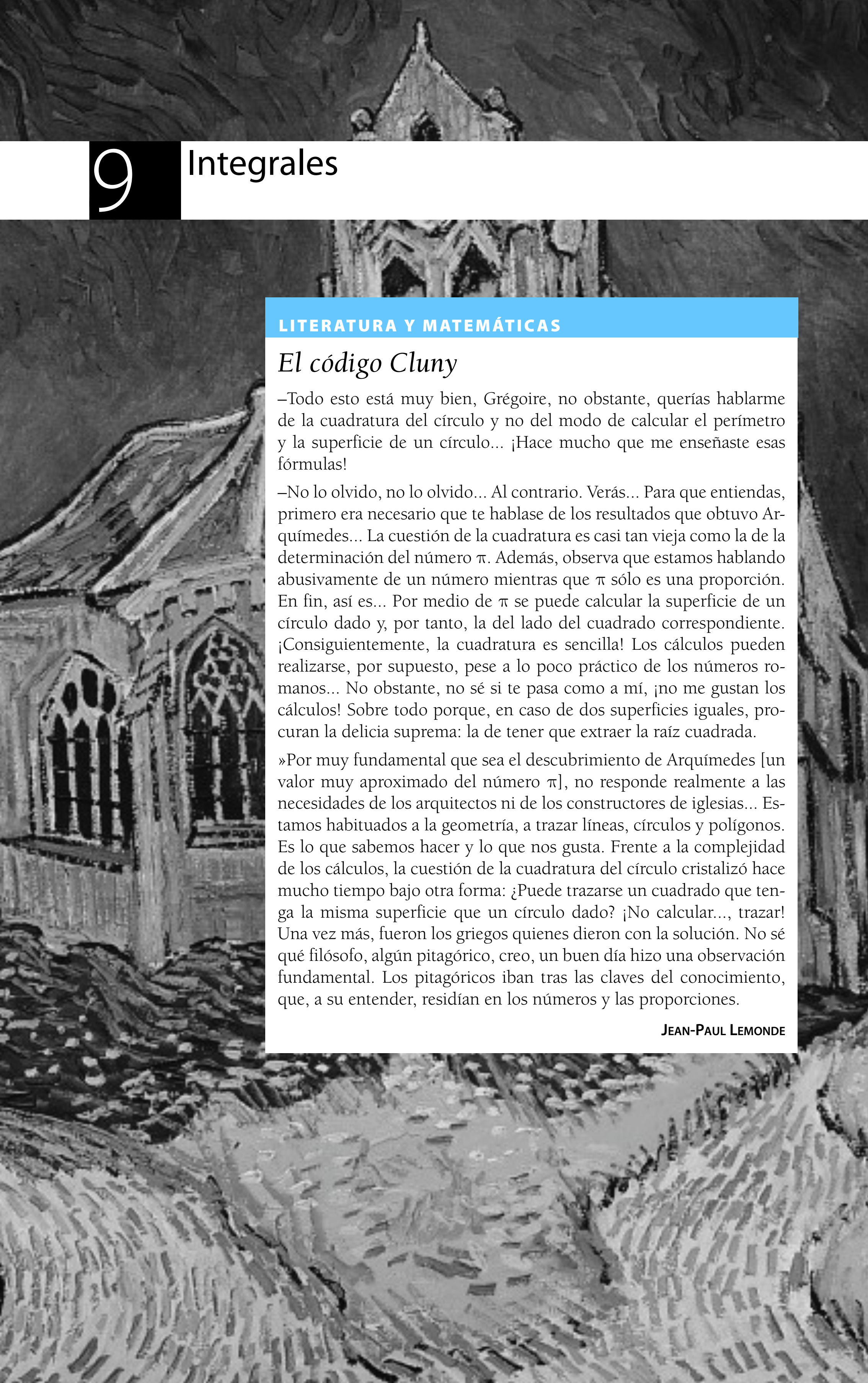


9 Integrales

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El código Cluny

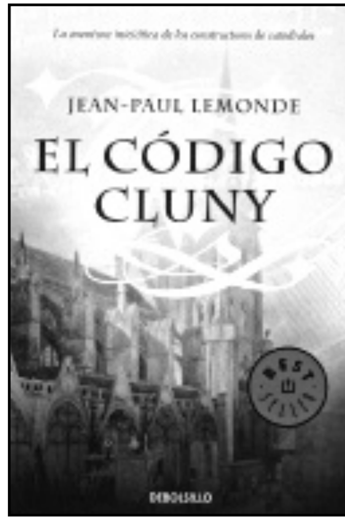
–Todo esto está muy bien, Grégoire, no obstante, querías hablarme de la cuadratura del círculo y no del modo de calcular el perímetro y la superficie de un círculo... ¡Hace mucho que me enseñaste esas fórmulas!

–No lo olvido, no lo olvido... Al contrario. Verás... Para que entiendas, primero era necesario que te hablase de los resultados que obtuvo Arquímedes... La cuestión de la cuadratura es casi tan vieja como la de la determinación del número π. Además, observa que estamos hablando abusivamente de un número mientras que π sólo es una proporción. En fin, así es... Por medio de π se puede calcular la superficie de un círculo dado y, por tanto, la del lado del cuadrado correspondiente. ¡Consiguientemente, la cuadratura es sencilla! Los cálculos pueden realizarse, por supuesto, pese a lo poco práctico de los números romanos... No obstante, no sé si te pasa como a mí, ¡no me gustan los cálculos! Sobre todo porque, en caso de dos superficies iguales, procuran la delicia suprema: la de tener que extraer la raíz cuadrada.

»Por muy fundamental que sea el descubrimiento de Arquímedes [un valor muy aproximado del número π], no responde realmente a las necesidades de los arquitectos ni de los constructores de iglesias... Estamos habituados a la geometría, a trazar líneas, círculos y polígonos. Es lo que sabemos hacer y lo que nos gusta. Frente a la complejidad de los cálculos, la cuestión de la cuadratura del círculo cristalizó hace mucho tiempo bajo otra forma: ¿Puede trazarse un cuadrado que tenga la misma superficie que un círculo dado? ¡No calcular..., trazar! Una vez más, fueron los griegos quienes dieron con la solución. No sé qué filósofo, algún pitagórico, creo, un buen día hizo una observación fundamental. Los pitagóricos iban tras las claves del conocimiento, que, a su entender, residían en los números y las proporciones.

JEAN-PAUL LEMONDE

El código Cluny
Jean-Paul Lemonde



Esta novela se centra en la fundación y construcción de la abadía de Cluny, la mayor iglesia románica de la cristiandad, encargada en 1085 al monje Hézelon por el abad Hugues de Semur. El autor descubre el secreto de carácter numérico y geométrico que se esconde en la construcción de este edificio, y eso le da pie para exponer diversos contenidos matemáticos a lo largo de la obra: construcciones con regla y compás, obtención de aproximaciones del número π, el número de oro, etc. Por ejemplo, en el siguiente párrafo Grégoire le explica a Jahan cómo se calcula el área de un círculo.

–Jahan, ¿cómo se calcula la superficie de un triángulo?

–Multiplicando la base por la altura partida por dos, por supuesto, ¡pero no comprendo qué tiene eso que ver con el círculo!

–¡Ay, ay…!, ¿no te das cuenta? Venga, volvamos al razonamiento de Arquímedes… Presta atención al polígono de muchos lados. Su superficie es igual a la suma de las superficies de los triángulos alzados sobre sus lados, cuyos vértices se hallan en el centro del polígono o del círculo. ¿De acuerdo?

–Sí…

–Si el polígono tiene muchos lados y siendo la base muy pequeña, la altura de cada triángulo equivale prácticamente al radio del círculo… Así pues, es fácil estimar la superficie del polígono o, lo que viene a ser lo mismo, la del círculo, puesto que, si el polígono tiene N lados, la superficie que buscamos tiene un valor de N veces la superficie de uno de los triángulos… Como los triángulos tienen todos la misma altura, medio diámetro, puede usarse esa altura. Lo que da:

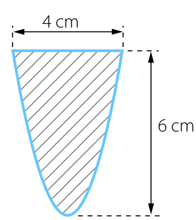
$$\text{Superficie} = N \times (\text{base} \times \text{altura}/2) = (N \times \text{base}) \times D/4$$

»Ahora bien, N veces la base es la suma de los lados del polígono…, por ende, de su perímetro… o el del círculo, es decir, πD. Te das cuenta de que volvemos a encontrarnos con la fórmula que conoces…

El valor de la superficie del círculo es $\pi D^2/4$

Como dice el texto, el problema de la cuadratura de un círculo de radio r se puede resolver numéricamente determinando la longitud del cuadrado, que es: $\ell = \sqrt{\pi r^2} = r\sqrt{\pi}$

Pero la resolución geométrica, es decir, el trazado del cuadrado a partir del círculo utilizando solo los instrumentos clásicos de dibujo (la regla sin graduar y el compás) no se puede hacer. En contra de lo que se dice en el texto, esto no lo demostraron los matemáticos griegos. Investiga cuándo se demostró e intenta resolver numéricamente la cuadratura del recinto parabólico de esta figura.



La cuadratura del círculo fue un problema que propusieron los griegos y que permaneció sin resolver más de 2.000 años. Ferdinand Lindemann demostró, en 1880, que π es un número trascendente y que, por tanto, el problema de la cuadratura del círculo no tiene solución.

Teniendo en cuenta que el área de la parábola es $\frac{2}{3} b \cdot h$, el área de la parábola dada es de 16 unidades cuadradas, por lo que el cuadrado equivalente será el que tiene por lado 4 unidades.

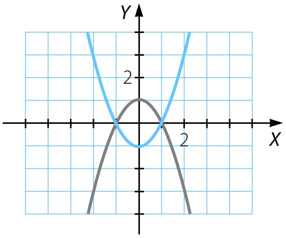
Integrales

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 **Identifica la ecuación de estas parábolas.**

a) $f(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = -x^2 + 1$



a) Como $a = 1 > 0$, la parábola está abierta hacia arriba y tiene un mínimo en el punto $(0, -1)$.

b) Como $a = -1 < 0$, la parábola está abierta hacia abajo y tiene un máximo en el punto $(0, 1)$.

002 **Determina los puntos de corte en cada caso.**

a) $f(x) = 3x^2 - 4$
$g(x) = x$

b) $f(x) = 3x^2 + 2x - 6$
$g(x) = 4x^2 + x - 8$

a) $f(x) = g(x) \rightarrow 3x^2 - 4 = x \rightarrow 3x^2 - x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ x = -1 \end{cases}$

Los puntos de corte son: $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ y $(-1, -1)$

b) $f(x) = g(x) \rightarrow 3x^2 + 2x - 6 = 4x^2 + x - 8 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$

Los puntos de corte son: $(2, 10)$ y $(-1, -5)$

ACTIVIDADES

001 **La función $F(x) = k \cdot e^{3x} + n$ es una función primitiva de la función $f(x) = e^{3x}$. Halla los valores de las constantes k y n si $F(0) = 0$.**

$F(0) = 0 \rightarrow k \cdot e^0 + n = 0 \rightarrow k + n = 0 \rightarrow n = -k$

002 **La pendiente de la recta tangente a una curva, en un punto de abscisa x, es $6x$. Halla de qué función se trata, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas.**

La pendiente de la recta tangente en un punto es:
$f'(x) = 6x$

Entonces, resulta que:
$f(x) = 3x^2 + k$

Si $f(x)$ pasa por el origen de coordenadas:
$f(0) = 0 \rightarrow k = 0$

Así, la función es: $f(x) = 3x^2$

003 Si $\int f(x)\,dx = F(x) + k$ y $\int g(x)\,dx = G(x) + k$, halla:

a) $\int [f(x) + g(x)]\,dx$

b) $\int [2f(x) - g(x)]\,dx$

c) $\int \left[\frac{1}{2}f(x) - 2g(x)\right] dx$

d) $\int [-f(x) + b \cdot g(x)]\,dx$

a) $$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x) + k + G(x) + k = F(x) + G(x) + k$$

b) $$\int [2f(x) - g(x)]\,dx = 2\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx = 2(F(x) + k) - (G(x) + k) = 2F(x) - G(x) + k$$

c) $$\int \left[\frac{1}{2}f(x) - 2g(x)\right] dx = \frac{1}{2}\int f(x)\,dx - 2\int g(x)\,dx = \frac{1}{2}(F(x) + k) - 2(G(x) + k) = \frac{1}{2}F(x) - 2G(x) + k$$

d) $$\int [-f(x) + b \cdot g(x)]\,dx = -\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx = -(F(x) + k) + b(G(x) + k) = -F(x) + bG(x) + k$$

004 Dada la serie de funciones:

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = x^2 \qquad f_3(x) = x^3 \ldots$$

calcula:

a) Su derivada.

b) ¿Qué expresión general tendrá la derivada de $f(x) = x^n$?

c) ¿Cuál será la integral de $f(x) = x^n$?

a) $f_1'(x) = 1,\ f_2'(x) = 2x,\ f_3'(x) = 3x^2, \ldots$

b) $f'(x) = nx^{n-1}$

c) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$

005 Calcula las siguientes integrales.

a) $\int (x^2 + x)\,dx$

b) $\int \sqrt{x^3}\,dx$

c) $\int (2x^2 - 3x + 5)\,dx$

d) $\int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{1}{x^3}\right) dx$

a) $$\int (x^2 + x)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + k$$

b) $$\int \sqrt{x^3}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + k = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + k$$

c) $\int (2x^2 - 3x + 5)\, dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x + k$

d) $\int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{1}{x^3} \right) dx = \frac{x^3}{9} - \frac{1}{2x^2} + k$

006 Halla estas integrales.

a) $\int 2x(x^2 + 3)^4\, dx$

b) $\int \frac{2x}{x^2 - 1}\, dx$

c) $\int \frac{x^2(x^3 - 2)}{3}\, dx$

d) $\int \frac{x^2}{x^3 - 6}\, dx$

a) $\int 2x(x^2 + 3)^4\, dx = \frac{(x^2 + 3)^5}{5} + k$

b) $\int \frac{2x}{x^2 - 1}\, dx = \ln |x^2 - 1| + k$

c) $\int \frac{x^2(x^3 - 2)}{3}\, dx = \frac{(x^3 - 2)^2}{18} + k$

d) $\int \frac{x^2}{x^3 - 6}\, dx = \frac{1}{3} \ln |x^3 - 6| + k$

007 Calcula las siguientes integrales.

a) $\int 2^{\frac{x}{2}}\, dx$

b) $\int e^{x+1} dx$

c) $\int \left(\frac{5}{2} \right)^{2x} dx$

d) $\int (e^{-2x} + e^{x-1})\, dx$

a) $\int 2^{\frac{x}{2}}\, dx = 2 \cdot \frac{2^{\frac{x}{2}}}{\ln 2} + k = \frac{2^{\frac{x}{2}+1}}{\ln 2} + k$

b) $\int e^{x+1}\, dx = e^{x+1} + k$

c) $\int \left(\frac{5}{2} \right)^{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{5}{2} \right)^{2x}}{\ln \frac{5}{2}} + k$

d) $\int (e^{-2x} + e^{x-1})\, dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} + e^{x-1} + k$

008 Halla estas integrales.

a) $\int 5^{x^2+1} \cdot 2x\, dx$

c) $\int \frac{3^{5x-1}}{2}\, dx$

b) $\int 2e^{\frac{x}{2}+2}\, dx$

d) $\int \frac{x}{e^{x^2}}\, dx$

a) $\int 5^{x^2+1} \cdot 2x\, dx = \frac{5^{x^2+1}}{\ln 5} + k$

c) $\int \frac{3^{5x-1}}{2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3^{5x-1}}{\ln 3} + k = \frac{3^{5x-1}}{10 \ln 3} + k$

b) $\int 2e^{\frac{x}{2}+2}\, dx = 4e^{\frac{x}{2}+2} + k$

d) $\int \frac{x}{e^{x^2}}\, dx = \int x \cdot e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} + k$

009 Calcula las siguientes integrales.

a) $\int sen\ 2x\, dx$

c) $\int \frac{sen\ \frac{x}{2}}{2}\, dx$

b) $\int cos\ (x+1)\, dx$

d) $\int sen\ (-x)\, dx$

a) $\int sen\ 2x\, dx = -\frac{1}{2} cos\ 2x + k$

c) $\int \frac{sen\ \frac{x}{2}}{2}\, dx = -cos\ \frac{x}{2} + k$

b) $\int cos\ (x+1)\, dx = sen\ (x+1) + k$

d) $\int sen\ (-x)\, dx = cos\ (-x) + k$

010 Halla estas integrales.

a) $\int \frac{1}{cos^2 (x+1)}\, dx$

c) $\int (x+1) \cdot cos\ (x^2+2x)\, dx$

b) $\int -3sen\ (2x+1)\, dx$

d) $\int \frac{x}{cos^2 (x^2-3)}\, dx$

a) $\int \frac{1}{cos^2\ (x+1)}\, dx = tg\ (x+1) + k$

b) $\int -3sen\ (2x+1)\, dx = \frac{3}{2} cos\ (2x+1) + k$

c) $\int (x+1) \cdot cos\ (x^2+2x)\, dx = \frac{1}{2} sen\ (x^2+2x) + k$

d) $\int \frac{x}{cos^2\ (x^2-3)}\, dx = \frac{1}{2} tg\ (x^2-3) + k$

011 Resuelve estas integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+(x-3)^2}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\,dx = \frac{1}{5}\,\text{arc sen}\,5x + k$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+(x-3)^2}\,dx = \text{arc tg}\,(x-3) + k$

012 Halla la solución de las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{1+9x^4}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\,\text{arc sen}\,(2x-3) + k$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{1+9x^4}\,dx = \frac{1}{6}\,\text{arc tg}\,3x^2 + k$

013 Calcula estas integrales definidas.

a) $\displaystyle\int_2^7 (x^2+2x-1)\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-4}^2 e^{2x}\,dx$

a) $\displaystyle F(x) = \int (x^2+2x-1)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - x$

$$\int_2^7 (x^2+2x-1)\,dx = F(7) - F(2) = \frac{469}{3} - \frac{14}{3} = \frac{455}{3}$$

b) $\displaystyle F(x) = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{2x}$

$$\int_{-4}^2 e^{2x}\,dx = F(2) - F(-4) = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^{-8}$$

014 **Comprueba la siguiente igualdad:**

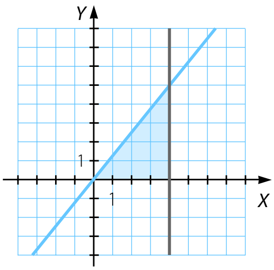
$$\int_2^6 (x^2 + x + 1)\,dx = \int_2^4 (x^2 + x + 1)\,dx + \int_4^6 (x^2 + x + 1)\,dx$$

$$F(x) = \int (x^2 + x + 1)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$$

$$\int_2^6 (x^2 + x + 1)\,dx = F(6) - F(2) = 96 - \frac{20}{3} = \frac{268}{3}$$

$$\int_2^4 (x^2 + x + 1)\,dx + \int_4^6 (x^2 + x + 1)\,dx = F(4) - F(2) + F(6) - F(4) =$$
$$= \frac{100}{3} - \frac{20}{3} + 96 - \frac{100}{3} = \frac{268}{3}$$

015 **Halla el área del triángulo rectángulo que tiene como vértices (0, 0), (4, 0) y (4, 5), utilizando integrales definidas.**



El triángulo está limitado por el eje X y las rectas $x = 4$ e $y = \frac{5}{4}x$.

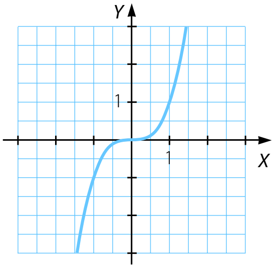
Así, el área es:

$$\int_0^4 \frac{5}{4}x\,dx = \left[\frac{5}{4} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 10$$

016 **Calcula las integrales definidas $\int_{-1}^{1} x^3\,dx$ y $\int_0^1 x^3\,dx$. Explica los resultados obtenidos.**

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$



La función es simétrica respecto del origen de coordenadas. Así, la primera integral da como resultado cero porque el área corresponde a dos regiones iguales, una por encima del eje y otra por debajo. Los valores son iguales, pero de signo contrario, y se anulan.

017 Determina el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$ y el eje X en el intervalo $[-2, 2]$.

$$f(x) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \qquad F(x) = \int (x^2 - 1)\, dx = \frac{x^3}{3} - x$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\, dx \right| + \left| \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\, dx \right| + \left| \int_{1}^{2} (x^2 - 1)\, dx \right| =$$

$$= \left| F(-1) - F(-2) \right| + \left| F(1) - F(-1) \right| + \left| F(2) - F(1) \right| =$$

$$= \left| \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right| + \left| -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right| + \left| \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right| = 4$$

018 Halla el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = sen\, x$ y el eje X en el intervalo $[0, \pi]$.

$$f(x) = 0 \rightarrow sen\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \qquad F(x) = \int sen\ x\, dx = -cos\ x$$

$$\text{Área} = \left| \int_{0}^{\pi} sen\ x\, dx \right| = \left| F(\pi) - F(0) \right| = \left| 1 + 1 \right| = 2$$

019 Determina el área comprendida entre las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x + 2$ en el intervalo $[-3, 4]$.

$$f(x) = g(x) \rightarrow x^2 - 4 = x + 2 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$F(x) = \int (x^2 - 4 - (x + 2))\, dx = \int (x^2 - x - 6)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x$$

$$\left| \int_{-3}^{-2} (x^2 - x - 6)\, dx \right| + \left| \int_{-2}^{3} (x^2 - x - 6)\, dx \right| + \left| \int_{3}^{4} (x^2 - x - 6)\, dx \right| = \left| F(-2) - F(-3) \right| +$$

$$+ \left| F(3) - F(-2) \right| + \left| F(4) - F(3) \right| = \left| \frac{22}{3} - \frac{9}{2} \right| + \left| -\frac{27}{2} - \frac{22}{3} \right| + \left| -\frac{32}{3} + \frac{27}{2} \right| = \frac{53}{2}$$

020 Halla el área comprendida entre las parábolas $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2$.

$$f(x) = g(x) \rightarrow x^2 = -x^2 + 2 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$F(x) = \int (x^2 - (-x^2 + 2))\, dx = \int (2x^2 - 2)\, dx = \frac{2x^3}{3} - 2x$$

$$\text{Área} = \left| F(1) - F(-1) \right| = \left| -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \right| = \frac{8}{3}$$

021 Comprueba si las funciones $F(x)$ son primitivas de $f(x)$.

a) $F(x) = x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ $\quad f(x) = 3x^2 - 12x + 2$

b) $F(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 9{,}5$ $\quad f(x) = 6x - 12x^2 - \dfrac{3}{2}x^2$

c) $F(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ $\quad f(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

d) $F(x) = sen\ x\ cos\ x$ $\quad f(x) = 2\cos^2 x - 1$

e) $F(x) = \ln \dfrac{x^2}{x+1}$ $\quad f(x) = \dfrac{x+2}{x(x+1)}$

a) $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = 3x^2 - 12x + 2$

b) $F(x)$ no es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = 6x^2 - 2x - 3$

c) $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = \dfrac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

d) $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = cos\ x \cdot cos\ x + sen\ x\,(-sen\ x) =$
$= cos^2\ x - sen^2\ x = cos^2\ x - 1 + cos^2\ x = 2\ cos^2\ x - 1$

e) $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{x^2}{x+1}} \cdot \dfrac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x+2}{x(x+1)}$

022 Calcula una función primitiva $F(x)$ de cada una de las siguientes funciones que cumpla la condición que se indica.

a) $f(x) = 3x^2$ $\quad F(0) = 1$

b) $f(x) = \dfrac{4}{5x}$ $\quad F(1) = 4$

c) $f(x) = sen\ 3x$ $\quad F(\pi) = -\dfrac{1}{3}$

d) $f(x) = e^{2x}$ $\quad F(0) = \dfrac{2}{3}$

a) $f(x) = 3x^2 \rightarrow F(x) = x^3 + k$

$F(0) = 1 \rightarrow k = 1 \rightarrow F(x) = x^3 + 1$

b) $f(x) = \dfrac{4}{5x} \rightarrow F(x) = \dfrac{4}{5}\ln|x| + k$

$F(1) = 4 \rightarrow k = 4 \rightarrow F(x) = \dfrac{4}{5}\ln|x| + 4$

c) $f(x) = sen\ 3x \rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{3}cos\ 3x + k$

$F(\pi) = -\dfrac{1}{3} \rightarrow \dfrac{1}{3} + k = -\dfrac{1}{3} \rightarrow k = -\dfrac{2}{3} \rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{3}cos\ 3x - \dfrac{2}{3}$

d) $f(x) = e^{2x} \rightarrow F(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} + k$

$F(0) = \dfrac{2}{3} \rightarrow \dfrac{1}{2} + k = \dfrac{2}{3} \rightarrow k = \dfrac{1}{6} \rightarrow F(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} + \dfrac{1}{6}$

023 Comprueba si $y = \dfrac{3x+1}{x}$ e $y = \dfrac{x+1}{x}$ son primitivas de la función $y = -\dfrac{1}{x^2}$.
En caso afirmativo, encuentra otra primitiva.

Las dos funciones son primitivas porque:

$$y = \frac{3x+1}{x} \rightarrow y' = \frac{3x-(3x+1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{x+1}{x} \rightarrow y' = \frac{x-(x+1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Respuesta abierta. Por ejemplo: $y = \dfrac{2x+1}{x}$

024 Sea la función $f(x) = -x^2 + 7x - 12$. Si f' representa su derivada, encontrar una primitiva F de f verificando que $F(6) = f'(6)$.

(Asturias. Septiembre 2007. Bloque 4)

$$f'(x) = -2x + 7 \rightarrow f'(6) = -5$$

$$F(x) = \frac{-x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 12x + k$$

$$F(6) = f'(6) \rightarrow \frac{-6^3}{3} + \frac{7 \cdot 6^2}{2} - 12 \cdot 6 + k = -5 \rightarrow k = 13$$

La función buscada es: $F(x) = \dfrac{-x^3}{3} + \dfrac{7x^2}{2} - 12x + 13$

025 Dada la función $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$ $(x > 0)$, encuentra la primitiva de f que en el 2 valga 5.

(Asturias. Junio 2005. Bloque 4)

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} + k$$

$$F(2) = 5 \rightarrow \frac{2^2}{2} - \frac{4}{2} + k = 5 \rightarrow k = 5$$

La función buscada es: $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{4}{x} + 5$

026 Determinar la función $f(x)$ que verifica $f'(x) - x^3 - 1 = 0$ y $f(-2) = 0$.

(Baleares. Septiembre 2002. Opción B. Cuestión 7)

$$f'(x) - x^3 - 1 = 0 \rightarrow f'(x) = x^3 + 1 \rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} + x + k$$

$$f(-2) = 0 \rightarrow \frac{(-2)^4}{4} + (-2) + k = 0 \rightarrow k = -2$$

La función buscada es: $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + x - 2$

027 Dada una función $f(x) = ax^3 + 11$, donde a es un parámetro real, se pide determinar el valor del parámetro a para que $f(x)$ tenga una primitiva cuya gráfica pase por el origen y por el punto (1, 1).

(Aragón. Junio 2002. Opción B. Cuestión 2)

$$F(x) = \frac{ax^4}{4} + 11x + k$$

$$F(0) = 0 \rightarrow k = 0 \qquad F(1) = 1 \rightarrow \frac{a}{4} + 11 = 1 \rightarrow a = -40$$

028 Dada la función $f(x) = \frac{a}{x} + 3x^2 - x^3$, encuentra a para que si f' es la derivada de f, entonces $f'(-1) = -10$.

(Asturias. Septiembre 2004. Bloque 4)

$$f'(x) = \frac{-a}{x^2} + 6x - 3x^2$$

$$f'(-1) = 10 \rightarrow -a - 6 - 3 = -10 \rightarrow a = 1$$

029 Dar dos funciones cuya derivada sea $f(x) = \frac{1}{x+1} + e^{2x}$ tales que en el punto $x = 0$ una tenga doble valor que la otra.

(Navarra. Septiembre 2006. Ejercicio 2. Opción B)

Dos funciones primitivas de $f(x)$ son:

$$F_1(x) = \ln|x+1| + \frac{e^{2x}}{2} + k_1 \qquad F_2(x) = \ln|x+1| + \frac{e^{2x}}{2} + k_2$$

$$F_1(0) = 2F_2(0) \rightarrow \frac{1}{2} + k_1 = 2\left(\frac{1}{2} + k_2\right) \rightarrow k_1 = \frac{1}{2} + 2k_2$$

Para $k_2 = 0 \rightarrow k_1 = \frac{1}{2}$, y así dos funciones que cumplen las condiciones del enunciado son:

$$F_1(x) = \ln|x+1| + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{2} \qquad F_2(x) = \ln|x+1| + \frac{e^{2x}}{2}$$

030 Halla las integrales de funciones polinómicas.

a) $\int (4x - 25)\, dx$

b) $\int (5x^2 + 2x - 7)\, dx$

c) $\int \left(\frac{4}{3}x^3 - 5x^2 + \frac{1}{3}\right) dx$

d) $\int \left(-\frac{1}{4}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + 1\right) dx$

e) $\int \left(-\frac{3}{5}x^7 - x^4 + 2x\right) dx$

f) $\int (x - 5)^2\, dx$

g) $\int (x + 1)^3\, dx$

h) $\int (x + 1)(x - 1)^3\, dx$

a) $\int (4x - 25)\,dx = 2x^2 - 25x + k$

b) $\int (5x^2 + 2x - 7)\,dx = \frac{5x^3}{3} + x^2 - 7x + k$

c) $\int \left(\frac{4}{3}x^3 - 5x^2 + \frac{1}{3}\right) dx = \frac{x^4}{3} - \frac{5x^3}{3} + \frac{x}{3} + k$

d) $\int \left(-\frac{1}{4}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + 1\right) dx = \frac{-x^7}{28} - \frac{x^5}{20} + x + k$

e) $\int \left(-\frac{3}{5}x^7 - x^4 + 2x\right) dx = \frac{-3x^8}{40} - \frac{x^5}{5} + x^2 + k$

f) $\int (x - 5)^2\,dx = \frac{(x-5)^3}{3} + k$

g) $\int (x + 1)^3\,dx = \frac{(x+1)^4}{4} + k$

h) $\int (x + 1)(x - 1)^3\,dx = \int (x^4 - 2x^3 + 2x - 1)\,dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + x^2 - x + k$

031 Obtén estas integrales de funciones con radicales.

a) $\int 3\sqrt{5x}\,dx$

b) $\int \left(2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}\right) dx$

c) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 9\sqrt[5]{x}\right) dx$

d) $\int \left(\frac{8}{x} + \sqrt[3]{2x}\right) dx$

e) $\int \left(\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[4]{x}\right) dx$

f) $\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$

a) $\int 3\sqrt{5x}\,dx = 2\sqrt{5x^3} + k$

b) $\int \left(2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}\right) dx = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^4} + k$

c) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 9\sqrt[5]{x}\right) dx = 8\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{15}{2}\sqrt[5]{x^6} + k$

d) $\int \left(\frac{8}{x} + \sqrt[3]{2x}\right) dx = 8\ln|x| + \frac{3}{4}\sqrt[3]{2x^4} + k$

e) $\int \left(\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[4]{x}\right) dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - \frac{32}{5}\sqrt[4]{x^5} + k$

f) $\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx = 3\sqrt[3]{x^2} - 8\sqrt{x} + k$

032 Calcula la siguiente integral: $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) dx$

(Navarra. Junio 2006. Ejercicio 2. Opción A)

$$\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) dx = \sqrt{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + k$$

033 Halla estas integrales de funciones racionales.

a) $\int \frac{4}{x-2}\, dx$

b) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) dx$

c) $\int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-4} \right) dx$

d) $\int \frac{1}{(x+4)^2}\, dx$

e) $\int \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{7}{x+3} \right) dx$

f) $\int \left(\frac{2}{(x+3)^3} - \frac{5}{(x-3)^2} \right) dx$

g) $\int \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2} \right) dx$

h) $\int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} \right) dx$

a) $\int \frac{4}{x-2}\, dx = 4 \ln|x-2| + k$

b) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) dx = \ln|x| - \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + k$

c) $\int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-4} \right) dx = 2\ln|x+3| - \ln|x-4| + k$

d) $\int \frac{1}{(x+4)^2}\, dx = -\frac{1}{x+4} + k$

e) $\int \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{7}{x+3} \right) dx = \frac{-1}{x-1} + 7\ln|x+3| + k$

f) $\int \left(\frac{2}{(x+3)^3} - \frac{5}{(x-3)^2} \right) dx = \frac{-1}{(x+3)^2} + \frac{5}{(x-3)} + k$

g) $\int \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{x} + k$

h) $\int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} \right) dx = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{2}{x} + 3\ln|x| + k$

034 Calcula la integral de cada una de las siguientes funciones, indicando las propiedades que utilizas.

a) $f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+4}$

b) $f(x) = \frac{7}{x+3} - \frac{1}{x-5}$

c) $f(x) = \frac{1.492}{x-7} - \frac{5}{x}$

d) $f(x) = \frac{6}{x^2+1} - \frac{1}{x^2}$

a) $$\int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+4} \right) dx = \int \frac{2}{x-1}\, dx + \int \frac{3}{x+4}\, dx =$$

$\int (f+g) = \int f + \int g$ $\qquad$ $\int a \cdot f = a \int f$

$$= 2 \int \frac{1}{x-1}\, dx + 3 \int \frac{1}{x+4}\, dx = 2 \ln|x-1| + 3 \ln|x+4| + k$$

$\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + k$

b) $$\int \left(\frac{7}{x+3} - \frac{1}{x-5} \right) dx = \int \frac{7}{x+3}\, dx - \int \frac{1}{x-5}\, dx =$$

$\int (f+g) = \int f + \int g$ $\qquad$ $\int a \cdot f = a \int f$

$$= 7 \int \frac{1}{x+3}\, dx - \int \frac{1}{x-5}\, dx = 7 \ln|x+3| - \ln|x-5| + k$$

$\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + k$

c) $$\int \left(\frac{1.492}{x-7} - \frac{5}{x} \right) dx = \int \frac{1.492}{x-7}\, dx - \int \frac{5}{x}\, dx =$$

$\int (f+g) = \int f + \int g$ $\qquad$ $\int a \cdot f = a \int f$

$$= 1.492 \int \frac{1}{x-7}\, dx - 5 \int \frac{1}{x}\, dx = 1.492 \ln|x-7| - 5 \ln|x| + k$$

$\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + k$

d) $$\int \left(\frac{6}{x^2+1} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \frac{6}{x^2+1}\, dx - \int \frac{1}{x^2}\, dx =$$

$\int (f+g) = \int f + \int g$ $\qquad$ $\int a \cdot f = a \int f$

$$= 6 \int \frac{1}{x^2+1}\, dx - \int \frac{1}{x^2}\, dx = 6\, arc\, tg\, x - \frac{1}{x} + k$$

$\int \frac{f'}{1+f \cdot 2} = arc\ tg\ x\ f$

$\int f' f^n = \frac{f^{n+1}}{n+1}$

035 Halla estas integrales de funciones exponenciales.

a) $\int e^{x-3}\,dx$ c) $\int (3^x + e^x)\,dx$ e) $\int 7^{3x-\frac{1}{2}}\,dx$

b) $\int e^{2x+14}\,dx$ d) $\int 5^{\frac{2}{3}x}\,dx$ f) $\int (3\cdot 2^{2x}+7)\,dx$

a) $\int e^{x-3}\,dx = e^{x-3}+k$

b) $\int e^{2x+14}dx = \dfrac{e^{2x+14}}{2}+k$

c) $\int (3^x + e^x)\,dx = \dfrac{3^x}{\ln 3}+e^x+k$

d) $\int 5^{\frac{2}{3}x}\,dx = \dfrac{3\cdot 5^{\frac{2}{3}x}}{2\ln 5}+k$

e) $\int 7^{3x-\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{7^{3x-\frac{1}{2}}}{3\ln 7}+k$

f) $\int (3\cdot 2^{2x}+7)\,dx = \dfrac{3\cdot 2^{2x}}{2\ln 2}+7x+k$

036 Calcula la siguiente integral: $\int e^{2x+7}\,dx$

(Navarra. Junio 2007. Ejercicio 2. Opción B)

$$\int e^{2x+7}dx = \frac{e^{2x+7}}{2}+k$$

037 Calcula la siguiente integral: $\int \sqrt{(1+e^x)^3}\,e^x\,dx$

(Navarra. Junio 2006. Ejercicio 2. Opción A)

$$\int \sqrt{(1+e^x)^3}\,e^x\,dx = \frac{2}{5}\sqrt{(1+e^x)^5}+k$$

038 Halla estas integrales de funciones trigonométricas.

a) $\int \cos 2x\,dx$

b) $\int 4\,\text{sen}\,(x+\pi)\,dx$

c) $\int 3\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{3}\right)dx$

d) $\int 5\,\text{sen}\,(2x-\pi)\,dx$

e) $\int 3\sec^2\left(\dfrac{1}{5}x\right)dx$

f) $\int \dfrac{7}{\text{sen}^2\,3x}\,dx$

g) $\int \dfrac{5}{\cos^2\dfrac{x}{3}}\,dx$

h) $\int \dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

i) $\int \dfrac{3}{x^2+1}\,dx$

j) $\int \dfrac{1}{(3x)^2+1}\,dx$

a) $\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} sen\, 2x + k$

b) $\int 4\, sen\,(x+\pi)\, dx = -4 \cos\,(x+\pi) + k$

c) $\int 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right) dx = -9 sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right) + k$

d) $\int 5\, sen\,(2x-\pi)\, dx = \frac{-5}{2} \cos\,(2x-\pi) + k$

e) $\int 3\, sec^2 \frac{1}{5}x\, dx = 15 \int \frac{\frac{1}{5}}{\cos^2 \frac{1}{5}x} dx = 15\, tg\, \frac{1}{5}x + k$

f) $\int \frac{7}{sen^2 3x} dx = \frac{7}{3} \int \frac{3}{sen^2 3x} dx = -\frac{7}{3} cotg\, 3x + k$

g) $\int \frac{5}{\cos^2 \frac{x}{3}} dx = 15 \int \frac{\frac{1}{3}}{\cos^2 \frac{x}{3}} dx = 15 tg\, \frac{x}{3} + k$

h) $\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx = 3 arc\, sen\, x + k$

i) $\int \frac{3}{x^2+1} dx = 3 arc\, tg\, x + k$

j) $\int \frac{1}{(3x)^2+1} dx = \frac{1}{3} arc\, tg\, 3x + k$

039 Resuelve la integral: $\int x \cos\,(x^2+5)\, dx$

$$\int x \cos(x^2+5)\, dx = \frac{sen(x^2+5)}{2} + k$$

040 Calcula la siguiente integral: $\int (sen\, 2x - \cos\, 3x + 2 \cos\, x\, sen\, x)\, dx$

(Navarra. Junio 2006. Ejercicio 2. Opción A)

$$\int (sen\, 2x - \cos\, 3x + 2\cos\, x\, sen\, x)\, dx =$$

$$= \int (2 sen\, 2x - \cos\, 3x)\, dx = -\cos\, 2x - \frac{sen\, 3x}{3} + k$$

$2\cos\, x\, sen\, x = sen\, 2x$

041 Calcular la siguiente integral: $\int x \text{ sen } x^2 \, dx$

(Navarra. Junio 2004. Ejercicio 2. Opción A)

$$\int x \text{ sen } x^2 \, dx = -\frac{\cos x^2}{2} + k$$

042 Calcule la siguiente integral: $\int \frac{\text{sen}\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}} \, dx$

(Navarra. Septiembre 2005. Ejercicio 2. Opción A)

$$\int \frac{\text{sen}\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}} \, dx = 2\cos\sqrt{3x} + k \qquad f(x) = \sqrt{3x} \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x}}$$

043 Resuelve estas integrales.

a) $\int \frac{2x}{x^2+1} \, dx$

b) $\int \frac{8x-3}{4x^2-3x+1} \, dx$

c) $\int \frac{6x^2+1}{2x^3+x-9} \, dx$

d) $\int \frac{\text{sen } x}{\cos x} \, dx$

e) $\int 6xe^{3x^2} \, dx$

f) $\int (3x^2+1)e^{x^3+x} \, dx$

g) $\int (12x^2-6x)e^{4x^3-3x^2+7} \, dx$

h) $\int xe^{7x^2} \, dx$

a) $\int \frac{2x}{x^2+1} \, dx = \ln|x^2+1| + k$

b) $\int \frac{8x-3}{4x^2-3x+1} \, dx = \ln|4x^2-3x+1| + k$

c) $\int \frac{6x^2+1}{2x^3+x-9} \, dx = \ln|2x^3+x-9| + k$

d) $\int \frac{\text{sen } x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + k$

e) $\int 6x\, e^{3x^2} dx = e^{3x^2} + k$

f) $\int (3x^2+1)\, e^{x^3+x} dx = e^{x^3+x} + k$

g) $\int (12x^2-6x)e^{4x^3-3x^2+7} dx = e^{4x^3-3x^2+7} + k$

h) $\int xe^{7x^2} dx = \frac{e^{7x^2}}{14} + k$

044 Calcula la siguiente integral: $\int \frac{x+1}{2x^2+4x-5}\,dx$

(Navarra. Junio 2007. Ejercicio 2. Opción B)

$$\int \frac{x+1}{2x^2+4x-5}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|2x^2+4x-5\right| + k$$

045 Calcular la siguiente integral: $\int \frac{x^3+5x^2-3x+2}{\sqrt{x}}\,dx$

(Navarra. Junio 2004. Ejercicio 2. Opción A)

$$\int \frac{x^3+5x^2-3x+2}{\sqrt{x}}\,dx = \int (x^{3-\frac{1}{2}} + 5x^{2-\frac{1}{2}} - 3x^{1-\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}})\,dx =$$

$$= \int\left(\sqrt{x^5} + 5\sqrt{x^3} - 3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + 2\sqrt{x^5} - 2\sqrt{x^3} + 4\sqrt{x} + k$$

046 Halla las integrales.

a) $\int cos\,(5x+1)\,dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\,dx$

a) $\int cos\,(5x-1)\,dx = \frac{sen\,(5x-1)}{5} + k$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\,dx = \frac{-2}{\sqrt{(x+2)}} + k$

047 Calcule la siguiente integral: $\int \frac{3x^3+8x^2+1}{3x-1}\,dx$

(Navarra. Septiembre 2005. Ejercicio 2. Opción A)

$$\int \frac{3x^3+8x^2+1}{3x-1}\,dx = \int\left(x^2+3x+1+\frac{2}{3x-1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x + \frac{2}{3}\ln\,(3x-1) + k$$

$$(3x^3+8x^2+1):(3x-1) = (x^2+3x+1) + \frac{2}{3x-1}$$

048 **Determina la ecuación de la función polinómica que pasa por los puntos (0, 1) y (1, 1) tal que $y'' = 6x + 4$.**

(Navarra. Junio 2000. Ejercicio 2. Opción A)

$$y'' = 6x + 4 \rightarrow y' = \int (6x + 4)\, dx = 3x^2 + 4x + k_1$$

$$\rightarrow y = \int (3x^2 + 4x + k_1)\, dx = x^3 + 2x^2 + k_1 x + k_2$$

Pasa por (0, 1) $\rightarrow 0^3 + 2 \cdot 0^2 + k_1 \cdot 0 + k_2 = 1 \rightarrow k_2 = 1$

Pasa por (1, 1) $\rightarrow 1^3 + 2 \cdot 1^2 + k_1 \cdot 1 + 1 = 1 \rightarrow k_1 = -3$

La función buscada es: $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

049 **Determina las siguientes integrales.**

a) $\displaystyle\int \left(3x - \frac{1}{x} - 3\cos x\right) dx$

b) $\displaystyle\int \left(\frac{\operatorname{sen} x}{3} + \frac{3^x}{5}\right) dx$

c) $\displaystyle\int \left(-\frac{4}{x^2} + \frac{12}{1 + x^2}\right) dx$

d) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x + 3} - \frac{4}{4x - 3}\right) dx$

e) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x + 3} + \frac{1}{\sqrt{x - 3}}\right) dx$

f) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{\sqrt{x + 3}} + \frac{6}{\sqrt{2x + 5}}\right) dx$

g) $\displaystyle\int \left(\frac{6}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{9}{\sqrt{2x + 1}} + 4\right) dx$

h) $\displaystyle\int \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\, dx$

i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}}{x^2}\, dx$

j) $\displaystyle\int \frac{3x\sqrt[3]{4x^2}}{7}\, dx$

k) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^3}\, dx$

l) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{3 - 2x^2}}\, dx$

m) $\displaystyle\int (tg^2\, x + 1)\operatorname{sen} x\, dx$

a) $\displaystyle\int \left(3x - \frac{1}{x} - 3\cos x\right) dx = \frac{3x^2}{2} - \ln|x| - 3\operatorname{sen} x + k$

b) $\displaystyle\int \left(\frac{\operatorname{sen} x}{3} + \frac{3^x}{5}\right) dx = -\frac{\cos x}{3} + \frac{3^x}{5\ln 3} + k$

c) $\displaystyle\int \left(-\frac{4}{x^2} + \frac{12}{1 + x^2}\right) dx = \frac{4}{x} + 12\, arc\ tg\ x + k$

d) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x + 3} - \frac{4}{4x - 3}\right) dx = 2\ln|x + 3| - \ln|4x - 3| + k$

e) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x + 3} + \frac{1}{\sqrt{x - 3}}\right) dx = 2\ln|x + 3| + 2\sqrt{x - 3} + k$

f) $\displaystyle\int\left(\frac{2}{\sqrt{x+3}}+\frac{6}{\sqrt{2x+5}}\right)dx = 4\sqrt{x+3}+6\sqrt{2x+5}+k$

g) $\displaystyle\int\left(\frac{6}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{9}{\sqrt{2x+1}}+4\right)dx = 6\ arc\ sen\ x - 9\sqrt{2x+1}+4x+k$

h) $\displaystyle\int\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx + \int x^{\frac{1}{6}}\,dx = \frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5}+\frac{6x\sqrt[6]{x}}{7}+k$

i) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}{x^2}\,dx = \int\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}-2\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2}\right)dx = \int x^{-\frac{3}{2}}\,dx - 2\int x^{-\frac{5}{3}}\,dx =$

$\displaystyle= \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - 2\cdot\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}}+k = -\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+k$

j) $\displaystyle\int\frac{3x\sqrt[3]{4x^2}}{7}\,dx = \frac{3}{56}\int 8x(4x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{56}\cdot\frac{(4x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+k = \frac{9x^2\sqrt[3]{4x^2}}{56}+k$

k) $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}\,dx = -\frac{1}{4(e^{2x}+1)^2}+k$

l) $\displaystyle\int\frac{3}{\sqrt{3-2x^2}}\,dx = \int\frac{3}{\sqrt{3\left(1-\frac{2x^2}{3}\right)}}\,dx = \int\frac{3}{\sqrt{3\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)^2\right)}}\,dx =$

$\displaystyle= \frac{3}{\sqrt{2}}\ arc\ sen\ \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}+k = \frac{3\sqrt{2}}{2}\ arc\ sen\ \frac{\sqrt{6}x}{3}+k$

m) $\displaystyle\int(tg^2\ x+1)\ sen\ x\ dx = \int\frac{1}{cos^2\ x}\ sen\ x\ dx = \frac{1}{cos\ x}+k$

050 **Calcula las siguientes integrales definidas.**

a) $\displaystyle\int_1^3(2x^2+8x+1)\,dx$

b) $\displaystyle\int_2^4(6x^2+4x-2)\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-2}^3\left(\frac{1}{2}x^3-12x^2-3x\right)dx$

d) $\displaystyle\int_{-6}^{-1}(3x^3+2x^2-2)\,dx$

a) $\displaystyle F(x) = \int(2x^2+8x+1)\,dx = \frac{2x^3}{3}+4x^2+x$

$\displaystyle\int_1^3(2x^2+8x+1)\,dx = F(3)-F(1) = \frac{171}{3}-\frac{17}{3}=\frac{154}{3}$

b) $F(x)=\int(6x^2+4x-2)\,dx=2x^3+2x^2-2x$

$$\int_2^4(6x^2+4x-2)\,dx=F(4)-F(2)=152-20=132$$

c) $F(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^3-12x^2-3x\right)dx=\frac{x^4}{8}-4x^3-\frac{3x^2}{2}$

$$\int_{-2}^3\left(\frac{1}{2}x^3-12x^2-3x\right)dx=F(3)-F(-2)=-\frac{891}{8}-28=-\frac{1.115}{8}$$

d) $F(x)=\int(3x^3+2x^2-2)\,dx=\frac{3x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-2x$

$$\int_{-6}^{-1}(3x^3+2x^2-2)\,dx=F(-1)-F(-6)=\frac{25}{12}-840=-\frac{10.055}{12}$$

051 **Resuelve.**

a) $\int_2^5\frac{4}{x+2}\,dx$

b) $\int_{-5}^{-3}\frac{6}{x^2}\,dx$

c) $\int_2^4\left(x-\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x^2}\right)dx$

d) $\int_{-1}^3\frac{2}{1+x^2}\,dx$

e) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

f) $\int_{-1}^3\frac{8}{\sqrt{x+4}}\,dx$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos x-2\,\mathrm{sen}\,x)\,dx$

h) $\int_1^2\frac{4}{x^5}\,dx$

a) $F(x)=\int\frac{4}{x+2}\,dx=4\ln|x+2|$

$$\int_2^5\frac{4}{x+2}\,dx=F(5)-F(2)=4\ln 7-4\ln 4=4\ln\frac{7}{4}$$

b) $F(x)=\int\frac{6}{x^2}\,dx=-\frac{6}{x}$

$$\int_{-5}^{-3}\frac{6}{x^2}\,dx=F(-3)-F(-5)=2-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}$$

c) $F(x)=\int\left(x-\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}-\ln|x-1|-\frac{4}{x}$

$$\int_2^4\left(x-\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x^2}\right)dx=F(4)-F(2)=7-\ln 3-\ln 1=7-\ln 3$$

d) $F(x) = \int \frac{2}{1+x^2}\,dx = 2\,arc\,tg\,x$

$$\int_{-1}^{3} \frac{2}{1+x^2}\,dx = F(3) - F(-1) = 71{,}57 + 45 = 116{,}57$$

e) $F(x) = \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\,arc\,sen\,x$

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$

f) $F(x) = \int \frac{8}{\sqrt{x+4}}\,dx = 16\sqrt{x+4}$

$$\int_{-1}^{3} \frac{8}{\sqrt{x+4}}\,dx = F(3) - F(-1) = 16\sqrt{7} - 16\sqrt{3}$$

g) $F(x) = \int (3\cos x - 2\,sen\,x)\,dx = -3\,sen\,x + 2\cos x$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x - 2\,sen\,x)\,dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = -3 - 5 = -8$$

h) $F(x) = \int \frac{4}{x^5}\,dx = -\frac{1}{x^4}$

$$\int_{1}^{2} \frac{4}{x^5}\,dx = F(2) - F(1) = -\frac{1}{16} + 1 = \frac{15}{16}$$

052 Halla la integral entre 2 y 3 de la función $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$.

(C. Valenciana. Junio 2006. Ejercicio B. Problema 3)

$$\int_{2}^{3} (2x^3 - 3x + 2)\,dx = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_2^3 = \left(\frac{81}{2} - \frac{27}{2} + 6\right) - (8 - 6 + 4) = 27$$

053 Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x},\ x \neq 0$$

Calcúlese la integral definida: $\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

(Madrid. Junio 2008. Opción B. Ejercicio 2)

$$\int_{1}^{2} \frac{x^2 + x + 2}{x}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x|\right]_1^2 =$$

$$= (2 + 2 + 2\ln 2) - \left(\frac{1}{2} + 1 + 0\right) = \frac{5}{2} + \ln 4$$

054 Se considera la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 2$, calcular $\int_1^2 f(x)\,dx$.

$$\int_1^2 (x^3 - 2x^2 - 2x + 2)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_1^2 = -\frac{4}{3} - \frac{7}{12} = -\frac{23}{12}$$

055 Calcula el valor de la integral: $\int_1^2 (x^2 - 2x + 1)^2\,dx$.

(La Rioja. Junio 2007. Parte A. Cuestión 3)

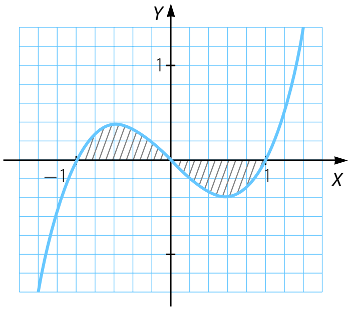
$$\int_1^2 (x^2 - 2x + 1)^2\,dx = \int_1^2 (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x\right]_1^2 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

056 Calcular: $\int_{-1}^1 x(x^2 - 1)\,dx$. Explicar mediante un gráfico el significado geométrico del valor obtenido.

(País Vasco. Junio 2005. Apartado B. Ejercicio 2)

$$\int_{-1}^1 x(x^2 - 1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$



Es una función impar, las dos superficies tienen la misma área, pero con signos distintos.

057 Calcular la integral definida: $\int_{-1}^1 (|x| + x + 1)\,dx$

Nota: La notación $|x|$ representa el valor absoluto de x.

(Madrid. Junio 2004. Opción A. Ejercicio 2)

$$\int_{-1}^1 (|x| + x + 1)\,dx = \int_{-1}^0 (-x + x + 1)\,dx + \int_0^1 (x + x + 1)\,dx =$$

$$= -\int_{-1}^0 dx + \int_0^1 (2x + 1)\,dx =$$

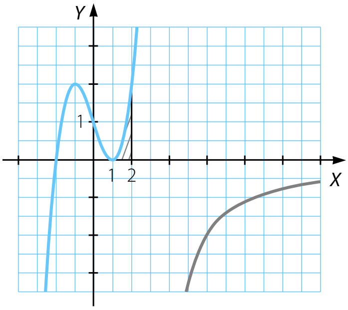
$$= -[x]_{-1}^0 + [x^2 + x]_0^1 = -1 + 2 = 1$$

058 Sea la función: $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2 & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{10}{\dfrac{7}{2} - x} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Calcular $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$ e interpretar geométricamente el resultado.

(Aragón. Junio 2004. Opción A. Cuestión 2)

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (x^3 - 3x + 2)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^2 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$



059 Calcular el valor de $a > 0$ en los siguientes casos.

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx = a$

b) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x+1}\,dx = 3$

c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+a}\,dx = 5$

(Madrid. Septiembre 2002. Opción B. Ejercicio 2)

a) $a = \displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx = [\ln|x+1|]_0^3 = \ln 4$

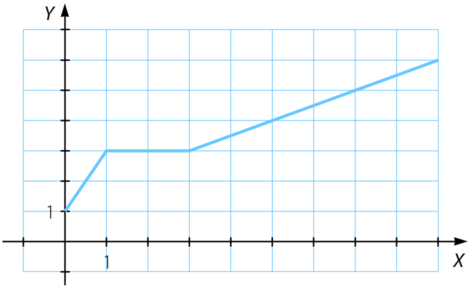
b) $3 = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{x+1}\,dx = [\ln|x+1|]_0^a = \ln|a+1|$

$3 = \ln|a+1| \rightarrow a + 1 = e^3 \rightarrow a = e^3 - 1$

c) $5 = \displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+a}\,dx = [\ln|x+a|]_0^3 = \ln|3+a| - \ln|a| = \ln\left|\frac{3+a}{a}\right|$

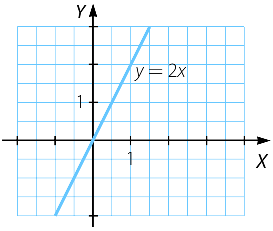
$5 = \ln\left|\dfrac{3+a}{a}\right| \rightarrow \dfrac{3+a}{a} = e^5 \rightarrow a = \dfrac{3}{e^5 - 1}$

060 Completa la tabla referida a la gráfica de la función.



x	1	2	3	4	5	6
Área entre 0 y x	2	5	8	$\frac{45}{4}$	15	$\frac{77}{4}$

061 Representa la función $y = 2x$, y completa la tabla de su función integral. Halla la expresión analítica de dicha función.



x	1	2	3	4	5
Área entre 0 y x	1	4	9	16	25

La expresión analítica de la función es: $y = x^2$

062 Obtén el área encerrada bajo la gráfica y el eje X en el intervalo [0, 2]. ¿Y en los intervalos [2, 5] y [5, 8]? Hazlo también en los intervalos [1, 3] y [4, 7].

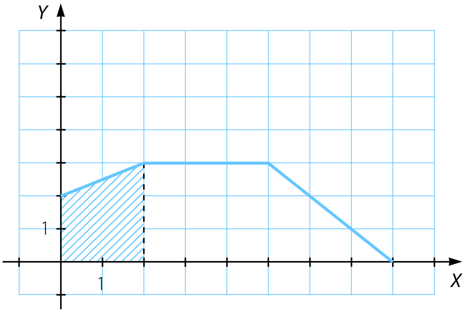
$$A([0, 2]) = 4 + \frac{2 \cdot 1}{2} = 5$$

$$A([2, 5]) = 3 \cdot 3 = 9$$

$$A([5, 8]) = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$A([1, 3]) = 2 + \frac{3}{4} + 3 = \frac{23}{4}$$

$$A([4, 7]) = 3 + 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 7$$



063 Determina el área de la región comprendida entre la función, el eje X y las abscisas indicadas.

a) $f(x) = 3x^2 - 2x$ $\quad x = 2$ y $x = 4$

b) $f(x) = x^3 - x^2 + 5x + 1$ $\quad x = 1$ y $x = 3$

c) $f(x) = 5x$ $\quad x = -1$ y $x = 2$

d) $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ $\quad x = 3$ y $x = 8$

e) $f(x) = sen\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\quad x = \pi$ y $x = \dfrac{3\pi}{2}$

a) $F(x) = \displaystyle\int (3x^2 - 2x)\,dx = x^3 - x^2$

Área $= \left|F(4) - F(2)\right| = \left|48 - 4\right| = 44$

b) $F(x) = \displaystyle\int (x^3 - x^2 + 5x + 1)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + x$

Área $= \left|F(3) - F(1)\right| = \left|\dfrac{147}{4} - \dfrac{41}{12}\right| = \dfrac{100}{3}$

c) $F(x) = \displaystyle\int 5x\,dx = \frac{5x^2}{2}$

Área $= \left|F(2) - F(-1)\right| = \left|10 - \dfrac{5}{2}\right| = \dfrac{15}{2}$

d) $F(x) = \displaystyle\int \frac{4}{x^2}\,dx = -\frac{4}{x}$

Área $= \left|F(8) - F(3)\right| = \left|-\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{3}\right| = \dfrac{5}{6}$

e) $F(x) = \displaystyle\int sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)dx = -cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Área $= \left|F\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) - F(\pi)\right| = \left|1 - 0\right| = 1$

064 Comprueba que las funciones son negativas en el intervalo indicado. Halla el área de la zona definida en ese intervalo por la función y el eje de abscisas.

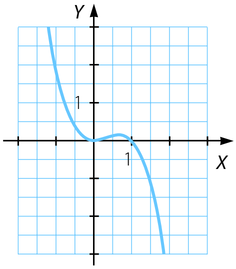
a) $f(x) = x^2 - x^3$ $\quad$ en $[1, 2]$

b) $f(x) = 1 + 2x - 3x^2$ $\quad$ en $[2, 4]$

c) $f(x) = \dfrac{6}{x + 2}$ $\quad$ en $[-7, -5]$

d) $f(x) = cos\,(\pi + x)$ $\quad$ en $[-1, 1]$

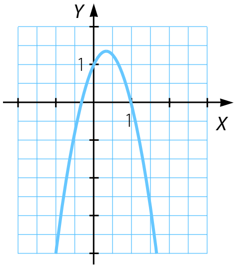
a)



$$F(x)=\int (x^2-x^3)\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$$

$$\text{Área}=\left|F(2)-F(1)\right|=\left|-\frac{4}{3}-\frac{1}{12}\right|=\frac{17}{12}$$

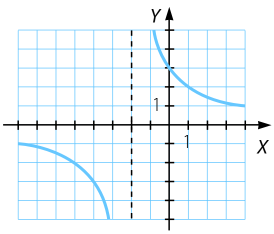
b)



$$F(x)=\int (1+2x-3x^2)\,dx=x+x^2-x^3$$

$$\text{Área}=\left|F(4)-F(2)\right|=\left|-44+2\right|=42$$

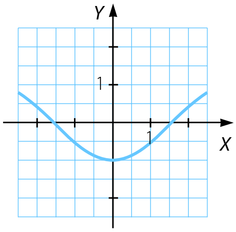
c)



$$F(x)=\int \frac{6}{x+2}\,dx=6\ln\left|x+2\right|$$

$$\text{Área}=\left|F(-5)-F(-7)\right|=\left|6\ln 3-6\ln 5\right|=6\ln\frac{3}{5}$$

d)



$$F(x)=\int \cos(\pi+x)\,dx=\operatorname{sen}(\pi+x)$$

$$\text{Área}=\left|F(1)-F(-1)\right|=\left|\operatorname{sen}(\pi+1)-\operatorname{sen}(\pi-1)\right|=1{,}68$$

065 Calcula el área de la zona limitada por la función, el eje de abscisas y las rectas verticales que se indican. Ten en cuenta que las funciones pueden cortar al eje X.

a) $f(x) = 3x^2 + 16x - 12$ $\quad x = -7$ y $x = 0$

b) $f(x) = 2x^2 + 6x - 20$ $\quad x = -1$ y $x = 5$

c) $f(x) = 2x^3 - 19x^2 + 49x - 20$ $\quad x = -1$ y $x = 3$

d) $f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad x = 0$ y $x = \pi$

e) $f(x) = 4x - 4$ $\quad x = 0$ y $x = 2$

a) $f(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 16x - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

$$F(x) = \int (3x^2 + 16x - 12)\,dx = x^3 + 8x^2 - 12x$$

$$\left|\int_{-7}^{-6} (3x^2 + 16x - 12)\,dx\right| + \left|\int_{-6}^{0} (3x^2 + 16x - 12)\,dx\right| =$$

$$= \left|F(-6) - F(-7)\right| + \left|F(0) - F(-6)\right| = \left|144 - 133\right| + \left|0 - 144\right| = 155$$

b) $f(x) = 0 \rightarrow 2x^2 + 6x - 20 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 2 \end{cases}$

$$F(x) = \int (2x^2 + 6x - 20)\,dx = \frac{2x^3}{3} + 3x^2 - 20x$$

$$\int_{-1}^{2} (2x^2 + 6x - 20)\,dx + \int_{2}^{5} (2x^2 + 6x - 20)\,dx = \left|F(2) - F(-1)\right| + \left|F(5) - F(2)\right| =$$

$$= \left|-\frac{68}{3} - \frac{67}{3}\right| + \left|\frac{175}{3} + \frac{68}{3}\right| = 126$$

c) $f(x) = 0 \rightarrow 2x^3 - 19x^2 + 49x - 20 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 4 \\ x = 5 \end{cases}$

$$F(x) = \int (2x^3 - 19x^2 + 49x - 20)\,dx = \frac{x^4}{2} - \frac{19x^3}{3} + \frac{49x^2}{2} - 20x$$

$$\left|\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2x^3 - 19x^2 + 49x - 20)\,dx\right| + \left|\int_{\frac{1}{2}}^{3} (2x^3 - 19x^2 + 49x - 20)\,dx\right| =$$

$$= \left|F\left(\frac{1}{2}\right) - F(-1)\right| + \left|F(3) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|-\frac{445}{96} - \frac{154}{3}\right| + \left|30 + \frac{445}{96}\right| = \frac{4.349}{48}$$

d) $f(x) = 0 \rightarrow sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$F(x) = \int sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx = -cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx\right| =$$

$$= \left|F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)\right| + \left|F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|-1 - 0\right| + \left|0 + 1\right| = 2$$

e) $f(x) = 0 \rightarrow 4x - 4 = 0 \rightarrow x = 1$

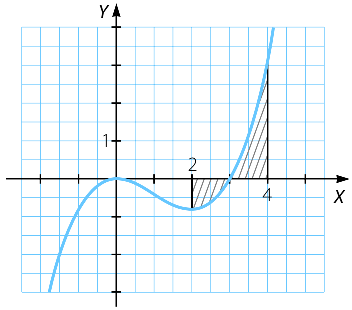
$F(x) = \int (4x - 4)\, dx = 2x^2 - 4x$

$$\left|\int_0^1 (4x - 4)\, dx\right| + \left|\int_1^2 (4x - 4)\, dx\right| = \left|F(1) - F(0)\right| + \left|F(2) - F(1)\right| =$$

$$= \left|-2\right| + \left|-2\right| = 4$$

066 Dibuja la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2$. Obtén el área que limitan la curva y el eje X entre $x = 2$ y $x = 4$.

(Asturias. Junio 2008. Bloque 4)



$$2x^3 - 6x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\left|\int_2^4 f(x)\, dx\right| = \left|\int_2^3 (2x^3 - 6x^2)\, dx\right| + \left|\int_3^4 (2x^3 - 6x^2)\, dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{2} - 2x^3\right]_2^3\right| + \left|\left[\frac{x^4}{2} - 2x^3\right]_3^4\right| = \frac{11}{2} + \frac{27}{2} = 19$$

067 Calcula el área encerrada entre la función $f(x) = x^3 - 3x^2$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

(Castilla y León. Junio 2006. Bloque B. Pregunta 2)

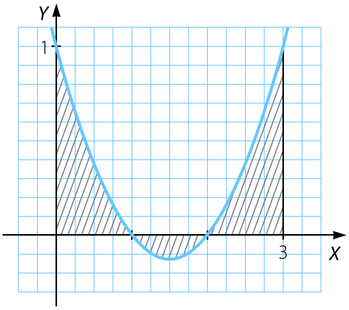
$$x^3 - 3x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\left|\int_0^4 f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^3 (x^3 - 3x^2)\,dx\right| + \left|\int_3^4 (x^3 - 3x^2)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3\right]_0^3\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3\right]_3^4\right| = \frac{27}{4} + \frac{27}{4} = \frac{27}{2}$$

068 Calcular el área limitada por la curva $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$, el eje X y las rectas de ecuaciones $x = 0$ y $x = 3$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

(Murcia. Junio 2008. Bloque 3. Cuestión 2)



$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\left|\int_0^3 f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right)dx\right| + \left|\int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right)dx\right| +$$

$$+ \left|\int_2^3 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{4} + x\right]_0^1\right| +$$

$$+ \left|\left[\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{4} + x\right]_1^2\right| + \left|\left[\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{4} + x\right]_2^3\right| =$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{11}{12}$$

069 Hallar el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 3x$, el eje X y la recta $x = 1$.

(Madrid. Septiembre 2007. Opción B. Ejercicio 2)

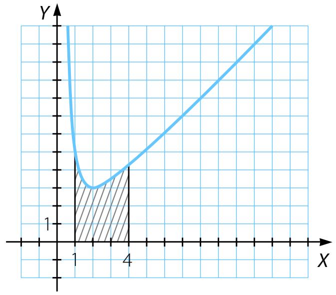
$$-x^3 + 3x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = -\sqrt{3},\ x = \sqrt{3}$$

$$\left|\int_{-\sqrt{3}}^{1} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{-\sqrt{3}}^{0} (-x^3 + 3x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (-x^3 + 3x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}\right]_{-\sqrt{3}}^{0}\right| + \left|\left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right| = \frac{9}{4} + \frac{5}{4} = \frac{7}{2}$$

070 Dada la función $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$ $(x > 0)$, dibuja la función f. Halla el área limitada por la curva y el eje de abscisas entre los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = 4$.

(Asturias. Junio 2005. Bloque 4)



$$\left|\int_{1}^{4} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{1}^{4}\left(x + \frac{4}{x^2}\right)dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^2}{2} - \frac{4}{x}\right]_{1}^{4}\right| = \frac{21}{2}$$

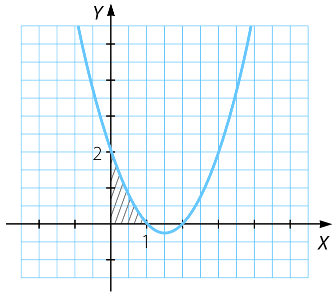
071 La curva $y = \dfrac{4}{x+4}$, el eje X, el eje Y y la recta $x = 4$ limitan una superficie S. Calcular el área de S.

(Murcia. Junio 2005. Bloque 2. Cuestión 2)

$$\left|\int_{0}^{4} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{0}^{4} \frac{4}{x+4}\,dx\right| = \left|\left[4\ln|x+4|\right]_0^4\right| = 12\ln 2 - 8\ln 2 = 4\ln 2$$

072 Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$, la recta $x = 0$ y la recta $y = 0$.

(Cantabria. Septiembre 2007. Ejercicio 2. Opción A)



$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\left|\int_{0}^{1} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{0}^{1} (x^2 - 3x + 2)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{0}^{1}\right| = \frac{5}{6}$$

073 Hallar el área de la región del plano determinada por la gráfica de $y = x^3 - 9x^2 + 24x + 3$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = 5$.

(C. Valenciana. Septiembre 2007. Ejercicio B. Problema 3)

$$\left|\int_0^5 f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^5 (x^3 - 9x^2 + 24x + 3)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 12x^2 + 3x\right]_0^4\right| = \frac{385}{4}$$

074 Halla el área de la región que queda definida entre las funciones y el eje X.

a) $y = (x - 2)(2x + 1)$

b) $y = (3 + x)(2 - 5x)$

c) $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

d) $y = x^3 - x^2 - 21x + 45$

e) $y = (x + 3)(2x - 1)(3x + 2)$

a) $f(x) = 0 \rightarrow (x - 2)(2x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}$

$$F(x) = \int (x - 2)(2x + 1)\,dx = \int (2x^2 - 3x - 2)\,dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 2x$$

$$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{2} (2x^2 - 3x - 2)\,dx\right| = \left|F(2) - F\left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|-\frac{14}{3} - \frac{13}{24}\right| = \frac{125}{24}$$

b) $f(x) = 0 \rightarrow (3 + x)(2 - 5x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{5} \\ x = -3 \end{cases}$

$$F(x) = \int (3 + x)(2 - 5x)\,dx = \int (-5x^2 - 13x + 6)\,dx = -\frac{5x^3}{3} - \frac{13x^2}{2} + 6x$$

$$\left|\int_{-3}^{\frac{2}{5}} (-5x^2 - 13x + 6)\,dx\right| = \left|F\left(\frac{2}{5}\right) - F(-3)\right| = \left|\frac{94}{75} + \frac{63}{2}\right| = \frac{4.913}{150}$$

c) $f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$

$$F(x) = \int (x^3 - 3x^2 - 6x + 8)\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 - 3x^2 + 8x$$

$$\left|\int_{-2}^{1} (x^3 - 3x^2 - 6x + 8)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{4} (x^3 - 3x^2 - 6x + 8)\,dx\right| =$$

$$= \left|F(1) - F(-2)\right| + \left|F(4) - F(1)\right| = \left|\frac{17}{4} + 16\right| + \left|-16 - \frac{17}{4}\right| = \frac{81}{2}$$

d) $f(x) = 0 \rightarrow x^3 - x^2 - 21x + 45 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 3 \end{cases}$

$$F(x) = \int (x^3 - x^2 - 21x + 45)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{21x^2}{2} + 45x$$

$$\left| \int_{-5}^{3} (x^3 - x^2 - 21x + 45)\,dx \right| = \left| F(3) - F(-5) \right| = \left| \frac{207}{4} + \frac{3.475}{12} \right| = \frac{1.024}{3}$$

e) $f(x) = 0 \rightarrow (x+3)(2x-1)(3x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

$$F(x) = \int (x+3)(2x-1)(3x+2)\,dx = \int (6x^3 + 19x^2 + x - 6)\,dx =$$
$$= \frac{3x^4}{2} + \frac{19x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x$$

$$\left| \int_{-3}^{-\frac{2}{3}} (6x^3 + 19x^2 + x - 6)\,dx \right| + \left| \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{2}} (6x^3 + 19x^2 + x - 6)\,dx \right| =$$
$$= \left| F\left(-\frac{2}{3}\right) - F(-3) \right| + \left| F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{2}{3}\right) \right| =$$
$$= \left| \frac{214}{81} + 27 \right| + \left| -\frac{191}{96} - \frac{214}{81} \right| = \frac{88.837}{2.592}$$

075 Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = x^3 - 9x$. Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función f y el eje X.

(Madrid. Junio 2006. Opción A. Ejercicio 2)

$x^3 - 9x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

$$\left| \int_{-3}^{3} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{-3}^{3} (x^3 - 9x)\,dx \right| + \left| \int_{0}^{3} (x^3 - 9x)\,dx \right| =$$
$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} \right]_{-3}^{0} \right| + \left| \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{9x^2}{2} \right]_{0}^{3} \right| = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{81}{2}$$

076 La curva $y = a(-x^2 + 5x - 4)$, con $a > 0$, limita con el eje de abscisas un recinto de 9 unidades de superficie. Calcula el valor de a.

(Baleares. Junio 2005. Opción B. Cuestión 7)

$$-x^2 + 5x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\left|\int_1^4 f(x)\,dx\right| = a\left|\int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\,dx\right| = a\left|\left[\frac{-x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_1^4\right| = \frac{9a}{2}$$

$$\frac{9a}{2} = 9 \rightarrow a = 2$$

077 Sea la función $f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{si } x < 1 \\ -x + 6 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. Calcula el área de la región limitada por la función, el eje de abscisas y las siguientes rectas.

a) $x = -1$ y $x = 0$

b) $x = 3$ y $x = 7$

c) $x = -1$ y $x = 4$

d) $x = 0$ y $x = 6$

a) $f(x) = 0 \rightarrow 4x + 1 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{1}{4}$ $\qquad F(x) = \displaystyle\int (4x + 1)\,dx = 2x^2 + x$

$$\left|\int_{-1}^{-\frac{1}{4}} (4x + 1)\,dx\right| + \left|\int_{-\frac{1}{4}}^{0} (4x + 1)\,dx\right| = \left|F\left(-\frac{1}{4}\right) - F(-1)\right| + \left|F(0) - F\left(-\frac{1}{4}\right)\right| =$$

$$= \left|-\frac{1}{8} - 1\right| + \left|0 + \frac{1}{8}\right| = \frac{5}{4}$$

b) $f(x) = 0 \rightarrow -x + 6 = 0 \rightarrow x = 6$ $\qquad F(x) = \displaystyle\int (-x + 6)\,dx = -\frac{x^2}{2} + 6x$

$$\left|\int_3^6 (-x + 6)\,dx\right| + \left|\int_6^7 (-x + 6)\,dx\right| = \left|F(6) - F(3)\right| + \left|F(7) - F(6)\right| =$$

$$= \left|18 - \frac{27}{2}\right| + \left|\frac{35}{2} - 18\right| = 5$$

c) $$\left|\int_{-1}^{-\frac{1}{4}} (4x + 1)\,dx\right| + \left|\int_{-\frac{1}{4}}^{1} (4x + 1)\,dx\right| + \left|\int_1^4 (-x + 6)\,dx\right| =$$

$$= \left|F\left(-\frac{1}{4}\right) - F(-1)\right| + \left|F(1) - F\left(-\frac{1}{4}\right)\right| + \left|F(4) - F(1)\right| =$$

$$= \left|-\frac{1}{8} - 1\right| + \left|3 + \frac{1}{8}\right| + \left|16 - \frac{11}{2}\right| = 16$$

d) $$\left|\int_0^1 (4x + 1)\,dx\right| + \left|\int_1^6 (-x + 6)\,dx\right| = 3 + \frac{25}{2} = \frac{31}{2}$$

078 Sea la función: $g(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x - 3 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{6}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Determina el área de la región limitada por esta curva, el eje X y estas rectas.

a) $x = -1$ y $x = 0$

b) $x = 3$ y $x = 7$

c) $x = -1$ y $x = 4$

d) $x = 0$ y $x = 6$

a) $f(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 6x - 3 = 0 \rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$

$$F(x) = \int (3x^2 + 6x - 3)\, dx = x^3 + 3x^2 - 3x$$

$$\left| \int_{-1}^{0} (3x^2 + 6x - 3)\, dx \right| = \left| F(0) - F(-1) \right| = \left| 0 - 5 \right| = 5$$

b) $F(x) = \displaystyle\int \frac{6}{x}\, dx = 6 \ln |x|$

$$\left| \int_{3}^{7} \frac{6}{x}\, dx \right| = \left| F(7) - F(3) \right| = \left| 6 \ln 7 - 6 \ln 3 \right| = 6 \ln \frac{7}{3}$$

c) $$\left| \int_{-1}^{-1+\sqrt{2}} (3x^2 + 6x - 3)\, dx \right| + \left| \int_{-1+\sqrt{2}}^{1} (3x^2 + 6x - 3)\, dx \right| + \left| \int_{1}^{4} \frac{6}{x}\, dx \right| =$$

$$= \left| F(-1+\sqrt{2}) - F(-1) \right| + \left| F(1) - F(-1+\sqrt{2}) \right| + \left| F(4) - F(1) \right| =$$

$$= \left| 5 - 4\sqrt{2} - 5 \right| + \left| 1 - (5 - 4\sqrt{2}) \right| + \left| 6 \ln 4 - 6 \ln 1 \right| = 8\sqrt{2} + 5 + 6 \ln 4$$

d) $$\left| \int_{0}^{-1+\sqrt{2}} (3x^2 + 6x - 3)\, dx \right| + \left| \int_{-1+\sqrt{2}}^{1} (3x^2 + 6x - 3)\, dx \right| + \left| \int_{1}^{6} \frac{6}{x}\, dx \right| =$$

$$= (4\sqrt{2} + 5) + (4\sqrt{2} - 4) + 6 \ln 6 = 8\sqrt{2} + 1 + 6 \ln 6$$

079 Dada la función: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ -x + 10 & \text{si } 5 < x \leq 10 \end{cases}$

calcular la superficie que encierra con el eje X.

(Navarra. Septiembre 2007. Ejercicio 2. Opción B)

$$-x^2 + 6x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases} \qquad -x + 10 = 0 \rightarrow x = 10$$

$$\left| \int_{0}^{10} f(x)\, dx \right| = \left| \int_{0}^{5} (-x^2 + 6x)\, dx \right| + \left| \int_{5}^{10} (-x + 10)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^5 \right| + \left| \left[-\frac{x^2}{2} + 10x \right]_5^{10} \right| = \frac{100}{3} + \frac{25}{2} = \frac{275}{6}$$

080 Hallar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 4 - x & \text{si } \quad 0 \le x \le 4 \end{cases}$ y el eje de abscisas.

(País Vasco. Junio 2007. Apartado B. Ejercicio 2)

$$4 - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$4 - x = 0 \rightarrow x = 4$$

$$\left| \int_{-2}^{4} f(x)\, dx \right| = \left| \int_{-2}^{0} (4 - x^2)\, dx \right| + \left| \int_{0}^{4} (4 - x)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_{0}^{4} \right| = \frac{16}{3} + 8 = \frac{40}{3}$$

081 Dada la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} -9x + 10 & \text{si } x \le -1 \\ 3x^2 - 9x + 7 & \text{si } -1 < x \le 2 \end{cases}$

calcula el área del recinto acotado determinado por esta función, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

(Castilla y León. Septiembre 2004. Bloque B. Pregunta 2)

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \right| = \left| \int_{-1}^{1} (3x^2 - 9x + 7)\, dx \right| = \left| \left[x^3 - \frac{9x^2}{2} + 7x \right]_{-1}^{1} \right| = 16$$

082 Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } x < 0 \\ (x - 1)^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y la parte negativa del eje X.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2007. Bloque 3. Ejercicio A)

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\left| \int_{-3}^{-1} f(x)\, dx \right| = \left| \int_{-3}^{-1} (x^2 + 4x + 3)\, dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x \right]_{-3}^{-1} \right| = \frac{4}{3}$$

083 Calcula el área limitada por la gráfica de función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le -3 \\ x^2 & \text{si } -3 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

las rectas $x = -3$, $x = 2$ y el eje de abscisas.

(C. Valenciana. Junio 2007. Ejercicio A. Problema 3)

$$\left| \int_{-3}^{2} f(x)\, dx \right| = \left| \int_{-3}^{1} x^2\, dx \right| + \left| \int_{1}^{2} dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-3}^{1} \right| + \left| [x]_1^2 \right| = \frac{28}{3} + 1 = \frac{31}{3}$$

084 Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } -\infty< x\le -1\\ x^2 & \text{si } \ -1< x<1\\ x & \text{si } \ \ 1\le x<+\infty\end{cases}$$

Determine el área encerrada por la función $f(x)$, la recta $x=0$ y la recta $x=3$.

(Cantabria. Septiembre 2006. Bloque 2. Opción A)

$$\left|\int_0^3 f(x)\,dx\right|=\left|\int_0^1 x^2dx\right|+\left|\int_1^3 x\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\right|+\left|\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3\right|=\frac{1}{3}+4=\frac{13}{3}$$

085 Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\le -1\\ -x^2 & \text{si } -1< x<1\\ x^2-4x & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$

Calcula el área del recinto limitado por el eje X, la gráfica de f y las rectas $x=1$ y $x=3$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2006. Bloque 3. Ejercicio A)

$$x^2-4x=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=4\end{cases}$$

$$\left|\int_1^3 f(x)\,dx\right|=\left|\int_1^3 (x^2-4x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_1^3\right|=\frac{22}{3}$$

086 Calcula el área de la región del plano limitada por las rectas de ecuación $y=0$, $x=0$, $x=3$ y la gráfica de la función:

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & \text{si } 0\le x<2\\ x^2-6x+12 & \text{si } 2\le x\le 4\\ -2x+12 & \text{si } 4< x\le 8\end{cases}$$

(C. Valenciana. Septiembre 2007. Ejercicio A. Problema 3)

$$\left|\int_0^3 f(x)\,dx\right|=\left|\int_0^2 (x+2)\,dx\right|+\left|\int_2^3 (x^2-6x+12)\,dx\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^2\right|+\left|\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+12x\right]_2^3\right|=6+\frac{10}{3}=\frac{28}{3}$$

087 Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x & \text{si } x\le 1\\ x & \text{si } 1< x<2\\ \dfrac{1}{2}x^2-4x+8 & \text{si } x>2\end{cases}$$

calcula el área limitada por la función y el eje X.

(Galicia. Septiembre 2002. Bloque 2. Ejercicio 1)

$$-x^2+2x=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x^2-4x+8=0 \rightarrow x=4$$

$$\left|\int_0^4 f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 (-x^2+2x)\,dx\right| + \left|\int_1^2 x\,dx\right| + \left|\int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^2-4x+8\right)dx\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2\right| + \left|\left[\frac{x^3}{6}-2x^2+8x\right]_2^4\right| = \frac{2}{3}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}=\frac{7}{2}$$

088 Dada la función: $f(x)=\begin{cases} -x^2+4 & \text{si } x \le -1 \\ |x-2| & \text{si } x > -1 \end{cases}$

calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

(Castilla-La Mancha. Junio 2005. Bloque 3. Ejercicio A)

$$-x^2+4=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$$

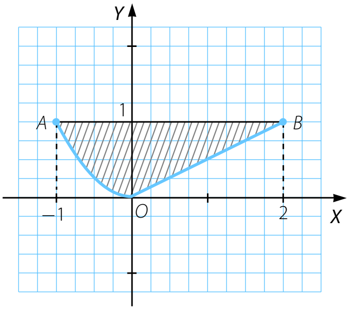
$$x-2=0 \rightarrow x=2$$

$$\left|\int_{-2}^2 f(x)\,dx\right| = \left|\int_{-2}^{-1} (-x^2+4)\,dx\right| + \left|\int_{-1}^2 (x-2)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{-1}\right| + \left|\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2\right| = \frac{5}{3}+\frac{9}{2}=\frac{37}{6}$$

089 Hallar el área de la figura OAB, en la que O es el origen de coordenadas, $A(-1, 1)$, $B(2, 1)$, los lados OB y AB son segmentos rectilíneos y OA es un arco de la curva $y=x^2$.

(País Vasco. Julio 2007. Apartado B. Ejercicio 2)



$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^0 (1-x^2)\,dx\right| + \left|\int_0^2 \left(1-\frac{x}{2}\right)dx\right| =$$

$$= \left|\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0\right| + \left|\left[x-\frac{x^2}{4}\right]_0^2\right| = \frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$$

090 Halla el área de la región limitada por estas curvas.

a) $y = x^2 + 5x + 8$ $\qquad y = x + 8$

b) $y = 6 - x - x^2$ $\qquad y = -2x$

c) $y = -x^2 - 6x - 5$ $\qquad y = -2x^2 - 12x - 10$

d) $y = x^3 - 2x^2 + x$ $\qquad y = x^3 - 3x^2 + 3x$

a) $x^2 + 5x + 8 = x + 8 \rightarrow x^2 + 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 0 \end{cases}$

$$F(x) = \int (x^2 + 5x + 8 - (x + 8))\,dx = \int (x^2 + 4x)\,dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2$$

$$\left|\int_{-4}^{0} (x^2 + 4x)\,dx\right| = \left|F(0) - F(-4)\right| = \left|0 - \frac{32}{3}\right| = \frac{32}{3}$$

b) $6 - x - x^2 = -2x \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$

$$F(x) = \int (6 - x - x^2 - (-2x))\,dx = \int (-x^2 + x + 6)\,dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x$$

$$\left|\int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)\,dx\right| = \left|F(3) - F(-2)\right| = \left|\frac{27}{2} + \frac{22}{3}\right| = \frac{125}{6}$$

c) $-x^2 - 6x - 5 = -2x^2 - 12x - 10 \rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -1 \end{cases}$

$$F(x) = \int (-x^2 - 6x - 5 - (-2x^2 - 12x - 10))\,dx = \int (x^2 + 6x + 5)\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 5x$$

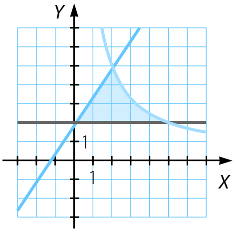
$$\left|\int_{-5}^{-1} (x^2 + 6x + 5)\,dx\right| = \left|F(-1) - F(-5)\right| = \left|-\frac{7}{3} - \frac{25}{3}\right| = \frac{32}{3}$$

d) $x^3 - 2x^2 + x = x^3 - 3x^2 + 3x \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$$F(x) = \int (x^3 - 2x^2 + x - (x^3 - 3x^2 + 3x))\,dx = \int (x^2 - 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2$$

$$\left|\int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\,dx\right| = \left|F(2) - F(0)\right| = \left|-\frac{4}{3} - 0\right| = \frac{4}{3}$$

091 Halla el área de la región limitada por las funciones $y = \dfrac{10}{x}$, $y = \dfrac{3}{2}x + 2$ e $y = 2$.



$$\left|\int_0^2 \left(\frac{3}{2}x + 2 - 2\right) dx\right| + \left|\int_2^5 \left(\frac{10}{x} - 2\right) dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{3x^2}{4}\right]_0^2\right| + \left|\Big[10\ln|x| - 2x\Big]_2^5\right| =$$

$$= |3 - 0| + |10\ln 5 - 10 - (10\ln 2 - 4)| = 10\ln\frac{5}{2} - 3$$

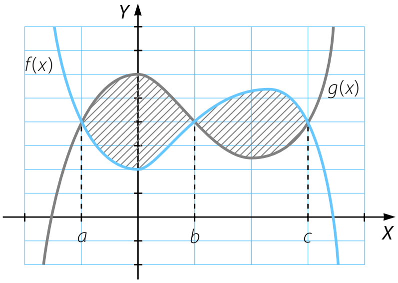
092 El área de la región limitada por las dos curvas de la figura se indica por una de las siguientes expresiones. Di cuál es la expresión.

a) $\displaystyle\int_a^c [f(x) - g(x)]\, dx$

b) $\displaystyle\int_a^c [g(x) - f(x)]\, dx$

c) $\displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx + \int_b^c [f(x) - g(x)]\, dx$

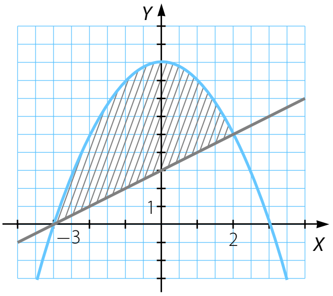
d) $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx + \int_b^c [f(x) - g(x)]\, dx$



La expresión es la del apartado c).

093 Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 9 - x^2$, $g(x) = 3 + x$ y obtener su área.

(Madrid. Septiembre 2006. Opción B. Ejercicio 2)



$$9 - x^2 = 3 + x \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\left|\int_{-3}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx\right| = \left|\int_{-3}^{2} (9 - x^2 - 3 - x)\, dx\right| = \left|\int_{-3}^{2} (-x^2 - x + 6)\, dx\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-3}^{2}\right| = \frac{125}{6}$$

094 Hallar el área limitada por las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = -x + 2$.

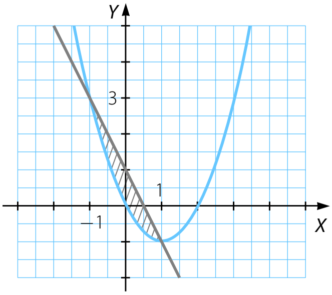
(Murcia. Septiembre 2007. Bloque 3. Cuestión 2)

$$-x^2 + x + 2 = -x + 2 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\left| \int_0^2 [f(x) - g(x)]\, dx \right| = \left| \int_0^2 (-x^2 + 2x)\, dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 \right| = \frac{4}{3}$$

095 Representa gráficamente las curvas $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 1 - 2x$.
Calcula el área que limitan dichas curvas.

(Castilla y León. Junio 2005. Bloque B. Pregunta 2)

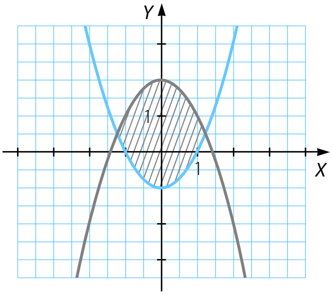


$$x^2 - 2x = 1 - 2x \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\left| \int_{-1}^1 [f(x) - g(x)]dx \right| = \left| \int_{-1}^1 (x^2 - 1)\, dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^1 \right| = \frac{4}{3}$$

096 Dibujar el recinto comprendido entre $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 2 - x^2$ y hallar su área.

(Navarra. Septiembre 2006. Ejercicio 2. Opción B)



$$x^2 - 1 = 2 - x^2 \rightarrow 2x^2 - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ x = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{cases}$$

$$\left| \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} [f(x) - g(x)]\, dx \right| = \left| \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (2x^2 - 3)\, dx \right| = \left| \left[\frac{2x^3}{3} - 3x \right]_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \right| = 2\sqrt{6}$$

097 Hallar el área limitada por las curvas $y = x^2 - 4$ e $y = 4 - x^2$.

(Murcia. Junio 2007. Bloque 3. Cuestión 2)

$$x^2 - 4 = 4 - x^2 \rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\left| \int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx \right| = \left| \int_{-2}^{2} (2x^2 - 8)\, dx \right| = \left| \left[\frac{2x^3}{3} - 8x \right]_{-2}^{2} \right| = \frac{64}{3}$$

098 Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de las funciones reales de variable real: $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = 1 - x^2$.

(Madrid. Junio 2008. Opción A. Ejercicio 2)

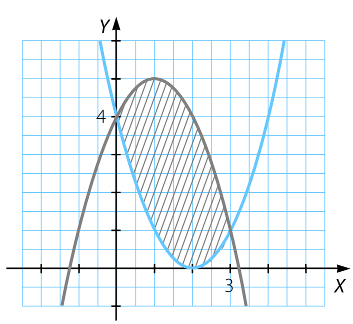
$$x^2 - x = 1 - x^2 \rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\left| \int_{-\frac{1}{2}}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx \right| = \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (2x^2 - 8)\, dx \right|$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (2x^2 - x - 1)\, dx = \left| \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right]_{-\frac{1}{2}}^{1} \right| = \frac{9}{8}$$

099 Dibuja la región limitada por las parábolas $y = x^2 - 4x + 4$, $y = -x^2 + 2x + 4$ y calcula el área de la región limitada por ambas curvas.

(La Rioja. Junio 2006. Parte C. Problema 1)



$$x^2 - 4x + 4 = -x^2 + 2x + 4 \rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\left| \int_{0}^{3} [f(x) - g(x)]\, dx \right| = \left| \int_{0}^{3} (-2x^2 + 6x)\, dx \right| = \left[-\frac{2x^3}{3} + 3x^2 \right]_{0}^{3} = 9$$

100 Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3}$. Determinar el área encerrada por la función $f(x)$, la recta $x = 5$, la recta $x = 9$ y la función $g(x) = -\dfrac{4}{x - 3}$.

(Cantabria. Junio 2005. Bloque 2. Opción A)

$$\left| \int_5^9 [f(x) - g(x)]\, dx \right| = \left| \int_5^9 \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}\, dx \right| = \left| \int_5^9 (x - 3)\, dx \right| =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 3x \right]_5^9 = 16$$

101 Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = 4\sqrt{x}$ e $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{2}}$.

(Baleares. Junio 2006. Opción B. Cuestión 7)

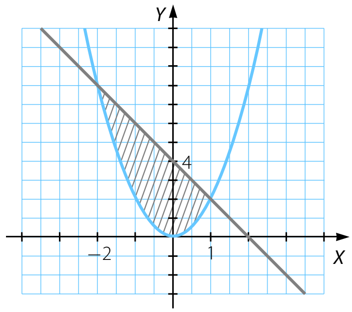
$$4\sqrt{x} = \frac{x^3}{\sqrt{2}} \to 16x = \frac{x^6}{2} \to x^6 - 32x = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\left| \int_0^2 [f(x) - g(x)]\, dx \right| = \left| \int_0^2 \left(4\sqrt{x} - \frac{x^3}{\sqrt{2}} \right) dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{8\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^4}{4\sqrt{2}} \right]_0^2 \right| = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

102 Calcular el área de la región del primer cuadrante limitada por la parábola $y = x^2$, la recta $y = -x + 2$ y el eje X. Hacer la representación gráfica aproximada de dicha área.

(Murcia. Septiembre 2008. Bloque 3. Cuestión 2)



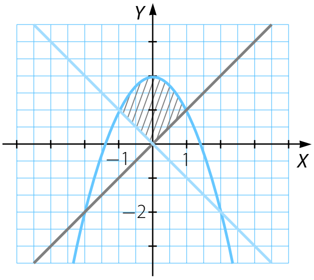
$$x^2 = -x + 2 \to x^2 + x - 2 = 0 \to \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\left| \int_{-2}^1 [f(x) - g(x)]\, dx \right| = \left| \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 \right| = \frac{9}{2}$$

103 Representar gráficamente y hallar el área del recinto (finito) limitado por la curva $y = 2 - x^2$ y las bisectrices de los cuadrantes primero y segundo.

(País Vasco. Julio 2006. Apartado B. Ejercicio 2)



Las ecuaciones de las bisectrices del primer y el segundo cuadrante son $y = x$ e $y = -x$, respectivamente.

$$2 - x^2 = x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

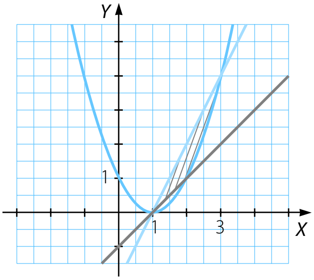
$$2 - x^2 = -x \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\left| \int_{-1}^{0} [2 - x^2 - (-x)]\, dx \right| + \left| \int_{0}^{1} (2 - x^2 - x)\, dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^{0} \right| +$$

$$+ \left| \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{0}^{1} \right| = \frac{7}{6} + \frac{7}{6} = \frac{7}{3}$$

104 Dibujar el recinto encerrado por las funciones $y = x - 1$, $y = 2(x - 1)$ e $y = (x - 1)^2$. Calcular el área de dicho recinto.

(Navarra. Septiembre 2004. Ejercicio 2. Opción B)



$$(x - 1)^2 = x - 1 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$(x - 1)^2 = 2(x - 1) \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

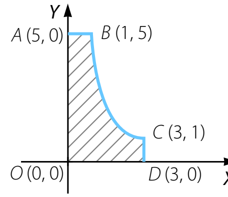
$$\text{Área} = \left| \int_{1}^{2} [2(x - 1) - (x - 1)]\, dx \right| + \left| \int_{2}^{3} [2(x - 1) - (x - 1)^2]\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_{1}^{2} (x - 1)\, dx \right| + \left| \int_{2}^{3} (-x^2 + 4x - 3)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_{1}^{2} \right| + \left| \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_{2}^{3} \right| = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

105 Determine el área del recinto *OABCDO* sabiendo que el segmento curvilíneo *BC* corresponde a un arco de la parábola de ecuación $y = x^2 - 6x + 10$.

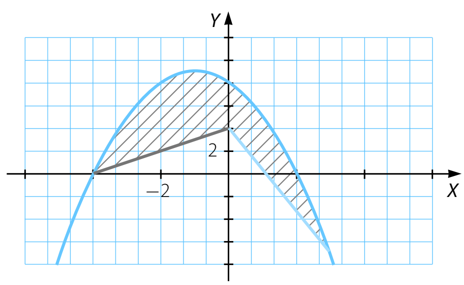
(Murcia. Septiembre 2001. Bloque 2. Cuestión 1)



$$\text{Área} = \left|\int_0^1 5\,dx\right| + \left|\int_1^3 (x^2 - 6x + 10)\,dx\right| =$$

$$= \left|[5x]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 10x\right]_1^3\right| = 5 + \frac{14}{3} = \frac{29}{3}$$

106 Halla el área de la región del plano indicada en el dibujo, sabiendo que las tres funciones son $y = 8 - 2x - x^2$, $y = x + 4$ y $11x + 3y - 12 = 0$.

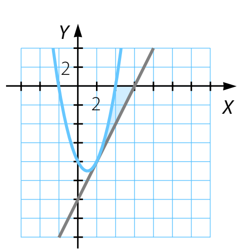


$$\left|\int_{-4}^{0} (8 - 2x - x^2 - (x + 4))\,dx\right| + \left|\int_0^3 \left(8 - 2x - x^2 - \left(-\frac{11}{3}x + 4\right)\right)\right| dx =$$

$$= \left|\int_{-4}^{0} (4 - 3x - x^2)\,dx\right| + \left|\int_0^3 \left(4 + \frac{5}{3}x - x^2\right) dx\right| =$$

$$= \left|\left[4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{0}\right| + \left|\left[4x + \frac{5x^2}{6} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3\right| = \left|0 + \frac{56}{3}\right| + \left|0 + \frac{21}{2}\right| = \frac{175}{6}$$

107 Dibuja la parábola $y = x^2 - 2x - 8$ y su recta tangente por el punto de abscisa 2. Obtén el área de la región limitada por ambas y las abscisas 2 y 4.



Como $y' = 2x - 2$, la recta tangente es:

$y + 8 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 12$

$$F(x) = \int (x^2 - 2x - 8 - (2x - 12))\,dx =$$

$$= \int (x^2 - 4x + 4)\,dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

$$\left|\int_2^4 (x^2 - 4x + 4)\,dx\right| = \left|F(4) - F(2)\right| = \left|\frac{16}{3} - \frac{8}{3}\right| = \frac{8}{3}$$

108 La variación instantánea de la cotización es su derivada, y sigue durante una semana la función $f(x) = 0{,}02x^2 + 1$, donde x es el día de la semana ($0 =$ lunes, $1 =$ martes, …). Si el lunes cotiza a 5 €, halla la función de cotización.

$$F(x) = \int (0{,}02x^2 + 1)\,dx = 0{,}02 \cdot \frac{x^3}{3} + x + k$$

$$\text{Si } F(0) = 5 \rightarrow k = 5 \rightarrow F(x) = 0{,}02 \cdot \frac{x^3}{3} + x + 5$$

109 Sea $C(t)$ el dinero en miles de euros que hay depositado en un día en una sucursal bancaria, en función del tiempo t en horas desde que la sucursal está abierta. Sabiendo que $C'(t) = t^2 - 7t + 10$ y que la sucursal permaneció abierta un total de 8 horas, obtén la expresión de $C(t)$ sabiendo que a las 6 horas de estar abierta la sucursal disponía de 20.000 €.

(Castilla y León. Junio 2008. Bloque A. Pregunta 2)

$$C(t) = \int (t^2 - 7t + 10)\,dt = \frac{t^3}{3} - \frac{7t^2}{2} + 10t + k$$

$$C(6) = 20 \rightarrow \frac{6^3}{3} - \frac{7 \cdot 6^2}{2} + 10 \cdot 6 + k = 20 \rightarrow k = 14$$

$$C(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{7t^2}{2} + 10t + 14$$

110 Una alfombra de flores lleva 21 rosas por cada 4 decímetros cuadrados de superficie. Se quiere rellenar de rosas una parte de la alfombra cuya gráfica está limitada por las funciones $y = -x^2 + 4x + 3$ e $y = 3$.
Si se mide en metros:

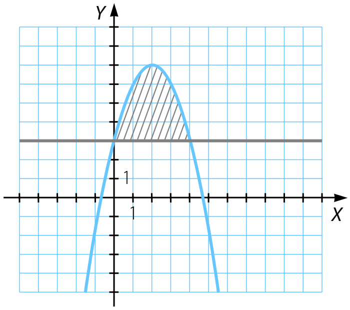
a) Representar la parte de la alfombra.

b) Calcular el área de la parte de la alfombra.

c) Si cada rosa cuesta 0,30 €, ¿cuánto cuesta rellenar esa parte de la alfombra?

(Canarias. Junio 2008. Prueba A. Pregunta 4)

a)



b) $-x^2+4x+3=3 \rightarrow -x^2+4x=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$

$$\text{Área} = \left| \int_0^4 (-x^2+4x+3-3)\,dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^4 \right| = \frac{32}{3} \text{ m}^2$$

c) $\frac{32}{3} : 0{,}04 \cdot 21 = 5.600$ rosas

Rellenar la alfombra cuesta: $5.600 \cdot 0{,}30 = 1.680$ €

111 **La parte superior de una pared de 2 metros de base tiene una forma parabólica determinada por la expresión $-0{,}5x^2+x+1$, donde x mide la longitud en metros desde la parte izquierda de la pared. Calcular la superficie de dicha pared utilizando una integral.**

(C. Valenciana. Junio 2004. Ejercicio B. Problema 3)

$$\text{Área} = \left| \int_0^2 (-0{,}5x^2+x+1)\,dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x \right]_0^2 \right| = \frac{8}{3} \text{ m}^2$$

112 **La superficie de media mesa está limitada por las funciones $f(x)=x^2$ y la recta $g(x)=1$, estando x expresado en metros. El barniz se vende en botes para cubrir una superficie de 2 metros cuadrados. ¿Cuántos botes necesitaremos comprar para barnizar toda la mesa y cuántos metros cuadrados podríamos barnizar con el barniz sobrante?**

(Castilla y León. Junio 2007. Bloque A. Pregunta 2)

$$x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\text{Superficie} = 2\left| \int_{-1}^1 [f(x)-g(x)]\,dx \right| = 2\left| \int_{-1}^1 (1-x^2)\,dx \right| =$$

$$= 2\left| \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \right| = \frac{8}{3} \text{ m}^2$$

Los botes que se necesitan son:

$$\frac{8}{3} : 2 = \frac{4}{3} = 1{,}33$$

Se necesitan dos botes de barniz y sobrará:

$$2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Sobran dos tercios de un bote con el que podemos pintar:

$$\frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} \text{ m}^2$$

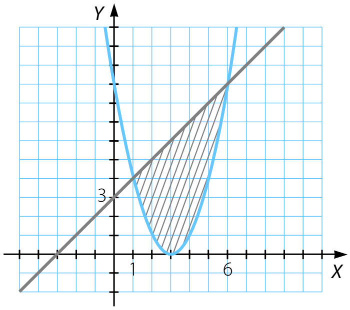
113 Se quiere regar una parcela de jardín limitada por $y = (x - 3)^2$ e $y = x + 3$. Si se mide en metros y cada metro cuadrado debe recibir 12 litros de agua:

a) Representa la parcela.

b) ¿Cuántos litros de agua hay que utilizar?

(Canarias. Septiembre 2007. Prueba A. Pregunta 4)

a)



b) $(x-3)^2 = x+3 \rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$

$$\text{Superficie} = \left| \int_1^6 [f(x) - g(x)]\, dx \right| = \left| \int_1^6 (x^2 - 7x + 6)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 6x \right]_1^6 \right| = \frac{125}{6} \text{ m}^2$$

Los litros de agua que se utilizan son: $\frac{125}{6} \cdot 12 = 250$ litros

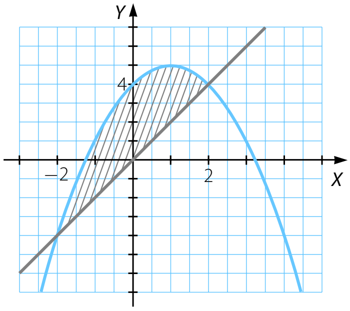
114 Una inmobiliaria está interesada en adquirir unos terrenos que pueden ser representados en un determinado plano como la superficie encerrada entre la parábola $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y la recta $g(x) = 2x$.

a) Halla la representación gráfica simultánea de estas dos funciones.

b) Si una unidad de área en este plano equivale a 1 km^2 y el precio del km^2 es de 30 millones de euros, ¿qué importe debe pagar la inmobiliaria por esos terrenos?

(Castilla y León. Junio 2006. Bloque A. Pregunta 2)

a)



b) $-x^2+2x+4=2x \rightarrow -x^2+4=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$

$$\text{Superficie} = \left| \int_{-2}^{2} [f(x)-g(x)]\, dx \right| = \left| \int_{-2}^{2} (-x^2+4)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^{2} \right| = \frac{32}{3}\ \text{km}^2$$

El precio de los terrenos es:

$\frac{32}{3} \cdot 30 = 320$ millones de euros

PREPARA TU SELECTIVIDAD

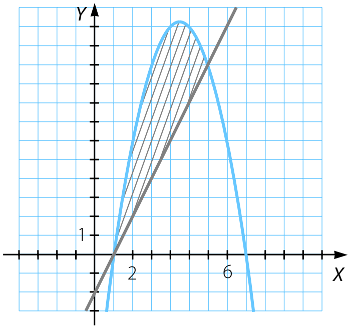
1 Una parcela está rodeada por dos carreteras cuyo trazado viene dado por las funciones $f(x) = -x^2 + 9x - 8$ y $g(x) = 2x - 2$. Si se mide en decámetros:

a) Representar la parcela.

b) ¿Qué superficie tiene la parcela?

c) Si el 70 % de la superficie de la parcela se vende como suelo urbano a 500 € el metro cuadrado, el 20 % se tiene que donar al ayuntamiento y el resto se vende como suelo rústico a 45 € el metro cuadrado, ¿cuál es el valor de la parcela?

(Canarias. Septiembre 2008. Prueba A. Pregunta 3)

a) 

b) $-x^2+9x-8=2x-2 \rightarrow -x^2+7x-6=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=6 \end{cases}$

$$\text{Superficie} = \left| \int_{1}^{6} [f(x)-g(x)]\, dx \right| = \left| \int_{1}^{6} (-x^2+7x-6)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 6x \right]_{1}^{6} \right| = \frac{125}{6}\ \text{dam}^2$$

c) $\text{Valor} = \frac{125}{6} \cdot 70 \cdot 500 + \frac{125}{6} \cdot 10 \cdot 45 = 738.541,67$ €

2 Determine la función $f(x)$, definida para $x > 0$,

que verifica $f'(x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$ y $f(1) = 4$.

(Baleares. Junio 2008. Opción B. Ejercicio 7)

$$f'(x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = -\ln|x| - \frac{1}{x} + k$$

$$f(1) = 4 \rightarrow -\ln 1 - \frac{1}{1} + k = 4 \rightarrow k = 5$$

La función buscada es: $f(x) = -\ln|x| - \frac{1}{x} + 5$

3 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ |x - 3| & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y el eje de abscisas.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2008. Bloque 3. Ejercicio A)

$$-x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$|x - 3| = 0 \rightarrow x = 3$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-3}^{3} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{-3}^{3} (-x^2 - 2x + 3)\,dx \right| + \left| \int_{0}^{3} (3 - x)\,dx \right| =$$

$$= \left| \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_{-3}^{0} \right| + \left| \left[3x - \frac{x^2}{2} \right]_{0}^{3} \right| = 9 + \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$$

4 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 8 & \text{si } x \leq -3 \\ x^2 - 2 & \text{si } -3 < x < 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

calcula el área del recinto limitado por el eje X, la gráfica de f
y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2006. Bloque 3. Ejercicio A)

$$x^2 - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} = 1{,}4142 \\ x = -\sqrt{2} = -1{,}4142 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{0}^{1} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{0}^{1} (x^2 - 2)\,dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 2x \right]_{0}^{1} \right| = \frac{5}{3}$$

5 Halla el área del recinto limitado por la curva $x \cdot y = 4$, el eje X y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

(Murcia. Junio 2006. Bloque 2. Cuestión 2)

$$xy = 4 \rightarrow y = \frac{4}{x}$$

$$\text{Área} = \left| \int_2^4 f(x)\,dx \right| = \left| \int_2^4 \frac{4}{x}\,dx \right| = \left| [4 \ln |x|]_2^4 \right| = 4 \ln 2$$

6 Se considera la función $f(x) = -ax^2 + 5x - 4$.

a) Calcula el valor de a para que la recta tangente a la función en el punto $x = 3$ corte al eje X en el punto $x = 5$.

b) Calcula, además, el área de la región limitada por dicha tangente, el eje X y la función $f(x)$, para el valor de a obtenido anteriormente.

(Castilla y León. Junio 2005. Bloque A. Pregunta 2)

a) $f'(x) = -2ax + 5 \rightarrow f'(3) = -6a + 5$

$f(3) = -9a + 11$

La ecuación de la recta tangente en $x = 3$ es:

Tangente: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$y + 9a - 11 = (-6a + 5)(x - 3)$

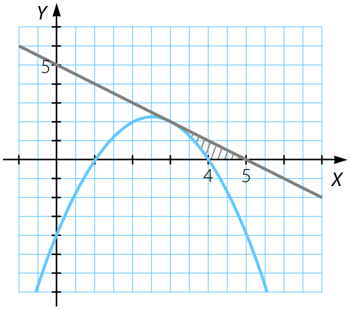
Como la recta tangente pasa por el punto (5, 0):

$9a - 11 = (-6a + 5)(5 - 3) \rightarrow 21a = 21 \rightarrow a = 1$

b) $f(x) = -x^2 + 5x - 4$

Tangente: $y + 9a - 11 = (-6a + 5)(x - 3) \xrightarrow{a=1} y - 2 = -x + 3$

$\rightarrow y = -x + 5$



$$-x^2 + 5x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$-x^2 + 5x - 4 = -x + 5 \rightarrow -x^2 + 6x - 9 = 0 \rightarrow x = 3$

$-x + 5 = 0 \rightarrow x = 5$

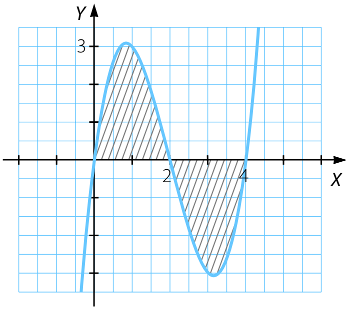
$$\text{Área} = \left|\int_3^4 [f(x) - g(x)]\,dx\right| + \left|\int_4^5 g(x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_3^4 (-x^2 + 6x - 9)\,dx\right| + \left|\int_4^5 (-x + 5)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 9x\right]_3^4\right| + \left|\left[-\frac{x^2}{2} + 5x\right]_4^5\right| = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

7 Dibujar el recinto encerrado por la función $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje X. Calcular el área de dicho recinto.

(Navarra. Junio 2008. Ejercicio 2. Opción A)



$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_0^4 f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx\right| + \left|\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4\right| = 4 + 4 = 8$$

8 Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^3$.

(Baleares. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 7)

$$\sqrt{x} = x^3 \rightarrow x^6 - x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx\right| = \left|\int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1\right| = \frac{5}{12}$$

9 Determinar el área encerrada por la función $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$, la recta $x = 4$, la recta $x = 6$ y la función $g(x) = \frac{9}{x + 3}$.

(Cantabria. Junio 2006. Bloque 2. Opción A)

$$\text{Área} = \left| \int_4^6 [f(x) - g(x)]\, dx \right| = \left| \int_4^6 \left(\frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} - \frac{9}{x + 3} \right) dx \right| =$$

$$= \left| \int_4^6 x\, dx \right| = \left| \left[\frac{x^2}{2} \right]_4^6 \right| = 10$$