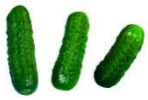

3 patatas
+

2 patatas
=

5 patatas

Como podéis ver, podemos sumar tomates con tomates y patatas con patatas, es decir podemos sumar cosas iguales, pero no podemos sumar cosas diferentes:


3 patatas
+

8 tomates
+

3 pepinos
= ? =

3 patatas
8 tomates
3 pepinos

Pues sumar *(o restar)* monomios es algo similar, la suma de monomios es otro monomio que tiene la misma parte literal y cuyo coeficiente es la suma *(o resta)* de los coeficientes.

X	+	XX	=	XXX		YYY	+	YY	=	YYYYY
1 x		2 x		(1+2) x = 3x		3 Y		2 Y		(3+2) Y = 5Y

Si los monomios no son semejantes, dejamos la suma indicada.

YYY	+	XX	=	YYY+XX
3 Y		2 X		3Y + 2X

Ejemplo

$3x^2+2x^2=(3+2)x^2=5x^2$	$4x^2y+7x^2y=11x^2y$	$3x^2+2x=3x^2+2x$
$5y^3-3y^3=(5-3)y^3=2y^3$	$9xzt-6xzt=3xzt$	$5y^3-8y^2=5y^3-8y^2$

Piensa y practica

Calcula el resultado de las siguientes operaciones con monomios:

a)	$x+x+x=$	**f)**	$z^3+2z^3+4z^3=$	**l)**	$11m^2-6m^2=$	**p)**	$5b^3-7b^3+4b^3=$
b)	$x^2+x^2=$	**g)**	$n+n+n+2n=$	**m)**	$8x-3x=$	**q)**	$y^4+2y^4-4y^4=$
c)	$4a+2a=$	**h)**	$4m+4m=$	**n)**	$m^3-5m^3=$	**r)**	$m-4m+2m=$
d)	$3x^2+x^2=$	**j)**	$3t^7+4t^7+t^7=$	**ñ)**	$\frac{5}{6}m^2-\frac{4}{5}m^2=$	**s)**	$\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}x-\frac{1}{2}x=$
e)	$7z+5z=$	**k)**	$5a^3+2a^3+a^3=$	**o)**	$x^2-\frac{3}{7}x^2=$	**t)**	$\frac{7}{10}z-\frac{4}{5}z-\frac{3}{2}z=$

6.4.2.- Multiplicación de Monomios

Recordando que un monomio es el producto de un número y letras, deducimos que el producto de dos monomios es otro monomio en el que el coeficiente es el producto de los coeficientes (*tablas de multiplicar*) y la parte literal es el producto de las partes literales (*propiedades de las potencias*).

Ejemplo

$$3x^2\cdot 7x^3 = \left\{ \begin{array}{l} 3\cdot 7 = 21 \\ x^2\cdot x^3 = x^{2+3} = x^5 \end{array} \right\} = 21\cdot x^5 \quad \leftrightarrow \quad 6yz^2\cdot 4y^3z = \left\{ \begin{array}{l} 6\cdot 4 = 24 \\ yz^2\cdot y^3z = y^{1+3}\cdot z^{2+1} = y^4\cdot z^3 \end{array} \right\} = 24\cdot y^4\cdot z^3$$

Piensa y practica

Calcula el resultado de las siguientes multiplicaciones de monomios:

a)	$(3x)\cdot(4x) =$	**d)**	$z^3\cdot 2z\cdot 4z^4 =$	**g)**	$11m^2\cdot 6m^7 =$	**j)**	$5b^3\cdot 7t^3\cdot 4b^2t^3 =$
b)	$2x^2\cdot x^2 =$	**e)**	$n\cdot n\cdot n\cdot 3n =$	**h)**	$8y\cdot 3x =$	**k)**	$y^4\cdot 2yt^4\cdot 3y^3t^2 =$
c)	$4a\cdot 2a^3 =$	**f)**	$4m^2\cdot 3m =$	**i)**	$-9p^3\cdot 5m^3 =$	**l)**	$3m\cdot 4m\cdot 2xz =$

6.4.3.- División de Monomios

De forma similar al producto, el cociente de monomios es otro monomio en el que el coeficiente es el cociente de los coeficientes y la parte literal es el cociente de las partes literales.

Ejemplo

$$9x^4 : 3x^3 = \left\{ \begin{array}{l} 9 : 3 = 3 \\ x^4 : x^3 = x^{4-3} = x^1 = x \end{array} \right\} = 3x \quad \leftrightarrow \quad 6z^2 : 3z^2 = \left\{ \begin{array}{l} 6 : 3 = 2 \\ z^2 : z^2 = z^{2-2} = z^0 = 1 \end{array} \right\} = 2\cdot 1 = 2$$

Cuando dividamos dos monomios semejantes, el resultado será un número (*monomio de grado 0*), porque la parte literal desaparecerá.

Resumiendo, ***el cociente de monomios puede ser un número, otro monomio o una fracción*** dependiendo del grado de cada uno de ellos:

Ejemplo

$$\underbrace{(6a^2b):(3a^2b) = \frac{2\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{a^2}\cdot\cancel{b}}{\cancel{3}\cdot\cancel{a^2}\cdot\cancel{b}} = 2}_{\text{Número}} \qquad \underbrace{(15x^4):(3x^3) = \frac{\cancel{3}\cdot 5\cdot\cancel{x^3}\cdot x}{\cancel{3}\cdot\cancel{x^3}} = 5x}_{\text{Monomio}} \qquad \underbrace{(2ab):(6b^2) = \frac{\cancel{2}\cdot a\cdot\cancel{b}}{\cancel{2}\cdot 3\cdot\cancel{b}\cdot b} = \frac{a}{3b}}_{\text{Fracción}}$$

Piensa y practica

Calcula el resultado de las siguientes multiplicaciones de monomios:

a)	$(10x):(2x) =$	**d)**	$(27z^5):(-9z^2) =$	**g)**	$\frac{4x}{2} =$	**j)**	$\frac{12a^2}{4a} =$
b)	$(14a^2):(-7a) =$	**e)**	$(-16a^4):(-8a) =$	**h)**	$\frac{3}{3a} =$	**k)**	$\frac{15x}{3x^2} =$
c)	$(27z^5):(-9z^2) =$	**f)**	$(5z^7):(15z^7) =$	**i)**	$\frac{5x}{10x} =$	**l)**	$\frac{8z^2}{16z^3} =$

Llamamos ***polinomio*** a una expresión algebraica formada por la suma o la resta de varios monomios no semejantes. Se llamará binomio cuando la expresión algebraica esté formada por dos monomios.

$$3x^2+2x^2=5x^2 \quad \rightarrow \quad \textit{Monomio} \qquad 3x^2+2x=3x^2+2x \quad \rightarrow \quad \textit{Polinomio (Binomio)}$$

6.05.- Ecuaciones

Una ***ecuación*** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros y separadas por el signo igual, en las que aparecen elementos conocidos y datos desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas. Cuando esta igualdad es cierta para cualquier valor de la incógnita recibe el nombre de ***Identidad.***

$$\underbrace{\underbrace{3x+5}_{\textit{Primer miembro}} = \underbrace{2x-4}_{\textit{Segundo miembro}}}_{\text{ECUACIÓN}} \qquad \underbrace{(x+2)^2=x^2+4x+4}_{\text{IDENTIDAD}}$$

Aunque creas que las ecuaciones son algo novedoso, llevas utilizándolas desde los primeros cursos de primaria. Si no te lo crees, observa:

$$\underbrace{3+\square=5}_{\textit{En Primaria}} \qquad \underbrace{3+x=5}_{\textit{En Secundaria}}$$

$$\downarrow \qquad \rightarrow \qquad \downarrow$$

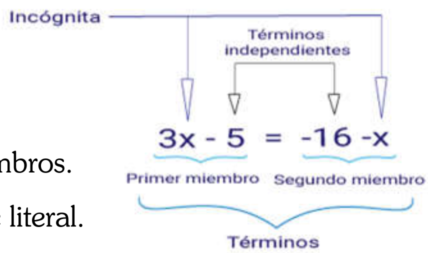
$$3+\boxed{2}=5 \qquad\qquad 3+2=5$$

En ambos casos se trata de buscar el número que sumado a tres da como resultado cinco.

Las ecuaciones permiten codificar relaciones en lenguaje algebraico y suponen una potentísima herramienta para resolver problemas, aunque antes, debes aprender a resolverlas.

6.5.1.- Elementos de una ecuación

Los elementos de una ecuación son:



- ✓ ***Miembro:*** Expresión algebraica que hay a ambos lados del =.
- ✓ ***Término:*** Cada uno de los sumandos que hay en los dos miembros.
  - ○ ***Término Independiente:*** Es aquel que no tiene parte literal.
- ✓ ***Incógnita:*** Cada una de las letras de valor desconocido y que queremos calcular. En general utilizaremos la letra x, aunque también se suelen utilizar la y y la z.
- ✓ ***Grado:*** Es el mayor de los grados de sus términos

6.5.2.- Ecuaciones equivalentes

Diremos que dos ecuaciones son ***equivalentes*** si tienen la misma solución.

Ejemplo

Las ecuaciones $\begin{cases} 2x=4 & \rightarrow & x=2 \\ 4x=8 & \rightarrow & x=2 \end{cases}$ Tienen la misma solución, por tanto son equivalentes.

6.5.3.- Transformación de ecuaciones

El método para resolver una ecuación consiste en ir transformándola, mediante sucesivos pasos, en otras equivalentes más sencillas hasta despejar la incógnita (dejar sola la *x*).

Para transformar una ecuación en otra equivalente más sencilla, utilizaremos dos recursos:

- Reducir sus miembros.
- Transponer los términos.

Reducir los términos de una ecuación es agrupar las *x* con las *x* y los números con los números:

Ejemplo

$$2x+3+5x=-9-4x+2x \xrightarrow[\text{términos}]{\text{Reducción de}} 7x+3=-9-2x$$

Trasponer los términos de una ecuación es pasar todas las *x* a un miembro y todos los números a otro sabiendo que:

- Lo que está ***sumando,*** **pasa** al otro miembro de la ecuación ***restando*** (y viceversa)

Ejemplo

$$\underbrace{7x+3=-9-2x \xrightarrow{\textit{Trasponemos}} 7x\underbrace{+2x}_{\substack{\textit{cambia}\\\textit{de}\\\textit{signo}}}=-9\underbrace{-3}_{\substack{\textit{cambia}\\\textit{de}\\\textit{signo}}}}_{\substack{\text{El 3 que suma en el primer miembro, pasa al segundo restando.}\\\text{El -2x que está restando en el segundo miembro, pasa al primero sumando.}}} \xrightarrow{\textit{Agrupamos}} 9x=-12$$

- Lo que está ***multiplicando***, **pasa** al otro miembro ***dividiendo*** (y viceversa)

Ejemplo

$$\underbrace{9\cdot x=-12 \rightarrow x=\frac{-12}{9}=-\frac{4}{3}}_{\text{El 9 que multiplica en el primer miembro, pasa dividiendo al segundo}} \qquad \underbrace{\frac{y}{4}=5 \rightarrow y=5\cdot 4=20}_{\text{El 4 que divide en el primer miembro, pasa multiplicando al segundo}}$$

De forma teórica:

- *Si a los dos miembros de una ecuación se les* ***suma o resta*** *un mismo número o expresión algebraica, se obtiene una ecuación equivalente a la dada originalmente.*

$$3x+4=0 \xrightarrow[\textit{Equivalentes}]{\textit{Ecuaciones}} 3x+4-4=0-4 \xrightarrow[\textit{Equivalentes}]{\textit{Ecuaciones}} 3x=-4$$

- *Si los dos miembros de una ecuación, se* ***multiplican o dividen*** *por un mismo número, distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.*

$$3x=-4 \xrightarrow[\textit{Equivalentes}]{\textit{Ecuaciones}} \frac{3x}{3}=\frac{-4}{3} \xrightarrow[\textit{Equivalentes}]{\textit{Ecuaciones}} x=-\frac{4}{3}$$

6.06.- Resolución de Ecuaciones de primer grado

Decimos que una ecuación es de primer grado cuando presenta monomios de grado 1 en alguno de sus miembros, si los monomios son de grado 2, diremos que la ecuación es de segundo grado, y así sucesivamente….

Ejemplo

$$\underbrace{\overbrace{4x}^{\text{Monomio de grado 1}}+5=0}_{\text{Ecuación de primer grado}} \qquad \underbrace{\overbrace{3x^2}^{\text{Monomio de grado 2}}+2x-7=0}_{\text{Ecuación de segundo grado}} \qquad \underbrace{\overbrace{x^3}^{\text{Monomio de grado 3}}-2x^2+4x-5=0}_{\text{Ecuación de tercer grado}} \qquad \ldots\ldots$$

Resolver una ecuación es encontrar el valor, o los valores, que debe tomar la incógnita (o incógnitas) para que la igualdad sea cierta. En el caso de que no exista ningún valor que verifique la igualdad, diremos que la ecuación no tiene solución.

Ecuaciones con infinitas soluciones y ecuaciones sin solución

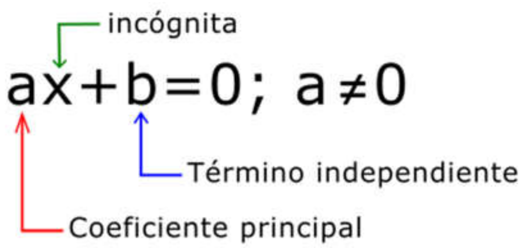
- En la ecuación $0 \cdot x = 0$, cualquier valor que tome x hace cierta la igualdad, por tanto:

$$0 \cdot x = 0 \rightarrow \text{Tiene infinitas soluciones}$$

- En la ecuación $0 \cdot x = k$, con $k \neq 0$, no hay ningún valor de x, que haga cierta la igualdad.

$$0 \cdot x = k \rightarrow \text{No tiene solución}$$

De forma general, una ecuación de primer grado se representa como: $ax + b = 0$ donde a es el coeficiente principal, b el término independiente y x es la incógnita.



La solución de dicha ecuación viene dada por:

$$\boxed{ax + b = 0 \quad \rightarrow \quad ax = -b \quad \rightarrow \quad x = -\frac{b}{a}}$$

Ejemplo

a) $3x + 3 = 9 \xrightarrow[\text{términos}]{\text{Trasponemos}} 3x = 9 - 3 \xrightarrow[\text{términos}]{\text{Agrupamos}} 3x = 6 \xrightarrow[\text{la incógnita}]{\text{Despejamos}} x = \frac{6}{3} = 2 \xrightarrow{\text{Solución}} x = 2$

b) $2x + 3(2x - 1) = x + 67 \xrightarrow[\text{Paréntesis}]{\text{Rompemos}} 2x + 6x - 3 = x + 67 \xrightarrow[\text{términos}]{\text{Agrupamos}} 8x - 3 = x + 67 \xrightarrow[\text{términos}]{\text{Trasponemos}}$

$\xrightarrow[\text{términos}]{\text{Trasponemos}} 8x - x = 67 + 3 \xrightarrow[\text{términos}]{\text{Agrupamos}} 7x = 70 \xrightarrow[\text{la incógnita}]{\text{Despejamos}} x = \frac{70}{7} = 10 \xrightarrow{\text{Solución}} x = 10$

Piensa y practica

1.- *Resuelve las siguientes ecuaciones:*

$3x + 1 = 6x - 8$	$3(x-5) - 2(x+4) = 18$	$3[2x - (3x+1)] = x + 1$
$13x - 5(x+2) = 4(2x-1) + 7$	$11 - 5(3x+2) + 7x = 1 - 8x$	$3 - 2x(5 - 2x) = 4x^2 + x - 30$

2.- *¿Verdadero o falso?*

a) La ecuación $x^2 + 6x = 7x - 1$ es de segundo grado.

b) Los términos de una ecuación son los sumandos que forman los miembros.

c) Una ecuación puede tener más de dos miembros

d) Todas las ecuaciones de primer grado son equivalentes.

e) La ecuación $x + 1 = 5$ es equivalente a la ecuación $x + 2 = 6$.

6.6.1.- Resolución de Ecuaciones de primer grado con denominadores

Cuando en los términos de una ecuación aparecen denominadores, la transformaremos en otra equivalente que no los tenga. Para ello, multiplicaremos los dos miembros de la ecuación por el *mínimo común múltiplo* de los denominadores.

Ejemplo

$$\frac{x}{3}-\frac{13-2x}{2}=\frac{1}{3} \quad \to \quad m.c.d.(3,2,6)=6 \quad \to \quad \frac{2x}{6}-\frac{3\cdot(13-2x)}{6}=\frac{2}{6} \quad \to \quad 2x-3(13-2x)=2$$

$$2x-38+6x=2 \quad \to \quad 8x-38=2 \quad \to \quad 8x=38+2 \quad \to \quad 8x=40 \quad \to \quad x=\frac{40}{8}=5$$

6.07.- Resolución de problemas con ecuaciones

Las ecuaciones permiten resolver una gran cantidad de problemas, presentados generalmente de manera verbal. Tal como lo decía *Newton*, el paso fundamental en la solución de esta clase de problemas está en la adecuada interpretación del enunciado a través de una ecuación.

Este proceso recibe el nombre de ***modelación del problema***.

> *Para resolver un problema referente a números o de relaciones entre cantidades, basta traducir dicho problema del lenguaje verbal al lenguaje algebraico, o sea, a una ecuación.*
>
> *Isaac Newton*

A continuación se presenta una secuencia de pasos, que permite en general, enfrentar de manera ordenada la resolución de un problema.

1) Lectura y comprensión del enunciado.
2) Asignar la incógnita o incógnitas.
3) Establecer relaciones entre las variables del problema.
4) Plantear la ecuación ayudándonos del lenguaje algebraico.
5) Resolver la ecuación con precisión.
6) Analizar la solución de la ecuación en el problema y verificar la solución o soluciones.
7) Dar la respuesta al problema planteado

Piensa y practica

3.- *¿Qué enunciado asocias a cada ecuación?*

a) La tercera parte de un número es igual a su cuarta parte más 20 unidades.

b) La edad de Andrés es el triple que la de su hermana, y entre los dos suman 20 años.

c) Un rectángulo es 3 metros más largo que ancho, y su perímetro mide 30 metros.

d) He pagado 30 € por 3 blocs de dibujo y una caja de acuarelas. Pero la caja costaba el doble que un bloc.

e) Un ciclista ha recorrido la distancia desde A hasta B a la velocidad de 15 km/h y un peatón, a 5 km/h, ha tardado una hora más.

f) Un grillo avanza, en cada salto, un metro menos que un saltamontes. Pero el grillo, en 15 saltos, llega igual de lejos que el saltamontes en 5.

$x+\frac{x}{3}=20$ $\quad$ $2x+2(x+3)=30$ $\quad$ $15(x-1)=5x$ $\quad$ $\frac{x}{3}=\frac{x}{4}+20$ $\quad$ $3x+2x=30$ $\quad$ $15x=5(x+1)$

6.7.1.- Ejemplos de problemas resueltos mediante ecuaciones

Veamos algunos ejemplos de problemas resueltos mediante ecuaciones:

1.- Si al triple de un número le restas 8, obtienes 25. ¿De qué número se trata?

Si llamamos *x* al número, el triple de dicho número será: *3x* y por tanto la ecuación será:

$$3x-8=25$$

Si trasponemos el 8 al segundo miembro:

$$3x=25+8$$

Agrupando:

$$3x=33$$

Y despejando la incógnita *x*:

$$x=\frac{33}{3}=11$$

Número: x

Triple del número: 3x

Por tanto el número pedido es el 11.

2.- Un kilo de manzanas cuesta 0,50 € más que uno de naranjas. Marta ha comprado tres kilos de naranjas y uno de manzanas por 5,30 €. ¿A cómo están las naranjas? ¿Y las manzanas?

Si el precio de las naranjas es x, el de las manzanas será *x+0,50*

Precio de naranjas: x
Precio manzanzas: x+0,50

La ecuación será: $\underbrace{(3\cdot x)}_{\text{Precio de 3 kilos de naranjas}}+\underbrace{(x+0,50)}_{\text{Precio del kilo de manzanas}}=\underbrace{5,30}_{\text{Total de la compra}}$

Si rompemos el paréntesis:

$$3x+x+0,50=5,30$$

Si agrupamos las x y trasponemos el 0,50 al segundo miembro:

$$4x+0,50=5,30 \quad\rightarrow\quad 4x=5,30-0,50 \quad\rightarrow\quad 4x=4,80$$

Si despejamos la *x*, pasando el 4 al segundo miembro (pasa dividiendo) y calculamos el valor de *x*:

$$4\cdot x=4,80 \quad\rightarrow\quad x=\frac{4,80}{4}=1,20$$

De aquí obtenemos que el precio del kilo de naranjas es 1,20 € y por tanto el de manzanas será:

$$Manzanas=x+0,50=1,20+0,50=1,70\ €$$

Por lo que las manzanas cuestan 1,70 € el kilo y las naranjas 1,20 € el kilo.

3.- Rosa tiene 25 años menos que su padre, Juan, y 26 años más que su hijo Alberto. Entre los tres suman 98 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Si la edad de Rosa es *x*, su padre, Juan, tendrá 25 años más que ella, *x+25*, y su hijo Alberto, 26 años menos que ella, *x-26*. Si la suma de todos es 98, ya podemos escribir la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} Rosa\rightarrow x \\ Juan\rightarrow x+25 \\ Alberto\rightarrow x-26 \end{array}\right\} \rightarrow \quad edad_{Rosa}+edad_{Juan}+edad_{Alberto}=98 \quad\rightarrow\quad x+x+25+x-26=98$$

Agrupando las *x* y los números y dejando las *x* a la derecha y los números a la izquierda del igual:

$$x+x+25+x-26=98 \quad\rightarrow\quad 3x-1=98 \quad\rightarrow\quad 3x=98+1 \quad\rightarrow\quad 3x=99$$

Y despejando la x:

$$3x=99 \quad\rightarrow\quad x=\frac{99}{3}=33$$

Por tanto la edad de Rosa es de 33 años, la de su padre, Juan, *x+25=33+25=58* años, y la de su hijo Alberto, *x-26=33-26=7* años.

Así que Rosa tiene 33 años, Juan 58 años y Alberto 7 años.

Siempre que resolvamos un problema mediante ecuaciones, podemos comprobar que el resultado es correcto, simplemente sustituyendo los resultados obtenidos.

En el ejemplo anterior, decía que la suma de sus edades era de 98 años, así que, vamos a comprobar si nuestros resultados son correctos:

$$edad_{Rosa} + edad_{Juan} + edad_{Alberto} = 98 \quad \rightarrow \quad 33 + 58 + 7 = 98$$

Por tanto vemos que las edades obtenidas son correctas porque todas suman 98 y Juan es 25 años más viejo que Rosa y Alberto es 26 años más joven.

Piensa y practica

4.- *Resuelve los siguientes problemas*

a) Hallar tres números consecutivos cuya suma sea 219.

b) Dado un número, la suma de su mitad, su doble y su triple es 55. ¿Qué número es?

c) Juan tiene 21 años menos que Andrés y sabemos que la suma de sus edades es 47. ¿Qué edades tienen?

d) Si hemos recorrido 21 km, que son las tres séptimas partes del trayecto, ¿cuántos km quedan por recorrer?

6.08.- Ejercicios y Problemas

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

20=2x-(10-4x)	Sol: x=5
5(x-1)+10(x+2)=45	Sol: x=2
12x+3(2x-4)=60	Sol: x=4
3x-(x+1)=x-2	Sol: x=-1
x-3(x+5)=3x+10	Sol: x=-5
3(2-x)=18x-1	Sol: x=1/3
10+5(x-3)=3(x+1)	Sol: x=4

2.- Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones:

$3x + \frac{1}{2}x + 6 = 2x$	$x = -4$
$\frac{3}{2}x + 8 = \frac{3}{5}x - 1$	$x = -10$
$\frac{4}{3}(x+1) = 2x - 1$	$x = \frac{7}{2}$
$\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} - \frac{5x}{6} = 5x - 14$	$x = 3$
$\frac{x-2}{4} - \frac{2x+6}{3} = 0$	$x = -6$

3.- Mi abuelo ha plantado los dos séptimos de la superficie de su huerto que son 12 m^2. ¿Cuántos m^2 mide el huerto?

Sol: 42 m^2.

4.- Andrés tiene el triple de dinero que Luis y entre los dos tienen 248 € ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Sol: 62 y 186 euros.

5.- La edad de Ana es el doble que la de Mirian y la edad de Mirian es el triple que la de Olga, si entre todas ellas suman 70 años ¿Cuál es la edad de cada una?

Sol: Olga 7 años, Miriam 21 y Ana 42.

6.- Luis ha gastado 4,20 € más que Loli. Si entre los dos han gastado 18 € ¿Cuánto gastó cada uno?

Sol: Loli 6,90 € y Luis 11,10 €.

7.- Tengo en una mano el doble de monedas que en la otra. Si en total tengo 27 monedas ¿Cuántas monedas tengo en cada mano?

Sol: 9 monedas en una y 18 en la otra.

8.- María tiene 30 años menos que su padre, y éste tiene el triple de los años de su hija. Halla la edad de cada uno.

Sol: María 15 años y su padre 45.

9.- Se reparten bombones entre tres niños. Al 2º le dan el doble que al 1º y al 3º el triple que al 1º. Si el total es de 36 bombones. ¿Cuántos bombones dan a cada niño?

Sol: 6, 12 y 18 bombones.

10.- Un padre tiene triple edad que su hijo. Si el padre tuviera 30 años menos y el hijo 8 más, los dos tendrían la misma edad. Averiguar la edad de cada uno.

Sol: El hijo 19 años y el padre 57.