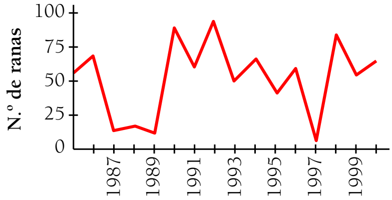
12 Inferencia estadística. Estimación

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El curioso incidente del perro a medianoche

En el colegio tenemos un estanque con ranas, que están allí para que aprendamos a tratar a los animales con cariño y respeto, porque algunos de los niños del colegio son muy malos con los animales y creen que es divertido aplastar gusanos o tirar piedras a los gatos.

Y algunos años hay montones de ranas en el estanque, y algunos años hay muy pocas. Y si hicieras un gráfico de cuántas ranas había en el estanque tendría este aspecto (pero este gráfico es lo que se llama *hipotético*, que significa que las cifras no son las cifras reales, sino que solo es una *ilustración*):



Y si mirases el gráfico podrías pensar que en 1987 y 1988 y 1989 y 1997 hizo un invierno realmente frío, o que había una garza real que venía a comerse montones de ranas (a veces hay una garza real que viene y trata de comerse las ranas, pero hay una tela metálica sobre el estanque que lo impide).

Pero a veces no tiene nada que ver con inviernos fríos o gatos o garzas. A veces son tan solo matemáticas. He aquí una fórmula para una población de animales:

$$N_{\text{nueva}} = \lambda N_{\text{vieja}}(1 - N_{\text{vieja}})$$

Y en esta fórmula N representa la densidad de población. Cuando $N = 1$ la población es lo más grande que puede llegar a ser. Y cuando $N = 0$ la población se ha extinguido. N_{nueva} es la población en un año, y N_{vieja} es la población en el año anterior. Y λ es lo que se llama una constante. Cuando λ es menor que 1, la población es cada vez más pequeña y se extingue. Y cuando λ está entre 1 y 3, la población crece y después se estabiliza. […] Y cuando λ está entre 3 y 3,57 la población sigue ciclos. Pero cuando λ es mayor que 3,57 1a población se vuelve caótica como en el primer gráfico.

Eso lo descubrieron Robert May y George Oster y Jim Yorke. Y significa que a veces las cosas son tan complicadas que es imposible predecir qué va a pasar a continuación, pero en realidad obedecen unas reglas muy sencillas.

MARK HADDON

El curioso incidente del perro a medianoche
Mark Haddon

El protagonista de esta novela es Christopher, un chico de quince años que asiste a un colegio para alumnos con necesidades educativas especiales. Sufre severos trastornos psíquicos que le dificultan las relaciones con los demás; sin embargo, su inteligencia es normal, e incluso su capacidad matemática está por encima de la media. Siguiendo una sugerencia de su profesora, Christopher decide escribir un libro donde anota sus pesquisas para descubrir al asesino del perro de la vecina, que encontró muerto una noche.

Christopher es meticuloso, programa todo lo que tiene que hacer, observa con objetividad las cosas, no se deja llevar por las apariencias, aplica la lógica a todas sus decisiones, no le gusta que le den órdenes confusas o sin sentido...

Por ejemplo, la gente te dice con frecuencia «Cállate», pero no te dice durante cuánto tiempo tienes que quedarte callado. O ves un letrero que dice PROHIBIDO PISAR EL CÉSPED pero debería decir PROHIBIDO PISAR EL CÉSPED ALREDEDOR DE ESTE LETRERO o PROHIBIDO PISAR EL CÉSPED EN ESTE PARQUE porque hay mucho césped que sí se te permite pisar.

Además, la gente se salta las normas constantemente. Por ejemplo, Padre conduce muchas veces a más de 30 millas por hora en una zona limitada a 30 millas por hora, y otras conduce después de haber bebido, y con frecuencia no se pone el cinturón de seguridad. Y en la Biblia dice No matarás pero hubo unas Cruzadas y dos guerras mundiales y la guerra del Golfo y en todas ellas hubo cristianos que mataban gente.

Christopher nunca miente. Por eso no le gustan las metáforas. Tampoco le gustan las creencias que creemos verdades y solo son convencionalismos, como, por ejemplo, la asignación de nombres a las constelaciones:

La gente dice que **Orión** se llama Orión porque Orión era un cazador y la constelación parece un cazador con garrote y arco y flecha. Pero eso es una verdadera tontería porque no son más que estrellas, y podrías unir los puntitos como quisieras, y hacer que pareciese una señora con un paraguas que saluda, o la cafetera de la señora Shears, que es de Italia, con un asa y vapor que sale o un dinosaurio.

Su amor por las matemáticas le lleva a numerar los capítulos de su novela con números primos: empieza con el capítulo 2 y termina con el 233. A lo largo de ella intercala numerosas referencias a las matemáticas.

La Estadística permite construir modelos matemáticos de situaciones reales y predecir, con cierta aproximación, lo que va a suceder. Partiendo de $N = 0,5$; estudia lo que le sucederá en 10 años a una población de ranas aplicando la fórmula anterior con $\lambda = 2$. ¿Coincide con lo que se dice en el texto?

	1	2	3	…	9	10
N_{vieja}	0,5	0,5	0,5	…	0,5	0,5
N_{nueva}	$2 \cdot 0,5(1 - 0,5) = 0,5$	$2 \cdot 0,5(1 - 0,5) = 0,5$	$2 \cdot 0,5(1 - 0,5) = 0,5$	…	$2 \cdot 0,5(1 - 0,5) = 0,5$	$2 \cdot 0,5(1 - 0,5) = 0,5$

La población permanecerá estable siempre.

Inferencia estadística. Estimación

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Representa los siguientes intervalos de todas las formas posibles.

a) Números mayores que 5,6 y menores que 8,2.

b) $\{x: -2 \leq x \leq 7\}$

c) Números menores o iguales que 5.

d) Números mayores que -2.

e) Centrado en 2 y de radio 3.

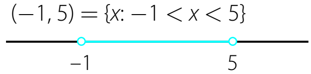
a) $(5{,}6; 8{,}2) = \{x: 5{,}6 < x < 8{,}2\}$

b) $[-2, 7] = \{x: -2 \leq x \leq 7\}$

c) $(-\infty, 5] = \{x: x \leq 5\}$

d) $(-2, +\infty) = \{x: x > -2\}$

e) $(-1, 5) = \{x: -1 < x < 5\}$



002 Tipifica la variable $X \equiv N(4; 0{,}5)$ para transformarla en una $N(0, 1)$.

$$X \equiv N(4; 0{,}5) \rightarrow \frac{X-4}{0{,}5} \equiv N(0, 1)$$

003 Las calificaciones de un grupo de alumnos siguen una distribución normal de media 4 y desviación típica 0,5. Calcula:

a) La probabilidad de que, al escoger un alumno al azar, este haya aprobado (se aprueba con 5 puntos).

b) La probabilidad de obtener menos de 3,25 puntos.

$X \equiv N(4; 0{,}5)$

a) $$P(X \geq 5) = P\left(\frac{X-4}{0{,}5} \geq \frac{5-4}{0{,}5}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z < 2) =$$
$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

b) $$P(X < 3{,}25) = P\left(\frac{X-4}{0{,}5} \geq \frac{3{,}25-4}{0{,}5}\right) = P(Z \leq -1{,}5) = P(Z \geq 1{,}5) =$$
$$= 1 - P(Z < 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$$

ACTIVIDADES

001 La media semanal de horas de asistencia a una biblioteca de tres miembros de una familia es 5, 2 y 7, respectivamente. ¿Cuál puede considerarse la media semanal de asistencia a la biblioteca de la familia?

Podemos considerar la media de la familia como la media de las medias de los tres miembros.

$$\overline{x} = \frac{5+2+7}{3} = 4,67$$

002 En una ciudad se toma una muestra de 250 personas, de las cuales 75 practican deporte. Determina y calcula un estimador puntual para la proporción de personas que practican deporte en la ciudad.

Como estimador puntual tomamos la proporción muestral:

$$\hat{p} = \frac{75}{250} = 0,3$$

003 Con una muestra de 100 personas para determinar su altura media, en metros, se ha obtenido el intervalo de confianza (1,62; 1,74) con un nivel de confianza del 95 %. Interpreta este resultado y decide cuál será el error máximo admisible.

Con la muestra elegida, la probabilidad de que la altura media de la población esté en el intervalo de confianza (1,62; 1,74) es 0,95.

Establecemos el radio del intervalo de confianza y su punto medio:

$$\text{Radio} = \frac{1,74 - 1,62}{2} = 0,06$$

$$\text{Punto medio} = \frac{1,74 + 1,62}{2} = 1,68$$

El error máximo admisible es 0,06; es decir, al considerar la altura media como 1,68 metros, el mayor error que podemos cometer en la estimación es de 6 centímetros.

004 En una muestra de alumnos de Bachillerato para determinar su gasto mensual, en euros, se ha obtenido el intervalo (81,15; 87,75) con un nivel de confianza del 99 %. Interpreta este resultado y decide cuál será el error máximo admisible.

Con la muestra elegida, la probabilidad de que el gasto medio de los alumnos de Bachillerato esté en el intervalo de confianza (81,15; 87,75) es 0,99.

Establecemos el radio del intervalo de confianza y su punto medio:

$$\text{Radio} = \frac{87,75 - 81,15}{2} = 3,3$$

$$\text{Punto medio} = \frac{87,75 + 81,15}{2} = 84,45$$

El error máximo admisible es 3,3; es decir, al considerar el gasto medio de los alumnos de Bachillerato como 84,45 €, el mayor error que podemos cometer en la estimación es de 3,30 €.

005 **En un hospital se ha tomado la temperatura a una muestra de 64 pacientes, para estimar la temperatura media de sus enfermos. La media de la muestra ha sido de 37,1 °C, y la desviación típica de la población, de 1,04 °C. Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99 %.**

$$1-\alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}005} = 2{,}58$$

$$\left(37{,}1 - 2{,}58 \cdot \frac{1{,}04}{\sqrt{64}};\ 37{,}1 + 2{,}58 \cdot \frac{1{,}04}{\sqrt{64}}\right) = (36{,}76;\ 37{,}44)$$

Con la muestra elegida, la probabilidad de que la temperatura media de los 64 pacientes esté en el intervalo de confianza (36,76; 37,44) es 0,99.

006 **Un estudio realizado sobre una muestra de 200 coches indica que la antigüedad media de la muestra es de 7,85 años. Calcula un intervalo de confianza para la antigüedad media de la población, con un nivel de confianza del 95 %, y teniendo en cuenta que la desviación típica es de 2,9 años.**

$$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$$

$$\left(7{,}85 - 1{,}96 \cdot \frac{2{,}9}{\sqrt{200}};\ 7{,}85 + 1{,}96 \cdot \frac{2{,}9}{\sqrt{200}}\right) = (7{,}45;\ 8{,}25)$$

Con la muestra elegida, la probabilidad de que la antigüedad media de los coches esté en el intervalo de confianza (7,45; 8,25) es 0,95.

007 **De una distribución normal, con media desconocida y desviación típica 8, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una muestra si se pretende que el error máximo admisible cometido, al estimar la media poblacional, sea inferior a 2, para un nivel de confianza del 99 %?**

$$1-\alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}005} = 2{,}58$$

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2{,}58 \cdot 8}{2}\right)^2 = 106{,}5$$

Para que se cumplan las condiciones, y como n tiene que ser un número entero, debe ser mayor o igual que 107.

008 **La desviación típica del peso de las bolsas de frutos secos de una marca es de 15 g. De una muestra de 250 bolsas, el peso medio ha sido de 246 g. Al hallar el intervalo de confianza del 90 % para el peso medio, ¿cuál es el error máximo admisible?**

$$1-\alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}1 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}005} = 2{,}58$$

$$E = 1{,}645 \cdot \frac{15}{\sqrt{250}} = 1{,}56$$

Este resultado indica que, al considerar 246 gramos como peso medio de las bolsas, el mayor error que podemos cometer en la estimación es 1,56 gramos con una probabilidad de 0,90.

009 **En las últimas elecciones se ha tomado una muestra de 450 personas a la salida de los colegios electorales, y 125 de ellas afirmaron votar al partido *A*. Halla un intervalo de confianza para el porcentaje de votantes del partido *A* con un nivel de confianza del 90 %.**

125 personas de 450 $\rightarrow \hat{p} = \dfrac{125}{450} = 0{,}28$

$1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}1 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,5} = 1{,}645$

$$\left(0{,}28 - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}28 \cdot 0{,}72}{450}}\,;\, 0{,}28 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}28 \cdot 0{,}72}{450}}\right) = (0{,}25;\, 0{,}31)$$

Con la muestra elegida, la probabilidad de que la proporción de votantes esté en el intervalo de confianza (0,25; 0,31) es 0,90.

010 **De una muestra de 500 personas, 325 tienen teléfono móvil. Determina un intervalo de confianza para estimar la proporción de usuarios de teléfono móvil de la población con un nivel de confianza:**

a) Del 95 % **b) Del 99 %**

a) 325 personas de 500 $\rightarrow \hat{p} = \dfrac{325}{500} = 0{,}65$

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1{,}96$

$$\left(0{,}65 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}65 \cdot 0{,}35}{500}}\,;\, 0{,}65 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}65 \cdot 0{,}35}{500}}\right) = (0{,}61;\, 0{,}69)$$

Con la muestra elegida, la probabilidad de que la proporción de las personas que tiene teléfono móvil esté en el intervalo de confianza (0,61; 0,69) es 0,95.

b) $\hat{p} = 0,65$

$1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2{,}58$

$$\left(0{,}65 - 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}65 \cdot 0{,}35}{500}}\,;\, 0{,}65 + 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}65 \cdot 0{,}35}{500}}\right) = (0{,}59;\, 0{,}71)$$

Con la muestra elegida, la probabilidad de que la proporción de las personas que tiene teléfono móvil esté en el intervalo de confianza (0,59; 0,71) es 0,99.

011 **De una muestra de 300 bombillas, 24 han resultado ser defectuosas. Al determinar el intervalo de confianza para la proporción de bombillas defectuosas de la población con un nivel de significación de 0,01, ¿cuál es el error máximo admisible?**

24 bombillas defectuosas de 300 $\rightarrow \hat{p} = \dfrac{24}{300} = 0,08$

$\alpha = 0{,}01 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2{,}58$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}08 \cdot 0{,}92}{300}} = 0{,}04$$

Este resultado indica que, al considerar el 8 % como la proporción de bombillas defectuosas, el mayor error que podemos cometer en la estimación es 0,04.

012 De una muestra de1.000 habitantes, 650 leen cierto periódico. ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de una muestra, si se pretende que el error máximo admisible cometido, al estimar la proporción poblacional, sea inferior al 5 %, para un nivel de confianza del 90 %?

650 habitantes leen cierto periódico de 1.000 $\rightarrow \hat{p} = \frac{650}{1.000} = 0{,}65$

$1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}1 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}05} = 1{,}645$

$$n = \frac{1{,}645^2 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}35}{0{,}05^2} = 246{,}25$$

Para que se cumplan las condiciones, y como n tiene que ser un número entero, debe ser mayor o igual que 247.

013 La desviación típica de los asistentes a las bibliotecas de una ciudad es 3, y para determinar la edad media de los asistentes, se toman dos muestras de 45 personas. En la primera, la edad media es de 23 años, y en la segunda, de 34 años.

Determina un intervalo de confianza para la diferencia de medias con un nivel de confianza del 90 %.

$1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}1 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}05} = 1{,}645$

$$\left((23-34) - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{3^2}{45} + \frac{3^2}{45}}, (23-34) + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{3^2}{45} + \frac{3^2}{45}}\right) = (-12{,}04; -9{,}96)$$

La diferencia de medias está en el intervalo $(-12{,}04; -9{,}96)$.

014 La duración media del recorrido de una línea de autobús sigue una distribución normal con desviación típica de 4. Para una muestra de 15 autobuses nuevos la duración media es de 23 minutos, mientras que para una muestra de 20 autobuses antiguos ha sido de 26 minutos. Calcula un intervalo de confianza para la diferencia de medias del 99 %.

$1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}005} = 2{,}58$

$$\left((26-23) - 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{4^2}{20} + \frac{4^2}{15}}; (26-23) + 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{4^2}{20} + \frac{4^2}{15}}\right) = (-0{,}52; 6{,}52)$$

La diferencia de medias está en el intervalo $(-0{,}52; 6{,}52)$.

015 La desviación típica de los asistentes a las bibliotecas de una ciudad es 3, y para determinar la edad media de los asistentes, se toman dos muestras de 45 personas.

En la primera, la edad media es de 23 años, y en la segunda, de 34 años.

Al determinar un intervalo de confianza para la diferencia de medias con un nivel de confianza del 90 %, ¿cuál es el error máximo admisible?

$1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}1 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}05} = 1{,}645$

$$E = 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{3^2}{45} + \frac{3^2}{45}} = 1{,}04$$

016 La duración media del recorrido de una línea de autobús sigue una distribución normal con desviación típica de 4. Para una muestra de 15 autobuses nuevos la duración media es de 23 minutos, mientras que para una muestra de 20 autobuses antiguos ha sido de 26 minutos.

Al calcular un intervalo de confianza para la diferencia de medias del 99 %, ¿cuál es el error máximo admisible?

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2,58$$

$$E = 2,58 \cdot \sqrt{\frac{4^2}{20} + \frac{4^2}{15}} = 3,52$$

017 En un supermercado comprobaron que el gasto medio por cliente el año pasado fue de 13 €. Este año, con una muestra de 75 clientes, el gasto medio ha sido de 11 €. Plantea el contraste de hipótesis con nivel de significación del 1 % para decidir si realmente el gasto medio por cliente ha disminuido.

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \mu = 13 \\ H_1\colon \mu \neq 13 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Contraste bilateral}$$

018 En las últimas elecciones, el 57 % de los votantes estaba a favor del alcalde. En una encuesta realizada recientemente, de 425 personas elegidas al azar, 174 están a favor del alcalde. Plantea el contraste de hipótesis con nivel de significación del 5 % para decidir si la popularidad del alcalde se mantiene.

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon p \leq 0,57 \\ H_1\colon p > 0,57 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Contraste unilateral}$$

019 En un supermercado comprobaron que el gasto medio por cliente el año pasado fue de 13 €. Este año con una muestra de 75 clientes, el gasto medio ha sido de 11 €. ¿Cómo sería la forma de la zona de aceptación y la zona crítica en el contraste de hipótesis, con nivel de significación del 1 %, para decidir si realmente el gasto medio por cliente ha disminuido?

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \mu = 13 \\ H_1\colon \mu \neq 13 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0,01$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2,58$

La zona de aceptación correspondería a la zona central por debajo de la curva.

020 En las últimas elecciones, el 57 % de los votantes estaba a favor del alcalde. En una encuesta realizada recientemente, de 425 personas elegidas al azar, 174 están a favor del alcalde. ¿Cómo sería la forma de la zona de aceptación y la zona crítica en el contraste, con nivel de significación del 5 %, para decidir si la popularidad del alcalde se mantiene?

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon p \leq 0,57 \\ H_1\colon p > 0,57 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0,05$ Contraste unilateral $\rightarrow z_{\alpha} = z_{0,05} = 1,645$

La zona de aceptación correspondería a la zona derecha por debajo de la curva.

021 El gasto medio semanal de gasóleo de los comerciales de una empresa el año pasado fue de 43 € con una desviación típica de 4. Este año, con una muestra de 120 comerciales, el gasto medio ha sido de 45 €. Plantea un contraste de hipótesis, con nivel de significación del 5 %, para decidir si el gasto medio por comercial se ha mantenido.

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \mu = 43 \\ H_1\colon \mu \neq 43 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0{,}05$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$\left(43 - 1{,}96 \cdot \frac{4}{\sqrt{120}};\ 43 + 1{,}96 \cdot \frac{4}{\sqrt{120}}\right) = (42{,}28;\ 43{,}71)$$

$\overline{x} = 45$ y $45 \notin (42{,}28;\ 43{,}71) \rightarrow$ Rechazamos H_0.

No podemos aceptar que el gasto medio por comercial se ha mantenido.

022 Un fabricante de electrodomésticos asegura que el precio medio de sus lavadoras es de 275 € con una desviación típica de 10. Para comprobarlo, de una muestra de 320 lavadoras obtenemos que el precio medio es de 285 €. ¿Podemos aceptar la afirmación del fabricante con nivel de significación del 1 %?

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \mu = 275 \\ H_1\colon \mu \neq 275 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0{,}01$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}005} = 2{,}58$

$$\left(275 - 2{,}58 \cdot \frac{12}{\sqrt{320}};\ 275 + 2{,}58 \cdot \frac{12}{\sqrt{320}}\right) = (273{,}27;\ 276{,}73)$$

$\overline{x} = 285$ y $285 \notin (273{,}27;\ 276{,}73) \rightarrow$ Rechazamos H_0.

Con los datos obtenidos no podemos aceptar la afirmación del fabricante.

023 En un servicio de atención al cliente, la empresa asegura que el tiempo medio de espera para recibir atención no supera los 6 minutos, con una desviación típica de 2. En una muestra de 30 llamadas, el tiempo medio de espera ha sido de 8 minutos.

Plantea un contraste de hipótesis con nivel de significación del 5 % para decidir si el tiempo medio de espera es superior al que indica la empresa.

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \mu \leq 6 \\ H_1\colon \mu > 6 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0{,}05$ Contraste unilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}05} = 1{,}645$

$$\left(-\infty;\ 6 + 1{,}645 \cdot \frac{2}{\sqrt{30}}\right) = (-\infty;\ 6{,}6)$$

$\overline{x} = 8$ y $8 \notin (-\infty;\ 6{,}6) \rightarrow$ Rechazamos H_0.

Con los datos obtenidos podemos admitir que el tiempo medio de espera supera los 6 minutos.

024 Un fabricante asegura que la duración media de las baterías de un modelo de teléfono móvil es de 400 horas, con una desviación típica de 50.

Para comprobarlo, de una muestra de 170 baterías ha resultado que su duración media ha sido de 340 horas. ¿Podemos aceptar la afirmación del fabricante con nivel de significación del 10 %? ¿Y si el nivel de significación es del 1 %?

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \mu \geq 400 \\ H_1: \mu < 400 \end{array}\right\}$$

- $\alpha = 0{,}1$ Contraste unilateral $\rightarrow z_\alpha = z_{0,1} = 1{,}28$

  $$\left(400 - 1{,}28 \cdot \frac{50}{\sqrt{170}}; +\infty\right) = (395{,}09; +\infty)$$

  $\overline{x} = 340$ y $340 \notin (395{,}09; +\infty) \rightarrow$ Rechazamos H_0.

  Con los datos obtenidos rechazamos la afirmación del fabricante.

- $\alpha = 0{,}01$ Contraste unilateral $\rightarrow z_\alpha = z_{0,01} = 2{,}33$

  $$\left(400 - 2{,}33 \cdot \frac{50}{\sqrt{170}}; +\infty\right) = (391{,}06; +\infty)$$

  $\overline{x} = 340$ y $340 \notin (391{,}06; +\infty) \rightarrow$ Rechazamos H_0.

  En este caso, también rechazamos la afirmación del fabricante.

025 **Una empresa dedicada a la fabricación de tornillos asegura que solo un 1 % de su producción es defectuosa. Se selecciona una muestra de 150 tornillos y se observa que 3 de ellos son defectuosos.**

¿Podemos aceptar la hipótesis del fabricante con nivel de significación del 1 %?

$$\left.\begin{array}{l} H_0: p = 0{,}01 \\ H_1: p \neq 0{,}01 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0{,}01$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2{,}58$

$$\left(0{,}01 - 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}01 \cdot 0{,}99}{150}}; 0{,}01 + 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}01 \cdot 0{,}99}{150}}\right) = (-0{,}01; 0{,}03)$$

Como la proporción no puede ser negativa, la zona de aceptación es (0; 0,03).

$$\hat{p} = \frac{3}{150} = 0{,}02$$

Como $0{,}02 \in (0; 0{,}03)$, podemos aceptar la hipótesis del fabricante.

026 **Un profesor de Educación Física afirma que el porcentaje de alumnos de Bachillerato que juegan al baloncesto es del 15 %.**

Si de una muestra de 60 alumnos, 14 de ellos juegan al baloncesto, ¿podemos aceptar la afirmación del profesor con nivel de significación de 0,05?

$$\left.\begin{array}{l} H_0: p = 0{,}15 \\ H_1: p \neq 0{,}15 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0{,}05$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1{,}96$

$$\left(0{,}15 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{60}}; 0{,}15 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{60}}\right) = (0{,}06; 0{,}24)$$

$$\hat{p} = \frac{14}{60} = 0{,}23$$

Como $0{,}23 \in (0{,}06; 0{,}24)$, aceptamos la afirmación del profesor.

027 Una empresa dedicada a la fabricación de bombillas asegura que, como máximo, un 2 % de su producción es defectuosa. Se selecciona una muestra de 300 bombillas y se observa que 8 de ellas son defectuosas.

¿Podemos aceptar la hipótesis del fabricante con nivel de significación del 5 %?

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon p \leq 0{,}02 \\ H_1\colon p > 0{,}02 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0{,}05$ Contraste unilateral $\rightarrow z_{\alpha} = z_{0{,}05} = 1{,}645$

$$\left(-\infty;\ 0{,}02 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}02 \cdot 0{,}98}{300}}\right) = (-\infty;\ 0{,}03)$$

$$\hat{p} = \frac{8}{300} = 0{,}027$$

Como $0{,}027 \in (-\infty;\ 0{,}03)$, podemos aceptar la hipótesis del fabricante.

028 Los profesores de una academia de idiomas aseguran que el porcentaje de alumnos que estudian inglés en su centro es, como mínimo, del 58 %.

Si de una muestra de 40 alumnos, 23 de ellos estudian inglés, ¿podemos aceptar la afirmación de los profesores con nivel de significación de 0,01?

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon p \geq 0{,}58 \\ H_1\colon p < 0{,}58 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0{,}01$ Contraste unilateral $\rightarrow z_{\alpha} = z_{0{,}01} = 2{,}33$

$$\left(0{,}58 - 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{0{,}58 \cdot 0{,}42}{40}};\ +\infty\right) = (0{,}4;\ +\infty)$$

$$\hat{p} = \frac{23}{40} = 0{,}575$$

Como $0{,}575 \in (0{,}4;\ +\infty)$, aceptamos la afirmación de los profesores.

029 Se quiere decidir si el precio medio del trayecto al aeropuerto en taxi en dos ciudades es similar. Para esto, se toma en una de ellas una muestra de 45 trayectos, cuyo importe medio es de 23 €, y en la otra, una muestra de 40 trayectos, siendo en este caso el importe medio de 26 €. Teniendo en cuenta que la desviación típica en ambos casos es de 3 €, ¿podemos decidir que el precio medio es similar con un nivel de significación de 0,10?

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1\colon \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0{,}1$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}05} = 1{,}645$

$$\left(-1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{3^2}{45} + \frac{3^2}{40}};\ 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{3^2}{45} + \frac{3^2}{40}}\right) = (-1{,}07;\ 1{,}07)$$

$\overline{x}_1 = 23$ $\overline{x}_2 = 26$ $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 23 - 26 = -3$

Como $-3 \notin (-1{,}07;\ 1{,}07)$, rechazamos que el precio medio es similar.

030 **Una asociación quiere comprobar si el salario medio de las mujeres es similar al de los hombres. Para ello, toma una muestra de 100 mujeres y observa que su salario medio es de 1.100 €, y toma otra muestra de 75 hombres, y ve que su salario medio es de 1.200 €. Teniendo en cuenta que la desviación típica en ambos casos es de 200 €, ¿podemos decidir que el salario medio es similar con un nivel de significación del 5 %?**

μ_1: salario medio de las mujeres

μ_2: salario medio de los hombres

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1\colon \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0{,}05$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$\left(-1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{200^2}{100} + \frac{200^2}{75}}; 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{200^2}{100} + \frac{200^2}{75}}\right) = (-59{,}88; 59{,}88)$$

$\overline{x}_1 = 1.100 \qquad \overline{x}_2 = 1.200 \qquad \overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 1.100 - 1.200 = -100$

Como $-100 \notin (-59{,}88; 59{,}88)$, rechazamos que el salario medio de hombres y mujeres es similar.

031 **Para una muestra de 75 vehículos de gasolina se observa que su consumo medio de combustible es de 9 litros cada 100 kilómetros, mientras que para una muestra de 80 vehículos con características similares de modelo diesel, su consumo medio es de 6 litros cada 100 kilómetros. Si la desviación típica en ambos casos es 2, ¿podemos asegurar con un nivel de significación de 0,01 que el consumo del modelo diesel es menor?**

μ_1: consumo medio de gasolina

μ_2: consumo medio de diesel

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \\ H_1\colon \mu_1 - \mu_2 < 0 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0{,}01$ Contraste unilateral $\rightarrow z_{\alpha} = z_{0{,}01} = 2{,}33$

$$\left(-2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{2^2}{75} + \frac{2^2}{80}}; +\infty\right) = (-0{,}75; +\infty)$$

$\overline{x}_1 = 9 \qquad \overline{x}_2 = 6 \qquad \overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 9 - 6 = 3$

Como $3 \in (-0{,}75; +\infty)$ podemos asegurar que el consumo del modelo diesel es menor.

032 **El gerente de unos grandes almacenes asegura que el gasto medio de los hombres en ropa es inferior al de las mujeres. Se toma una muestra de 90 mujeres y observa que su gasto medio es de 40 €, y toma otra muestra de 70 hombres y ve que su gasto medio es de 45 €. Si la desviación típica en ambos casos es de 10 €, ¿podemos asegurar que el gasto medio de las mujeres es mayor con un nivel de significación del 5 %?**

μ_1: gasto medio de las mujeres en ropa

μ_2: gasto medio de los hombres en ropa

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \\ H_1\colon \mu_1 - \mu_2 < 0 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0{,}05$ Contraste unilateral $\rightarrow z_\alpha = z_{0{,}05} = 1{,}645$

$$\left(-1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{10^2}{90} + \frac{10^2}{70}}; +\infty\right) = (-2{,}62; +\infty)$$

$\overline{x}_1 = 40$ $\overline{x}_2 = 45$ $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 40 - 45 = -5$

Como $-5 \notin (-2{,}62; +\infty)$, no podemos asegurar que el gasto medio de las mujeres en ropa es mayor.

033 **Entre los 1.250 estudiantes de un centro escolar se ha seleccionado una muestra aleatoria, compuesta por el 20 % de los mismos, y se ha consultado si disponen de conexión a Internet en casa. Si todos han contestado a la consulta y se ha obtenido un total de 175 respuestas afirmativas, ¿qué estimación puntual puede darse para el porcentaje de alumnos que tienen conexión a Internet en su casa?**

El tamaño de la muestra es:

$20\,\%$ de $1.250 = 0{,}2 \cdot 1.250 = 250$

Así, el estimador puntual para el porcentaje de alumnos que tiene conexión de Internet en casa resulta:

$$\hat{p} = \frac{175}{250} = 0{,}7$$

034 **En una empresa hay 2.100 empleados, de los cuales 120 se desplazan en bicicleta, 340 en moto, 560 en coche y el resto emplea el transporte público. Se quiere estimar la proporción de empleados que están a favor de flexibilizar la jornada laboral, y para ello se selecciona a través de un muestreo estratificado aleatorio una muestra de 210 trabajadores, considerando como estratos las distintas opciones de transporte que se utilizan. Si tras realizar la consulta a todas las personas seleccionadas, se ha obtenido que 14 ciclistas, 22 motoristas, 15 conductores y 36 de los usuarios de transporte público no son favorables a la flexibilización del horario, determina:**

a) El número de empleados de cada estrato que se seleccionaron para la muestra.

b) La estimación correspondiente a la proporción de trabajadores favorables a flexibilizar la jornada laboral.

a) El número de empleados de cada estrato es:

Bicicleta

$2.100 \rightarrow 120$

$210 \rightarrow b$

$$b = \frac{210 \cdot 120}{2.100} = 12$$

Moto

$2.100 \rightarrow 340$

$210 \rightarrow m$

$$m = \frac{210 \cdot 340}{2.100} = 34$$

Coche

$2.100 \rightarrow 560$

$210 \rightarrow c$

$$c = \frac{210 \cdot 560}{2.100} = 56$$

Transporte público

$2.100 \rightarrow 1.080$

$210 \rightarrow t$

$$t = \frac{210 \cdot 1.080}{2.100} = 108$$

b) De las personas seleccionadas, no son favorables a la flexibilización:

$14 + 22 + 15 + 36 = 87$ personas

Por tanto, son favorables: $210 - 87 = 123$ personas

La estimación correspondiente a la proporción de trabajadores favorables es:

$$\hat{p} = \frac{123}{210} = 0{,}59$$

035 **Desde el departamento de orientación de un centro escolar se han realizado una serie de pruebas para determinar la capacidad de visión espacial de la población estudiantil, sabiendo que esta se distribuye según una distribución normal con una desviación típica de 7,8 puntos. Si al elegir aleatoriamente una muestra de 180 estudiantes, se ha obtenido una media muestral de 64 puntos, ¿cuál es el intervalo de confianza para la media de capacidad de visión espacial a un nivel de confianza del 95 %?**

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$$

$$\left(64 - 1{,}96 \cdot \frac{7{,}8}{\sqrt{180}};\ 64 + 1{,}96 \cdot \frac{7{,}8}{\sqrt{180}}\right) = (62{,}86;\ 65{,}14)$$

Con la muestra elegida, la probabilidad de que la media de capacidad de visión espacial de los estudiantes esté en el intervalo de confianza (62,86; 65,14) es 0,95.

036 **Un estudio estadístico realizado a 49 personas nos dice que el tiempo de conexión anual a Internet de los habitantes de una ciudad sigue una distribución normal de media 250 minutos y desviación típica 30 minutos. Halla el intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 95 %, para el tiempo medio de conexión a Internet.**

(La Rioja. Junio 2007. Parte A. Cuestión 4)

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$$

$$\left(250 - 1{,}96 \cdot \frac{30}{\sqrt{49}};\ 250 + 1{,}96 \cdot \frac{30}{\sqrt{49}}\right) = (241{,}6;\ 258{,}4)$$

Con la muestra elegida, la probabilidad de que el tiempo medio de conexión a Internet de los habitantes de esa ciudad esté en el intervalo de confianza (241,6; 258,4) es 0,95.

037 **Una empresa dedicada a los estudios de mercado quiere conocer la aceptación de un nuevo producto. Con este fin ha tomado una muestra aleatoria formada por 50 personas, de las cuales 35 han declarado que piensan comprarlo. Calcula un intervalo de confianza al nivel del 98 % para la proporción de compradores de la población considerada.**

$1 - \alpha = 0{,}98 \rightarrow \alpha = 0{,}02 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}01}$

Para un nivel de confianza del 98 % tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el que acumula una probabilidad de 0,99; es decir:

$z_{\alpha/2} = z_{0{,}01} = 2{,}33$

Calculamos la proporción de compradores, $\hat{p}$, y de no compradores, $\hat{q}$.

$$\hat{p} = \frac{35}{50} = 0{,}7 \qquad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$

$$\left(0{,}7 - 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{50}}\,;\, 0{,}7 + 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{50}}\right) = (0{,}55; 0{,}85)$$

Con la muestra elegida, la probabilidad de que la proporción de compradores esté en el intervalo de confianza (0,55; 0,85) es 0,98.

038 **En una muestra aleatoria de 300 personas de una determinada ciudad hay 75 que fuman. Calcula el intervalo de confianza aproximado para la proporción poblacional para un nivel de confianza del 97 %.**

(Baleares. Junio 2007. Opción B. Cuestión 8)

$1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}015}$

Para un nivel de confianza del 97 % tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el que acumula una probabilidad de 0,985; es decir:

$z_{\alpha/2} = z_{0{,}015} = 2{,}17$

Calculamos la proporción de fumadores, $\hat{p}$, y de no fumadores, $\hat{q}$.

$$\hat{p} = \frac{75}{300} = 0{,}25 \qquad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

$$\left(0{,}25 - 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{300}}\,;\, 0{,}25 + 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{300}}\right) = (0{,}2; 0{,}3)$$

Con la muestra elegida, la probabilidad de que la proporción de fumadores esté en el intervalo de confianza (0,2; 0,3) es 0,97.

039 **En una pequeña ciudad se quiere estudiar la incidencia del aumento del paro. Para ello se selecciona una muestra formada por 100 personas, de las que 14 están en situación de desempleo.**

a) Determina el intervalo de confianza al 99 % para la proporción poblacional de parados en esta ciudad.

b) Halla el intervalo de confianza al 95 % para la misma proporción, y compáralo con el obtenido en el apartado anterior.

Calculamos la proporción de parados, $\hat{p}$, y de no parados, $\hat{q}$.

$$\hat{p} = \frac{14}{100} = 0,14 \qquad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0,14 = 0,86$$

a) $1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2,58$

$$\left(0,14 - 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{100}}\,;\, 0,14 + 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{100}}\right) = (0,05;\ 0,23)$$

b) $1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$

$$\left(0,14 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{100}}\,;\, 0,14 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{100}}\right) = (0,07;\ 0,21)$$

Al disminuir el nivel de confianza, disminuye la amplitud del intervalo.

040 **En un control de calidad se analizó una muestra aleatoria de 750 tornillos, resultando defectuosos 80 de ellos. Hallar un intervalo de confianza para la proporción de tornillos defectuosos en el conjunto de la producción, con:**

a) 95 % de confianza. **b) 99 % de confianza.**

(País Vasco. Julio 2004. Apartado D. Ejercicio 2)

Calculamos la proporción de tornillos defectuosos, $\hat{p}$, y de tornillos no defectuosos, $\hat{q}$.

$$\hat{p} = \frac{80}{750} = 0,11 \qquad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0,11 = 0,89$$

a) $1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$

$$\left(0,11 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,11 \cdot 0,89}{750}}\,;\, 0,11 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,11 \cdot 0,89}{750}}\right) = (0,09;\ 0,13)$$

b) $1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2,58$

$$\left(0,11 - 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,11 \cdot 0,89}{750}}\,;\, 0,11 + 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,11 \cdot 0,89}{750}}\right) = (0,08;\ 0,14)$$

041 **El número de multas diarias impuestas por dos agentes a los conductores que circulan por una autovía se distribuye normalmente. Las desviaciones típicas poblacionales correspondientes a cada agente son 6 y 8 multas, respectivamente. Para estimar la diferencia de medias poblacionales se escoge una muestra de 25 turnos del primer agente y 36 turnos del segundo, obteniéndose unas medias de 15 y 14 multas, respectivamente.**

Determina un intervalo de confianza para la diferencia de medias de los dos agentes a un nivel de confianza del 95 %.

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$

$$\left((15 - 14) - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{6^2}{25} + \frac{8^2}{36}}\,;\, (15 - 14) + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{6^2}{25} + \frac{8^2}{36}}\right) = (-2,52;\ 4,52)$$

042 **Las calificaciones de dos grupos de 2.º de Bachillerato del mismo centro escolar se distribuyen normalmente. Con el fin de hacer un estudio comparativo se considera una muestra de 20 estudiantes de cada grupo. Las medias y las desviaciones típicas muestrales son:**

$$\overline{x}_1 = 6 \qquad \sigma_1 = 1,4 \qquad \overline{x}_2 = 6,4 \qquad \sigma_2 = 1,8$$

Halla los intervalos de confianza para la diferencia de medias poblacionales para los siguientes niveles de confianza.

a) Del 94 % **b) Del 99 %**

a) $1 - \alpha = 0,94 \rightarrow \alpha = 0,06 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,03}$

Para un nivel de confianza del 94 % tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el que acumula una probabilidad de 0,97, que es 1,88.

$z_{\alpha/2} = z_{0,03} = 1,88$

$$\left((6-6,4) - 1,88 \cdot \sqrt{\frac{1,4^2}{20} + \frac{1,8^2}{20}}; (6-6,4) + 1,88 \cdot \sqrt{\frac{1,4^2}{20} + \frac{1,8^2}{20}}\right) = (-1,36; 0,56)$$

b) $1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2,58$

$$\left((6-6,4) - 2,58 \cdot \sqrt{\frac{1,4^2}{20} + \frac{1,8^2}{20}}; (6-6,4) + 2,58 \cdot \sqrt{\frac{1,4^2}{20} + \frac{1,8^2}{20}}\right) = (-1,72; 0,92)$$

043 **Determina un intervalo de confianza al 95 % para comprobar si una moneda está trucada a partir de una muestra de 40 lanzamientos.**

Calculamos el intervalo de confianza al 95 %, suponiendo que la proporción de las caras en los 40 lanzamientos es $\hat{p} = 0,5$.

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$

El intervalo de confianza, si la moneda no está trucada, es:

$$\left(0,5 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{40}}; 0,5 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{40}}\right) = (0,35; 0,65)$$

044 **Tras múltiples observaciones se ha constatado que el número de pulsaciones de los deportistas entre 20 y 25 años se distribuye normalmente con una desviación típica de 9 pulsaciones. Si una muestra de 100 deportistas de esa edad presenta una media de 64 pulsaciones:**

a) Encontrar el intervalo de confianza al 97 % para la media de pulsaciones de todos los deportistas de esa edad.

b) Interpretar el significado del intervalo obtenido.

(Castilla–La Mancha. Septiembre 2008. Bloque 4. Ejercicio B)

a) $1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}015}$

Para un nivel de confianza del 97 % tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el que acumula una probabilidad de 0,985 que es 2,17. Luego .

$z_{\alpha/2} = z_{0{,}015} = 2{,}17$

$$\left(64 - 2{,}17 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}}; 64 + 2{,}17 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}}\right) = (62{,}05; 65{,}95)$$

b) La probabilidad de que la muestra proceda de una población cuya media esté en el intervalo (62,05; 65,95) es 0,97.

045 **A una prueba psicotécnica se presentan 100 candidatos, de los que solo 5 responden correctamente a todos los ejercicios. Con una confianza del 98 %, ¿cuál es el error máximo que se comete al afirmar que la proporción de candidatos aptos es del 5 %?**

Determinamos la proporción de la muestra.

Como de 100 candidatos, 5 responden correctamente:

$$\hat{p} = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

$\hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

$1 - \alpha = 0{,}98 \rightarrow \alpha = 0{,}02 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}01}$

Para un nivel de confianza del 98 % tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el que acumula una probabilidad de 0,99, que es 2,33.

El error máximo cometido es:

$$E = 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{0{,}05 \cdot 0{,}95}{100}} = 0{,}05$$

Este resultado indica que, al considerar el 5 % como la proporción de candidatos que responde correctamente a todos los ejercicios, el mayor error que podemos cometer en la estimación es 0,05.

046 **A una muestra aleatoria de 300 estudiantes de Bachillerato de determinada provincia se les preguntó si utilizaban habitualmente la bicicleta para acudir a su instituto.**

Sabiendo que se obtuvo 90 respuestas afirmativas, determinar justificando la respuesta:

a) El intervalo de confianza al 95 % para el porcentaje de estudiantes de Bachillerato de esa provincia que utilizaban habitualmente la bicicleta para acudir a su instituto.

b) El error máximo que cometeríamos, con una confianza del 95 %, si estimamos que dicho porcentaje es del 30 %.

(Extremadura. Junio 2007. Opción B. Problema 3)

a) Determinamos la proporción de la muestra.

$\hat{p} = \frac{90}{300} = 0{,}3 \qquad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$\left(0{,}3 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{300}}; 0{,}3 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{300}}\right) = (0{,}25; 0{,}35)$$

b) El error máximo cometido es: $E = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{300}} = 0{,}052$

047 **Los responsables de una página web desean estimar el tiempo, en minutos, que sus visitantes permanecen conectados. Una muestra aleatoria de 100 de ellos sigue una distribución normal $N(105, 16)$. Se pide:**

a) Estimar el tiempo medio de conexión, en minutos, de los visitantes mediante un intervalo de confianza del 95 %.

b) Determinar el tamaño de la muestra si deseamos que el error cometido al estimar el tiempo medio de conexión, con un nivel de confianza del 99 %, no exceda a 0,2575.

a) $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$\left(105 - 1{,}96 \cdot \frac{16}{\sqrt{100}}; 105 + 1{,}96 \cdot \frac{16}{\sqrt{100}}\right) = (101{,}86; 108{,}14)$$

b) $1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}005} = 2{,}58$

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2{,}58 \cdot 16}{0{,}2575}\right)^2 = 25.699{,}514$$

Para que se cumplan las condiciones y como n tiene que ser un número entero, debe ser mayor o igual que 25.700.

048 **Se ha lanzado una moneda al aire 200 veces y se ha obtenido cara en 120 ocasiones. Se pretende repetir la experiencia para conseguir que el error cometido sea inferior a 0,03, con un nivel de confianza del 97 %. ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?**

(Andalucía. Año 2007. Modelo 5. Opción A. Ejercicio 3)

$\hat{p} = \frac{120}{200} = 0{,}6 \qquad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

$1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}015}$

Para un nivel de confianza del 97 % tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el que acumula una probabilidad de 0,985 que es 2,17.

$z_{\alpha/2} = z_{0{,}015} = 2{,}17$

$$n = \frac{2{,}17^2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}{0{,}03^2} = 1.255{,}71$$

Para que se cumplan las condiciones, y como n tiene que ser un número entero, debe ser mayor o igual que 1.256.

049 Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 individuos a los que se les ha preguntado la cantidad de dinero que tienen en la cartera, obteniéndose una media muestral de 110 €. Se sabe que la desviación típica de la población es de 20 €.

a) Obtener un intervalo de confianza, al 90 %, para la cantidad de dinero en la cartera de la población.

b) ¿Cuál es el error máximo cometido con la estimación anterior?

c) Si deseamos que el error cometido, con el mismo nivel de confianza, sea la décima parte del apartado anterior, ¿cuál ha de ser el tamaño de la muestra?

(Cantabria. Junio 2007. Ejercicio 3. Opción B)

a) $1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}1 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}05} = 1{,}645$

$$\left(110 - 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}; 110 + 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}\right) = (106{,}71; 113{,}29)$$

b) El error máximo cometido es: $E = 1{,}645 \cdot \dfrac{20}{\sqrt{100}} = 3{,}29$

c) El tamaño de la muestra para que el error máximo sea 0,329, es:

$$n = \left(\frac{1{,}645 \cdot 20}{0{,}329}\right)^2 = 10.000$$

050 Se ha estudiado el número de horas semanales dedicadas a practicar deporte por los jóvenes de entre 14 y 18 años, obteniéndose una variable aleatoria con distribución normal y de desviación típica igual a una hora.

Si se toma una muestra aleatoria de 64 chicos y chicas de edad entre 14 y 18 años, resulta que practican deporte una media de 6 horas semanales.

a) ¿Cuál es el error de estimación del tiempo medio que practican deporte los jóvenes de la ciudad con un nivel de confianza del 98 %?

b) ¿Qué tamaño muestral mínimo ha de tomarse para que el error en la estimación sea menor de media hora con un nivel de confianza del 97 %?

a) $1 - \alpha = 0{,}98 \rightarrow \alpha = 0{,}02 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}01}$

Para un nivel de confianza del 98 % tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el que acumula una probabilidad de 0,99 que es 2,33.

$z_{\alpha/2} = z_{0{,}01} = 2{,}33$

$$E = 2{,}33 \cdot \frac{1}{\sqrt{64}} = 0{,}29$$

b) $1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}015}$

Para un nivel de confianza del 97 % tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el que acumula una probabilidad de 0,985, que es 2,17.

$z_{\alpha/2} = z_{0{,}015} = 2{,}17$

$$n = \left(\frac{2{,}17 \cdot 1}{0{,}5}\right)^2 = 18{,}84$$

Para que se cumplan las condiciones, y como n tiene que ser un número entero, debe ser mayor o igual que 19.

051 Para estimar la calidad del agua en una ciudad se ha seleccionado una muestra de 100 usuarios del servicio de suministro municipal con un nivel de confianza del 95 %. Si el error máximo admisible en el estudio es de 1,274; ¿cuál es la desviación típica de la muestra obtenida?

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

Escribimos la fórmula de cálculo de error y despejamos la desviación típica.

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 1{,}274 = 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \rightarrow \sigma = \frac{1{,}274 \cdot 10}{1{,}96} = 6{,}5$$

052 En una encuesta realizada a 10.000 personas, 2.500 responden a favor de una opción. Si el error máximo que se comete es del 2 %, determina el tamaño de la muestra, en cada caso, para que la confianza en que sea elegida dicha opción sea:

a) Del 95 %

b) Del 99 %

Primero determinamos la proporción de la muestra.

$$\hat{p} = \frac{2.500}{10.000} = 0{,}25 \qquad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

a) $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$n = \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}{0{,}02^2} = 1.800{,}75$$

Luego el tamaño de la muestra tiene que ser de 1.801.

b) $1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}005} = 2{,}58$

$$n = \frac{2{,}58^2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}{0{,}02^2} = 3.120{,}19$$

Luego el tamaño de la muestra tiene que ser de 3.121.

053 El peso de los niños varones a las 10 semanas de vida se distribuye según una normal con desviación típica de 87 g.

¿Cuántos datos son suficientes para estimar, con una confianza del 95 %, el peso medio de esa población con un error no superior a 15 g?

(Murcia. Junio 2007. Bloque 5. Cuestión 2)

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

Sustituyendo los valores y despejando se tiene:

$$n = \left(\frac{1{,}96 \cdot 87}{15}\right)^2 \rightarrow n = 129{,}23$$

Para que se cumplan las condiciones, y como el número de datos n tiene que ser un número entero, debe ser mayor o igual que 130.

054 El tiempo en minutos dedicado cada día a escuchar música por los estudiantes de Secundaria de una cierta ciudad se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos (en minutos):

91	68	39	82	55
70	72	62	54	67

a) Determínese un intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio diario dedicado a escuchar música por un estudiante.

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para conseguir una estimación de la media del tiempo diario dedicado a escuchar música con un error menor que 5 minutos, con un nivel de confianza del 95 %.

(Madrid. Junio 2008. Opción A. Ejercicio 4)

Primero calculamos la media de la muestra: $\overline{x} = \frac{660}{10} = 66$

a) $1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}1 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}05} = 1{,}645$

$$\left(66 - 1{,}645 \cdot \frac{15}{\sqrt{10}}; 66 + 1{,}645 \cdot \frac{15}{\sqrt{10}}\right) = (58{,}2; 73{,}8)$$

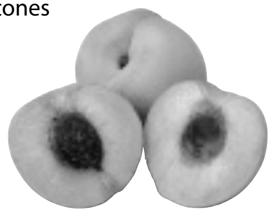
b) $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

Sustituyendo los valores y despejando se tiene:

$$n = \left(\frac{1{,}96 \cdot 15}{5}\right)^2 \rightarrow n = 34{,}57$$

Para que se cumplan las condiciones, y como n tiene que ser un número entero, debe ser mayor o igual que 35.

055 Se ha tomado una muestra de los precios de los melocotones en 16 establecimientos, elegidos al azar, en una ciudad donde se ha determinado que los precios se distribuyen según una distribución normal de varianza 25 y media desconocida.



Si se han obtenido estos precios, en céntimos de euro,

95	108	97	112
99	106	105	100
99	98	104	110
107	111	103	110

halla un intervalo de confianza para el precio medio de los melocotones a un nivel de confianza del 90 %.

Primero calculamos la media de la muestra:

$$\overline{x} = \frac{1.664}{16} = 104$$

$1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}1 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}05} = 1{,}645$

$$\left(104 - 1{,}645 \cdot \frac{25}{\sqrt{16}}; 104 + 1{,}64 \cdot \frac{25}{\sqrt{16}}\right) = (93{,}72; 114{,}28)$$

056 La duración de las baterías de un modelo de teléfono móvil, en horas, sigue una distribución normal de media desconocida y varianza 900. Con una muestra elegida al azar, y a un nivel de confianza del 95 %, se ha obtenido para la media el intervalo de confianza (37,26; 39,22). Calcula el valor que se ha obtenido en dicha muestra para la media y halla el tamaño muestral utilizado.

Como la varianza es 900, se tiene que: $\sigma^2 = 900 \rightarrow \sigma = \sqrt{900} = 30$

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (37{,}26; 39{,}22)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{x} - 1{,}96 \cdot \dfrac{30}{\sqrt{n}} = 37{,}26 \\ \overline{x} + 1{,}96 \cdot \dfrac{30}{\sqrt{n}} = 39{,}22 \end{array}\right\} \rightarrow 2\overline{x} = 76{,}48 \rightarrow \overline{x} = 38{,}24$$

Despejamos n de la primera ecuación:

$$38{,}24 - 1{,}96 \cdot \frac{30}{\sqrt{n}} = 37{,}26 \rightarrow 0{,}98 = 1{,}96 \cdot \frac{30}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(\frac{1{,}96 \cdot 30}{0{,}98}\right)^2 = 3.600$$

057 Se sabe que (45,13; 51,03) es un intervalo de confianza, al 95 %, para la media de una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica 15.

a) ¿Cuál es el error cometido?

b) Calcule, con el mismo nivel de confianza, el tamaño muestral mínimo necesario para que el error no sea superior a 1,8.

(Andalucía. Septiembre 2007. Opción B. Ejercicio 3)

a) El error máximo cometido es el radio del intervalo.

$$r = \frac{51{,}03 - 45{,}13}{2} = 2{,}95 \rightarrow \text{Error} = 2{,}95$$

b) $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

El tamaño de la muestra es:

$$n = \left(\frac{1{,}96 \cdot 15}{1{,}8}\right)^2 = 266{,}78$$

Por tanto, el tamaño muestral mínimo debe ser mayor o igual que 267.

058 Las puntuaciones obtenidas en unas pruebas de gimnasia rítmica siguen una normal de media desconocida y desviación típica 1,19. Si se selecciona una muestra al azar de gimnastas y se obtiene el intervalo de confianza (8,601; 8,699) a un nivel del 92 % para la media, determina: La media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

$1 - \alpha = 0{,}92 \rightarrow \alpha = 0{,}08 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}04}$

Para un nivel de confianza del 92 % tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el que acumula una probabilidad de 0,96, que es 1,75.

$z_{\alpha/2} = z_{0{,}04} = 1{,}75$

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (8{,}601; 8{,}699)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{x} - 1{,}75\cdot\dfrac{1{,}19}{\sqrt{n}} = 8{,}601\\ \overline{x} + 1{,}75\cdot\dfrac{1{,}19}{\sqrt{n}} = 8{,}699\end{array}\right\} \rightarrow 2\overline{x} = 17{,}3 \rightarrow \overline{x} = 8{,}65$$

Despejamos n de la primera ecuación:

$$8{,}65 - 1{,}75\cdot\frac{1{,}19}{\sqrt{n}} = 8{,}601 \rightarrow 0{,}049 = 1{,}75\cdot\frac{1{,}19}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(\frac{1{,}75\cdot 1{,}19}{0{,}049}\right)^2 = 1.806{,}25$$

El valor de n no es entero debido al redondeo a la hora de construir el intervalo.

059 **En una población de 2.000 conductores se seleccionó una muestra aleatoria de 200. A los conductores seleccionados se les preguntó si llevaban en sus vehículos cadenas para utilizar en caso de que hubiese nieve en las carreteras. A partir de la información recogida se obtuvo el siguiente intervalo de confianza al 95 % para la proporción de conductores de esa población que llevaban en sus vehículos cadenas para la nieve: (0,172; 0,228). Determinar, justificando la respuesta:**

a) La estimación puntual que daríamos para la proporción de conductores de esa población que llevan en su vehículo cadenas para la nieve.

b) El error máximo que estaríamos cometiendo, con una confianza del 95 %, con dicha estimación puntual.

(Extremadura. Septiembre 2007. Opción B. Problema 3)

a) Como el intervalo de confianza está centrado en $\hat{p}$, hallamos este centro del intervalo.

$$(0{,}172; 0{,}228) \rightarrow \hat{p} = \frac{0{,}228 + 0{,}172}{2} = 0{,}2$$

b) El error máximo cometido es el radio del intervalo de confianza

$$E = \frac{0{,}228 - 0{,}172}{2} = 0{,}028$$

Observación:

Los datos del problema no son correctos:

Si $n = 200$ y $\hat{p} = 0{,}2$ $\rightarrow$ El intervalo de confianza del 95 % es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right) =$$

$$= \left(0{,}2 - 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{200}}; 0{,}2 + 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{200}}\right) = (0{,}145; 0{,}255)$$

Esto es contradictorio con el dato del problema que asegura que el intervalo de confianza del 95 % es (0,172; 0,228).

060 La vida media de un determinado modelo de bombilla sigue una distribución normal con desviación típica igual a 60 días. Elegida una muestra y con un nivel de confianza del 98 % se obtiene el intervalo (388,68; 407,32) para la vida media. Calcule la media y el tamaño de la muestra elegida. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados.

(Aragón. Junio 2008. Cuestión C2)

Como el intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

La media de la muestra es el punto medio del intervalo.

$$\overline{x} = \frac{388{,}68 + 407{,}32}{2} = 398 \text{ días}$$

La amplitud del intervalo es 18,64, por tanto:

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 9{,}32$$

$$1 - \alpha = 0{,}98 \rightarrow \alpha = 0{,}02 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}01}$$

Para un nivel de confianza del 98 % tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el que acumula una probabilidad de 0,99 que es 2,33.

$$2{,}33 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} = 9{,}32 \rightarrow \sqrt{n} = 15 \rightarrow n = 225 \text{ bombillas}$$

061 En un paso elevado se observa que el peso medio de los vehículos que lo atraviesan en un día se distribuye según una distribución normal, con desviación típica de 900 kg. A lo largo de una semana se ha encontrado un intervalo de confianza para la media semanal de extremos 4,663 y 5,839 toneladas.

a) Halla el peso medio de los vehículos que han utilizado el paso elevado en esa semana.

b) ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado en esta estimación?

a) El intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Así, la media de la muestra es el punto medio del intervalo:

$$\overline{x} = \frac{4.663 + 5.839}{2} = 5.251 \text{ kilogramos}$$

b) La amplitud del intervalo es 1.176.

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{900}{\sqrt{7}} = 588 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,73$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9582 \rightarrow \alpha = 0,0836$$

Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0,9164$

062 El gasto mensual (en euros) en electricidad por familia, para las familias de cierta ciudad, sigue una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 25$ €.

a) A partir de una muestra de 100 familias de esa ciudad, se obtuvo el intervalo de confianza (45, 55) para el gasto mensual por familia en electricidad. Determinar el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

b) Qué número de familias tendríamos que seleccionar al azar, como mínimo, para garantizar, con un nivel de confianza del 99 %, una estimación del gasto medio con un error máximo no superior a 3 €?

(Galicia. Junio 2007. Bloque 3. Ejercicio 2)

a) $$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (45, 55)$$

$$\rightarrow \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{25}{\sqrt{100}};\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{25}{\sqrt{100}}\right) = (45, 55)$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} \overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{25}{\sqrt{100}} = 45 \\ \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{25}{\sqrt{100}} = 55 \end{array}\right\} \rightarrow 5 \cdot z_{\alpha/2} = 10 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9772 \rightarrow \alpha = 0,0456$$

Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0,9544$

b) El error máximo admisible es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,001 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2,58 \rightarrow n = \left(\frac{2,58 \cdot 25}{3}\right)^2 = 462,25$$

Tendríamos que seleccionar al azar como mínimo a 463 familias.

063 Una compañía aérea sabe que el tiempo de retraso de sus vuelos sigue una distribución normal con media 12 minutos y desviación típica 1,5 minutos. Con el fin de contrastar, con un nivel de significación del 4 %, si el tiempo de los retrasos se ha reducido, se tomó una muestra aleatoria de 10 vuelos y se obtuvo que los retrasos ascendieron a un total de 110 minutos.

a) ¿Cuáles son las hipótesis nula y alternativa?

b) Establece la zona de aceptación del contraste.

c) Realiza el contraste.

a) La hipótesis nula y alternativa son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \mu \geq 12 \\ H_1\colon \mu < 12 \end{array}\right\}$$

b) $\alpha = 0{,}04$ Contraste unilateral $\rightarrow z_\alpha = z_{0{,}04} = 1{,}75$

$$\left(12 - 1{,}75 \cdot \frac{1{,}5}{\sqrt{10}}; +\infty\right) = (11{,}17; +\infty)$$

c) $\overline{x} = \dfrac{110}{10} = 11$

Como la media muestral $11 \notin (11{,}17; +\infty)$, podemos admitir que el tiempo medio de retraso se ha reducido.

064 **El salario medio correspondiente a una muestra de 625 empleados de una empresa es de 850 €. Se sabe que la desviación típica de los salarios en la empresa es de 75 €. Con estos datos, ¿se puede afirmar, con un nivel de confianza del 98 %, que el salario medio en esa empresa es de 875 €?**

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \mu = 875 \\ H_1\colon \mu \neq 875 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0{,}02$ Contraste bilateral $\rightarrow z_\alpha = z_{0{,}01} = 2{,}33$

$$\left(875 - 2{,}33 \cdot \frac{75}{\sqrt{625}}; 875 + 2{,}33 \cdot \frac{75}{\sqrt{625}}\right) = (868{,}01; 881{,}99)$$

Como la media muestral es 850 € y $850 \notin (868{,}01; 881{,}99)$, podemos rechazar que el salario medio es de 875 €.

065 **Se ha realizado un estudio de medios durante un mes para conocer la aceptación de un programa televisivo. En una encuesta a 10.000 personas resulta que la media de espectadores de dicho programa es de 8.500 con desviación típica $\sigma = 250$. ¿Se puede afirmar con una significación del 1 % que el número medio de espectadores del programa asciende a 9.000 personas?**

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \mu = 9.000 \\ H_1\colon \mu \neq 9.000 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0{,}01$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}005} = 2{,}58$

$$\left(9.000 - 2{,}58 \cdot \frac{250}{\sqrt{10.000}}; 9.000 + 2{,}58 \cdot \frac{250}{\sqrt{10.000}}\right) = (8.993{,}55; 9.006{,}45)$$

Como la media muestral $8.500 \notin (8.993{,}55; 9.006{,}45)$, no podemos admitir que el número medio de espectadores sea 9.000.

066 **Los depósitos mensuales, en euros, en una entidad bancaria, siguen una distribución normal de media μ y de desviación típica $\sigma = 5{,}1$. Con el fin de contrastar si la media de los depósitos mensuales es 20 €, se toma una muestra de tamaño 16, resultando ser la media muestral 22,40 €. ¿Se puede aceptar la hipótesis de que la media es 20 a un nivel de significación del 5 %?**

(Madrid. Septiembre 2002. Opción A. Ejercicio 4)

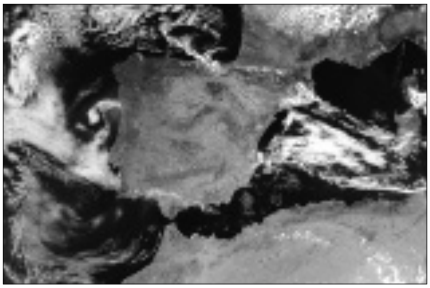
$$\left.\begin{array}{l} H_0\text{: } \mu = 20 \\ H_1\text{: } \mu \neq 20 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0{,}05$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$\left(20 - 1{,}96 \cdot \frac{5{,}1}{\sqrt{16}},\ \ 20 + 1{,}96 \cdot \frac{5{,}1}{\sqrt{16}}\right) = (17{,}5;\ 22{,}5)$$

Como la media muestral es 22,40 € y $22{,}40 \in (17{,}5;\ 22{,}5)$, podemos aceptar que el deposito medio mensual es de 20 €.

067 **Un estudio de las precipitaciones en una región afirma que estas se distribuyen normalmente con una media de 20 ℓ/m² y una desviación típica de 3 ℓ/m².**



Para contrastar esta hipótesis se eligen al azar las mediciones correspondientes a 100 días. ¿Se puede confirmar la afirmación del centro para un nivel de confianza del 98 %?

$$\left.\begin{array}{l} H_0\text{: } \mu = 20 \\ H_1\text{: } \mu \neq 20 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0{,}02$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}01} = 2{,}33$

$$\left(20 - 2{,}33 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}};\ 20 + 2{,}33 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}}\right) = (19{,}3;\ 20{,}7)$$

Si la media de las mediciones de los 100 días elegidos pertenece al intervalo (19,3; 20,7), se acepta que la media de precipitaciones es 20 m/ℓ², y en caso contrario se rechaza.

068 **La duración de un modelo de bombilla de bajo consumo, según el fabricante, se distribuye como una normal de media 5.000 horas y desviación típica 310 horas.**

Con el fin de contrastar esta hipótesis, se toma una muestra al azar de 40 de esas bombillas y la duración media para esta muestra es de 4.500 horas. ¿Se puede creer al fabricante a un nivel de confianza del 95 %?

(Navarra. Junio 2008. Ejercicio 3. Opción B)

$$\left.\begin{array}{l} H_0\text{: } \mu = 5.000 \\ H_1\text{: } \mu \neq 5.000 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0{,}05$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$\left(5.000 - 1{,}96 \cdot \frac{310}{\sqrt{40}};\ 5.000 + 1{,}96 \cdot \frac{310}{\sqrt{40}}\right) = (4.903{,}93;\ 5.096{,}07)$$

Como la media muestral es 4.500 horas y $4.500 \notin (4.903{,}93;\ 5.096{,}07)$, no se puede creer al fabricante.

069 Se está calibrando una balanza. Para ello se pesa una «pesa de prueba» de 1.000 gramos 60 veces, obteniéndose un peso medio de 1.000,6 gramos.

Si la desviación típica de la población es de 2 gramos, ¿podemos aceptar la hipótesis nula $H_0: \mu = 1.000$ frente a la alternativa $H_1: \mu \neq 1.000$ con una confianza del 99 %?

(Murcia. Septiembre 2008. Bloque 5. Cuestión 2)

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \mu = 1.000 \\ H_1\colon \mu \neq 1.000 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0{,}01$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}005} = 2{,}58$

$$\left(1.000 - 2{,}58 \cdot \frac{2}{\sqrt{60}}; 1.000 + 2{,}58 \cdot \frac{2}{\sqrt{60}}\right) = (999{,}33; 1.000{,}67)$$

Como la media muestral es 1.000,6 y $1.000{,}6 \in (999{,}33; 1.000{,}67)$, aceptamos la hipótesis nula.

070 Se supone que el número de horas extras realizadas por un trabajador de una empresa en un determinado mes sigue una distribución normal con media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 0{,}25$ h. Si el número medio de horas extras realizadas en dicho mes por 20 empleados seleccionados de forma aleatoria en la empresa resultó ser $\overline{x} = 4{,}925$ h, ¿permite ese valor de $\overline{x}$ rechazar a nivel $\alpha = 0{,}05$ que μ fuera igual a 5 horas?

(Castilla y León. Septiembre 2007. Bloque B. Pregunta 3)

Planteamos las hipótesis nula y alternativa.

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \mu = 5 \\ H_1\colon \mu \neq 5 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0{,}05$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$\left(5 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}25}{\sqrt{20}}; 5 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}25}{\sqrt{20}}\right) = (4{,}89; 5{,}11)$$

Como la media muestral es 4,925 horas y $4{,}925 \in (4{,}89; 5{,}11)$, aceptamos que la media del número de horas extras realizadas por un trabajador es igual a 5 horas.

071 Uno de los ingenieros de un equipo de Fórmula 1 afirma que la duración media de uno de los componentes del motor es de 1.500 horas. Otro de los ingenieros afirma que la duración media de dicho componente es igual o menor que 1.500 horas.

Se selecciona una muestra aleatoria simple de 81 componentes del motor del mismo tipo, y se obtiene que su vida media ha sido de 1.450 horas. Si la duración media sigue una distribución normal con desviación típica de 180 horas:

a) ¿Es compatible la hipótesis $H_0: \mu = 1.500$, frente a la hipótesis $H_1: \mu \neq 1.500$ con una confianza del 99 %, con el resultado experimental $\overline{x} = 1.450$?

b) ¿Es compatible la hipótesis $H_0: \mu = 1.500$, frente a la hipótesis $H_1: \mu < 1.500$ con una confianza del 99 %, con el resultado experimental $\overline{x} = 1.450$?

a) Planteamos las hipótesis nula y alternativa.

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \mu = 1.500 \\ H_1: \mu \neq 1.500 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0{,}01$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}005} = 2{,}58$

$$\left(1.500 - 2{,}58 \cdot \frac{180}{\sqrt{81}}; 1.500 + 2{,}58 \cdot \frac{180}{\sqrt{81}}\right) = (1.448{,}4; 1.551{,}6)$$

Como la media muestral es 1.450 y $1.450 \in (1.448{,}4; 1.551{,}6)$, se puede aceptar la hipótesis de que $\mu = 1.500$.

b) Planteamos las hipótesis nula y alternativa.

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \mu = 1.500 \\ H_1: \mu < 1.500 \end{array}\right\}$$

Calculamos la zona de aceptación.

$\alpha = 0{,}01$ Contraste unilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}01} = 2{,}33$

$$\left(1.500 - 2{,}33 \cdot \frac{180}{\sqrt{81}}; +\infty\right) = (1.453{,}4; +\infty)$$

Como la media muestral es 1.450 y $1.450 \notin (1.453{,}4; +\infty)$, se rechaza la hipótesis de que $\mu = 1.500$.

072 **Supongamos que aplicamos un test de atención a 145 alumnos de Bachillerato, obtenidos por muestreo aleatorio simple. Los resultados fueron: media igual a 32 y desviación típica de 15. El baremo del mencionado test de atención nos dice que para la población de Bachillerato, la media es 35 y la desviación típica es 16,76.**

¿Es compatible nuestra media con la media que ofrece el baremo a un nivel de confianza del 95 %? Razona la respuesta.

(Castilla–La Mancha. Septiembre 2002. Bloque 4. Ejercicio B)

Planteamos las hipótesis nula y alternativa.

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \mu = 35 \\ H_1: \mu \neq 35 \end{array}\right\}$$

Calculamos la zona de aceptación.

$\alpha = 0{,}05$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$\left(35 - 1{,}96 \cdot \frac{16{,}76}{\sqrt{145}}; 35 + 1{,}96 \cdot \frac{16{,}76}{\sqrt{145}}\right) = (32{,}27; 37{,}73)$$

Como la media muestral es 32 horas y $32 \notin (32{,}27; 37{,}73)$, rechazamos el baremo del test.

073 **El peso medio de los paquetes de café puestos a la venta por cierta casa comercial es supuestamente de 1 kg. Para comprobar esta suposición, elegimos una muestra aleatoria simple de 100 paquetes de café y encontramos que su peso medio es de 0,978 kg. Suponiendo que la distribución del peso de los paquetes de café es normal y la desviación típica de la población es de 0,10 kg.**

¿Es compatible este resultado con la hipótesis nula $H_0: \mu = 1$ con un nivel de significación de 0,05? ¿Y con un nivel de significación de 0,01?

(Murcia. Junio 2008. Bloque 5. Cuestión 1)

Planteamos las hipótesis nula y alternativa.

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \mu = 1 \\ H_1: \mu \neq 1 \end{array}\right\}$$

- Si el nivel de significación es $\alpha = 0{,}05$:

  Calculamos la zona de aceptación.

  Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

  $$\left(1 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}1}{\sqrt{100}}; 1 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}1}{\sqrt{100}}\right) = (0{,}980; 1{,}020)$$

  Como la media muestral es 0,978 kilogramos y $0{,}978 \notin (0{,}980; 1{,}020)$, rechazamos la hipótesis nula.

- Si el nivel de significación es $\alpha = 0{,}01$:

  Calculamos la zona de aceptación.

  Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}005} = 2{,}58$

  $$\left(1 - 2{,}58 \cdot \frac{0{,}1}{\sqrt{100}}; 1 + 2{,}58 \cdot \frac{0{,}1}{\sqrt{100}}\right) = (0{,}974; 1{,}026)$$

  Como la media muestral es 0,978 kilogramos y $0{,}978 \in (0{,}974; 1{,}026)$, aceptamos la hipótesis nula.

074 **En un taller se dedican a la estampación de dibujos en camisetas. En su publicidad afirman que como máximo producen un 2 % de piezas defectuosas. Para contrastarlo se toma una muestra aleatoria de 100 camisetas. Con un nivel de significación del 5 %, ¿se puede aceptar lo que dice la publicidad?**

Planteamos las hipótesis nula y alternativa:

$$\left.\begin{array}{l} H_0: p \leq 0{,}02 \\ H_1: p > 0{,}02 \end{array}\right\}$$

Calculamos la zona de aceptación.

$\alpha = 0{,}05$ Contraste unilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}05} = 1{,}645$

$$\left(-\infty; 0{,}02 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}02 \cdot 0{,}98}{100}}\right) = (-\infty; 0{,}04)$$

Si la proporción de estampaciones defectuosas en la muestra de 100 camisetas se encuentra en el intervalo $(-\infty; 0{,}04)$ aceptamos la afirmación de que, como máximo, el 2 % de las estampaciones se producen defectuosas, y en caso contrario lo rechazamos.

075 Una empresa de mensajería quiere estudiar el peso de los paquetes entregados por sus motoristas a lo largo del día, por lo que pesa los encargos de diez de ellos obteniendo los siguientes resultados:

4,9	5,2	5,1	4,8	5,3
5,5	4,9	5,0	5,2	4,9

Si los pesos de los paquetes siguen una distribución normal de media 5 kg y desviación típica 0,2 kg, se desea contrastar si el peso medio de los paquetes es de 5 kg, con un nivel de significación del 5 %.

a) Plantea las hipótesis nula y alternativa del contraste.

b) Determina la zona de aceptación del contraste.

c) Realiza el contraste.

a) Planteamos las hipótesis nula y alternativa.

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \mu = 5 \\ H_1\colon \mu \neq 5 \end{array}\right\}$$

b) Calculamos la zona de aceptación.

$\alpha = 0{,}05$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$\left(5 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}2}{\sqrt{10}}; 5 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}2}{\sqrt{10}}\right) = (4{,}88; 5{,}12)$$

c) Como la media muestral es $\overline{x} = \dfrac{50{,}8}{10} = 5{,}08$ kg y $5{,}08 \in (4{,}88; 5{,}12)$ aceptamos la hipótesis nula.

076 Antes de unas elecciones se investiga la intención de voto de una población a uno de los dos partidos políticos que se han presentado (*A* y *B*). Si se determina que 200 de cada 500 personas votarán al partido *A*, para contrastar esta afirmación con un nivel de confianza del 99 %, se pide:

a) Plantear las hipótesis nula y alternativa.

b) Obtener la zona de aceptación del contraste.

c) Determinar la decisión sobre la intención de voto de la población.

a) Primero calculamos la proporción teórica de personas que se espera que voten al partido *A*.

$$p = \frac{200}{500} = 0{,}4$$

Planteamos las hipótesis nula y alternativa.

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon p = 0{,}4 \\ H_1\colon p \neq 0{,}4 \end{array}\right\}$$

b) $\alpha = 0{,}01$ Contraste unilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}005} = 2{,}58$

$$\left(0{,}4 - 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{500}}; 0{,}4 + 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{500}}\right) = (0{,}34; 0{,}46)$$

c) Hallamos la proporción de una muestra de 500 personas. Si esta proporción pertenece al intervalo (0,34; 0,46) podemos aceptar la hipótesis de que la proporción de votantes al partido *A* es de 0,4, y en caso contrario la rechazamos.

077 En una muestra aleatoria de 225 habitantes de una población hay 18 de ellos que hablan alemán. A nivel de significación de 0,05, ¿hay suficiente evidencia para refutar la afirmación de que al menos el 10 % de los habitantes de la población hablan alemán?

(Baleares. Junio 2006. Opción B. Cuestión 4)

Planteamos las hipótesis nula y alternativa.

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon p \geq 0{,}1 \\ H_1\colon p < 0{,}1 \end{array}\right\}$$

Calculamos la zona de aceptación.

$\alpha = 0{,}05$ Contraste unilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}05} = 1{,}645$

$$\left(0{,}1 - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{225}}; +\infty\right) = (0{,}067; +\infty)$$

Hallamos la proporción de la muestra.

$$\hat{p} = \frac{18}{225} = 0{,}08$$

Como $0{,}08 \in (0{,}067; +\infty)$, aceptamos la afirmación de que, al menos, el 10 % de los habitantes hablan alemán.

078 Una empresa de conservas vegetales envasa espárragos en latas de 400 gramos. El encargado del control de calidad ha tomado una muestra de 16 latas, obteniendo una media de 380 gramos.

Se sabe que el contenido de las latas varía aleatoriamente siguiendo una ley normal con desviación típica igual a 20 gramos.

Contrasta la hipótesis de que la empresa está envasando una media de 400 gramos, con un nivel de significación igual a 0,05.

(La Rioja. Junio 2003. Parte B. Problema 2)

Planteamos las hipótesis nula y alternativa.

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \mu = 400 \\ H_1\colon \mu \neq 400 \end{array}\right\}$$

Calculamos la zona de aceptación.

$\alpha = 0{,}05$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$\left(400 - 1{,}96 \cdot \frac{20}{\sqrt{16}}; 400 + 1{,}96 \cdot \frac{20}{\sqrt{16}}\right) = (390{,}2; 409{,}8)$$

Como la media muestral es 380 gramos y $380 \notin (390{,}2; 409{,}8)$, rechazamos la hipótesis nula.

079 Una autoescuela anuncia que al menos el 80 % de sus alumnos aprueban el examen teórico. Se elige aleatoriamente una muestra de 50 alumnos, de los cuales, 42 aprueban el examen. ¿Se puede admitir la afirmación del anuncio a un nivel de significación del 3 %?

Planteamos las hipótesis nula y alternativa.

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon p \geq 0{,}8 \\ H_1\colon p < 0{,}8 \end{array}\right\}$$

Calculamos la zona de aceptación.

$\alpha = 0{,}03$ Contraste unilateral $\rightarrow z_\alpha = z_{0,03} = 1{,}88$

$$\left(0{,}8 - 1{,}88 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{50}}; +\infty\right) = (0{,}694; +\infty)$$

Hallamos la proporción de la muestra.

$$\hat{p} = \frac{42}{50} = 0{,}84$$

Como $0{,}84 \in (0{,}694; +\infty)$, aceptamos la afirmación de que, al menos, el 80 % de los alumnos de la autoescuela aprueban el examen teórico.

080 **Cierto partido político difunde en su campaña que el 60 % de los electores tiene intención de votarle en las próximas elecciones, pero en una encuesta realizada a 1.000 de esos electores elegidos al azar solo 540 afirmaron tal intención. ¿Es aceptable lo que dice el partido, con un 95 % de confianza? ¿Y con el 99 %?**

(País Vasco. Junio 2008. Apartado D. Ejercicio 2)

Planteamos las hipótesis nula y alternativa.

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon p = 0{,}6 \\ H_1\colon p \neq 0{,}6 \end{array}\right\}$$

Calculamos la zona de aceptación.

- Si el nivel de confianza es del 95 %:

  $\alpha = 0{,}05$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,25} = 1{,}96$

  $$\left(0{,}6 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{1.000}}; 0{,}6 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{1.000}}\right) = (0{,}57; 0{,}63)$$

  Hallamos la proporción de la muestra.

  $$\hat{p} = \frac{540}{1.000} = 0{,}54$$

  Como $0{,}54 \notin (0{,}57; 0{,}63)$; rechazamos la hipótesis de que la proporción de votantes al partido es de 0,6.

- Si el nivel de confianza es del 99 %:

  $\alpha = 0{,}01$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2{,}58$

  $$\left(0{,}6 - 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{1.000}}; 0{,}6 + 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{1.000}}\right) = (0{,}56; 0{,}64)$$

  Como $0{,}54 \notin (0{,}56; 0{,}64)$ rechazamos la hipótesis de que la proporción de votantes al partido es de 0,6.

081 **Según los datos de cierta comunidad autónoma relativos al impuesto sobre la renta, en el pasado ejercicio fiscal la contribución media fue de 4.000 €. En una muestra de 500 declaraciones del año en curso, elegidas al azar, la contribución media ha sido de 4.120 €, con una desviación típica de 1.200 €.**

¿Puede decirse, con un 95 % de confianza, que ha variado la aportación media de los contribuyentes? ¿Y con un 99 % de confianza?

(País Vasco. Junio 2007. Apartado D. Ejercicio 2)

Planteamos las hipótesis nula y hipótesis alternativa.

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu = 4.000 \\ H_1 : \mu \neq 4.000 \end{array}\right\}$$

- Si el nivel de confianza es del 95 %:

  Calculamos la zona de aceptación.

  $\alpha = 0{,}05$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

  $$\left(4.000 - 1{,}96 \cdot \frac{1.200}{\sqrt{500}}; \ 4.000 + 1{,}96 \cdot \frac{1.200}{\sqrt{500}}\right) = (3.894{,}82; \ 4.105{,}18)$$

  Como 4.120 no pertenece a la zona de aceptación, rechazamos la hipótesis nula con un nivel de confianza del 95 %.

- Si el nivel de confianza es del 99 %:

  Calculamos la zona de aceptación.

  $\alpha = 0{,}01$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}005} = 2{,}58$

  $$\left(4.000 - 2{,}58 \cdot \frac{1.200}{\sqrt{500}}; \ 4.000 + 2{,}58 \cdot \frac{1.200}{\sqrt{500}}\right) = (3.861{,}54; \ 4.138{,}46)$$

  Como 4.120 pertenece a la zona de aceptación, aceptamos la hipótesis nula con un nivel de confianza del 99 %.

082 **En un centro de investigación médica se desea contrastar el funcionamiento de un nuevo tratamiento contra una enfermedad, comparando los resultados con el tratamiento anterior y afirmando que los resultados de las pruebas mejoran al menos 20 puntos.**

Para ello se eligen dos muestras aleatorias de 64 pacientes del centro cada una. Las desviaciones típicas muestrales son: $\sigma_1 = 14$ y $\sigma_2 = 18$, respectivamente. Para un nivel de significación del 5 %:

a) Plantea las hipótesis nula y alternativa.

b) Determina la zona de aceptación del contraste.

c) Realiza el contraste.

a) Planteamos las hipótesis nula y alternativa.

μ_1: media del tratamiento anterior μ_2: media del nuevo tratamiento

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 20 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 20 \end{array}\right\}$$

b) Calculamos la zona de aceptación.

$\alpha = 0{,}05$ Contraste unilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}05} = 1{,}645$

$$\left(20 - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{14^2}{64} + \frac{18^2}{64}}; +\infty\right) = (15{,}31; +\infty)$$

c) Si las diferencias de la media del primer tratamiento menos la del segundo tratamiento pertenece al intervalo $(15{,}31; +\infty)$ se acepta que el tratamiento mejora en, al menos, 20 puntos.

083 **El tamaño de los ficheros al digitalizar imágenes con un determinado programa sigue una distribución normal. El programa ha sido mejorado en su última versión hasta el punto de que sus responsables garantizan una disminución en el tamaño medio de los ficheros superior a 4 kilobytes (kB) respecto a la versión anterior. Para comprobarlo se ha tomado una muestra de 550 imágenes. Al digitalizarlas con esta versión los ficheros tenían un tamaño medio de 640 kB, con desviación típica $\sigma = 325$ kB. Sin embargo, al ser digitalizadas con la versión antigua se habían obtenido ficheros con un tamaño medio de 700 kB con desviación típica $\sigma = 315$ kB. Contrasta la afirmación de los responsables del programa con nivel de confianza del 90 %.**

Planteamos las hipótesis nula y alternativa.

μ_1: media de la antigua versión μ_2: media de la nueva versión

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 4 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 4 \end{array}\right\}$$

Calculamos la zona de aceptación.

$\alpha = 0{,}10$ Contraste unilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}1} = 1{,}28$

$$\left(-\infty; 4 + 1{,}28 \cdot \sqrt{\frac{315^2}{550} + \frac{325^2}{550}}\right) = (-\infty; 28{,}7)$$

Calculamos la diferencia de tamaños en las medias muestrales.

$$\overline{x}_1 = 700 \text{ kB} \qquad \overline{x}_2 = 640 \text{ kB} \qquad \overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 700 - 640 = 60 \text{ kB}$$

Como $60 \notin (-\infty; 28{,}7)$ se rechaza que el nuevo programa no reduzca el tamaño en, al menos, 4 kB, es decir, se acepta que el nuevo programa reduce el tamaño de los archivos.

084 **En una granja avícola se ha tomado una muestra aleatoria de 200 polluelos de pato, entre los cuales se encontraron 120 hembras.**

a) Halle un intervalo de confianza, con un nivel del 98 %, para la proporción de hembras entre estos polluelos.

b) Razone, a la vista del intervalo encontrado, si a ese nivel de confianza puede admitirse que la verdadera proporción de hembras de pato en esa granja es 0,5.

(Andalucía. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 3)

a) $1 - \alpha = 0{,}98 \rightarrow \alpha = 0{,}02 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}01}$

Para un nivel de confianza del 98 % tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el que acumula una probabilidad de 0,99, que es 2,33.

$z_{\alpha/2} = z_{0{,}01} = 2{,}33$

Calculamos la proporción de hembras, $\hat{p}$, y de machos, $\hat{q}$.

$$\hat{p} = \frac{120}{200} = 0{,}6 \qquad \hat{q} = \frac{80}{200} = 0{,}4$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(0{,}6 - 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{200}}\,;\, 0{,}6 + 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{200}}\right) = (0{,}52;\ 0{,}68)$$

b) Como se tiene que $0{,}5 \notin (0{,}52;\ 0{,}68)$, no se puede admitir, a un nivel de confianza del 98 %, que la proporción de hembras de pato sea 0,5.

085 Se afirma que la proporción de personas que contratan un determinado servicio telefónico es, como mínimo, del 23 %. Sin embargo, la compañía telefónica sospecha que actualmente dicha proporción ha variado. Para comprobarlo hace una encuesta a 500 clientes potenciales entre los que solo 98 piensan contratar dicho servicio.

a) Con un nivel de significación del 5 %, determinar si es aceptable la afirmación inicial.

b) Con los datos muestrales y con un nivel del 95 %, determinar un intervalo de confianza para la proporción poblacional de personas que piensan contratar el servicio en cuestión.

(Canarias. Junio 2008. Prueba B. Pregunta 3)

a) El contraste es unilateral:

$$\left.\begin{array}{l} H_0\!: p \geq 0{,}23 \\ H_1\!: p < 0{,}23 \end{array}\right\}$$

Calculamos la región de aceptación.

$\alpha = 0{,}05$ Contraste unilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}05} = 1{,}645$

$$\left(0{,}23 - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}23 \cdot 0{,}77}{500}}\,;\, +\infty\right) = (0{,}199;\ +\infty)$$

En la muestra se tiene que la proporción es:

$$\hat{p} = \frac{98}{500} = 0{,}196$$

Como $0{,}196 \notin (0{,}199;\ +\infty)$, se rechaza la hipótesis nula, es decir, se rechaza que, como mínimo, el 23 % de las personas contraten este servicio telefónico.

b) $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

El intervalo de confianza es:

$$\left(0{,}196 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}196 \cdot 0{,}804}{500}}\,;\, 0{,}196 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}196 \cdot 0{,}804}{500}}\right) = (0{,}161;\ 0{,}231)$$

086 En los últimos meses una cadena comercial ha intentado potenciar con precios más atractivos y publicidad la venta de productos con la marca genérica de la cadena, frente a los de otras marcas más conocidas por los consumidores.

Antes, un 15 % de los productos que vendía eran de la marca de la cadena. Recientemente, en una muestra de 200 productos vendidos, 36 eran de dicha marca.

a) Plantea un test para contrastar que las medidas no han surtido efecto, frente a que sí lo han hecho, como parecen indicar los datos.

¿A qué conclusión se llega con una significación del 10 %?

b) Calcula un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de productos vendidos con la marca genérica.

Algunos valores de la función de distribución normal de media 0 y desviación típica 1:

$F(0{,}10) = 0{,}54$ $\quad F(0{,}90) = 0{,}82$ $\quad F(1{,}19) = 0{,}88$

$F(1{,}26) = 0{,}90$ $\quad F(1{,}60) = 0{,}95$

(Asturias. Septiembre 2008. Bloque 6)

a) Planteamos las hipótesis nula y alternativa.

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon p = 0{,}15 \\ H_1\colon p \neq 0{,}15 \end{array}\right\}$$

Calculamos la zona de aceptación.

$\alpha = 0{,}1 \qquad$ Contraste bilateral $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}05} = 1{,}645$

$$\left(0{,}15 - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{200}}\,;\, 0{,}15 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{200}}\right) = (0{,}11;\, 0{,}19)$$

Hallamos la proporción de la muestra.

$$\hat{p} = \frac{36}{200} = 0{,}18$$

Como $0{,}18 \in (0{,}11;\, 0{,}19)$, aceptamos que el porcentaje de productos de la cadena que se han vendido no ha variado.

b) $1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}10 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}05} = 1{,}645$

$$\left(0{,}18 - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{200}}\,;\, 0{,}18 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{200}}\right) = (0{,}14;\, 0{,}22)$$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 El número de días de permanencia de los enfermos en un hospital sigue una ley normal de media μ días y desviación típica 3 días.

a) Determine un intervalo de confianza para estimar μ, a un nivel del 97 %, con una muestra aleatoria de 100 enfermos cuya media es 8,1 días.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria para poder estimar μ con un error máximo de 1 día y un nivel de confianza del 92 %?

(Andalucía. Junio 2008. Opción A. Ejercicio 3)

a) $1-\alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}015}$

Para un nivel de confianza del 97 % tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el que acumula una probabilidad de 0,985, que es 2,17.

$z_{\alpha/2} = z_{0{,}015} = 2{,}17$

$$\left(8{,}1 - 2{,}17 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}}; 8{,}1 + 2{,}17 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}}\right) = (7{,}45; 8{,}75)$$

b) $1-\alpha = 0{,}92 \rightarrow \alpha = 0{,}08 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}04}$

Para un nivel de confianza del 92 % tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el que acumula una probabilidad de 0,96 que es 1,75.

$z_{\alpha/2} = z_{0{,}04} = 1{,}75$

Si el error máximo cometido es $E = 1 \rightarrow n = \left(\frac{1{,}75 \cdot 3}{1}\right)^2 = 27{,}56$

Por tanto, el tamaño mínimo de la muestra debe ser de 28 personas.

2 **Para estimar la proporción de los habitantes de una determinada gran ciudad que tienen microondas, se quiere servir de una muestra aleatoria que mida *n*. Calcula el valor mínimo de *n* para el cual, con un nivel de confianza del 97 %, el error en la estimación sea más pequeño que 0,02. (Como se desconoce la proporción, se ha de tomar el caso más desfavorable, que será 0,5.)**

(Baleares. Septiembre 2007. Opción B. Cuestión 8)

$1-\alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}015}$

Para un nivel de confianza del 97 % tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el que acumula una probabilidad de 0,985 que es 2,17.

$z_{\alpha/2} = z_{0{,}015} = 2{,}17$

Si el error máximo cometido es $E = 0{,}02 \rightarrow n = \frac{2{,}17^2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}02^2} = 2.943{,}06$

Por tanto, se ha de elegir una muestra de, como mínimo, 2.944 habitantes.

3 **Una encuesta, realizada sobre una muestra de los jóvenes de una ciudad, para determinar el gasto mensual medio (expresado en euros) en teléfono móvil, concluyó con el intervalo de confianza al 95 %: [10,794; 13,206]**

a) ¿Cuál es el gasto medio muestral?

b) Si, aproximando con cuatro cifras decimales, la desviación típica del gasto mensual es de 7,9989 €, ¿cuál es el tamaño de la muestra encuestada?

(Canarias. Junio 2008. Prueba A. Pregunta 2)

a) El intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Así, el gasto mensual medio de la muestra es el valor intermedio del intervalo:

$$\overline{x} = \frac{10{,}794 + 13{,}206}{2} = 12 \text{ €}$$

b) La amplitud del intervalo es 2,412, por tanto:

$$1{,}206 = 1{,}96 \cdot \frac{7{,}9989}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(\frac{1{,}96 \cdot 7{,}9989}{1{,}206}\right)^2 = 168{,}997$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 169 jóvenes.

4 **En una determinada población se sabe que el valor de la tasa diaria de consumo de calorías sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 400$ calorías.**

a) Si la media poblacional es $\mu = 1.600$ calorías y se elige al azar una muestra aleatoria de 100 personas de esa población, determinar la probabilidad de que el consumo medio diario de calorías en esa muestra esté comprendido entre 1.550 y 1.660 calorías.

b) Si desconocemos la media μ y con el mismo tamaño de la muestra se afirma que el consumo medio diario en esa población toma valores entre 1.530 y 1.670 calorías, ¿con qué nivel de confianza se realiza esta afirmación?

(Galicia. Junio 2008. Bloque 3. Ejercicio 2)

a) $\overline{X} \equiv N\left(1.600, \frac{400}{\sqrt{100}}\right) = N(1.600, 40)$

$$P\left(1.550 < \overline{X} < 1.660\right) = P\left(\frac{1.550 - 1.600}{40} < \frac{\overline{X} - 1.600}{40} < \frac{1.660 - 1.600}{40}\right) =$$

$$= P(-1{,}25 < Z < 1{,}5) = P(Z < 1{,}5) - (1 - P(Z < 1{,}25)) =$$

$$= 0{,}9332 - 1 + 0{,}8944 = 0{,}8276$$

b) Si el intervalo de confianza es (1.530, 1.670) = (1.600 − 70, 1.600 + 70), entonces:

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{400}{\sqrt{100}} = 70 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}75 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}04 \rightarrow \alpha = 0{,}08 \rightarrow 1 - \alpha = 0{,}92$$

Luego la afirmación tiene un nivel de confianza del 92 %.

5 **Se cree que la distancia al instituto de las casas de los alumnos se distribuye normalmente con media 2,8 km y desviación típica 0,6 km. Se ha producido un aumento considerable de matrícula en los últimos años y se desea saber si ha variado la distancia media de las casas de los alumnos al centro; para ello se ha elegido una muestra de 35 alumnos y se ha determinado que la distancia media muestral es 3,1 km. ¿Es creíble la afirmación inicial al nivel 5 %?**

(Navarra. Septiembre 2007. Ejercicio 3. Opción B)

Planteamos un contraste bilateral para la media.

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \mu = 2{,}8 \\ H_1: \mu \neq 2{,}8 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

Calculamos la zona de aceptación.

$$\left(2{,}8 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{35}}; 2{,}8 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{35}}\right) = (2{,}6; 3)$$

Como $\overline{x} = 3,1 \notin (2,6; 3)$, se rechaza la hipótesis nula; por tanto, al nivel del 5 % se pone en duda que la distancia media de los alumnos al centro continúe siendo de 2,8 kilómetros.

6 **La empresa de transportes urgente «El rápido» afirma en su publicidad que, al menos, el 70 % de sus envíos llegan al día siguiente a su destino. Para contrastar la calidad de este servicio, la asociación de consumidores selecciona aleatoriamente 100 envíos observando que 39 no llegaron al día siguiente a su destino.**

a) Con una significación del 1 %, ¿se puede aceptar la afirmación de la empresa?

b) ¿Se concluiría lo mismo con un nivel de significación del 8 %?

(Canarias. Septiembre 2008. Prueba B. Pregunta 1)

a) El contraste es unilateral:

$$\left.\begin{array}{l} H_0: p \geq 0,70 \\ H_1: p < 0,70 \end{array}\right\}$$

$$\alpha = 0,01 \rightarrow z_\alpha = z_{0,01} = 2,33$$

$$\left(0,70 - 2,33 \cdot \sqrt{\frac{0,70 \cdot 0,30}{100}}; +\infty\right) = (0,593; +\infty)$$

En la muestra se tiene que la proporción es:

$$\hat{p} = 1 - \frac{39}{100} = 0,61$$

Como $0,61 \in (0,59; +\infty)$, se acepta la hipótesis de que, al menos, el 70 % de los envíos llega al día siguiente de su destino con un nivel de significación del 1 %.

b) $\alpha = 0,08 \rightarrow z_\alpha = z_{0,08} = 1,41$

$$\left(0,70 - 1,41 \cdot \sqrt{\frac{0,70 \cdot 0,30}{100}}; +\infty\right) = (0,64; +\infty)$$

En la muestra la proporción es $\hat{p} = 0,61$, que no pertenece al intervalo $(0,64; +\infty)$; por tanto, se rechaza la hipótesis de que, al menos, el 70 % de los envíos llega al día siguiente a su destino con un nivel de significación del 8 %.

7 **Según cierto estudio realizado el año pasado, un 35 % de las familias con conexión a Internet utilizaban habitualmente este medio para realizar sus operaciones bancarias. El estudio pronosticaba también que ese porcentaje aumentaría en los próximos meses. De una encuesta realizada recientemente a 125 usuarios de Internet, 50 declararon utilizarla habitualmente para realizar las citadas operaciones.**

a) Plantea un test para contrastar que la proporción del año pasado se ha mantenido, frente a que, como parece, se ha cumplido el pronóstico del estudio. ¿A qué conclusión se llega con una significación del 10 %?

b) Calcula un intervalo de confianza del 90 % para la proporción actual de usuarios de Internet que la usan habitualmente para realizar sus operaciones bancarias.

(Asturias. Septiembre 2007. Bloque 6)

a) Planteamos un contraste de hipótesis unilateral para la proporción.

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon p \leq 0{,}35 \\ H_1\colon p > 0{,}35 \end{array}\right\}$$

$$\alpha = 0{,}1 \rightarrow z_\alpha = z_{0,1} = 1{,}28$$

$$\left(-\infty;\ 0{,}35 + 1{,}28 \cdot \sqrt{\frac{0{,}35 \cdot 0{,}65}{125}}\right) = (-\infty;\ 0{,}405)$$

La proporción muestral es:

$$\hat{p} = \frac{50}{125} = 0{,}4$$

Como $0{,}4 \in (-\infty;\ 0{,}405)$, podemos aceptar que el número de familias con conexión a Internet que la utilizan para operaciones bancarias, no ha aumentado con un nivel de significación del 10 %.

b) $1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}1 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,05} = 1{,}645$

$$\hat{p} = \frac{50}{125} = 0{,}4$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(0{,}4 - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{125}};\ 0{,}4 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{125}}\right) = (0{,}328;\ 0{,}472)$$

Esto quiere decir que la proporción actual de usuarios de Internet que la usan habitualmente para realizar sus operaciones bancarias, está entre el 32,8 % y el 47,2 % con una confianza del 90 %.

Dirección de arte: **José Crespo**

Proyecto gráfico:
Portada: **Carrió/Sánchez/Lacasta**
Interiores: **Manuel García, Rosa Barriga**
Ilustración: **José María Valera**

Jefa de proyecto: **Rosa Marín**
Coordinación de ilustración: **Carlos Aguilera**
Jefe de desarrollo de proyecto: **Javier Tejeda**
Desarrollo gráfico: **Rosa María Barriga, José Luis García, Raúl de Andrés**

Dirección técnica: **Ángel García Encinar**

Coordinación técnica: **Félix Rotella**
Confección y montaje: **MonoComp, S. A., Luis González, Hilario Simón**

Corrección: **Marta Rubio, Livia Villaluenga, Gerardo Z. García**
Documentación y selección fotográfica: **Nieves Marinas**

Fotografías: D. Lezama; E. González; GARCÍA-PELAYO/Juancho; I. Rovira; J. Jaime; J. M.ª Escudero; Krauel; M. Sánchez; Michele di Piccione; P. López; Prats i Camps; S. Cid; S. Enríquez/INS Pradolongo, Madrid; TERRANOVA INTERPRETACIÓN Y GESTION AMBIENTAL; V. Domènech; A. G. E. FOTOSTOCK; CENTRAL STOCK; CORDON PRESS/ CORBIS/Blue Lantern Studio; COVER/CORBIS; EFE/EPA/Gero Breloer, Sergei Ilnitsky, AIRBUS/HANDOUT, Mazen Mahdi, R.M.L, A. Estévez; EFE/SIPA-PRESS/P-J San Bartolomé; FOAT; FOTONONSTOP; GETTY IMAGES SALES SPAIN; HIGHRES PRESS STOCK/AbleStock.com; I. Preysler; ISTOCKPHOTO/Eric Isselée; NASA; PHOTOALTO; PHOTODISC; BIBLIOTECA NACIONAL DE ESPAÑA; J. E. Casariego; MARIE CLAIRE; MATTON-BILD; MUSEO J. DE PAUME; PIERPOINT MORGAN LIBRARY, NEW YORK; SERIDEC PHOTOIMAGENES CD; THE METROPOLITAN MUSEUM OF ART, NEW YORK; THE MUSEUM OF MODERN ART, NEW YORK; VAN GOGH MUSEUM, AMSTERDAM; ARCHIVO SANTILLANA

Torrelaguna, 60. 28043 Madrid
PRINTED IN SPAIN
Impreso en España por

ISBN: 978-84-294-4362-2
CP: 833302
Depósito legal: