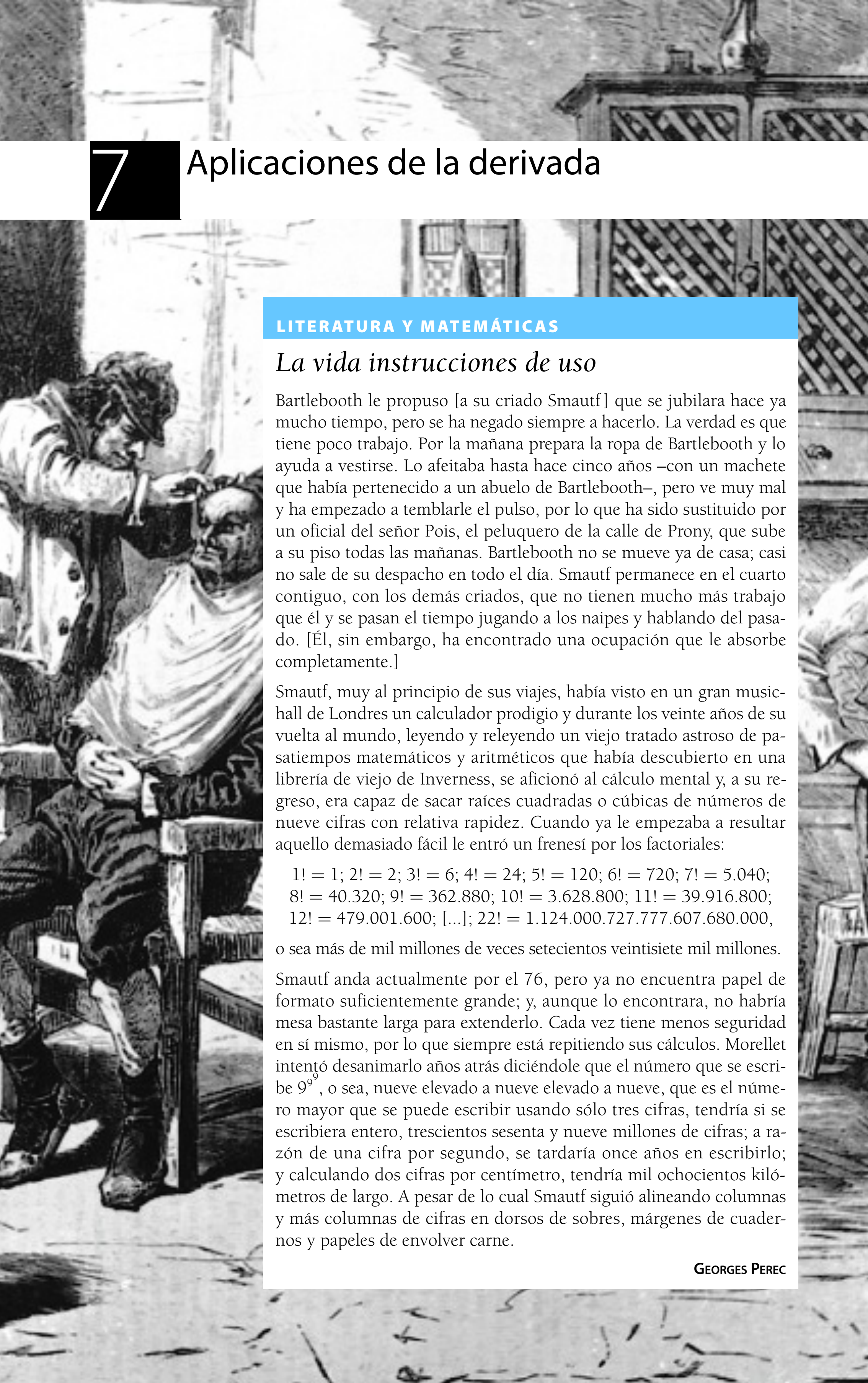


7 Aplicaciones de la derivada

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

La vida instrucciones de uso

Bartlebooth le propuso [a su criado Smautf] que se jubilara hace ya mucho tiempo, pero se ha negado siempre a hacerlo. La verdad es que tiene poco trabajo. Por la mañana prepara la ropa de Bartlebooth y lo ayuda a vestirse. Lo afeitaba hasta hace cinco años –con un machete que había pertenecido a un abuelo de Bartlebooth–, pero ve muy mal y ha empezado a temblarle el pulso, por lo que ha sido sustituido por un oficial del señor Pois, el peluquero de la calle de Prony, que sube a su piso todas las mañanas. Bartlebooth no se mueve ya de casa; casi no sale de su despacho en todo el día. Smautf permanece en el cuarto contiguo, con los demás criados, que no tienen mucho más trabajo que él y se pasan el tiempo jugando a los naipes y hablando del pasado. [Él, sin embargo, ha encontrado una ocupación que le absorbe completamente.]

Smautf, muy al principio de sus viajes, había visto en un gran music-hall de Londres un calculador prodigio y durante los veinte años de su vuelta al mundo, leyendo y releyendo un viejo tratado astroso de pasatiempos matemáticos y aritméticos que había descubierto en una librería de viejo de Inverness, se aficionó al cálculo mental y, a su regreso, era capaz de sacar raíces cuadradas o cúbicas de números de nueve cifras con relativa rapidez. Cuando ya le empezaba a resultar aquello demasiado fácil le entró un frenesí por los factoriales:

$$1! = 1;\ 2! = 2;\ 3! = 6;\ 4! = 24;\ 5! = 120;\ 6! = 720;\ 7! = 5.040;$$
$$8! = 40.320;\ 9! = 362.880;\ 10! = 3.628.800;\ 11! = 39.916.800;$$
$$12! = 479.001.600;\ [...];\ 22! = 1.124.000.727.777.607.680.000,$$

o sea más de mil millones de veces setecientos veintisiete mil millones.

Smautf anda actualmente por el 76, pero ya no encuentra papel de formato suficientemente grande; y, aunque lo encontrara, no habría mesa bastante larga para extenderlo. Cada vez tiene menos seguridad en sí mismo, por lo que siempre está repitiendo sus cálculos. Morellet intentó desanimarlo años atrás diciéndole que el número que se escribe 9^{9^9}, o sea, nueve elevado a nueve elevado a nueve, que es el número mayor que se puede escribir usando sólo tres cifras, tendría si se escribiera entero, trescientos sesenta y nueve millones de cifras; a razón de una cifra por segundo, se tardaría once años en escribirlo; y calculando dos cifras por centímetro, tendría mil ochocientos kilómetros de largo. A pesar de lo cual Smautf siguió alineando columnas y más columnas de cifras en dorsos de sobres, márgenes de cuadernos y papeles de envolver carne.

GEORGES PEREC

La vida instrucciones de uso

Georges Perec

A lo largo de esta «complicada» novela aparecen multitud de personajes excéntricos, dos de los cuales, aquellos que tienen alguna relevancia matemática, son los que aparecen en este párrafo: Bartlebooth y Smautf.

Bartlebooth dedicó diez años a iniciarse en el arte de la acuarela. Después recorrió el mundo durante veinte años pintando una acuarela cada quince días en quinientos puertos diferentes. Cuando terminaba una, la enviaba a un artesano de París para que la pegara en una placa de madera y luego la recortara, formando un puzle de setecientas cincuenta piezas. Al finalizar su periplo, regresó a Francia y empleó otros veinte años en reconstruir los quinientos puzles a razón de uno cada quince días. A medida que los iba completando, el mismo artesano, con una técnica especial, despegaba la reconstruida acuarela de su soporte y la enviaba al mismo lugar donde había sido pintada. Allí se sumergía en una solución detersiva de la que salía otra vez la hoja blanca y virgen. De esta forma no quedó ningún rastro de aquella actividad que durante cincuenta años llenó completamente la vida de Bartlebooth.

En todas las etapas, a Bartlebooth lo acompañó su criado Smautf, quien todavía, a pesar de sus ochenta años, lo atiende en su casa de París y ocupa su tiempo con los entrenamientos matemáticos que hemos visto en el texto elegido.

Los factoriales de los números naturales forman una sucesión creciente, es decir, una función $f(x) = x!$, definida para $x \in \mathbb{N}$, es creciente. Estudia si a la función $f(x) = x(x - 1)(x - 2)$, definida para cualquier número real, le sucede lo mismo.

Para que sea creciente se debe verificar que, para cualquier valor $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Para la función $f(x) = x(x - 1)(x - 2)$ tenemos que:

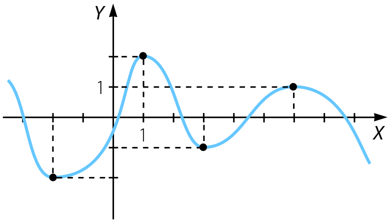
$$x_1 < x_2 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 - 1 < x_2 - 1 \\ x_1 - 2 < x_2 - 2 \end{array}\right\} \rightarrow x_1(x_1 - 1)(x_1 - 2) < x_2(x_2 - 1)(x_2 - 2)$$

$$\rightarrow f(x_1) < f(x_2) \rightarrow f(x) \text{ creciente}$$

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Determina el crecimiento y decrecimiento de esta función.

Indica en qué puntos alcanza máximos o mínimos relativos y absolutos.



La función es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (1, 3) \cup (6, +\infty)$.
Y es creciente en $(-2, 1) \cup (3, 6)$.

Tiene un máximo relativo en $(1, 2)$ y en $(6, 1)$. Tiene un mínimo relativo en $(-2, -2)$ y en $(3, -1)$.

A la vista de la función, no podemos asegurar que presente máximos ni mínimos absolutos.

002 Una función definida para todos los números reales es decreciente en el intervalo $(-2, 5)$ y creciente en el resto. ¿Cuáles son los máximos y mínimos?

Se alcanzará un máximo en $x = -2$ y un mínimo en $x = 5$.

003 Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) + g(x)\big)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) \cdot g(x)\big)$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x)\big)^{g(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x))^{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } L > 1 \\ \text{Indeterminación} & \text{si } L = 1 \\ 0 & \text{si } 0 < L < 1 \end{cases}$

ACTIVIDADES

001 Halla la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 6x^2 + 1$ en $x = 1$.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6(1+h)^2 + 1 - 7}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{12h + 6h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0}(12 + 6h) = 12$$

002 ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ en $x = 1$?

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0}(3 + 3h + h^2) = 3$$

003 Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3$ en el punto $P(-1, 4)$.

¿Cuál es la ecuación de la recta normal?

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^2 + 3 - 4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h + h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} (-2 + h) = -2$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 4 = -2(x + 1) \rightarrow y = -2x + 2$

La ecuación de la recta normal es: $y - 4 = \frac{1}{2}(x + 1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

004 **Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x) = 2x^3 + 3$ en los puntos $x = 1$ y $x = -1$.**
Comprueba que son paralelas a la recta $y = 6x$.

$f(1) = 5$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(1+h)^3 + 3 - 5}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h + 6h^2 + 2h^3}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} (6 + 6h + 2h^2) = 6$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 5 = 6(x - 1) \rightarrow y = 6x - 1$

$f(-1) = 1$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(-1+h)^3 + 3 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h - 6h^2 + 2h^3}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} (6 - 6h + 2h^2) = 6$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 1 = 6(x + 1) \rightarrow y = 6x + 7$

Las rectas son paralelas a la recta $y = 6x$, porque su pendiente es 6.

005 **Decide dónde crecen y decrecen estas funciones.**

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$

b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

a) Como $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, estudiamos el crecimiento para todos los números reales.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 = 0 \rightarrow x = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3},\ x = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$$

- En $\left(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

b) Como $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, estudiamos el crecimiento para todos los números reales.

$$g'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente
- En $(-1, 1) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

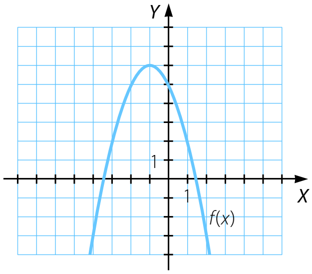
006 **Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones, y compruébalo gráficamente.**

a) $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ b) $g(x) = -x + 7x^2$

a) Como $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser una función polinómica, estudiamos el crecimiento para todos los números reales.

$f'(x) = -2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1$

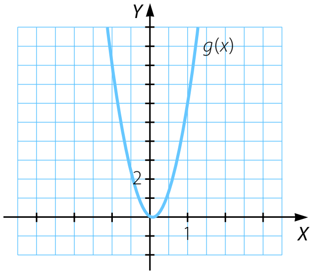
- En $(-\infty, -1) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente



b) Como $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser una función polinómica, estudiamos el crecimiento para todos los números reales.

$g'(x) = -1 + 14x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{14}$

- En $\left(-\infty, \frac{1}{14}\right) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente
- En $\left(\frac{1}{14}, +\infty\right) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente



007 **Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y calcula los máximos y mínimos de estas funciones.**

a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ b) $g(x) = \frac{x}{x^3 + 1}$

a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo, siendo sus coordenadas $(0, -1)$.

b) $g(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$$g'(x) = \frac{-2x^3+1}{(x^3+1)^2} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Así, estudiamos el crecimiento en $(-\infty, -1)$, $\left(-1, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$ y $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$.

- En $(-\infty, -1) \cup \left(-1, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente
- En $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty\right) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente

En $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ presenta un máximo, y sus coordenadas son $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$.

008 **Halla las coordenadas de los máximos y mínimos de la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{x^3+3}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-x^3-12}{x^5} = 0 \rightarrow x = -\sqrt[3]{12}$$

Como $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, el extremo se encuentra en $(-\infty, 0)$.

- En $\left(-\infty, -\sqrt[3]{12}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(-\sqrt[3]{12}, 0\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = -\sqrt[3]{12}$ presenta un mínimo, y sus coordenadas son $\left(-\sqrt[3]{12}, \frac{-3}{4\sqrt[3]{12}}\right)$.

009 **Halla los máximos y mínimos de estas funciones mediante la derivada segunda.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3}$ b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^6+2}$

a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, con $f'(x) = \dfrac{-x^2+3}{x^4} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$$f''(x) = \frac{2x^2-12}{x^5}$$

$f''\left(-\sqrt{3}\right) > 0 \rightarrow x = -\sqrt{3}$ mínimo

$f''\left(\sqrt{3}\right) < 0 \rightarrow x = \sqrt{3}$ máximo

b) $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = \frac{-4x^7+4x}{(x^6+2)^2} = 0 \rightarrow x = 0, x = -1, x = 1$$

$$g''(x) = \frac{20x^{12}-100x^6+8}{(x^6+2)^3}$$

$g''(0) = \dfrac{8}{8} = 1 > 0 \rightarrow x = 0$ mínimo

$g''(-1) = \dfrac{20-100+8}{27} < 0 \rightarrow x = -1$ máximo

$g''(1) = \dfrac{20-100+8}{27} < 0 \rightarrow x = 1$ máximo

010 **Utiliza la derivada segunda para determinar los máximos y mínimos de la siguiente función:**

$$f(x)=\frac{x+3}{x^3+x^2-6x}$$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{-3,\ 0,\ 2\}$.

$$f'(x)=\frac{-2x^3-10x^2-6x+18}{(x^3+x^2-6x)^2}=\frac{-2x+2}{x^4-4x^3+4x^2}=0\rightarrow x=1$$

$$f''(x)=\frac{6x^4-24x^3+32x^2-16x}{(x^4-4x^3+4x^2)^2}=\frac{x(x-2)(6x^2-12x+8)}{x^4(x-2)^2(x+3)^2}=\frac{6x^2-12x+8}{x^3(x-2)(x+3)^2}$$

$f''(1)<0\rightarrow x=1$ máximo

011 **Decide dónde son cóncavas y dónde son convexas estas funciones.**

a) $f(x)=7x^3-x^2-x+2$

b) $g(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$

a) Como $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, estudiamos la concavidad para todos los números reales.

$f'(x)=21x^2-2x-1$

$f''(x)=42x-2=0\rightarrow x=\dfrac{2}{42}=\dfrac{1}{21}$

- En $\left(-\infty,\ \dfrac{1}{21}\right)\rightarrow f''(x)<0\rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(\dfrac{1}{21},\ +\infty\right)\rightarrow f''(x)>0\rightarrow f(x)$ cóncava

b) Como $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, estudiamos la concavidad para todos los números reales.

$g'(x)=\dfrac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$

$g''(x)=\dfrac{-2x^3+6x}{(x^2+1)^3}=0\rightarrow -x^3+3x=0\rightarrow x=0,\ x=-\sqrt{3},\ x=\sqrt{3}$

- En $\left(-\infty,\ -\sqrt{3}\right)\cup\left(0,\ \sqrt{3}\right)\rightarrow g'(x)>0\rightarrow g(x)$ cóncava
- En $\left(-\sqrt{3},\ 0\right)\cup\left(\sqrt{3},\ +\infty\right)\rightarrow g'(x)<0\rightarrow g(x)$ convexa

012 **Halla los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones, y comprueba el resultado gráficamente.**

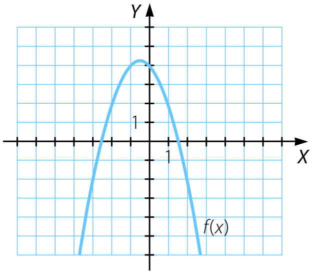
a) $f(x)=-x^2-x+4$ b) $g(x)=-x-5x^2$

a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, por tanto, estudiamos la concavidad para todos los números reales.

$f'(x)=-2x-1$

$f''(x)=-2<0\rightarrow f(x)$ convexa

Gráficamente:

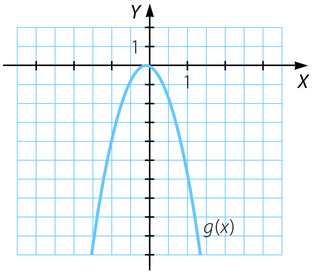


b) $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, por tanto, estudiamos la concavidad para todos los números reales.

$g'(x) = -1 - 10x$

$g''(x) = -10 < 0 \rightarrow g(x)$ convexa

Gráficamente:



013 **Estudia los intervalos de concavidad y convexidad de estas funciones, y a partir de ellos, determina los puntos de inflexión.**

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$ b) $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2+7x}$

a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f''(x) = 6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$

- En $(-\infty, -1) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(-1, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

Así, en $x = -1$ tiene un punto de inflexión.

b) Como el dominio de $g(x)$ es $\mathbb{R} - \{-7, 0\}$, estudiamos la concavidad en $(-\infty, -7)$, $(-7, 0)$, $(0, 7)$ y $(7, +\infty)$.

$$g'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 7}{(x^2+7x)^2}$$

$$g''(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 - 42x - 98}{(x^2+7x)^3} = 0 \rightarrow x = 7$$

- En $(-\infty, -7) \cup (0, 7) \rightarrow g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ convexa
- En $(-7, 0) \cup (7, +\infty) \rightarrow g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ cóncava

Hay un punto de inflexión en $x = 7$.

014 Estudia los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 4x^3 - 8x + 7$ b) $g(x) = \dfrac{-x^3 + 2}{x^2}$

a) $f'(x) = 12x^2 - 8$

$f''(x) = 24x = 0 \rightarrow x = 0$

$f'''(x) = 24 \rightarrow f'''(0) \neq 0 \rightarrow x = 0$ punto de inflexión

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(0, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

b) $g'(x) = \dfrac{-x^3 - 4}{x^3}$

$g''(x) = \dfrac{12}{x^4} > 0 \rightarrow$ No hay puntos de inflexión y la función es cóncava en $(-\infty, 0) \cup (0 +\infty)$, ya que 0 no está en el dominio.

015 Calcula los puntos de inflexión de las siguientes funciones mediante la derivada tercera.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x^3}$

b) $g(x) = -\dfrac{x}{x^2 - 7}$

a) $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 3}{2x^4}$

$f''(x) = \dfrac{x^2 - 6}{x^5} = 0 \rightarrow x = -\sqrt{6}, x = \sqrt{6}$

$f'''(x) = \dfrac{-3x^2 + 30}{x^6}$

$f'''\left(-\sqrt{6}\right) \neq 0$, $f'''\left(\sqrt{6}\right) \neq 0 \rightarrow$ En $x = -\sqrt{6}$ y en $x = \sqrt{6}$ presenta puntos de inflexión.

b) $g'(x) = \dfrac{x^2 + 7}{(x^2 - 7)^2}$

$g''(x) = \dfrac{-2x^3 - 42x}{(x^2 - 7)^3} = 0 \rightarrow x = 0$

$g'''(x) = \dfrac{6x^4 + 252x^2 + 294}{(x^2 - 7)^4} \rightarrow g'''(0) \neq 0 \rightarrow$ En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.

016 Halla los máximos, mínimos o puntos de inflexión de estas funciones.

a) $f(x) = -4x^6$

b) $g(x) = 3x^7$

a) $f'(x) = -24x^5 = 0 \rightarrow x = 0$

$f''(x) = -120x^4 = 0 \rightarrow x = 0$

$f'''(x) = -480x^3 \rightarrow f'''(0) = 0$

$f^{IV)}(x) = -1.440x^2 \rightarrow f^{IV)}(0) = 0$
$f^{V)}(x) = -2.880x \rightarrow f^{V)}(0) = 0$
$f^{VI)}(x) = -2.880 \neq 0$
La primera derivada no nula tiene orden par y $f^{VI)}(0) < 0 \rightarrow$ En $x = 0$ alcanza un máximo.

b) $g'(x) = 21x^6 = 0 \rightarrow x = 0$
$g''(x) = 126x^5 = 0 \rightarrow x = 0$
$g'''(x) = 630x^4 \rightarrow g'''(0) = 0$
$g^{IV)}(x) = 2.520x^3 \rightarrow g^{IV)}(0) = 0$
$g^{V)}(x) = 7.560x^2 \rightarrow g^{V)}(0) = 0$
$g^{VI)}(x) = 15.120x \rightarrow g^{VI)}(0) = 0$
$g^{VII)}(x) = 15.120 \neq 0$
El orden de la primera derivada no nula es impar $\rightarrow$ En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.

017 **Si el número de visitantes a un museo se obtiene mediante $f(x) = \dfrac{300x}{x^3 + 2}$, siendo x la hora desde su apertura, ¿cuándo recibe mayor número de visitantes?**

Debemos maximizar esta función: $f(x) = \dfrac{300x}{x^3 + 2}$

$f'(x) = \dfrac{-600x^3 + 600}{(x^3 + 2)^2} = 0 \rightarrow x = 1$

$f''(x) = \dfrac{1.800x^5 - 7.200x^2}{(x^3 + 2)^3} \rightarrow f''(1) < 0 \rightarrow$ En $x = 1$ alcanza un máximo.

El mayor número de visitantes lo recibe cuando pasa una hora desde su apertura.

018 **Halla el número real x que minimiza esta función:**

$$D(x) = (a - x)^2 + (b - x)^2 + (c - x)^2 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$D'(x) = -2(a - x) - 2(b - x) - 2(c - x)$
$D'(x) = -2a + 2x - 2b + 2x - 2c + 2x = 6x - 2(a + b + c) = 0$

$$\rightarrow x = \frac{2(a + b + c)}{6} = \frac{a + b + c}{3}$$

$D''(x) = 6 > 0 \rightarrow$ En $x = \dfrac{a + b + c}{3} \in \mathbb{R}$ alcanza un mínimo.

019 **La capacidad de concentración de una saltadora de altura, en una competición de atletismo de tres horas de duración, viene dada por la función:**

$$f(t) = 300t(3 - t)$$

donde t mide el tiempo en horas. ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la saltadora pueda batir su propia marca?

$f'(x) = 900 - 600t = 0 \rightarrow t = \dfrac{3}{2}$

$f''(x) = -600 < 0 \rightarrow$ En $t = \dfrac{3}{2}$ alcanza un máximo.

El mejor momento para que la saltadora pueda batir su propia marca es cuando ha transcurrido 1 hora y media.

020 **Halla dos números reales positivos, sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.**

Si llamamos x e y a los dos números reales positivos, se cumple que: $x + y = 10$
Debemos maximizar la función:

$P(x, y) = x^2y^2 \rightarrow P(x) = x^2(10 - x)^2 = x^2(100 + x^2 - 20x) = 100x^2 + x^4 - 20x^3$

$P'(x) = 200x + 4x^3 - 60x^2 = 0 \rightarrow x = 0, x = 5, x = 10$

Veamos cuál es el número que maximiza la función $P(x)$.

$P''(x) = 200 + 12x^2 - 120x$

$P''(0) = 200 > 0 \rightarrow$ En $x = 0$ alcanza un mínimo.

$P''(5) = -100 < 0 \rightarrow$ En $x = 5$ alcanza un máximo.

$P''(10) = 200 > 0 \rightarrow$ En $x = 10$ alcanza un mínimo.

Los dos números que buscamos son $x = 5$ e $y = 5$.

021 **De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo.**

Llamamos x a la longitud de la arista de la base e y a la altura del prisma.
Como el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, se cumple que:
$2x + 2y = 30 \rightarrow x + y = 15 \rightarrow y = 15 - x$

La función que debemos optimizar es: $V(x) = x^2(15 - x) = 15x^2 - x^3$

$V'(x) = 30x - 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0, x = 10$

$V''(x) = 30 - 6x \rightarrow V''(0) > 0, V''(10) < 0 \rightarrow$ El máximo se alcanza en $x = 10$.

Las dimensiones del prisma recto de base cuadrada son:

Arista de la base: 10 cm

Altura: 5 cm

022 **Determina el punto de la gráfica de la función que a cada número le hace corresponder su doble y cuya distancia al punto (6, 3) es mínima.**
¿Cuál es esa distancia?

La función que a cada número le hace corresponder su doble es: $y = 2x$

Un punto que satisface esta función es $(x, 2x)$ y la función que nos da la distancia desde este punto a $(6, 3)$ es: $d(x) = \sqrt{(x-6)^2 + (2x-3)^2}$

Optimizamos la función $D(x) = d^2(x) = (x-6)^2 + (2x-3)^2$.

$D'(x) = 2(x-6) + 4(2x-3) = 2x - 12 + 8x - 12 = 10x - 24 = 0 \rightarrow x = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$

$D''(x) = 10 > 0 \rightarrow$ En $x = \frac{12}{5}$ alcanza un mínimo.

Así, la distancia al punto (6, 3) será mínima en el punto $\left(\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right)$.

023 **Entre todos los rectángulos de área 3 m^2, encuentra las dimensiones del que tiene mínimo el producto de sus diagonales.**

Sean x e y las dimensiones del rectángulo de modo que: $xy = 3$

La función que se va a optimizar viene dada por:

$$d \cdot d = d^2 \rightarrow P(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow P(x) = x^2 + \left(\frac{3}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{9}{x^2}$$

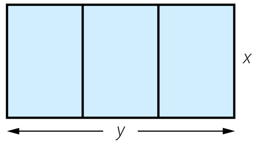
$$P'(x) = 2x - \frac{18}{x^3} = 0 \rightarrow 2x^4 - 18 = 0 \rightarrow x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$$

Como la solución negativa no es válida, tenemos que:

$$P''(x) = 2 + \frac{54}{x^4} \rightarrow P''\left(\sqrt{3}\right) > 0 \rightarrow \text{En este punto se alcanza un mínimo.}$$

Las dimensiones son $x = \sqrt{3}$ metros, $y = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ metros; por tanto, se trata de un cuadrado de lado $\sqrt{3}$ metros.

024 **Un jardinero dispone de 160 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes, colocando las alambradas de las divisiones paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que el área sea la mayor posible?**



Llamamos x e y a las dimensiones de la zona rectangular, y consideramos que las divisiones son paralelas a los lados de medida x. Para dividir la zona rectangular en tres partes necesitamos realizar dos divisiones, por lo que se debe cumplir que:

$$4x + 2y = 160 \rightarrow 2x + y = 80 \rightarrow y = 80 - 2x$$

Debemos optimizar la función que nos da el área, es decir:

$$A(x, y) = xy \rightarrow A(x) = x(80 - 2x) = 80x - 2x^2$$

$$A'(x) = 80 - 4x = 0 \rightarrow x = 20$$

$$A''(x) = -4 < 0 \rightarrow \text{En } x = 20 \text{ alcanza un máximo.}$$

Las dimensiones de la zona rectangular deben ser $x = 20$ metros e $y = 40$ metros.

025 **Halla la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{-2}{x}$ en el punto de abscisa $x = 2$.**

La pendiente coincide con el valor de la derivada en el punto $x = 2$.

$$f'(x) = \frac{2}{x^2} \rightarrow f'(2) = \frac{1}{2} \rightarrow \text{La pendiente es } \frac{1}{2}.$$

026 **Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$, calcula la pendiente de la tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = -1$.**

(Baleares. Junio 2002. Opción B. Cuestión 6)

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \rightarrow f'(-1) = 3 - 6 = -3 \rightarrow \text{La pendiente es } -3.$$

027 Dada la función: $f(x) = \begin{cases} 16 - x^2 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ x^2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en $x = 1$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2002. Bloque 2. Ejercicio A)

$x = 1 \rightarrow f(x) = 16 - x^2 \rightarrow f'(x) = -2x \rightarrow f'(1) = -2 \rightarrow$ La pendiente es -2.

028 Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, ¿existe algún punto de la gráfica en el que la recta tangente tenga pendiente positiva? Justifica la respuesta.

(Galicia. Septiembre 2001. Bloque 2. Ejercicio 1)

$f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^2} < 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow$ No existe ningún punto de la gráfica en el que la recta tangente tenga pendiente positiva.

029 Halla la ecuación de la tangente a la gráfica de cada una de estas funciones en los puntos que se indican.

a) $y = \operatorname{sen} x + x$, en $x = \pi$.

b) $y = \dfrac{x^4 - 3}{x}$, en $x = -1$.

c) $y = \ln(x^2 + 7)$, en $x = 0$.

d) $y = 3^{x+1}$, en $x = -1$.

a) $f(\pi) = \pi$

$f'(x) = \cos x + 1 \rightarrow f'(\pi) = 0$

La ecuación de la recta tangente es: $y - \pi = 0(x - \pi) \rightarrow y = \pi$

b) $f(-1) = 2$

$$f'(x) = \frac{4x^3 \cdot x - (x^4 - 3)}{x^2} = \frac{3x^4 + 3}{x^2} \rightarrow f'(-1) = 6$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = 6(x + 1) \rightarrow y = 6x + 8$

c) $f(0) = \ln 7$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 7} \rightarrow f'(0) = 0$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - \ln 7 = 0(x - 0) \rightarrow y = \ln 7$

d) $f(-1) = 3^0 = 1$

$f'(x) = 3^{x+1} \cdot \ln 3 \rightarrow f'(-1) = 3^0 \cdot \ln 3 = \ln 3$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 1 = \ln 3(x + 1)$

030 Determina la ecuación de la tangente a la parábola $y = \dfrac{1}{2}x^2$ en el punto $A(2, 2)$.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x \rightarrow f'(2) = 2$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 2$

031 **Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + 16y^2 - 16 = 0$ en el punto de abscisa 3 y ordenada positiva.**

$$x = 3 \rightarrow 9 + 16y^2 - 16 = 0 \rightarrow 16y^2 = 7 \rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Consideramos el punto $\left(3, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$.

Despejamos y como raíz positiva por ser la ordenada positiva.

$$y = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{4} \rightarrow y' = \frac{-x}{4\sqrt{16 - x^2}}$$

$$y'(3) = \frac{-3}{4\sqrt{16 - 9}} = -\frac{3\sqrt{7}}{28}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - \frac{\sqrt{7}}{4} = -\frac{3\sqrt{7}}{28}(x - 3) \rightarrow y = -\frac{3\sqrt{7}}{28}x + \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

032 **Determina la ecuación de la recta tangente a la curva $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ en el punto de abscisa 4 y ordenada positiva.**

$$x = 4 \rightarrow 64 - 9y^2 - 36 = 0 \rightarrow 9y^2 = 28 \rightarrow y = \pm\frac{2\sqrt{7}}{3}$$

Consideramos el punto $\left(4, \frac{2\sqrt{7}}{3}\right)$.

Despejamos y como raíz positiva por ser la ordenada positiva.

$$y = \frac{\sqrt{4x^2 - 36}}{3} \rightarrow y' = \frac{4x}{3\sqrt{4x^2 - 36}}$$

$$y'(4) = \frac{16}{3\sqrt{64 - 36}} = \frac{8\sqrt{7}}{21}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - \frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{8\sqrt{7}}{21}(x - 4) \rightarrow y = \frac{8\sqrt{7}}{21}x - \frac{6\sqrt{7}}{7}$$

033 **Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x - 2}$.**

Obtén la expresión de la recta tangente a dicha función en $x = 3$.

(Castilla y León. Septiembre 2006. Bloque A. Pregunta 2)

$$f(3) = 3 \qquad f'(x) = \frac{-2}{(x - 2)^2} \rightarrow f'(3) = -2$$

La recta tangente es: $y - 3 = -2(x - 3) \rightarrow y - 3 = -2x + 6 \rightarrow y = -2x + 9$

034 Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$.

(Madrid. Junio 2003. Opción B. Ejercicio 2)

$f(0) = 0$

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} \rightarrow f'(0) = 1$$

Ecuación de la recta tangente: $y = x$

035 Sea la función $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}$.

Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva en $x = -3$.

(La Rioja. Junio 2004. Parte C. Problema 1)

$$f(-3) = \frac{20}{9}$$

$$f'(x) = \frac{3x-4}{x^3} \rightarrow f'(-3) = \frac{-9-4}{-27} = \frac{13}{27}$$

Ecuación de la recta tangente:

$$y - \frac{20}{9} = \frac{13}{27}(x+3) \rightarrow y - \frac{20}{9} = \frac{13}{27}x + \frac{39}{27} \rightarrow y = \frac{13}{27}x + \frac{11}{3}$$

036 Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = (x+1)\,e^{-x}$ en el punto de corte de $f(x)$ con el eje X.

Calculamos el punto de corte con el eje de abscisas:

$(x+1)e^{-x} = 0 \rightarrow x+1 = 0 \rightarrow x = -1$

$f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} \rightarrow f'(-1) = e$

La ecuación de la recta tangente es: $y = e(x+1)$

037 Se considera la función $f(x) = \dfrac{2x}{x+5}$.

Determinar los valores de a y b para que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = -3$ sea $y = ax + b$.

(Aragón. Septiembre 2004. Opción A. Cuestión 2)

$$f(-3) = \frac{-6}{2} = -3$$

$$f'(x) = \frac{10}{(x+5)^2} \rightarrow f'(-3) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Ecuación de la recta tangente:

$$y + 3 = \frac{5}{2}(x+3) \rightarrow y + 3 = \frac{5}{2}x + \frac{15}{2} \rightarrow y = \frac{5}{2}x + \frac{9}{2} \rightarrow a = \frac{5}{2},\ b = \frac{9}{2}$$

038 **Halle los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 - b$ en el punto (1, 5) sea la recta $y = 3x + 2$.**

(Andalucía. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 2)

$f(1) = 5 \to a - b = 5$

$f'(x) = 2ax \to f'(1) = 2a$

Como la pendiente de la recta tangente es 3 resulta: $2a = 3 \to a = \dfrac{3}{2}$

Por tanto: $a - b = 5 \to \dfrac{3}{2} - b = 5 \to b = \dfrac{3}{2} - 5 \to b = \dfrac{-7}{2}$

De este modo tenemos que: $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{7}{2}$

039 **Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $y = \ln x$ en el punto de abscisa $x = 1$.**

$f(1) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} \to f'(1) = 1$

La ecuación de la recta tangente es: $y = x - 1$

La ecuación de la recta normal es: $y = -(x - 1) \to y = -x + 1$

040 **Obtén las ecuaciones de las rectas tangente y normal a las siguientes curvas en los puntos que se indican.**

a) $y = xe^{\sqrt{x}}$, **en** $x = 4$.

b) $y = arc\ sen\sqrt{x}$, **en** $x = \dfrac{1}{2}$.

a) $f(4) = 4e^2$

$f'(x) = e^{\sqrt{x}} + xe^{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = e^{\sqrt{x}} + \dfrac{xe^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \to f'(4) = 2e^2$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 4e^2 = 2e^2(x - 4) \to y = 2e^2x - 4e^2$

La ecuación de la recta normal es:

$y - 4e^2 = -\dfrac{1}{2e^2}(x - 4) \to y = -\dfrac{1}{2e^2}x + \dfrac{2}{e^2} + 4e^2$

b) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x - x^2}} \to f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$

La ecuación de la recta tangente es: $y - \dfrac{\pi}{4} = x - \dfrac{1}{2} \to y = x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4}$

La ecuación de la recta normal es: $y - \dfrac{\pi}{4} = -\left(x - \dfrac{1}{2}\right) \to y = -x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4}$

041 **Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de $g(x) = |x^2 - 9|$ en el punto de abscisa $x = 2$.**

$g(2) = 5$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } |x| \geq 3 \\ -x^2 + 9 & \text{si } -3 < x < 3 \end{cases} \rightarrow g'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } |x| > 3 \\ -2x & \text{si } -3 < x < 3 \end{cases}$$

$g'(2) = -4$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 5 = -4(x - 2) \rightarrow y = -4x + 13$

La ecuación de la recta normal es: $y - 5 = \frac{1}{4}(x - 2) \rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$

042 **Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^3 + x^2 - 6x + 1$ en el punto de ordenada 1 y abscisa positiva.**

$$x^3 + x^2 - 6x + 1 = 1 \rightarrow x^3 + x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x^2 + x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Tenemos que hallar las rectas que pasan por el punto (2, 1).

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 6 \rightarrow f'(2) = 10$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 1 = 10(x - 2) \rightarrow y = 10x - 19$

La ecuación de la recta normal es: $y - 1 = -\frac{1}{10}(x - 2) \rightarrow y = -\frac{1}{10}x + \frac{6}{5}$

043 **Determina en qué puntos de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$, la recta tangente a la misma es paralela a la recta $y = x + 7$.**

Escribe las ecuaciones de las rectas tangente y normal en los puntos obtenidos.

Si la recta tangente es paralela a la recta $y = x$, resulta que: $f'(x) = 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

Entonces, tenemos que: $3x^2 - 6x + 1 = 1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Por tanto, los puntos de la gráfica que verifican la condición son: (0, 1) y (2, −1)

Ecuación de la recta tangente en (0, 1): $y - 1 = x \rightarrow y = x + 1$

Ecuación de la recta normal en (0, 1): $y - 1 = -x \rightarrow y = -x + 1$

Ecuación de la recta tangente en (2, −1): $y + 1 = x - 2 \rightarrow y = x - 3$

Ecuación de la recta normal en (2, −1):
$y + 1 = -(x - 2) \rightarrow y = -x + 2 \rightarrow y = -x + 1$

044 **Calcula el valor de a para que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -ax^2 + 5x - 4$, en el punto de abscisa 3, corte al eje X en el punto $x = 5$. ¿Cuál es la ecuación de la recta normal?**

$f(3) = -9a + 11$

$f'(x) = -2ax + 5 \rightarrow f'(3) = -6a + 5$

La ecuación de la recta tangente es:

$y + 9a - 11 = (-6a + 5)(x - 3) \rightarrow y = (-6a + 5)x + 9a - 4$

Si esta recta pasa por el punto (5, 0), entonces:

$(-6a + 5)5 + 9a - 4 = 0 \rightarrow -21a = -21 \rightarrow a = 1$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = -(x - 3) \rightarrow y = -x + 5$

La ecuación de la recta normal es: $y - 2 = x - 3 \rightarrow y = x - 1$

045 **Dada la función $f(x) = -x^2 + bx + c$, calcula los valores b y c si esa función pasa por el punto (1, 4) y en ese punto la ecuación de la recta tangente es $y = 4$.**

(Galicia. Junio 2001. Bloque 2. Ejercicio 2)

$f(1) = 4 \rightarrow -1 + b + c = 4 \rightarrow b + c = 5$

$f'(x) = -2x + b \rightarrow f'(1) = -2 + b$

Ecuación de la recta tangente:

$y - 4 = (-2 + b)(x - 1) \rightarrow y = (-2 + b)x + 2 - b + 4$

$$\left.\begin{array}{r} -2 + b = 0 \\ 2 - b + 4 = 4 \\ b + c = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \rightarrow f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

046 **Halla los valores de a, b y c para que las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3 + c$ pasen por el punto (1, 2) y en ese punto tengan la misma tangente.**

Si la gráfica de f pasa por el punto (1, 2), entonces: $1 + a + b = 2 \rightarrow a + b = 1$

Y si la gráfica de g pasa por el punto (1, 2) tenemos que: $1 + c = 2 \rightarrow c = 1$

Además, si en este punto tienen la misma tangente se verifica que: $f'(1) = g'(1)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2x + a \rightarrow f'(1) = 2 + a \\ g'(x) = 3x^2 \rightarrow g'(1) = 3 \end{array}\right\} \rightarrow 2 + a = 3 \rightarrow a = 1 \rightarrow b = 0$$

047 **Obtén el punto de la curva $y = \sqrt{x}$ en el cual la recta tangente es paralela a la recta $y = \frac{1}{2}x$.**

Las rectas son paralelas si tienen la misma pendiente; por tanto, buscamos el punto que verifica que: $f'(x) = \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Entonces, tenemos que: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow \sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 1$

El punto tiene por coordenadas (1, 1).

048 **Halla los puntos de la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ en los cuales la recta tangente es paralela a la recta $y = x$.**

Si la recta tangente es paralela a la recta $y = x$, resulta que: $f'(x) = 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

Entonces, tenemos que: $3x^2 - 6x + 1 = 1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Por tanto, los puntos de la gráfica que verifican la condición son (0, 0) y (2, −2).

049 **Determina el punto de la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ en el cual la recta tangente que pasa por dicho punto es paralela a la recta $y = -5x + 5$.**

Las rectas son paralelas si tienen la misma pendiente; por tanto, buscamos el punto que verifica que: $f'(x) = -5$

$f'(x) = 2x - 7$

Entonces, tenemos que: $2x - 7 = -5 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$

El punto tiene por coordenadas $(1, -3)$.

050 **Encontrar el dominio de la función $y = \log(1 + x + x^2)$ y los puntos en los que la tangente a la curva es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.**

Nota: log significa logaritmo neperiano.

(País Vasco. Julio 2007. Apartado B. Ejercicio 1)

$1 + x + x^2 > 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R}$

Como la bisectriz del primer cuadrante es la recta $y = x$, se debe verificar que:

$$y' = \frac{1 + 2x}{1 + x + x^2} = 1 \rightarrow 1 + 2x = 1 + x + x^2 \rightarrow x^2 + x - 2x = 0 \rightarrow x^2 - x = 0$$

$$\rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Los puntos son $(0, 0)$ y $(1, \log 3)$.

051 **Halla la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ cuya recta tangente en el punto $(1, 1)$ es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.**

$f'(x) = 2x + b \rightarrow f'(1) = 2 + b$

La bisectriz del primer cuadrante es la recta $y = x$.

Si la recta tangente es paralela a ella, entonces: $2 + b = 1 \rightarrow b = -1$

Así, la ecuación de la función es de la forma: $y = x^2 - x + c$

Si pasa por el punto $(1, 1)$, tenemos que: $1 = 1 - 1 + c \rightarrow c = 1$

Luego la ecuación de la parábola es $y = x^2 - x + 1$.

052 **Halle los valores de a, b y c para que la curva $f(x) = ax^2 + bx + c$ pase por el punto $(1, 3)$ y sea tangente en el origen de coordenadas a la bisectriz del primer cuadrante.**

(Navarra. Septiembre 2005. Ejercicio 2. Opción B)

$f(1) = 3 \rightarrow a + b + c = 3$ $\qquad f'(x) = 2ax + b$

Pasa por el punto $(0, 0)$: $f(0) = 0 \rightarrow c = 0$

Debe ser tangente en este punto a la bisectriz del primer cuadrante:
$f'(0) = 1 \rightarrow b = 1$

Por tanto, resulta: $a + b + c = 3 \rightarrow a + 1 = 3 \rightarrow a = 2$

Así, la función es $f(x) = 2x^2 + x$.

053 **Considere la función $f(x) = \dfrac{3 - 2x}{x}$.**

a) Halle los puntos de la gráfica en los que la recta tangente es paralela a la recta $3x + 4y + 5 = 0$.

b) Calcule las ecuaciones de dichas rectas tangentes.

(Cataluña. Junio 2006. Cuestión 1)

a) Pendiente de la recta $3x + 4y + 5 = 0 \rightarrow \frac{-3}{4}$

Se debe verificar que: $f'(x) = \frac{-3}{4} \rightarrow f'(x) = \frac{-3}{x^2} = \frac{-3}{4} \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

b) $f(2) = \frac{3-4}{2} = \frac{-1}{2}$

Recta tangente en $\left(2, \frac{-1}{2}\right)$:

$y + \frac{1}{2} = \frac{-3}{4}(x-2) \rightarrow y + \frac{1}{2} = \frac{-3}{4}x + \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{-3}{4}x + 1$

$f(-2) = \frac{3+4}{-2} = \frac{-7}{2}$

Recta tangente en $\left(-2, \frac{-7}{2}\right)$:

$y + \frac{7}{2} = \frac{-3}{4}(x+2) \rightarrow y + \frac{7}{2} = \frac{-3}{4}x - \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{-3}{4}x - 5$

054 **Considera la función:** $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \le 1 \\ -x^2+4x-3 & \text{si } 1 < x \le 3 \\ \dfrac{x-3}{x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Determina el punto de la gráfica en el que la recta tangente tiene pendiente 0. ¿Qué más se puede afirmar de ese punto? Justifica la respuesta.

(Galicia. Junio 2003. Bloque 2. Ejercicio 2)

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 1 \\ -2x+4 & \text{si } 1 < x < 3 \\ \dfrac{3}{x^2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Si la recta tangente tiene pendiente 0, se debe verificar que:

$f'(x) = 0 \rightarrow -2x + 4 = 0 \rightarrow x = 2$

El punto tiene coordenadas (2, 1).

Además, podemos afirmar que es un punto de corte con el eje X y un extremo relativo.

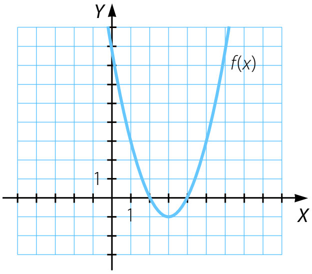
Como $f''(x) = -2 < 0$ en el intervalo (1, 3), el punto (2, 1) es un máximo.

055 **Dibujar la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 8$.**

a) ¿En qué punto de la gráfica la tangente es paralela al eje de abscisas?

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $P(2, 0)$.

(Murcia. Septiembre 2005. Bloque 3. Cuestión 2)



Se trata de una parábola con vértice (3, −1).

Puntos de corte con el eje X: (2, 0) y (4, 0)

Punto de corte con el eje Y: (0, 8)

a) Para que la tangente sea paralela al eje de abscisas:
$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$ (vértice de la parábola)

b) $f'(2) = 4 - 6 = -2$

Ecuación de la tangente: $y - 0 = -2(x - 2) \rightarrow y = -2x + 4$

056 **Sea f la función con dominio los números reales menos el cero definida por $f(x) = \dfrac{4}{x}$.**

a) Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

b) Determina los puntos A y B de la gráfica de f para los que las rectas tangentes en A y B se cortan en el punto $(4, -8)$.

a) $f(2) = 2$

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2} \rightarrow f'(2) = -1$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = -(x - 2) \rightarrow y = -x + 4$

La ecuación de la recta normal es: $y - 2 = x - 2 \rightarrow y = x$

b) Sea $P\left(p, \dfrac{4}{p}\right)$ un punto cualquiera de la gráfica de f.

$$f'(p) = -\frac{4}{p^2}$$

Así, la recta tangente en P es de la forma:

$$y - \frac{4}{p} = -\frac{4}{p^2}(x - p) \rightarrow y = -\frac{4}{p^2}x + \frac{8}{p}$$

Si esta recta pasa por el punto $(4, -8)$, tenemos que:

$$-8 = -\frac{4}{p^2} \cdot 4 + \frac{8}{p} \rightarrow 8p^2 + 8p - 16 = 0 \rightarrow p^2 + p - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ p = -2 \end{cases}$$

Luego los puntos que buscamos son $A(1, 4)$ y $B(-2, -2)$.

057 **Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y los mínimos, de las siguientes funciones polinómicas.**

a) $f(x) = x^2(x + 1)$

b) $g(x) = -x^4 + 3x^2 - 2x$

c) $h(x) = 8x + 6x^2 - x^4$

d) $i(x) = -x^3 + x^2 - 1$

e) $j(x) = |x^2 - 2|$

a) $f'(x) = 2x(x + 1) + x^2 = 3x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \dfrac{-2}{3}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{-2}{3}\right) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $\left(\dfrac{-2}{3}, 0\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

Por tanto, $f(x)$ alcanza un máximo en $x = \dfrac{-2}{3}$ y un mínimo en $x = 0$.

b) $g'(x) = -4x^3 + 6x - 2 = 0 \rightarrow x = 1,\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, 1\right) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente
- En $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \cup (1, +\infty) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente

Así, en $x = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ y en $x = 1$ alcanzan dos máximos y en $x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ un mínimo.

c) $h'(x) = 8 + 12x - 4x^3 = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 2$

$h''(x) = 12 - 12x^2$

$h''(2) < 0 \rightarrow$ En $x = 2$ alcanza un máximo.

$h''(-1) = 0$

$h'''(x) = -24x \rightarrow h'''(-1) \neq 0 \rightarrow$ En $x = -1$ hay un punto de inflexión.

Así, $h(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 2)$ y es decreciente en $(2, +\infty)$.

d) $i'(x) = -3x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(-3x + 2) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \dfrac{2}{3}$

- En $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right) \rightarrow i'(x) < 0 \rightarrow i(x)$ decreciente
- En $\left(0, \dfrac{2}{3}\right) \rightarrow i'(x) > 0 \rightarrow i(x)$ creciente

En $x = 0$ alcanza un mínimo y en $x = \dfrac{2}{3}$ un máximo.

e) $j(x) = \left|x^2 - 2\right| = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x^2 - 2 \geq 0 \\ 2 - x^2 & \text{si } x^2 - 2 < 0 \end{cases}$

$$\rightarrow j(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right) \\ 2 - x^2 & \text{si } x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \end{cases}$$

$$j'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right) \\ -2x & \text{si } x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \end{cases}$$

$j'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

- En $\left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right) \rightarrow j'(x) > 0 \rightarrow j(x)$ creciente
- En $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right) \rightarrow j'(x) < 0 \rightarrow j(x)$ decreciente

Por tanto, $j(x)$ alcanza un máximo en $x = 0$ y un mínimo en $x = -\sqrt{2}$ y en $x = \sqrt{2}$.

058 **Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos, de estas funciones racionales.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

b) $g(x) = \dfrac{40 - 5x}{10 - x}$

c) $h(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

d) $i(x) = \dfrac{x^3}{x - 5}$

a) f es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

- En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente
- En $(0, 1) \cup (1, 2) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente

En $x = 0$ alcanza un máximo y en $x = 2$ un mínimo.

b) g es continua en $\mathbb{R} - \{10\}$.

$$g'(x) = \frac{-10}{(10-x)^2} < 0 \to g(x) \text{ decreciente en todo su dominio}$$

c) h es continua en $\mathbb{R}$.

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2}{(x^2+2)^2} = 0 \to x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right) \to h'(x) < 0 \to h(x)$ decreciente
- En $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \to h'(x) > 0 \to h(x)$ creciente

Así, en $x = \sqrt{2}$ alcanza un máximo y en $x = -\sqrt{2}$ un mínimo.

d) i es continua en $\mathbb{R} - \{5\}$.

$$i'(x) = \frac{2x^3 - 15x^2}{(x-5)^2} = 0 \to x = 0,\ x = \frac{15}{2}$$

- En $(-\infty, 0) \cup (0, 5) \cup \left(5, \frac{15}{2}\right) \to i'(x) < 0 \to i(x)$ decreciente
- En $\left(\frac{15}{2}, +\infty\right) \to i'(x) > 0 \to i(x)$ creciente

En $x = \frac{15}{2}$ la función alcanza un mínimo.

059 **Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$.**

a) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos, si existen.

(Cataluña. Septiembre 2007. Cuestión 1)

a) $f(2) = \frac{4}{3}$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x}{(2x-1)^2} \to f'(2) = \frac{8-4}{9} = \frac{4}{9}$$

Ecuación de la recta tangente:

$$y - \frac{4}{3} = \frac{4}{9}(x-2) \to y = \frac{4}{9}x - \frac{8}{9} + \frac{4}{3} \to y = \frac{4}{9}x + \frac{4}{9}$$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x}{(2x-1)^2} = 0 \rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

- En $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = 0$ alcanza un máximo y en $x = 1$ un mínimo.

060 **Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y los mínimos, de estas funciones exponenciales.**

a) $f(x) = 3x^2e^x$

b) $g(x) = (x+3)e^x$

c) $h(x) = 6xe^{-x}$

d) $i(x) = e^{x^2+2x+1}$

Las cuatro funciones son continuas en $\mathbb{R}$.

a) $f'(x) = e^x(6x + 3x^2) = 0 \rightarrow x = -2, x = 0$

- En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-2, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = -2$ alcanza un máximo y en $x = 0$ un mínimo.

b) $g'(x) = e^x(x+4) = 0 \rightarrow x = -4$

- En $(-\infty, -4) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente
- En $(-4, +\infty) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

En $x = -4$ alcanza un mínimo.

c) $h'(x) = e^{-x}(6 - 6x) = 0 \rightarrow x = 1$

- En $(-\infty, 1) \rightarrow h'(x) > 0 \rightarrow h(x)$ creciente
- En $(1, +\infty) \rightarrow h'(x) < 0 \rightarrow h(x)$ decreciente

En $x = 1$ alcanza un máximo.

d) $i'(x) = (2x+2)e^{x^2+2x+1} = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

- En $(-\infty, -1) \rightarrow i'(x) < 0 \rightarrow i(x)$ decreciente
- En $(-1, +\infty) \rightarrow i'(x) > 0 \rightarrow i(x)$ creciente

En $x = -1$ alcanza un mínimo.

061 **Estudia el crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos, de las siguientes funciones logarítmicas.**

a) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

b) $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

c) $h(x) = x \ln \sqrt{x}$

d) $i(x) = \frac{x}{\ln x}$

a) El dominio de f es $(0, +\infty)$ y es continua en todo el dominio.

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1$$

- En $(0, 1) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(1, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = 1$ alcanza un mínimo.

b) El dominio de g es $(0, +\infty)$ y es continua en todo el dominio.

$$g'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \rightarrow x = \sqrt{e}$$

- En $\left(0, \sqrt{e}\right) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente
- En $\left(\sqrt{e}, +\infty\right) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente

En $x = \sqrt{e}$ alcanza un máximo.

c) El dominio de h es $(0, +\infty)$ y es continua en todo el dominio.

$$h'(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right) + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{e}$$

- En $\left(0, \frac{1}{e}\right) \rightarrow h'(x) < 0 \rightarrow h(x)$ decreciente
- En $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right) \rightarrow h'(x) > 0 \rightarrow h(x)$ creciente

En $x = \frac{1}{e}$ alcanza un mínimo.

d) El dominio de i es $(0, +\infty) - \{1\}$ y es continua en todo el dominio.

$$i'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln x^2} = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$$

- En $(0, 1) \cup (1, e) \rightarrow i'(x) < 0 \rightarrow i(x)$ decreciente
- En $(e, +\infty) \rightarrow i'(x) > 0 \rightarrow i(x)$ creciente

En $x = e$ alcanza un mínimo.

062 Estudia el crecimiento y decrecimiento de estas funciones trigonométricas, y decide si alcanzan máximos o mínimos en algún punto.

a) $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

b) $g(x) = x - \operatorname{sen} x$

c) $h(x) = \operatorname{arc\,tg} x$

d) $i(x) = 3x - \cos x$

a) f es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = -2\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos x = 0 \rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2}$$

Estudiamos el crecimiento en $(-\pi, \pi)$, ya que las funciones seno y coseno son periódicas, de período 2π.

- En $\left(-\pi, \frac{-\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

La función tiene un máximo en $x = \frac{-\pi}{2}$ y un mínimo en $x = \frac{\pi}{2}$.

Por ser una función periódica, de período 2π, podemos extender el resultado a toda la recta real repitiéndose indefinidamente intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.

b) g es continua en $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 1 - \cos x = 0 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 0$

Estudiamos el crecimiento en $(-\pi, \pi)$, ya que $g'(x)$ es periódica, de período 2π.

$g'(x) > 0$ en $(-\pi, 0) \cup (0, \pi) \rightarrow g(x)$ creciente $\rightarrow$ No tiene extremos relativos.

Extendiendo el resultado a toda la recta real, g no tiene extremos relativos.

c) h es continua en $\mathbb{R}$.

$h'(x) = \frac{1}{1 + x^2} > 0 \rightarrow h(x)$ creciente en $\mathbb{R} \rightarrow$ No tiene extremos relativos.

d) i es continua en $\mathbb{R}$.

$i'(x) = 3 + \operatorname{sen} x > 0, \forall\ x \in \mathbb{R} \rightarrow i(x)$ creciente en $\mathbb{R} \rightarrow$ No tiene extremos relativos.

063 **Determina los máximos y mínimos de estas funciones, utilizando la derivada segunda.**

a) $y = x^3 - 24x - 6$

b) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$

c) $y = \ln(x^2 + 1)$

d) $y = \frac{x^3 - 8}{x^2}$

a) $y' = 3x^2 - 24 = 0 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \pm\sqrt{8}$

$y'' = 6x$

$y''(\sqrt{8}) > 0 \rightarrow$ En $x = \sqrt{8}$ alcanza un mínimo.

$y''(-\sqrt{8}) < 0 \rightarrow$ En $x = -\sqrt{8}$ alcanza un máximo.

b) $y' = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$

$y'' = \frac{-4x^3 + 12x}{(x^2 + 1)^3}$

$y''(1) > 0 \rightarrow$ En $x = 1$ alcanza un mínimo.

$y''(-1) < 0 \rightarrow$ En $x = -1$ alcanza un máximo.

c) $y' = \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 0$

$y'' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow y''(0) = 2 > 0 \rightarrow$ En $x = 0$ alcanza un mínimo.

d) $y' = \frac{x^3 + 16}{x^3} = 0 \rightarrow x^3 = -16 \rightarrow x = -\sqrt[3]{16}$

$y'' = \frac{-48}{x^4} \rightarrow y''(-\sqrt[3]{16}) < 0 \rightarrow$ En $x = -\sqrt[3]{16}$ alcanza un máximo.

064 **Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos, de estas funciones, utilizando la segunda derivada.**

a) $y = (x^2 + 4)e^x$ b) $y = \dfrac{1}{x-2}$ c) $y = x^2e^x$ d) $y = \dfrac{x-2}{x} + 5x$

a) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = (x^2 + 2x + 4)e^x \neq 0 \rightarrow$ No tiene extremos relativos.

b) Dominio $= \mathbb{R} - \{2\}$

$y' = \dfrac{-1}{(x-2)^2} < 0 \rightarrow$ Función decreciente en todo su dominio

No tiene ningún extremo relativo.

c) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = 2xe^x + x^2e^x = e^x(2x + x^2) = 0 \rightarrow 2x + x^2 = 0 \rightarrow x = 0,\ x = -2$

$y'' = e^x(2x + x^2) + e^x(2 + 2x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$

$y''(0) > 0 \rightarrow$ En $x = 0$ se alcanza un mínimo.

$y''(-2) < 0 \rightarrow$ En $x = -2$ se alcanza un máximo.

Así, en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ la función es creciente y en $(-2, 0)$ es decreciente.

d) $y = \dfrac{x - 2 + 5x^2}{x} \rightarrow$ Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

$y' = \dfrac{5x^2 + 2}{x^2} > 0 \rightarrow$ Función creciente en todo su dominio

No tiene extremos relativos.

065 **Calcula los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ en el intervalo $[1, 4]$. Justifica que los puntos encontrados son máximos o mínimos absolutos.**

(C. Valenciana. Junio 2008. Ejercicio A. Problema 3)

Los valores de la función en los extremos del intervalo son $(1, 5)$ y $(4, 5)$.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = 1,\ x = 3$

- En $(1, 3) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(3, 4) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $(3, 1)$ alcanza un mínimo relativo, que por ser el único en $[1, 4]$ es, además, mínimo absoluto, y en $(1, 5)$ y $(4, 5)$ alcanza dos máximos absolutos, ya que se trata de los extremos del intervalo y en ambos $f(x)$ toma el mismo valor.

066 **Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$, determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.**

(Madrid. Junio 2003. Opción B. Ejercicio 2)

Dom $f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

$f'(x) = \dfrac{1 - x^2 + 2x^2}{(1 - x^2)^2} = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2} > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en todo su dominio.

Así, los intervalos de crecimiento son: $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

067 **Considera la función de variable real $f(x) = \dfrac{x^2+5x}{x-4}$.**

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Halla los extremos relativos.

(Cataluña. Septiembre 2008. Cuestión 1)

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{4\}$

$$f'(x) = \frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2} = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 10$$

- En $(-\infty, -2) \cup (10, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-2, 4) \cup (4, 10) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

b) En $x = -2$ se alcanza un máximo cuyas coordenadas son $(-2, 1)$.

En $x = 10$ se alcanza un mínimo cuyas coordenadas son $(10, 25)$.

068 **Dada la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x+3}$, calcular sus máximos y mínimos y determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.**

(Madrid. Junio 2007. Opción A. Ejercicio 2)

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3\}$

$$f'(x) = \frac{x^2+6x-27}{(x+3)^2} = 0 \rightarrow x = -9,\ x = 3$$

- En $(-\infty, -9) \cup (3, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-9, -3) \cup (-3, 3) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = -9$ se alcanza un máximo cuyas coordenadas son $(-9, -24)$.

En $x = 3$ se alcanza un mínimo cuyas coordenadas son $(3, 0)$.

069 **Comprueba que la derivada en el punto $x = -1$ de la función $f(x) = (x+1)^3$ es nula y, sin embargo, no tiene un extremo relativo.**

$f'(x) = 3(x+1)^2 \rightarrow f'(-1) = 0$; sin embargo, $f'(x) > 0$ para cualquier valor real de x. Por tanto, f es siempre creciente y no puede tener ningún extremo relativo en $x = -1$.

Esto no contradice el teorema: «Si una función es derivable en un punto y tiene en él un extremo, entonces la derivada es cero», ya que el recíproco no tiene por qué ser cierto, es decir, si la derivada en un punto es cero, no tenemos garantizado que la función en ese punto tenga un extremo.

070 **Comprueba que la siguiente función tiene un extremo relativo en el punto $x = 0$ y su derivada en ese punto no es nula.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Como f es positiva en $\mathbb{R} - \{0\}$ y vale -1 en $x = 0$, en este punto alcanza un mínimo. Por otra parte, f no es derivable en $x = 0$.

Esto no contradice el teorema enunciado en el ejercicio anterior, ya que al no ser la función derivable, no podemos aplicar dicho teorema.

071 Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{x}{3} & \text{si } x \in (-6, -1) \\ x - 1 & \text{si } x \in [-1, 4] \end{cases}$$

Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para los valores $x \in (-6, -1)$.

(Aragón. Septiembre 2008. Cuestión B2)

$$f'(x) = \frac{-3}{x^2} + \frac{1}{3} = 0 \to -9 + x^2 = 0 \to x^2 = 9 \to x = \pm 3$$

- En $(-6, -3) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente
- En $(-3, -1) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente

072 Una empresa de compra y venta de automóviles ha realizado un estudio sobre sus beneficios/pérdidas, en miles de euros, a lo largo de los últimos 10 años y ha comprobado que se ajustan a la función:

$$F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3 \quad \text{si } 0 \le t \le 10$$

Se pide justificando la respuesta:

a) ¿En qué años se producen los valores máximo y mínimo de dicha función?

b) Determinar sus períodos de crecimiento y decrecimiento.

c) ¿Cuáles son sus beneficios máximos?

d) ¿Qué resultados obtuvo la empresa en el último año del estudio?

(Extremadura. Junio 2006. Opción B. Problema 2)

a) F es continua es [0, 10] por tratarse de una función polinómica.

$F'(t) = 3t^2 - 36t + 81 = 0 \to t = 3, t = 9$

$F''(t) = 6t - 36$

$F''(3) = 18 - 36 = -18 < 0 \to$ En $t = 3$ se alcanza un máximo.

$F''(9) = 54 - 36 = 18 > 0 \to$ En $t = 9$ se alcanza un mínimo.

Por tanto, el valor máximo de la función se alcanza a los 3 años y el mínimo a los 9 años.

b) Períodos de crecimiento: $(0, 3) \cup (9, 10)$

Período de decrecimiento: $(3, 9)$

c) $F(3) = 27 - 162 + 243 - 3 = 105$

El beneficio asciende a 105.000 €.

d) $F(10) = 1.000 - 1.800 + 810 - 3 = 7$

Es decir, la empresa obtuvo un beneficio de 7.000 €.

073 Para cada valor de a se considera la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - ax}{x + 2}$.

Calcular el valor de a para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = 2$.

(Madrid. Septiembre 2002. Opción A. Ejercicio 2)

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 12x - 2a}{(x+2)^2}$$

Para que haya un mínimo en $x = 2$ se debe cumplir que:

$$f'(2) = 0 \rightarrow \frac{12 + 24 - 2a}{16} = 0 \rightarrow 36 - 2a = 0 \rightarrow a = 18$$

074 **Hallar los valores de a y b para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + x + 1$ tenga un máximo en el punto $x = 1$ y un mínimo en el punto $x = 2$.**

(Murcia. Septiembre 2004. Bloque 2. Cuestión 1)

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1$

$f'(1) = 0 \rightarrow 3a + 2b + 1 = 0$

$f'(2) = 0 \rightarrow 12a + 4b + 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} 3a + 2b + 1 = 0 \\ 12a + 4b + 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{1}{6},\ b = \frac{-3}{4}$$

075 **Sea la función $f(x) = x - \dfrac{k}{x}$. Determine el valor de k de modo que la función tenga un máximo en $x = -1$.**

En la función así determinada, hallar:

a) El dominio de definición.

b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función, así como los máximos y los mínimos.

(Cantabria. Junio 2007. Ejercicio 2. Opción A)

$$f'(x) = 1 + \frac{k}{x^2} \rightarrow f'(-1) = 0 \rightarrow 1 + k = 0 \rightarrow k = -1$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = -1$ se alcanza un máximo cuyas coordenadas son $(-1, -2)$, y en $x = 1$ un mínimo cuyas coordenadas son $(1, 2)$.

076 **Obtén los parámetros r, s y t para que la función $f(x) = x^3 - rx^2 + sx + t$ tenga un máximo en $x = -2$, un mínimo en $x = 0$ y pase por el punto $(1, -1)$.**

(C. Valenciana. Septiembre 2008. Ejercicio A. Problema 3)

Pasa por $(1, -1) \rightarrow 1 - r + s + t = -1 \rightarrow -r + s + t = -2$

$f'(x) = 3x^2 - 2rx + s$

Tiene un máximo en $x = -2 \rightarrow f'(-2) = 0 \rightarrow 12 + 4r + s = 0$

Tiene un mínimo en $x = 0 \rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow s = 0$

Por tanto, resulta: $\left.\begin{array}{r} -r + t = -2 \\ 12 + 4r = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} r = -3 \\ t = -5 \end{array}\right. \rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$

077 Hallar los valores de a, b, c y d en la función $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que su tangente en el punto (1, 1) es la recta $y = -x + 2$ y que tiene un extremo en el punto (0, 2).

(Murcia. Junio 2006. Bloque 3. Cuestión 2)

Pasa por (1, 1) $\rightarrow 1 = a + b + c + d$

Pasa por (0, 2) $\rightarrow d = 2$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow y'(1) = 3a + 2b + c$

Se debe verificar que: $y'(1) = -1 \rightarrow 3a + 2b + c = -1$

Tiene un extremo en el punto (0, 2) $\rightarrow y'(0) = 0 \rightarrow c = 0$

Por tanto, resulta: $\left.\begin{array}{r} a + b + 2 = 1 \\ 3a + 2b = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \end{array}\right. \rightarrow y = x^3 - 2x^2 + 2$

078 Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, R, en euros viene dada por $R(x) = -0{,}01x^2 + 5x + 2.500$, siendo x la cantidad que se invierte.

a) ¿Cuánto ha de invertir un inversor si quiere obtener una rentabilidad máxima?

b) Calcula esa rentabilidad máxima.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2005. Bloque 3. Ejercicio B)

a) $R'(x) = -0{,}02x + 5 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5}{0{,}02} \rightarrow x = 250$

$R''(x) = -0{,}02 < 0 \rightarrow$ En $x = 250$ la función alcanza un máximo.

Así, para obtener una rentabilidad máxima hay que invertir 250 €.

b) $R(250) = -625 + 1.250 + 2.500 = 3.125$ € es la rentabilidad máxima.

079 En la construcción de un túnel, el porcentaje de roca fragmentada o de mala calidad viene dado por el siguiente modelo matemático:

$$R(x) = \frac{x^3}{3} - 4{,}5x^2 + 18x + 15 \quad \text{si } 0 \le x \le 7$$

$R(x)$ representa dicho porcentaje cuando la distancia a la boca del túnel es x, en kilómetros.

Si en algún tramo de la perforación el porcentaje supera el 40 %, se deberán reforzar las medidas de sostenimiento y seguridad de la estructura.

a) Indica en qué tramos de la perforación el porcentaje crece y en cuáles decrece.

b) Señala los máximos y mínimos (absolutos y relativos), así como los puntos de inflexión de la curva.

(Asturias. Junio 2008. Bloque 3)

a) $R'(x) = x^2 - 9x + 18 = 0 \rightarrow x = 3,\ x = 6$

- En $(0, 3) \rightarrow R'(x) > 0 \rightarrow R(x)$ creciente
- En $(3, 6) \rightarrow R'(x) < 0 \rightarrow R(x)$ decreciente
- En $(6, 7) \rightarrow R'(x) > 0 \rightarrow R(x)$ creciente

Por tanto, el porcentaje crece en $(0, 3) \cup (6, 7)$ y decrece en $(3, 6)$.

b) $R''(x) = 2x - 9 = 0 \rightarrow x = \frac{9}{2} = 4{,}5$

$R'''(x) = 2 \neq 0 \rightarrow$ En $x = 4{,}5$ hay un punto de inflexión.

De los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, y a partir del valor de la función en [0, 7], deducimos que:

- En $x = 3$ se alcanza un máximo relativo y, además, como $R(3) = 37{,}5$, este punto es el máximo absoluto de la función. Sus coordenadas son (3; 37,5).
- En $x = 6$ se alcanza un mínimo relativo cuyas coordenadas son (6, 33).
- En $x = 0$, como $R(0) = 15$, se alcanza el mínimo absoluto de la función. Sus coordenadas son (0, 15).

080 **Un artículo de consumo estuvo a la venta durante 8 años, y su precio $P(t)$, en miles de euros, varió con el tiempo t, en años, que llevaba en el mercado, según la función:**

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ -\frac{5}{2}t + 25 & \text{si } 2 < t \le 8 \end{cases}$$

Averiguar en qué momentos se alcanzaron los precios máximo y mínimo, y cuáles fueron esos precios.

(País Vasco. Junio 2008. Apartado B. Ejercicio 1)

En $t = 2$ la función es continua, ya que se cumple que:

$P(2) = P(2^-) = 16 + 4 = 20$ $\qquad$ $P(2^+) = \frac{-5}{2} \cdot 2 + 25 = 20$

Por tanto, la función es continua en (0, 8).

$$P'(t) = \begin{cases} 8t & \text{si } 0 < t < 2 \\ -\frac{5}{2} & \text{si } 2 < t < 8 \end{cases}$$

- En $(0, 2) \rightarrow P'(t) > 0 \rightarrow P(t)$ creciente
- En $(2, 8) \rightarrow P'(t) < 0 \rightarrow P(t)$ decreciente

$P(0) = 4$ $\qquad$ $P(2) = 16 + 4 = 20$ $\qquad$ $P(8) = -20 + 25 = 5$

El precio mínimo se alcanzó al comienzo de la venta, siendo de 4.000 €, y el precio máximo se alcanzó a los 2 años de venderse el producto, y fue de 20.000 €.

081 **El rendimiento de los trabajadores de una fábrica (valorado en una escala de 0 a 100), durante una jornada de 8 horas, viene dado por la función:**

$$r(t) = \begin{cases} -10t^2 + 60t & \text{si } 0 \le t < 4 \\ 80 & \text{si } 4 \le t < 6 \\ 170 - 15t & \text{si } 6 \le t \le 8 \end{cases}$$

siendo t el tiempo en horas.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Cuál es el rendimiento máximo?

b) ¿En qué instantes de su jornada laboral el rendimiento se sitúa en la mitad de la escala?

(Galicia. Septiembre 2007. Bloque 2. Ejercicio 1)

a) En $t=4$ la función es continua, ya que se cumple que:

$r(4^-) = -160 + 240 = 80$ $\qquad$ $r(4) = r(4^+) = 80$

En $t=6$ la función es continua, pues se cumple que:

$r(6^-) = 80$ $\qquad$ $r(6) = r(6^+) = 80$

Por tanto, la función es continua en (0, 8).

$$r'(t) = \begin{cases} -20t + 60 & \text{si } 0 < t < 4 \\ 0 & \text{si } 4 < t < 6 \\ -15 & \text{si } 6 < t < 8 \end{cases}$$

- En $(0, 4) \rightarrow r'(t) = 0 \rightarrow -20t + 60 = 0 \rightarrow t = 3$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{En } (0, 3) \rightarrow r'(t) > 0 \rightarrow r(t) \text{ creciente} \\ \text{En } (3, 4) \rightarrow r'(t) < 0 \rightarrow r(t) \text{ decreciente} \end{cases}$$

- En $(4, 6) \rightarrow r'(t) = 0 \rightarrow r(t)$ constante
- En $(6, 8) \rightarrow r'(t) < 0 \rightarrow r(t)$ decreciente

Por tanto, el rendimiento máximo se alcanza cuando $t=3$, siendo su valor de 90.

b) El rendimiento se sitúa en la mitad de la escala si $r(t) = 50$. De esta manera, puede ocurrir que:

- $-10t^2 + 60t - 50 = 0 \rightarrow -t^2 + 6t - 5 = 0 \rightarrow t = 1, t = 5$

  En este caso, solo es válida la solución $t=1$, porque la otra solución no está en (0, 4).

- $170 - 15t = 50 \rightarrow 170 - 50 = 15t \rightarrow t = 8$

Así, el rendimiento se situará a la mitad de la escala cuando hayan pasado 1 u 8 horas.

082 **La oferta de un bien conocido su precio, p, es:**

$$S(p) = \begin{cases} 30p + 200 & \text{si } 0 \le p \le 10 \\ p^2 - 60p + 1.000 & \text{si } 10 < p \le 40 \end{cases}$$

Diga para qué valor del precio se alcanza la máxima y la mínima oferta.

(Aragón. Septiembre 2007. Opción A. Cuestión 2)

En $p=10$, la función es continua ya que se cumple que:

$S(10) = S(10^-) = 500$ $\qquad$ $S(10^+) = 500$

Por tanto, la función es continua en (0, 40).

$$S'(p) = \begin{cases} 30 & \text{si } 0 < p < 10 \\ 2p - 60 & \text{si } 10 < p < 40 \end{cases}$$

- En $(0, 10) \rightarrow S'(p) > 0 \rightarrow S(p)$ creciente
- En $(10, 40) \rightarrow S'(p) = 0 \rightarrow 2p - 60 = 0 \rightarrow p = 30$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{En } (10, 30) \rightarrow S'(p) < 0 \rightarrow S(p) \text{ decreciente} \\ \text{En } (30, 40) \rightarrow S'(p) > 0 \rightarrow S(p) \text{ creciente} \end{cases}$$

$S(0) = 200$ $\qquad$ $S(10) = 500$ $\qquad$ $S(30) = 100$ $\qquad$ $S(40) = 200$

La máxima oferta se alcanza para un valor del precio de 10, y la mínima oferta para un valor del precio de 30.

083 La distancia, en millas, entre un barco pesquero que salió a faenar durante un período de 10 días y su puerto base viene dada por la función:

$$M(t) = \begin{cases} 36 - (2t - 6)^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 5 \\ 4(10 - t) & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

donde t es el tiempo transcurrido, en días, desde su salida del puerto base.

a) ¿Después de cuántos días es máxima la distancia del pesquero a su puerto base? ¿A cuántas millas se encontraba?

b) ¿Durante qué períodos aumentaba la distancia a su puerto base? ¿En qué períodos disminuía?

c) ¿A partir de qué día, después de alcanzar la distancia máxima, se encontraba a menos de 12 millas del puerto base?

(Galicia. Septiembre 2008. Bloque 2. Ejercicio 1)

a) En $t = 5$ la función es continua, ya que se cumple que:

$M(5) = M(5^-) = 36 - 16 = 20$ $\qquad$ $M(5^+) = 20$

$$M'(t) = \begin{cases} -2(2t - 6) & \text{si } 0 < t < 5 \\ -4t & \text{si } 5 < t < 10 \end{cases}$$

- En $(0, 5) \rightarrow M'(t) = 0 \rightarrow -4t + 12 = 0 \rightarrow t = 3$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{En } (0, 3) \rightarrow M'(t) > 0 \rightarrow M(t) \text{ creciente} \\ \text{En } (3, 5) \rightarrow M'(t) < 0 \rightarrow M(t) \text{ decreciente} \end{cases}$$

- En $(5, 10) \rightarrow M'(t) < 0 \rightarrow M(t)$ decreciente

$M(0) = 36 - 36 = 0$ $\qquad$ $M(3) = 36$ $\qquad$ $M(5) = 36 - 16 = 20$ $\qquad$ $M(10) = 0$

La distancia del barco pesquero al puerto base es máxima a los 3 días, encontrándose a 36 millas.

b) La distancia al puerto base aumentaba en el período (0, 3) y disminuía en los períodos (3, 5) y (5, 10).

c) Como en (3, 5) la función es decreciente y $M(5) = 20$, el día que buscamos estará entre 5 y 10.

$M(t) < 12 \rightarrow 4(10 - t) < 12 \rightarrow 10 - t < 3 \rightarrow 7 < t \rightarrow$ A partir del día 7 se encontrará siempre a menos de 12 millas de distancia del puerto base.

084 Determina los intervalos de concavidad y de convexidad, así como los puntos de inflexión, de estas funciones.

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 4$

b) $y = x^4 + 2x^3 - 3$

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^3 - 8}{x^2}$

e) $y = \sqrt{9 + x^2}$

f) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

a) La función es continua en $\mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x + 2 = 0$

$y'' = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$

- En $(-\infty, 1) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(1, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

Así, en $x = 1$ alcanza un punto de inflexión.

b) La función es continua en $\mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 + 6x^2$

$y'' = 12x^2 + 12x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = -1$

- En $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $(-1, 0) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

Así, en $x = -1$ y $x = 0$ alcanza puntos de inflexión.

c) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$y' = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3} \neq 0 \rightarrow \text{No tiene puntos de inflexión.}$$

Los intervalos en los que hay que estudiar la curvatura son:
$(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $(-1, 1) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

d) La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$y' = \frac{x^3 + 16}{x^3}$$

$$y'' = \frac{-48}{x^4} < 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \text{Función convexa}$$

No tiene puntos de inflexión.

e) La función está definida en $\mathbb{R}$.

$$y' = \frac{x}{\sqrt{9 + x^2}}$$

$$y'' = \frac{9}{(9 + x^2)\sqrt{9 + x^2}} > 0 \text{ en } \mathbb{R} \rightarrow \text{Función cóncava}$$

No tiene puntos de inflexión.

f) La función está definida en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$y'' = \frac{-4}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}} < 0 \text{ en todo su dominio} \rightarrow \text{Función convexa}$$

No tiene puntos de inflexión.

085 **Estudia en qué intervalos estas funciones son cóncavas y en cuáles son convexas. Calcula también los puntos de inflexión que tengan.**

a) $y = (x - 3)e^x$

b) $y = \dfrac{\ln x}{2x}$

c) $y = \cos x - \cos 2x$

d) $y = \ln (x^2 - x)$

e) $y = \dfrac{x^2}{2^x}$

f) $y = \sqrt{x^2 - x}$

g) $y = \dfrac{x}{e^x}$

a) La función es continua en $\mathbb{R}$.

$y' = (x-2)e^x$ $\quad\quad\quad$ $y'' = (x-1)e^x = 0 \rightarrow x = 1$

- En $(-\infty, 1) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(1, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = 1$ tiene un punto de inflexión.

b) La función es continua en $(0, +\infty)$.

$$y' = \frac{1 - \ln x}{2x^2}$$

$$y'' = \frac{2\ln x - 3}{2x^3} = 0 \rightarrow \ln x = \frac{3}{2} \rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \rightarrow x = \sqrt{e^3}$$

- En $\left(0, \sqrt{e^3}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $\left(\sqrt{e^3}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = \sqrt{e^3}$ tiene un punto de inflexión.

c) La función es continua en $\mathbb{R}$.

$y' = -sen\ x + 2\ sen\ 2x$

$$y'' = -cos\ x + 4\ cos\ 2x = -cos\ x + 4(cos^2\ x - sen^2\ x) =$$
$$= -cos\ x + 4(cos^2\ x - 1 + cos^2\ x) = 8\ cos^2\ x - cos\ x - 4 = 0$$

Las soluciones aproximadas son:

$cos\ x = 0{,}77 \rightarrow x = 0{,}69 + 2k\pi;\ x = 5{,}59 + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{R}$

$cos\ x = -0{,}65 \rightarrow x = 2{,}28 + 2k\pi;\ x = 3{,}79 + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{R}$

Estudiamos la concavidad en $(0, 2\pi)$, ya que la función es periódica:

- En $(0;\ 0{,}69) \cup (2{,}28;\ 3{,}79) \cup (5{,}59;\ 2\pi) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $(0{,}69;\ 2{,}28) \cup (3{,}79;\ 5{,}59) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

Por tanto, todos los puntos que anulan y'' son puntos de inflexión.

d) La función está definida en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

$$y' = \frac{2x - 1}{x^2 - x}$$

$$y'' = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{(x^2 - x)^2} < 0 \text{ en todo su dominio} \rightarrow \text{Función convexa}$$

No tiene puntos de inflexión.

e) La función es continua en $\mathbb{R}$.

$$y' = \frac{2x - x^2 \ln 2}{2^x}$$

$$y'' = \frac{2 - 4x\ln 2 + x^2 \ln^2 2}{2^x} = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{\ln 2}$$

- En $\left(-\infty, \dfrac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}\right) \cup \left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}, \dfrac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En $x = \dfrac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}$ y $x = \dfrac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}$ tiene dos puntos de inflexión.

f) La función está definida en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

$$y' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

$$y'' = \frac{4\sqrt{x^2-x} - \dfrac{(2x-1)^2}{\sqrt{x^2-x}}}{4(x^2-x)} = \frac{4(x^2-x)-(4x^2+1-4x)}{4(x^2-x)\sqrt{x^2-x}} =$$

$$= \frac{-1}{4(x^2-x)\sqrt{x^2-x}} \neq 0 \rightarrow \text{No hay puntos de inflexión.}$$

Además, es negativa en todo el dominio, por lo que siempre es convexa.

g) La función está definida en $\mathbb{R}$.

$$y' = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$y'' = \frac{-e^x-(1-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{-2+x}{e^x} = 0 \rightarrow x = 2$$

- En $(-\infty, 2) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(2, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = 2$ hay un punto de inflexión.

086 **Comprueba que $f(x) = -7x^4$ tiene nula la derivada segunda en $x = 0$ y, sin embargo, no tiene un punto de inflexión.**

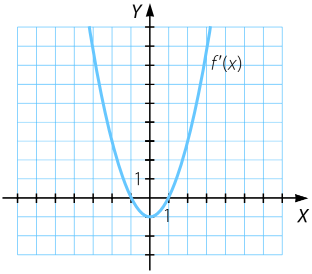
$f(x) = -7x^4$ $\quad$ $f'(x) = -28x^3$ $\quad$ $f''(x) = -84x^2 \rightarrow f''(0) = 0$

En $x = 0$ no se alcanza un punto de inflexión, porque $f''(x) < 0$ para cualquier valor real de x. Por tanto, la función es siempre convexa.

087 **La derivada de cierta función f es $f'(x) = x^2 - 1$.**

Representar gráficamente f' y deducir de esa gráfica los intervalos de crecimiento y de concavidad de f.

(País Vasco. Junio 2005. Apartado B. Ejercicio 1)



- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-1, 1) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

Así, en $x = -1$ se alcanza un máximo y en $x = 1$ un mínimo.

$f'(0) = 0$, pues $f'(x)$ presenta un mínimo en $x = 0$.

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f'(x)$ decreciente $\rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(0, +\infty) \rightarrow f'(x)$ creciente $\rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

Así, en $x = 0$ hay un punto de inflexión.

088 **Queremos añadir a una casa una nueva habitación rectangular de 12 m² de superficie. ¿Qué longitud debemos dar a sus paredes para que el perímetro sea mínimo y sea mínima también la cantidad de ladrillos utilizados?**

Si x e y son las dimensiones, tenemos que: $xy = 12 \rightarrow y = \frac{12}{x}$

Como la nueva habitación se añade a la casa, una de sus paredes debe coincidir, y de esa forma no necesitamos ningún ladrillo, puesto que ya está construida.

Así, debemos minimizar: $P(x, y) = 2x + y \rightarrow P(x) = 2x + \frac{12}{x}$

$P'(x) = 2 - \frac{12}{x^2} = \frac{2x^2 - 12}{x^2} = 0 \rightarrow x = -\sqrt{6}, x = \sqrt{6}$

Y como una longitud no puede ser negativa, tenemos que: $x = \sqrt{6} \rightarrow y = 2\sqrt{6}$

Comprobamos que en este punto se alcanza un mínimo:

$P''(x) = \frac{24}{x^3} \rightarrow P''\left(\sqrt{6}\right) > 0 \rightarrow$ Se trata de un mínimo.

Las dimensiones de la habitación son $x = \sqrt{6}$ m e $y = 2\sqrt{6}$ m.

089 **Se desea delimitar una parcela rectangular, que linda con la pared de una nave. Si se dispone de 200 m de tela metálica para cercarla, ¿cuáles son las dimensiones de la parcela que tiene la mayor superficie?**

Llamamos x e y a las dimensiones de la parcela. Como va a estar unida a la pared de la nave, se verifica que: $2x + y = 200 \rightarrow y = 200 - 2x$

Se trata maximizar la función superficie dada por:

$S(x) = xy \rightarrow S(x) = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$

$S'(x) = 200 - 4x = 0 \rightarrow x = 50$

$S''(x) = -4 < 0$ en $\mathbb{R} \rightarrow$ En $x = 50$ alcanza un máximo.

Las dimensiones de la parcela son $x = 50$ m e $y = 100$ m.

090 **¿Qué dimensiones debe tener un paragüero con forma de prisma cuadrado, de 20 dm³ de volumen, para que en su fabricación se use la menor cantidad posible de material?**

Llamamos x a la arista de la base e y a la altura del prisma cuadrangular.

Entonces se debe cumplir que: $x^2y = 20 \rightarrow y = \frac{20}{x^2}$

Como un paragüero no tiene base superior, tenemos que minimizar la función superficie que viene dada por:

$S(x, y) = x^2 + 4xy \rightarrow S(x) = x^2 + 4x\frac{20}{x^2} = x^2 + \frac{80}{x}$

$S'(x) = 2x - \frac{80}{x^2} = \frac{2x^3 - 80}{x^2} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{40}$

$S''(x) = 2 + \frac{160}{x^3} \rightarrow S''\left(\sqrt[3]{40}\right) > 0 \rightarrow$ Se alcanza un mínimo.

Las dimensiones del paragüero son:

Arista de la base: $x = \sqrt[3]{40}$ dm   Altura: $y = \frac{20}{\left(\sqrt[3]{40}\right)^2} = \frac{20}{\sqrt[3]{1.600}}$ dm

091 **¿Todos los cilindros con igual volumen tienen la misma superficie total? ¿Cuál tiene la menor superficie?**

Sean r y h las dimensiones del radio de la base y de la altura del cilindro.

Si $V(r, h)$ es el volumen:

$$V(r, h) = \pi r^2 h \rightarrow h = \frac{V(r, h)}{\pi r^2}$$

La superficie del cilindro que debemos minimizar viene dada por:

$$S(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V(r, h)}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V(r, h)}{r}$$

Como el volumen siempre es el mismo, derivamos respecto de r:

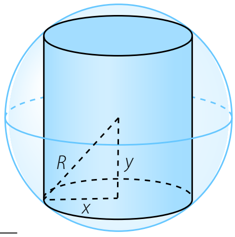
$$S'(r, h) = 4\pi r - \frac{2V(r, h)}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V(r, h)}{r^2} = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V(r, h)}{2\pi}}$$

$$S''(r, h) = 4\pi + \frac{4V(r, h)}{r^3} \rightarrow S''\left(\sqrt[3]{\frac{V(r, h)}{2\pi}}\right) > 0 \rightarrow \text{Se alcanza un mínimo.}$$

Así, no todos los cilindros con el mismo volumen tienen la misma superficie total, y el cilindro de menor superficie tiene estas dimensiones:

$$r = \sqrt[3]{\frac{V(r, h)}{2\pi}} \qquad h = \sqrt[3]{\frac{4V(r, h)}{\pi}}$$

092 **De todos los cilindros que pueden inscribirse en una esfera de 9 cm de radio, halla la altura y el radio del que tiene mayor volumen.**



Llamamos x al radio de la base del cilindro e y a la mitad de su altura, siendo $R = 9$.

Se verifica que:

$$x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 81 \rightarrow y = \sqrt{81^2 - x^2}$$

La función que debemos maximizar es:

$V(x, y) = \pi x^2 h$, siendo $h = 2y$.

$$V(x, y) = 2\pi x^2 y \rightarrow V(x) = 2\pi x^2\sqrt{81 - x^2} = 2\pi\sqrt{81x^4 - x^6}$$

$$V'(x) = \frac{2\pi(324x^3 - 6x^5)}{2\sqrt{81x^4 - x^6}} = \frac{\pi(324x^3 - 6x^5)}{\sqrt{81x^4 - x^6}} = 0 \rightarrow x = 0, x = \sqrt{54}$$

- En $\left(0, \sqrt{54}\right) \rightarrow V'(x) > 0 \rightarrow V(x)$ creciente
- En $\left(\sqrt{54}, +\infty\right) \rightarrow V'(x) < 0 \rightarrow V(x)$ decreciente

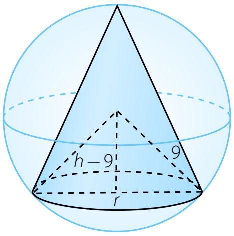
Por tanto, en $x = \sqrt{54}$ alcanza un máximo.

Así, la altura y el radio del cilindro de mayor volumen que puede inscribirse en una esfera de radio 9 cm es:

Radio: $\sqrt{54}$ cm

Altura: $2\sqrt{81 - 54} = 2\sqrt{27}$ cm

093 **De todos los conos que pueden inscribirse en una esfera de 9 cm de radio, halla la altura y el radio del que tiene mayor volumen.**



Llamamos *r* y *h* al radio y la altura del cono.

Se cumple que:

$r^2 + (h-9)^2 = 81$

$r^2 = 81 - (h-9)^2 = -h^2 + 18h$

La función que debemos optimizar es:

$$V(r, h) = \frac{1}{3}\cdot \pi r^2 h \rightarrow V(h) = \frac{1}{3}\cdot \pi(-h^2 + 18h)h = \frac{1}{3}\cdot \pi(-h^3 + 18h^2)$$

$$V'(h) = \frac{1}{3}\cdot \pi(-3h^2 + 36h) = \pi(-h^2 + 12h) = 0 \rightarrow h = 0,\ h = 12$$

$V''(h) = \pi(-2h + 12)$

$V''(0) > 0 \rightarrow$ Para $h = 0$ alcanza un mínimo.

$V''(12) < 0 \rightarrow$ Para $h = 12$ alcanza un máximo.

Así, el cono que tiene mayor volumen es el que tiene altura 12 cm y radio de la base $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ cm.

094 **Con un trozo de alambre de 12 cm de longitud se pueden formar distintos rectángulos. ¿Cuál de ellos tiene la superficie máxima?**

Sean *x* e *y* las dimensiones del rectángulo. Se cumple que:

$2x + 2y = 12 \rightarrow x + y = 6$

Así, la función que debemos maximizar es: $S(x) = x(6 - x) = 6x - x^2$

$S'(x) = 6 - 2x = 0 \rightarrow x = 3$

$S''(x) = -2 < 0 \rightarrow$ En $x = 3$ alcanza un máximo.

Por tanto, las dimensiones del rectángulo de superficie máxima son 3 cm y 3 cm, es decir, un cuadrado de lado 3 cm.

095 **Hallar dos números cuya suma es 20, sabiendo que su producto es máximo.**

(Cantabria. Septiembre 2007. Ejercicio 2. Opción B)

Sean *x* e *y* los dos números que buscamos. Se cumple que:

$x + y = 20 \rightarrow y = 20 - x$

$P(x, y) = xy \rightarrow P(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$

$P'(x) = 20 - 2x = 0 \rightarrow x = 10$

$P''(x) = -2 < 0 \rightarrow$ En $x = 10$ se alcanza un máximo, por lo que los números son $x = 10$ e $y = 10$.

096 **Considera la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$$

Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esta función que tiene máxima pendiente en el intervalo [1, *e*].

Como necesitamos que la pendiente sea máxima, la función que tenemos que optimizar es la función derivada primera:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1+x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2-x}{x^3} = 0 \rightarrow x = 2$$

$f'''(x) = \dfrac{2x-6}{x^4} \rightarrow f'''(2) < 0 \rightarrow$ En $x = 2$ alcanza un máximo.

$f(2) = \dfrac{1}{2} + \ln 2 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en el punto $\left(2, \dfrac{1}{2} + \ln 2\right)$ con pendiente $f'(2) = \dfrac{2-1}{4} = \dfrac{1}{4}$ es:

$$y - \left(\frac{1}{2} + \ln 2\right) = \frac{1}{4}(x-2)$$

097 **¿En qué punto de la parábola $y = 4 - x^2$ la tangente forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima?**

La función del enunciado representa una parábola con vértice en el eje *Y*, por lo que habrá dos soluciones simétricas con respecto a este eje, una en el primer cuadrante y otra en el segundo. Sea $(a, 4 - a^2)$ un punto de la parábola del primer cuadrante.

$y' = -2x \rightarrow y'(a) = -2a \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto $(a,\ 4 - a^2)$ es: $y - (4 - a^2) = -2a(x - a) \rightarrow y = -2ax + a^2 + 4$

Los puntos de intersección de esta recta con los ejes son: $(0,\ a^2 + 4)$ y $\left(\dfrac{a^2+4}{2a}, 0\right)$

El área del triángulo que se forma con estos puntos y el punto (0, 0) es:

$A(a) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a^2+4}{2a}(a^2+4) = \dfrac{(a^2+4)^2}{4a}$, que es la función que debemos optimizar.

$$A'(a) = \frac{16a^2(a^2+4) - 4(a^2+4)^2}{16a^2} = \frac{3a^4 + 8a^2 - 16}{4a^2} = 0 \rightarrow a = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ es la solución del primer cuadrante.

$$A''(a) = \frac{4a^2(12a^3 + 16a) - 8a(3a^4 + 8a^2 - 16)}{16a^4} = \frac{3a^4 + 16}{2a^3} \rightarrow A''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) > 0$$

En $\left(\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$ la tangente forma con los ejes un triángulo de área mínima.

098 **Determina el punto de la parábola $y = x^2$ que está más próximo al punto (3, 0).**

Sea (x, y) el punto de la parábola que buscamos. La distancia de este punto al punto (3, 0) viene dada por: $d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2}$

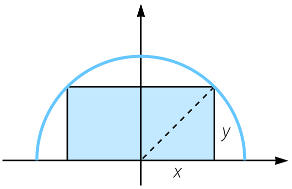
La función que se optimiza es: $D = d^2 = (x-3)^2 + y^2 \rightarrow D(x) = (x-3)^2 + x^4$

$D'(x) = 2(x-3) + 4x^3 = 0 \rightarrow x = 1$ es la única solución real.

$D''(x) = 2 + 12x^2 \rightarrow D''(1) > 0 \rightarrow$ En $x = 1$ alcanza un mínimo.

Así, el punto buscado es (1, 1).

099 **Determina las dimensiones de los lados de un rectángulo de área máxima que está inscrito en una semicircunferencia de 5 cm de radio, teniendo uno de los lados sobre el diámetro de la misma.**



Sean x la mitad de la base del rectángulo e y la altura. Se cumple que:

$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$

La función que se optimiza es:

$A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2} = 2\sqrt{25x^2 - x^4}$

$A'(x) = \dfrac{50x - 4x^3}{\sqrt{25x^2 - x^4}} = 0 \rightarrow 50x - 4x^3 = 0 \rightarrow x = 0, x = \sqrt{\dfrac{25}{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

En $\left(0, \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow A'(x) > 0$ y en $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \rightarrow A'(x) < 0$

Por tanto, en $x = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ alcanza un máximo.

Así, las dimensiones del rectángulo de área máxima son: $x = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ cm e $y = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ cm, es decir, se trata de un cuadrado.

100 **Entre todos los rectángulos de 3 m^2 de área, halla las dimensiones del que tenga mínimo el producto de las diagonales.**

Sean x e y las dimensiones del rectángulo, de modo que: $xy = 3$

La función que se optimiza viene dada por:

$P = d \cdot d = d^2 = x^2 + y^2 \rightarrow P(x) = x^2 + \left(\dfrac{3}{x}\right)^2 = x^2 + \dfrac{9}{x^2}$

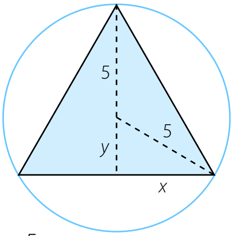
$P'(x) = 2x - \dfrac{18}{x^3} = 0 \rightarrow 2x^4 - 18 = 0 \rightarrow x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$

La solución válida es: $x = \sqrt{3}$

$P''(x) = 2 + \dfrac{54}{x^4} \rightarrow P''\left(\sqrt{3}\right) > 0 \rightarrow$ En este punto alcanza un mínimo.

Las dimensiones son $x = \sqrt{3}$ m e $y = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ m, es decir, es un cuadrado de lado $\sqrt{3}$ m.

101 **De todos los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia de 5 cm de radio, halla las dimensiones del que tiene mayor área.**



Llamamos x a la mitad de la base del triángulo, $y + 5$ a la altura. Se verifica que:

$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow x = \sqrt{25 - y^2}$

La función que hay que optimizar viene dada por:

$$A(y) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{25 - y^2}\,(y + 5) = (y + 5)\sqrt{25 - y^2}$$

$$A'(y) = \sqrt{25 - y^2} + (y + 5) \cdot \frac{-2y}{2\sqrt{25 - y^2}} = \frac{25 - y^2 - y^2 - 5y}{\sqrt{25 - y^2}} = 0$$

$$\rightarrow -2y^2 - 5y + 25 = 0 \rightarrow y = -5,\ y = \frac{5}{2}$$

La solución válida es la solución positiva.

- En $\left(-5, \frac{5}{2}\right) \rightarrow A'(y) > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \rightarrow A'(y) < 0 \rightarrow$ Función decreciente

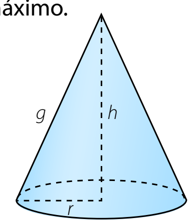
Así, en $y = \frac{5}{2}$ alcanza un máximo.

Por tanto, las dimensiones del triángulo de mayor área son:

Base: $2x = 2 \cdot \frac{\sqrt{75}}{2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ cm

Altura: $y + 5 = \frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2}$ cm

102 **El perímetro de un triángulo isósceles mide 10 m. Si gira alrededor de la altura correspondiente al lado desigual, engendra un cono.**
Calcula los lados del triángulo para que el volumen del cono sea máximo.



Por el teorema de Pitágoras se verifica que:

$r^2 + h^2 = g^2 \rightarrow h = \sqrt{g^2 - r^2}$

Como el perímetro del triángulo es 10 m, tenemos que:

$2g + 2r = 10 \rightarrow g + r = 5 \rightarrow g = 5 - r$

Así, sustituyendo en la expresión de la altura:

$$h = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{(5 - r)^2 - r^2} = \sqrt{25 + r^2 - 10r - r^2} = \sqrt{25 - 10r}$$

La función que se optimiza es:

$$V(r, h) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h \rightarrow V(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \sqrt{25 - 10r} = \frac{\pi}{3}\sqrt{25r^4 - 10r^5}$$

$$V'(r) = \frac{\pi(100r^3 - 50r^4)}{6\sqrt{25r^4 - 10r^5}} = 0 \rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = 2 \end{cases}$$

La solución válida es $r = 2$.

Así, las dimensiones del triángulo son:

Base: 4 m Lados: 3 m

103 Un taller artesanal está especializado en la producción de cierto tipo de juguetes. Los costes de fabricación, $C(x)$, en euros, están relacionados con el número de juguetes fabricados, x, a través de la expresión:

$$C(x) = 10x^2 - 1.850x + 25.000$$

El precio de venta de cada juguete es de 50 €.

a) Plantear la función de ingresos que obtiene el taller con la venta de los juguetes producidos.

b) Plantear la función de beneficios, entendidos como la diferencia entre ingresos y costes de fabricación.

c) ¿Cuántos juguetes debe fabricar para maximizar beneficios? ¿A cuánto ascenderán estos beneficios?

(Canarias. Septiembre 2008. Prueba B. Pregunta 4)

a) $I(x) = 50x$

b) $B(x) = I(x) - C(x) = 50x - (10x^2 - 1.850x + 25.000) =$
$= -10x^2 + 1.900x - 25.000$

c) $B'(x) = -20x + 1.900 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1.900}{20} = 95$

$B''(x) = -20 < 0 \rightarrow$ En $x = 95$ se alcanza un máximo.

$B(95) = -90.250 + 180.500 - 25.000 = 65.250$

Así, para maximizar el beneficio se deben vender 95 juguetes, ascendiendo el beneficio a 65.250 €.

104 La función $B(x) = \dfrac{-x^2 + 9x - 16}{x}$ representa, en miles de euros, el beneficio neto de un proceso de venta, siendo x el número de artículos vendidos. Calcular el número de artículos que deben venderse para obtener el beneficio máximo y determinar dicho beneficio máximo.

(Madrid. Junio 2005. Opción A. Ejercicio 2)

$$B'(x) = \frac{-x^2 + 16}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$$

$$B''(x) = \frac{-32}{x^3}$$

- $B''(-4) > 0 \rightarrow$ En $x = -4$ se alcanza un mínimo.
- $B''(4) < 0 \rightarrow$ En $x = 4$ se alcanza un máximo.

$$B(4) = \frac{-16 + 36 - 16}{4} = 1$$

Así, para obtener el beneficio máximo se deben vender 4 artículos, siendo este beneficio de 1.000 €.

105 **Se desea fabricar una papelera cilíndrica, sin tapa, de 10 dm^3 de capacidad. ¿Qué dimensiones deberá tener para que en su fabricación se utilice la menor cantidad de material?**

Si r y h son el radio y la altura del cilindro: $\pi r^2 h = 10 \rightarrow h = \dfrac{10}{\pi r^2}$

La función que se optimiza es:

$S(r, h) = \pi r^2 + 2\pi rh \rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \dfrac{10}{\pi r^2} = \pi r^2 + \dfrac{20}{r}$

$S'(r) = 2\pi r - \dfrac{20}{r^2} = 0 \rightarrow 2\pi r^3 - 20 = 0 \rightarrow \pi r^3 - 10 = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$

$S''(r) = 2\pi + \dfrac{40}{r^3} \rightarrow S''\left(\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}\right) > 0 \rightarrow$ En $r = \sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$ alcanza un mínimo.

Por tanto, para utilizar la menor cantidad de material, las dimensiones de la papelera cilíndrica serán $r = \sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$ dm y $h = \sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$ dm.

106 **Determine cómo tienen que ser tres números reales positivos para que su suma valga 100, la suma del primero más dos veces el segundo más tres veces el tercero sea 200 y su producto sea lo mayor posible.**

(La Rioja. Junio 2007. Parte B. Problema 2)

Llamamos x, y, z a los números que buscamos.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 100 \\ x + 2y + 3z = 200 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 100 - y - z \\ x = 200 - 2y - 3z \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow 100 - y - z = 200 - 2y - 3z \\ \rightarrow y = 100 - 2z \end{array}$$

$100 - y - z = 200 - 2y - 3z \rightarrow y = 100 - 2z$

Por tanto, resulta: $x = 100 - (100 - 2z) - z = 2z - z = z$

$P(x, y, z) = xyz \rightarrow P(z) = z(100 - 2z)z = 100z^2 - 2z^3$

$P'(z) = 200z - 6z^2 = z(200 - 6z) = 0 \rightarrow z = 0,\ z = \dfrac{200}{6} = \dfrac{100}{3}$

$P''(z) = 200 - 12z \rightarrow P''\left(\dfrac{100}{3}\right) < 0 \rightarrow$ En $z = \dfrac{100}{3}$ se alcanza un máximo.

Así, tenemos que: $x = \dfrac{100}{3}$ $\qquad y = 100 - \dfrac{200}{3} = \dfrac{100}{3}$ $\qquad z = \dfrac{100}{3}$

107 **Halla las dimensiones de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que, al dar una vuelta completa alrededor de un lado, genera un cilindro de volumen máximo.**

Tenemos que optimizar la función $V(r, h) = \pi r^2 h$, donde r es el radio y h es la altura del cilindro. La cartulina rectangular, por las condiciones del enunciado, tendrá dimensiones h y r, por lo que se cumplirá que:

$2h + 2r = 60 \rightarrow h + r = 30 \rightarrow h = 30 - r$

Así, resulta: $V(r) = \pi r^2(30 - r) = 30\pi r^2 - \pi r^3$

$V'(r) = 60\pi r - 3\pi r^2 = 0 \rightarrow r = 0,\ r = 20$

La solución válida es $r = 20$.

$V''(r) = 60\pi - 6\pi r \rightarrow V''(20) < 0 \rightarrow$ En $r = 20$ alcanza un máximo.

Las dimensiones de la cartulina para conseguir el cilindro de volumen máximo son $r = 20$ cm y $h = 10$ cm.

108 Una fábrica de televisores vende cada aparato a 300 €. Los gastos derivados de fabricar x televisores son $D(x) = 200x + x^2$, donde $0 \le x \le 80$.

a) Suponiendo que se venden todos los televisores que se fabrican, halle la función de los beneficios que se obtienen después de fabricar y vender x televisores.

b) Determine el número de aparatos que conviene fabricar para obtener el beneficio máximo, así como dicho beneficio máximo.

(Cataluña. Año 2008. Serie 5. Cuestión 4)

a) $B(x) = 300x - D(x) = 300x - (200x + x^2) = 100x - x^2$, donde $0 \le x \le 80$

b) $B'(x) = 100 - 2x = 0 \rightarrow x = 50$

$B''(x) = -2 < 0 \rightarrow$ En $x = 50$ se alcanza un máximo.

$B(50) = 5.000 - 2.500 = 2.500$

Así, para obtener el máximo beneficio se han de fabricar 50 televisores, siendo el beneficio de 2.500 €.

109 Se ha determinado que el coste total, en euros, que le supone a cierta empresa la producción de n unidades de determinado artículo varía según la función $C(n) = 2n^3 + 270n + 2.048$.

Determinar, justificando la respuesta:

a) La función que define el coste por unidad producida.

b) El número de unidades que deben producirse para hacer mínimo el coste por unidad.

c) El valor de dicho coste mínimo por unidad.

(Extremadura. Septiembre 2007. Opción B. Problema 2)

a) $f(n) = \dfrac{2n^3 + 270n + 2.048}{n}$

b) $f'(n) = \dfrac{4n^3 - 2.048}{n^2} = 0 \rightarrow 4n^3 = 2.048 \rightarrow n^3 = 512 \rightarrow n = 8$

$f''(n) = \dfrac{4n^3 + 4.096}{n^3} \rightarrow f''(8) > 0 \rightarrow$ En $n = 8$ se alcanza un mínimo.

Por tanto, para hacer mínimo el coste por unidad, deben producirse 8 unidades.

c) $f(8) = \dfrac{1.024 + 2.160 + 2.048}{8} = 654$

El valor del coste mínimo por unidad es de 654 €.

110 Se quiere organizar una competición deportiva que consiste en nadar desde un lugar A, situado en la orilla de un río, hasta otro lugar B situado en la misma orilla; allí se sale del río y corriendo hay que llegar hasta otro lugar C, desde el cual se regresa de nuevo a B, donde acaba la competición.
Se supone que todos los trayectos son rectilíneos. La distancia de C a A mide 10 km y la distancia de C al río mide 6 km.

Determina a qué distancia de A hay que situar el punto B para que el recorrido completo sea el menor posible.

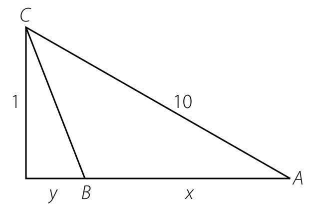
$d = x + y$

$100 = 36 + d^2 \rightarrow d^2 = 64 \rightarrow d = 8$

$y = 8 - x \rightarrow d^2(B, C) = 36 + (8 - x)^2$

$\rightarrow d^2(B, C) = 36 + 64 + x^2 - 16x =$

$= x^2 - 16x + 100$



Podemos expresar la distancia recorrida de la siguiente forma:

$E(x) = x + 2\sqrt{x^2 - 16x + 100}$

$E'(x) = 1 + \dfrac{2x - 16}{\sqrt{x^2 - 16x + 100}} = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 - 16x + 100} = 16 - 2x$

$\rightarrow x^2 - 16x + 100 = 256 + 4x^2 - 64x$

$\rightarrow 3x^2 - 48x - 156 = 0 \rightarrow x = 11{,}46;\ x = 4{,}54$

De las dos soluciones solo es válida $x = 4{,}54$.

A la izquierda de 4,54: $E'(x) < 0 \rightarrow E(x)$ decreciente, y a la derecha: $E'(x) > 0 \rightarrow E(x)$ creciente. Así, en $x = 4{,}54$ se alcanza un mínimo, por lo que para que el trayecto sea el menor posible hay que situar B a 4,54 km de A.

111 **La función de coste total de producción de x unidades de un determinado producto es $C(x) = \dfrac{1}{3}x^2 + 6x + 192$. Se define la función de coste medio por unidad como $\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. ¿A qué nivel de producción será mínimo el coste medio por unidad?**

(Baleares. Junio 2005. Opción A. Cuestión 2)

$$\overline{C}(x) = \frac{\frac{1}{3}x^2 + 6x + 192}{x}$$

$\overline{C}'(x) = \dfrac{\frac{1}{3}x^2 - 192}{x^2} = \dfrac{x^2 - 576}{3x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 576 \rightarrow x = \pm 24$. Solo es válida la solución positiva, porque no se puede producir un número negativo de unidades.

$\overline{C}''(x) = \dfrac{384}{x^3} \rightarrow \overline{C}''(24) > 0 \rightarrow$ En $x = 24$ se alcanza un mínimo.

El coste medio por unidad será mínimo cuando se produzcan 24 unidades.

112 **Halla un número xy tal que la suma de sus cifras sea 12 y de modo que la suma del cubo de la cifra de las decenas y del triple del cuadrado de la cifra de las unidades sea lo más pequeña posible.**

(Castilla-La Mancha. Junio 2001. Bloque 3. Ejercicio A)

$x + y = 12 \rightarrow y = 12 - x$

La función que hay que minimizar es: $S(x, y) = x^3 + 3y^2 \rightarrow S(x) = x^3 + 3(12 - x)^2$

$S'(x) = 3x^2 - 6(12 - x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 72 + 6x = 0 \rightarrow x = -6,\ x = 4$

$S''(x) = 6x + 6$

$S''(-6) < 0 \rightarrow$ En $x = -6$ se alcanza un máximo.

$S''(4) > 0 \rightarrow$ En $x = 4$ se alcanza un mínimo.

Así, las cifras del número que buscamos son: $x = 4,\ y = 8$

Por tanto, el número es 48.

113 **Descomponer de forma razonada el número 90 en dos sumandos tales que el resultado de sumar el cuadrado del primero y el doble del segundo sea mínimo.**

(C. Valenciana. Junio 2003. Ejercicio B. Problema 4)

$x + y = 90 \rightarrow y = 90 - x$

Debemos minimizar esta función:

$S(x, y) = x^2 + 2y \rightarrow S(x) = x^2 + 2(90 - x) = x^2 + 180 - 2x = x^2 - 2x + 180$

$S'(x) = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$

$S''(x) = 2 > 0 \rightarrow$ En $x = 1$ se alcanza un mínimo.

Así, los dos sumandos que buscamos son $x = 1$ e $y = 89$.

114 **Un vendedor de pólizas de seguros tiene un sueldo fijo de 1.000 €, más una comisión que viene dada por la función $17x - 0{,}0025x^3$, donde x representa el número de pólizas vendidas. Si el vendedor tiene mensualmente un gasto general de 200 €, más otro de 5 € por póliza contratada, calcular el número de pólizas que debe contratar mensualmente para que su ganancia sea máxima. ¿A cuánto asciende dicha ganancia?**

(Galicia. Septiembre 2006. Bloque 2. Ejercicio 2)

Sueldo: $1.000 + 17x - 0{,}0025x^3$ Gasto: $200 + 5x$

Ganancia: $G(x) = 1.000 + 17x - 0{,}0025x^3 - 200 - 5x = -0{,}0025x^3 + 12x + 800$

$$G'(x) = -0{,}0075x^2 + 12 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{12}{0{,}0075} = 1.600 \rightarrow x = \pm 40$$

$G''(x) = -0{,}015x \rightarrow G''(40) < 0 \rightarrow$ Para que la ganancia sea máxima se deben contratar mensualmente 40 pólizas.

$G(40) = 1.120 \rightarrow$ La ganancia obtenida será de 1.120 €.

115 **Suponga que en su casa hay un cuarto de baño con ducha y otro con bañera. Los caudales de agua que salen por la ducha y por el grifo de la bañera son, respectivamente, de 12 litros/minuto y 9,6 litros/minuto. Si decide bañarse necesita tener abierto el grifo de la bañera durante 10 minutos para que se llene. El agua caliente proviene de un termo eléctrico y calentarla hasta la temperatura que le guste cuesta 0,01 € por litro. El agua de la ducha se calienta con un calentador de gas y calentarla a esa temperatura vale 0,8 céntimos de euro por litro. ¿Cuánto tiempo puede durar una ducha para que le salga más barato que darse un baño?**

(Murcia. Junio 2003. Bloque 3. Cuestión 1)

En la bañera entran $10 \cdot 9{,}6 = 96$ litros de agua

Llenar la bañera cuesta: $96 \cdot 0{,}01 = 0{,}96$ €.

Si x es el número de minutos que el grifo de la ducha está abierto, la función del gasto viene dada por: $G(x) = 12 \cdot 0{,}008x = 0{,}096x$

El máximo de esta función debe ser menor que 0,96.

$$G(x) = 0{,}0096x < 0{,}96 \rightarrow x < \frac{0{,}96}{0{,}0096} \rightarrow x < 100$$

Los costes de la ducha y el baño se igualarían a los 100 minutos.

116 Una discoteca abre sus puertas a las 10 de la noche sin ningún cliente y las cierra cuando se han marchado todos. Se supone que la función representa el número de clientes, n, en función del número de horas que lleva abierto, t, es $N(t) = 80t - 10t^2$.

a) Determina a qué hora el número de clientes es máximo. ¿Cuántos clientes hay en ese momento?

b) ¿A qué hora cerrará la discoteca?

(Castilla y León. Septiembre 2007. Bloque B. Pregunta 2)

a) $N'(t) = 80 - 20t = 0 \rightarrow t = 4$

$N''(t) = -20 < 0 \rightarrow$ Para $t = 4$ se alcanza un máximo.

$N(4) = 320 - 160 = 160$

Así, el número de clientes es máximo cuando pasan 4 horas desde que la discoteca se abre, y en ese momento hay 160 clientes.

b) La discoteca cerrará cuando no quede ningún cliente.

$N(t) = 0 \rightarrow 80t - 10t^2 = 0 \rightarrow t(80 - 10t) = 0 \rightarrow t = 0, t = 8$

La discoteca cerrará cuando lleve 8 horas abierta, es decir, a las 6 de la mañana.

117 El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función:

$$f(x) = \begin{cases} -5x^2 + 40x - 60 & \text{si } 0 \le x \le 6 \\ \dfrac{5x}{2} - 15 & \text{si } 6 < x \le 10 \end{cases}$$

donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

a) Calcule el gasto en publicidad a partir del cual la empresa no tiene pérdidas.

b) Calcule el gasto en publicidad que produce máximo beneficio. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

(Andalucía. Año 2007. Modelo 6. Opción A. Ejercicio 2)

a) En $x = 6$ la función es continua: $f(6) = f(6^-) = 0$ $\qquad f(6^+) = 15 - 15 = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} -10x + 40 & \text{si } 0 < x < 6 \\ \dfrac{5}{2} & \text{si } 6 < x < 10 \end{cases}$$

- En $(0, 6) \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow -10x + 40 = 0 \rightarrow x = 4$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{En } (0, 4) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ creciente} \\ \text{En } (4, 6) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ decreciente} \end{cases}$$

- En $(6, 10) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

$f(0) = -60 \qquad f(4) = 20 \qquad f(6) = 0 \qquad f(10) = 10$

$-5x^2 + 40x - 60 = 0 \rightarrow x = 2, x = 6$

Así, la función es negativa en (0, 2) y es positiva en (2, 6).

También es positiva en (6, 10).

Por tanto, la empresa no tendrá pérdidas a partir de un gasto en publicidad de 2.000 €.

b) El gasto en publicidad que produce el máximo beneficio es 4.000 €, siendo este beneficio de 20.000 €.

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Se considera la curva de ecuación $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$, se pide la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto de abscisa $x = 1$.

(Madrid. Septiembre 2005. Opción A. Ejercicio 2)

$f(1) = \dfrac{1}{2}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} \to f'(1) = \dfrac{4}{4} = 1$

Ecuación de la recta tangente: $y - \dfrac{1}{2} = x - 1 \to y = x - \dfrac{1}{2}$

2 Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$, calcula:

a) La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f, en el punto de abscisa $x = -1$.

b) Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento.

c) Los máximos relativos y los mínimos relativos. ¿Cuánto vale la función f en estos puntos?

(Baleares. Septiembre 2007. Opción B. Cuestión 6)

a) $f'(x) = 3x^2 + 6x$
$f'(-1) = 3 - 6 = -3 \to$ La pendiente es -3.

b) $f'(x) = 0 \to 3x^2 + 6x = 0 \to x(3x+6) = 0 \to x = 0,\ x = -2$

- En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente
- En $(-2, 0) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente

c)
- En $x = -2$ se alcanza un máximo y $f(-2) = 0$.
- En $x = 0$ se alcanza un mínimo y $f(0) = -4$.

3 Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2}{a - bx}$, siendo a y b parámetros reales.

a) Determine los valores de los parámetros a y b para los que $f(2) = -4$ y la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 6$ es horizontal.

b) Para $a = 1$ y $b = -1$, razone cuál es el dominio de $f(x)$ y determine los intervalos de concavidad y de convexidad y puntos de inflexión de $f(x)$.

(Aragón. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 2)

a) $f(2) = -4 \to \dfrac{4}{a-2b} = -4 \to 4 = -4a + 8b \to 1 = -a + 2b$

$$f'(x) = \frac{2x(a-bx) - x^2(-b)}{(a-bx)^2} = \frac{2xa - 2bx^2 + bx^2}{(a-bx)^2} = \frac{2xa - bx^2}{(a-bx)^2}$$

$f'(6) = 0 \to \dfrac{12a - 36b}{(a-6b)^2} = 0 \to 12a - 36b = 0 \to a = 3b$

$1 = -3b + 2b \to 1 = -b \to b = -1 \to a = -3$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x} \to \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$f'(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ $\qquad f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} \neq 0 \to$ No presenta puntos de inflexión.

- En $(-\infty, -1) \to f''(x) < 0 \to f(x)$ convexa
- En $(-1, +\infty) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava

4 La atención ante un anuncio de televisión (en una escala del 0 al 100) de 3 minutos de duración se comporta según la función $A(t) = -10t^2 + 40t + 40$, con $0 \leq t \leq 3$.

a) ¿A cuántos minutos de comenzar el anuncio se presta la máxima atención?

b) Cuando finaliza el anuncio, ¿en qué punto de la escala de atención se está?

c) ¿En qué punto de la escala de atención se está transcurridos 90 segundos?

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2006. Bloque 3. Ejercicio B)

a) $A'(t) = -20t + 40 = 0 \rightarrow t = \dfrac{40}{20} = 2$

$A''(t) = -20 < 0 \rightarrow$ En $t = 2$ se alcanza un máximo.

A los dos minutos de comenzar se presta la máxima atención, siendo su valor 80.

b) $t = 3 \rightarrow A(3) = -90 + 120 + 40 = 70$

En una escala del 0 al 100 está en el punto 70.

c) $90 \text{ s} = 1{,}5 \text{ min} \rightarrow A(1{,}5) = -22{,}5 + 60 + 40 = 77{,}5$

En una escala del 0 al 100 está en el punto 77,5.

5 Determinar las condiciones más económicas de una piscina abierta al aire, de volumen 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y del suelo necesite la cantidad mínima de material.

(Murcia. Junio 2004. Bloque 2. Cuestión 1)

Sean x el lado de la base e y la profundidad de la piscina, cumpliendo que:

$$x^2y = 32 \rightarrow y = \frac{32}{x^2}$$

$$S(x, y) = x^2 + 4xy \rightarrow S(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}$$

$$S'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^3 - 128 = 0 \rightarrow x^3 = 64 \rightarrow x = 4$$

$$S''(x) = 2 + \frac{256}{x^3} \rightarrow S''(4) > 0 \rightarrow \text{En } x = 4 \text{ se alcanza un mínimo.}$$

$$x = 4 \rightarrow y = \frac{32}{16} = 2$$

Así, cada lado de la base de la piscina debe medir 4 metros y su profundidad será de 2 metros.

6 Una feria ganadera permanece abierta desde las 10 a las 20 horas. Se ha comprobado que el número de visitantes diarios queda determinado, como función de la hora del día, a través de la expresión $N(t) = -20(A - t)^2 + B$, si $10 \leq t \leq 20$.

Sabiendo que a las 17 horas alcanza el número máximo de 1.500 visitantes, determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

(Extremadura. Junio 2007. Opción B. Problema 2)

$$N(17) = -20(A - 17)^2 + B = 1.500 \rightarrow -20(A^2 + 289 - 34A) + B = 1.500$$
$$\rightarrow -20A^2 - 5.780 + 680A + B = 1.500$$
$$\rightarrow -20A^2 + 680A + B = 7.280$$

$$N'(t) = 40(A - t) \rightarrow N'(17) = 40(A - 17) = 0 \rightarrow A - 17 = 0 \rightarrow A = 17$$

$$-20 \cdot 289 + 11.560 + B = 7.280 \rightarrow B = 7.280 - 11.560 + 5.780 \rightarrow B = 1.500$$

7 Se estima que los beneficios mensuales de una fábrica de golosinas, en miles de euros, vienen dados por la función $f(x) = -0{,}1x^2 + 2{,}5x - 10$, cuando se venden x toneladas de producto. Se pide:

a) Calcular la cantidad de toneladas que se ha de vender para obtener el beneficio máximo y calcular este. Justificar que es máximo.

b) La cantidad mínima que se ha de vender para no tener pérdidas.

c) ¿Qué cantidad produce el máximo beneficio por tonelada vendida? Calcular el máximo beneficio y justificar que es máximo.

(C. Valenciana. Junio 2005. Ejercicio A. Problema 3)

a) $f'(x) = -0{,}2x + 2{,}5 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2{,}5}{0{,}2} = 12{,}5$

$f''(x) = -0{,}2 < 0 \rightarrow$ En $x = 12{,}5$ se alcanza un máximo.

$f(12{,}5) = -15{,}625 + 31{,}25 - 10 = 5{,}625$

Para obtener el máximo beneficio se han de vender 12 toneladas y media, siendo el beneficio de 5,625 miles de euros.

b) Estudiamos cuando el beneficio es 0, ya que entonces no habrá pérdidas.

$f(x) = 0 \rightarrow -0{,}1x^2 + 2{,}5x - 10 = 0 \rightarrow x = 5,\ x = 20$

Por tanto, la cantidad mínima que tenemos que vender es 5 toneladas.

c) La función que nos da el beneficio por tonelada vendida es:

$$g(x) = \frac{-0{,}1x^2 + 2{,}5x - 10}{x}$$

$$g'(x) = \frac{-0{,}1x^2 + 10}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = \frac{10}{0{,}1} = 100 \rightarrow x = \pm 10$$

$$g''(x) = \frac{-20}{x^3}$$

$g''(-10) > 0 \rightarrow$ En $x = -10$ se alcanza un mínimo.

$g''(10) < 0 \rightarrow$ En $x = 10$ se alcanza un máximo.

Para producir el máximo beneficio por tonelada vendida hay que vender 10 toneladas.

$$g(10) = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Por tanto, el beneficio será de 500 €.