UNIDAD 9: Integrales indefinidas

CUESTIONES INICIALES-PÁG. 222

1. Una función *F(x) es primitiva de una función f(x) siempre que la derivada de F(x) sea f(x).* Comprueba, en cada uno de los siguientes apartados, que la función F(x) es primitiva de f(x).

a) $F(x) = \ln \sqrt[3]{6x^2+5}$; $f(x) = \frac{4x}{6x^2+5}$

b) $F(x) = \frac{3x-2}{(x-1)^2}$; $f(x) = \frac{1-3x}{(x-1)^3}$

Fácilmente se deriva la función F (x) y se obtiene f (x).

2. Encuentra funciones cuyas derivadas sean las siguientes:

a) $f(x) = 3x^2$ **c)** $f(x) = \cos x$

b) $f(x) = e^x$ **d)** $f(x) = \frac{2}{x-1}$

Un ejemplo de funciones son:

a) $F(x) = x^3 + 5$; $F(x) = x^3 - 2/5$

b) $F(x) = e^x - 3$; $F(x) = e^x + \sqrt{2}$

c) $F(x) = \text{sen } x + \frac{1}{2}$; $F(x) = \text{sen } x + \pi$

d) $F(x) = 2 \cdot \ln|x-1| + \frac{2}{5}$; $F(x) = 2 \cdot \ln|x-1| - \sqrt{5}$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 235

1. Número impares. Demuestra que la suma de dos números naturales impares es un número par.

Se puede decir:

Los números de la forma 2n + 1 y 2n + 3 son números impares. Su suma es:

$$(2n + 1) + (2n + 3) = 4n + 4 = 4 \cdot (n + 1).$$

2. Números cuadrados. Demuestra que si a, b, c y d son números naturales, tales que:

$$P = a^2 + b^2 \quad \text{y} \quad Q = c^2 + d^2$$

entonces el producto PQ es también suma de los cuadrados de dos números naturales.

Queda del siguiente modo:

$$P \cdot Q = (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 237

1. Resuelve las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int (3x-1)\cdot \ln(x+2)\,dx$ **b)** $\int \sqrt{\dfrac{3}{1+3x}}\,dx$ **c)** $\int \dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-7x+10}\,dx$

Utilizando los mismos comandos de la actividad desarrollada obtenemos la solución de cada una de estas integrales indefinidas que vemos en las imágenes siguientes:

$$\int (3\cdot x-1)\cdot \ln(x+2) \rightarrow -6\cdot\ln(|x+2|)+\left(\left(\frac{3\cdot x^2}{2}-x-2\right)\cdot\ln(x+2)-\frac{3\cdot x^2}{4}\right)+4\cdot x$$

$$\int \sqrt{\frac{3}{1+3\cdot x}} \rightarrow \frac{6\cdot\sqrt{3}\cdot x+2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{3\cdot x+1}}$$

$$\int \frac{2\cdot x^2+3\cdot x-2}{x^2-7\cdot x+10} \rightarrow 21\cdot\ln(|-x+5|)-4\cdot\ln(|x-2|)+2\cdot x$$

2. Halla las siguientes integrales definidas:

a) $\int_1^3 \dfrac{3x-1}{x^2+x}\,dx$ **b)** $\int_0^1 (5x+4)\cdot e^{-x}\,dx$ **c)** $\int_0^{\pi} sen^5\,x\,dx$

Utilizando los mismos comandos de la actividad desarrollada obtenemos el resultado de cada una de estas integrales definidas que vemos en la imagen siguiente:

$$\int_1^3 \frac{3x-1}{x^2+x} \rightarrow 1.674$$

$$\int_0^1 (5x+4)\cdot e^{-x} \rightarrow \frac{9\cdot e-14}{e}$$

$$\int_0^{\pi} (\text{sen}\,(x))^5 \rightarrow \frac{16}{15}$$

3. Calcula el área del recinto, del primer cuadrante, limitado por las gráficas de las funciones f (x) = x^2 - 6; g(x) = $\sqrt{x}$ y el eje OX.

De la misma forma que hemos hecho en la actividad desarrollada resolvemos esta nueva actividad como vemos en la siguiente imagen:

$f(x)=x^2-6 \rightarrow x \mapsto x^2-6$

$g(x)=\sqrt{x} \rightarrow x \mapsto \sqrt{x}$

dibujar(f(x),{color=rojo,anchura_linea=2}) → tablero1

dibujar(g(x),{color=azul,anchura_linea=3}) → tablero1

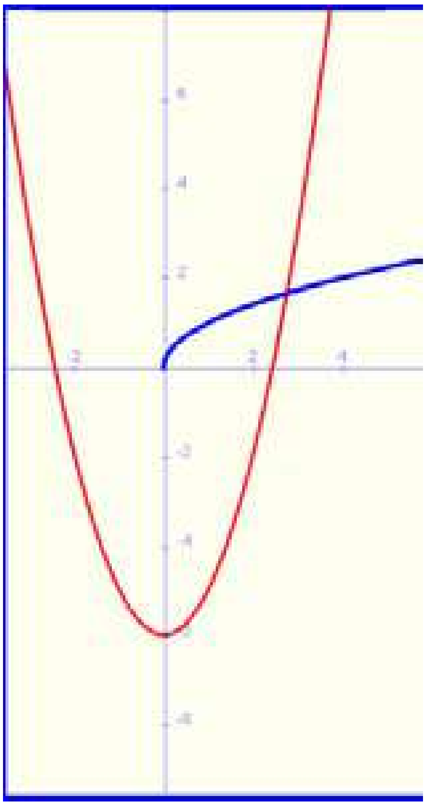
resolver(f(x)=g(x)) → {{x=2.7684}}

resolver(f(x)=0) → $\{\{x=-\sqrt{6}\},\{x=\sqrt{6}\}\}$

$\text{Integral1}=\int_0^{2.7684}(g(x)) \rightarrow 3.0708$

$\text{Integral2}=\int_{\sqrt{6}}^{2.7684}(f(x)) \rightarrow 0.25993$

$\text{Area}=|\text{Integral1}-\text{Integral2}| \rightarrow 2.8109$



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 240

1. Halla dos primitivas de cada una de las siguientes funciones:

a) f (x) = 4x **b) f (x) = 3x^2 + 5** **c) f (x) = -3** **d) f (x) = e^{-x}**

Ejemplos de las primitivas pedidas son:

a) F (x) = 2x^2 + 4; F (x) = 2x^2 -7

b) F (x) = x^3 + 5x-2; F (x) = x^3 + 5x

c) F (x) = -3x + 1; F (x) = -3x – 0,5

d) F (x) = - e^{-x} + 9; F (x) = - e^{-x} -6

2. Halla una función f(x) cuya derivada es f ´(x) = $\frac{3}{x-1}$ y que pasa por el punto (2, 5).

Imponiendo las condiciones del enunciado tenemos:

F (x) = $\int \frac{3}{x-1}\,dx = 3\ln|x-1| + C$

Como f (2) = 5, entonces 5 = 3 · ln (1) + C, de modo que C = 5. La función buscada es:

$$f(x) = 3\ln|x-1| + 5$$

3. Halla la primitiva de la función f(x) = (2x - 3)^2 que valga $\frac{9}{2}$ para x = 0.

Todas las primitivas de la función son f(x) = $\int (2x-3)^2\,dx = \frac{(2x-3)^3}{6} + C$.

Se debe verificar que f (0) = $\frac{9}{2}$. De modo que sustituyendo obtenemos: $\frac{9}{2} = \frac{-27}{6} + C$, es decir, C = 9.

La función buscada es f(x) = $\frac{(2x-3)^3}{6} + 9$

4. Resuelve las siguientes integrales inmediatas, cuyas funciones primitivas son funciones potenciales:

a) $\int 7x^2\,dx$

b) $\int \frac{5}{x^4}\,dx$

c) $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx$

d) $\int \frac{x}{2x^3}\,dx$

e) $\int (6x^2 - 5x + 7)\,dx$

f) $\int \left(4x^3 - \frac{2}{x^2}\right) dx$

g) $\int 3x\,(2x+5)^2\,dx$

h) $\int \left(\frac{5x^2 - 9}{x^2}\right) dx$

i) $\int \left(\frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{x^4}{8} - 2\right) dx$

j) $\int 4x^2 \cdot (x^2+2)^2\,dx$

k) $\int (6x^2-5)^8 \cdot x\,dx$

l) $\int 7x^2\,\sqrt{x^3+2}\,dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int 7x^2\ dx = \dfrac{7x^3}{3} + C$

b) $\int \dfrac{5}{x^4}\ dx = \dfrac{-5}{3\ x^3} + C$

c) $\int \sqrt[5]{x^2}\ dx = \dfrac{5\ \sqrt[5]{x^7}}{7} + C$

d) $\int \dfrac{x}{2x^3}\ dx = \dfrac{-1}{2x} + C$

e) $\int \left(6x^2 - 5x + 7\right) dx = 2x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 7x + C$

f) $\int \left(4x^3 - \dfrac{2}{x^2}\right) dx = x^4 + \dfrac{2}{x} + C$

g) $\int 3x\ (2x+5)^2\ dx = 3x^4 + 20x^3 + \dfrac{75}{2}x^2 + C$

h) $\int \left(\dfrac{5x^2 - 9}{x^2}\right) dx = 5x + \dfrac{9}{x} + C$

i) $\int \left(\dfrac{3}{2\sqrt{x}} + \dfrac{x^4}{8} - 2\right) dx = 3\sqrt{x} + \dfrac{x^5}{40} - 2x + C$

j) $\int 4x^2 \cdot \left(x^2+2\right)^2\ dx = \int \left(4x^6 + 16x^4 + 16x^2\right) dx = \dfrac{4x^7}{7} + \dfrac{16x^5}{5} + \dfrac{16x^3}{3} + C$

k) $\int \left(6x^2 - 5\right)^8 \cdot x\,dx = \dfrac{\left(6x^2-5\right)^9}{108} + C$

l) $\int 7x^2\ \sqrt{x^3+2}\ dx = \dfrac{14\ \sqrt{\left(x^3+2\right)^3}}{9} + C$

5. Resuelve las siguientes integrales inmediatas, cuyas funciones primitivas son funciones exponenciales:

a) $\int e^{3x}\,dx$ **c)** $\int x\cdot 7^{5x^2}\,dx$ **e)** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

b) $\int 2^{4x}\,dx$ **d)** $\int x^2\cdot e^{x^3}\,dx$ **f)** $\int \left(e^{-2x}+e^{2x}\right)dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}+C$

b) $\int 2^{4x}\,dx = \frac{1}{4\ln 2}2^{4x}+C$

c) $\int x\cdot 7^{5x^2}\,dx = \frac{1}{10\cdot\ln 7}7^{5x^2}+C$

d) $\int x^2\cdot e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}e^{x^3}+C$

e) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\,e^{\sqrt{x}}+C$

f) $\int \left(e^{-2x}+e^{2x}\right)dx = \frac{-1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{2}e^{2x}+C$

6. Halla las siguientes integrales inmediatas, cuyas funciones primitivas son funciones logarítmicas:

a) $\int \frac{3}{2x-1}dx$ **c)** $\int \frac{5x}{4+16x^2}dx$ **e)** $\int \frac{1}{x\cdot\ln x}\,dx$

b) $\int \frac{4x^2}{2x^3+5}\,dx$ **d)** $\int \frac{2e^x}{3+e^x}\,dx$ **f)** $\int \frac{12x-3}{4x^2-2x+3}\,dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int \frac{3}{2x-1}dx = \frac{3}{2}\ln|2x-1|+C$

b) $\int \frac{4x^2}{2x^3+5}\,dx = \frac{2}{3}\ln|2x^3+5|+C$

c) $\int \frac{5x}{4+16x^2}dx = \frac{5}{32}\ln|4+16x^2|+C$

d) $\int \frac{2e^x}{3+e^x}\,dx = 2\ln|3+e^x|+C$

e) $\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\, dx = \ln|\ln x| + C$

f) $\int \frac{12x-3}{4x^2-2x+3}\, dx = \frac{3}{2}\ln\left|4x^2-2x+3\right| + C$

7. Halla las siguientes integrales inmediatas, cuyas funciones primitivas son funciones trigonométricas o sus inversas:

a) $\int sen 2x\, dx$ **d)** $\int (\cos 3x)^3 \cdot sen 3x\, dx$ **g)** $\int \frac{3}{1+16x^2} dx$

b) $\int x \cdot \cos x^2\, dx$ **e)** $\int tg\, x\, dx$ **h)** $\int \frac{2}{9+x^2} dx$

c) $\int \frac{\cos x}{2+senx} dx$ **f)** $\int \frac{5x^2}{\cos^2 x^3}\, dx$ **i)** $\int \frac{6}{\sqrt{4-x^2}} dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int sen 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

b) $\int x \cdot \cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\, sen\left(x^2\right) + C$

c) $\int \frac{\cos x}{2+senx} dx = \ln(2+senx) + C$

d) $\int (\cos 3x)^3 \cdot sen 3x\, dx = -\frac{1}{12}\cos^4(3x) + C$

e) $\int tg\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C$

f) $\int \frac{5x^2}{\cos^2 x^3}\, dx = \frac{5}{3}\, tg\, x^3 + C$

g) $\int \frac{3}{1+16x^2}\, dx = \frac{3}{4}\, arctg(4x) + C$

h) $\int \frac{2}{9+x^2} dx = \frac{2}{3}\, arctg\left(\frac{x}{3}\right) + C$

i) $\int \frac{6}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = 6 \cdot arcsen\left(\frac{x}{2}\right) + C$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 241

8. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de integrales inmediatas:

a) $\int \frac{4x^3 - 3\sqrt{x} + 2}{6x}\,dx$ **e)** $\int 3\cdot \cos 6x \; dx$ **i)** $\int \frac{\left(3\sqrt{x} - 2\right)^2}{4\sqrt{x}}\,dx$

b) $\int (1-4x)^3 \; dx$ **f)** $\int \left(e^{-2x} + \frac{5x^2}{x^3+4} \right) dx$ **j)** $\int \frac{3x}{\left(x^2+7\right)^5}\,dx$

c) $\int \frac{4\cdot \cos 2x}{3 - sen 2x}\,dx$ **g)** $\int 5\sqrt{3x+2}\;dx$ **k)** $\int \frac{3x}{16+x^4}\,dx$

d) $\int \frac{9x^2}{1+x^3}\,dx$ **h)** $\int \left(\sqrt[3]{5x} - \frac{3}{x^6} \right) dx$ **l)** $\int \frac{3}{\sqrt{1-6x^2}}\,dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int \frac{4x^3 - 3\sqrt{x} + 2}{6x}\,dx = \frac{2x^3}{9} - \sqrt{x} + \frac{1}{3}\ln|x| + C$

b) $\int (1-4x)^3 \; dx = \frac{-(1-4x)^4}{16} + C$

c) $\int \frac{4\cdot \cos 2x}{3 - sen 2x}\,dx = -2\cdot \ln|3 - sen 2x| + C$

d) $\int \frac{9x^2}{1+x^3}\,dx = 3\cdot \ln\left|1+x^3\right| + C$

e) $\int 3\cdot \cos 6x \; dx = \frac{1}{2}\, sen 6x + C$

f) $\int \left(e^{-2x} + \frac{5x^2}{x^3+4} \right) dx = -\frac{1}{2}\cdot e^{-2x} + \frac{5}{3}\ln\left|x^3+4\right| + C$

g) $\int 5\sqrt{3x+2}\;dx = \frac{10}{9}(3x+2)^{3/2} + C$

h) $\int \left(\sqrt[3]{5x} - \frac{3}{x^6} \right) dx = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x)^4} + \frac{3}{5x^5} + C \qquad =$

i) $\int \frac{\left(3\sqrt{x} - 2\right)^2}{4\sqrt{x}}\,dx = \frac{\left(3\sqrt{x} - 2\right)^3}{18} + C$

j) $\int \frac{3x}{\left(x^2+7\right)^5}\,dx = \frac{-3\left(x^2+7\right)^{-4}}{8}+C$

k) $\int \frac{3x}{16+x^4}dx = \frac{3}{8}\,arctg\left(\frac{x^2}{4}\right)+C$

l) $\int \frac{3}{\sqrt{1-6x^2}}dx = \frac{\sqrt{6}}{2}\,arcsen\left(\sqrt{6}\,x\right)+C$

9. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración por partes:

a) $\int 3x\cdot e^x\,dx$ **d)** $\int (x+3)\cdot e^{-x}\,dx$ **g)** $\int x\cdot \cos x\,dx$

b) $\int (2-5x)\cdot sen\,(2x)\,dx$ **e)** $\int 2^{3x}\cdot x\,dx$ **h)** $\int x\cdot \ln x\,dx$

c) $\int 5\ln x\,dx$ **f)** $\int e^x\cdot \cos x\,dx$ **i)** $\int e^{2x}\cdot x^2\,dx$

En cada una de las siguientes integrales utilizamos la fórmula de la integración por partes:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

a) $\int 3x\cdot e^x\,dx = 3x\cdot e^x - \int 3\,e^x\,dx = 3x\cdot e^x - 3\cdot e^x + C$

b) $\int (2-5x)\cdot sen(2x)\,dx = -\frac{2-5x}{2}\cdot\cos 2x - \int \frac{5}{2}\cos 2x\,dx = -\frac{2-5x}{2}\cos 2x - \frac{5}{4}\,sen 2x + C$

c) $\int 5\ln x\,dx = 5x\cdot \ln x - 5x + C$

d) $\int (x+3)\cdot e^{-x}\,dx = -(x+3)\cdot e^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -(x+4)\cdot e^{-x} + C$

e) $\int 2^{3x}\cdot x\,dx = \frac{x}{3\ln 2}\cdot 2^{3x} - \frac{1}{3\ln 2}\int 2^{3x}\,dx = \frac{x}{3\ln 2}\cdot 2^{3x} - \frac{1}{(3\ln 2)^2}\cdot 2^{3x}+C$

f) Esta es una integral cíclica, pues al aplicar dos veces la integración por partes vuelve a salir la misma integral:

$\int e^{2x}\cdot\cos x\,dx = e^{2x}\cdot \text{sen } x - \int 2e^{2x}\cdot sen\,x\,dx = e^{2x}\cdot \text{sen } x + 2e^{2x}\cdot \cos x - \int 4e^{2x}\cdot \cos x\,dx$

Llamando I a la integral inicial obtenemos: $I = e^{2x}\cdot \text{sen } x + 2e^{2x}\cdot\cos x - 4I$. De modo que despejando I:

$$\int e^{2x} \cdot \cos x \, dx = \frac{e^{2x} \cdot senx + 2e^{2x} \cdot \cos x}{5} + C$$

g) $\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot senx - \int senx \, dx = x \cdot senx + \cos x + C$

h) $\int x \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \ln x - \int \frac{1}{2} x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C$

i) $\int e^{2x} \cdot x^2 \, dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot e^{2x} - \int x \, e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right) + C$

10. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de funciones racionales:

a) $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$ **d)** $\int \frac{3x+1}{x^2 - 4x + 3} dx$ **g)** $\int \frac{2x^2 - 10}{x^2 - x - 2} dx$

b) $\int \frac{5x-1}{x^2 - 1} dx$ **e)** $\int \frac{3x^3 + 16x}{x^2 + 4} dx$ **h)** $\int \frac{x^3 + 6}{x^2 - 4} dx$

c) $\int \frac{x^2 + 2}{x} dx$ **f)** $\int \frac{x-2}{x^2 + 2x} dx$ **i)** $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^2 + 1} dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \frac{-1}{x-2} dx + \int \frac{1}{x-3} dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C$

b) $\int \frac{5x-1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{3}{x+1} dx = 2\ln|x-1| + 3\ln|x+1| + C$

c) $\int \frac{x^2 + 2}{x} dx = \int x \, dx + \int \frac{2}{x} dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| + C$

d) $\int \frac{3x+1}{x^2 - 4x + 3} dx = \int \frac{-2}{x-1} dx + \int \frac{5}{x-3} dx = -2\ln|x-1| + 5\ln|x-3| + C$

e) $\int \frac{3x^3 + 16x}{x^2 + 4} dx = \int 3x \, dx + \int \frac{4x}{x^2 + 4} dx = \frac{3x^2}{2} + 2\ln|x^2 + 4| + C$

f) $\int \frac{x-2}{x^2 + 2x} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{2}{x+2} dx = -\ln|x| + 2\ln|x+2| + C$

g) $\int \frac{2x^2 - 10}{x^2 - x - 2} dx = \int \frac{2\left(x^2 - x - 2\right) + 2x - 6}{x^2 - x - 2} dx = \int 2 \, dx + \int \frac{2x - 6}{x^2 - x - 2} dx =$

$= 2x + \int \frac{8/3}{x+1} dx + \int \frac{-2/3}{x-2} dx = 2x + \frac{8}{3} \ln|x+1| - \frac{2}{3} \ln|x-2| + C$

h) $\int \frac{x^3+6}{x^2-4}dx = \int \frac{x\left(x^2-4\right)+4x+6}{x^2-4}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{4x+6}{x^2-4}\,dx =$

$= \frac{x^2}{2} + \int \frac{\frac{7}{2}}{x-2}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+2}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{7}{2}\ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + C$

i) $\int \frac{x^3-2x^2+x+3}{x^2+1}\,dx = \int (x-2)\,dx + \int \frac{5}{x^2+1}\,dx = \frac{(x-2)^2}{2} + 5arctg\,(x) + C$

11. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de cambio de variable con el cambio que se indica en cada caso:

a) $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{5x^2+2}}\,dx$ **($5x^2 + 2 = t^3$)**

b) $\int \frac{2}{x(3+\ln x)^2}\,dx$ **($\ln x = t$)**

c) $\int \frac{e^x}{e^x+4}\,dx$ **($e^x = t$)**

d) $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx$ **($x = t^2$)**

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{5x^2+2}}\,dx = \int \frac{4x}{t}\cdot\frac{3t^2}{10x}\,dt = \frac{3t^2}{5} = \frac{3\left(5x^2+2\right)^{\frac{2}{3}}}{5} + C$

b) $\int \frac{2}{x(3+\ln x)^2}\,dx = \int \frac{2}{x(3+t)^2}\cdot x\,dt = \frac{-2}{3+t} = \frac{-2}{3+\ln x} + C$

c) $\int \frac{e^x}{e^x+4}\,dx = \int \frac{e^x}{t+4}\cdot\frac{dt}{e^x} = \int \frac{dt}{t+4} = \ln|t+4| = \ln|e^x+4| + C$

d) $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{t^2}{1+t}\cdot 2t\,dt = \int \frac{2t^3}{1+t}\,dt = \int \frac{(1+t)\cdot\left(2t^2-2t+2\right)-2}{1+t}\,dt =$

$= \int \left(2t^2-2t+2\right)dt - \int \frac{2}{1+t}\,dt = \frac{2t^3}{3} - t^2 + 2t - 2\ln|1+t| =$

$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C$

12. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de cambio de variable:

a) $\int \frac{2}{3+\sqrt{x-2}}\,dx$

c) $\int \frac{4\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

e) $\int \frac{\ln x+8}{x(\ln^2 x+4\ln x)}\,dx$

b) $\int \frac{4+\ln^3 x}{2x}\,dx$ **d)** $\int \cos^3 x \cdot sen^2 x\ dx$ **f)** $\int \frac{4e^x}{e^{2x}-1}dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) Mediante el cambio x -2 = t^2, obtenemos: $\int \frac{2}{3+\sqrt{x-2}}\,dx = \int \frac{2}{3+t}\cdot 2t\ dt =$

$$= \int \frac{4t}{3+t}\,dx = \int \frac{4(3+t)-12}{3+t}\ dt = 4t - 12\ln|3+t| = 4\sqrt{x-2} - 12\ln\left|3+\sqrt{x-2}\right| + C$$

b) Mediante el cambio ln x = t, obtenemos: $\int \frac{4+\ln^3 x}{2x}\,dx = \int \frac{4+t^3}{2x}\cdot x\ dt = 2t + \frac{1}{2}\frac{t^4}{4} = 2\ln x + \frac{1}{2}\frac{\ln^4 x}{4} + C$

c) Mediante el cambio x = t^2, obtenemos: $\int \frac{4\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{4t}{1+t}\,2tdt = \int \frac{8t^2}{1+t}\,dt =$ esta es una integral racional y queda:

$$\int \frac{8(t-1)(t+1)+8}{1+t}dt = 8\frac{(t-1)^2}{2} + 8\ln|1+t| = 4\left(\sqrt{x}-1\right)^2 + 8\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C$$

d) Mediante el cambio sen x = t, obtenemos:

$$\int \cos^3 x \cdot sen^2 x\ dx = \int \cos x\cdot\left(1-sen^2 x\right)sen^2 x\ dx = \int \cos x \cdot \left(1-t^2\right)t^2\ \frac{dt}{\cos x} =$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{sen^3 x}{3} - \frac{sen^5 x}{5} + C$$

e) Mediante el cambio ln x = t, obtenemos: $\int \frac{\ln x + 8}{x(\ln^2 x + 4\ln x)}dx = \int \frac{t+8}{x(t^2+4t)}\,x\,dt =$

$$= \int \frac{2}{t}\ dt + \int \frac{-1}{t+4}\ dt = 2\ln|t| - \ln|t+4| = 2\ln|\ln x| - \ln|\ln x + 4| + C$$

f) Mediante el cambio e^x = t, obtenemos: $\int \frac{4e^x}{e^{2x}-1}dx = \int \frac{4t}{t^2-1}\frac{dt}{t} = \int \frac{2}{t-1}\ dt + \int \frac{-2}{t+1}\ dt =$

$$= 2\ln|t-1| - 2\ln|t+1| = 2\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C$$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 242

1. Halla una función f(x) de la que se sabe que f(2) = 5 y f ´(x) = x^3 + 2x.

Todas las primitivas de la función son f(x) = $\int\left(x^3+2x\right)dx = \frac{x^4}{4} + x^2 +$.

Se debe verificar que f (2) = 5. De modo que sustituyendo obtenemos: $5 = \frac{16}{4} + 4 + C$, entonces C = - 3.

La función buscada es f (x) = $\frac{x^4}{4}+x^2-3$

2. Resuelve las siguientes integrales por el método que creas más adecuado:

a) $\int \frac{(2x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$ **d)** $\int \frac{Ln\ x}{x\ (Ln^2 x-1)}dx$ **g)** $\int e^{-x}\cdot\left(x^2+1\right)\,dx$

b) $\int \frac{5-4x}{2x^2+x-1}dx$ **e)** $\int \frac{x+1}{2x^2+4x-5}\,dx$ **h)** $\int \frac{2}{e^x-1}dx$

c) $\int x\ \sqrt{1+2x^2}\ dx$ **f)** $\int \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{x}}dx$ **i)** $\int \frac{x^2+2x-3}{x-2}\,dx$

a) Mediante el cambio x = t^2, obtenemos:

$$\int \frac{(2x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\left(2t^2+1\right)^2}{t}\cdot 2t\,dt = \int\left(8t^4+8t^2+2\right)dt = \frac{8\sqrt{x^5}}{5}+\frac{8\sqrt{x^3}}{3}+2\sqrt{x}+C$$

b) Resolvemos esta integral por el método de integración de funciones racionales y obtenemos:

$$\int \frac{5-4x}{2x^2+x-1}dx = \ln\left|2x-1\right| - 3\ln\left|x+1\right| + C$$

c) Resolvemos esta integral por el método de integrales inmediatas:

$$\int x\ \sqrt{1+2x^2}\ dx = \frac{1}{6}\left(1+2x^2\right)^{3/2}+C$$

d) Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable y obtenemos:

$$\int \frac{\ln x}{x\ (\ln^2 x-1)}dx = \frac{1}{2}\ \ln\left|\ln^2 x-1\right| + C$$

e) Resolvemos esta integral por el método de integración de integrales inmediatas y obtenemos:

$$\int \frac{x+1}{2x^2+4x-5}\,dx = \frac{1}{4}\ \ln\left|2x^2+4x-5\right| + C$$

f) Resolvemos esta integral por el método de integración de integrales inmediatas y obtenemos:

$$\int \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{2}\ e^{\sqrt{2x}} + C$$

g) Resolvemos esta integral por el método de integración por partes y obtenemos:

$$\int e^{-x}\cdot\left(x^2+1\right)\,dx = -\left(x^2+2x+3\right)e^{-x}+C$$

h) Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable y obtenemos:

$$\int \frac{2}{e^x - 1} dx = -2x + 2\ln\left|e^x - 1\right| + C$$

i) Resolvemos esta integral por el método de integración de funciones racionales y obtenemos:

$$\int \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} dx = \int (x + 4)\, dx + \int \frac{5}{x - 2} dx = \frac{(x + 4)^2}{2} + 5\ln|x - 2| + C$$

3. Halla la primitiva de f(x) = $\frac{2x^2}{x^2 + 4x + 3}$ que valga 1 para x = 0

Las primitivas de la función dada se hallan mediante la integral de la misma y son:

$$F(x) = \int \frac{2x^2}{x^2 + 4x + 3} dx = 2x - 9\ln|x + 3| + \ln|x + 1| + C$$

Como sabemos que F(0) = 1 sustituyendo obtenemos: C = 1 + 9 ln 3.

La primitiva que pide el problema es: $2x - 9\ln|x + 3| + \ln|x + 1| + 1 + 9\ln 3$

4. Halla una función f(x) real de variable real de la que se sabe que f ´´ (x) = $3x^2$ - 4x + 3 y que su gráfica presenta un mínimo relativo en el punto $\left(1, \frac{11}{12}\right)$.

Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

f ´ (x) = $\int (3x^2 - 4x + 3)\, dx = x^3 - 2x^2 + 3x + C$;

f (x) = $\int (x^3 - 2x^2 + 3x + C)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + Cx + K$

Como tiene un mínimo relativo en el punto $\left(1, \frac{11}{12}\right)$ se debe verificar: $\begin{cases} f(1) = \frac{11}{12} \\ f´(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -2 \\ K = \frac{11}{6} \end{cases}$ por lo que f(x) = $\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{11}{6}$.

5. Halla dos primitivas de la función f(x) = $\frac{4}{1-e^{2x}}$.

Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable y obtenemos todas las primitivas que son:

$$\int \frac{4}{1-e^{2x}} dx = 4x - 2 \cdot \ln\left|1-e^{2x}\right| + C$$

Dando valores a la constante C obtenemos las primitivas buscadas:

$$\int \frac{4}{1-e^{2x}} dx = 4x - 2 \cdot \ln\left|1-e^{2x}\right| - 7$$

$$\int \frac{4}{1-e^{2x}} dx = 4x - 2 \cdot \ln\left|1-e^{2x}\right| + \frac{5}{2}$$

6. La curva que limita un determinado fractal viene dada por la función f (t) = 2t · cos (t). Calcula $\int f(t)\, dt$

Resolvemos esta integral por el método de integración por partes y obtenemos:

$$\int f(t)\, dt = \int 2t \cdot \cos t\, dt = 2t \cdot sen t + 2 \cdot \cos t + C$$

7. Sea f(x) = $\frac{2x-12}{x^2-x+1}$. Halla $\int x \cdot f(x) dx$

$$\int x \cdot f(x) dx = \int x \cdot \frac{2x-12}{x^2-x+1}\, dx = \int \frac{2x^2-12x}{x^2-x+1}\, dx = \int 2 + \frac{-10x-2}{x^2-x+1}\, dx =$$

$= 2x - 5\ln\left|x^2 - x + 1\right| - \frac{14\sqrt{3}}{3}\, arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

8. Halla $\int \frac{2^x}{1+4^x}\, dx$

$\int \frac{2^x}{1+4^x}\, dx = \frac{1}{\ln 2} \cdot arctg\ 2^x + C$

9. Halla una función f: R $\rightarrow$ R si se sabe que f (1) = 1; f ´ (1) = 2; f ´´ (1) = 8 y f ´´´ (x) = 24x - 6.

f ´´ (x) = $\int (24x - 6)\, dx = 12x^2 - 6x + C$;

f ´ (x) = $\int (12x^2 - 6x + C)\, dx = 4x^3 - 3x^2 + Cx + D$

f (x) = $\int (4x^3 - 3x^2 + Cx + D)\, dx = x^4 - x^3 + C\frac{x^2}{2} + Dx + K$

Imponiendo las condiciones del enunciado tenemos: $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(1) = 2 \\ f''(1) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 2 \\ D = -1 \\ K = 1 \end{cases}$ por lo que

f (x) = $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

10. Halla una función real de variable real f(x) que pasa por el origen de coordenadas y cuya función derivada es f ´ (x) = x · ln (x² +1).

La función pedida es: f(x) = $\int x \cdot \ln\left(x^2 + 1\right) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln\left(x^2 + 1\right) - \int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx =$

$= \frac{x^2 + 1}{2} \cdot \ln\left(x^2 + 1\right) - \frac{x^2}{2} + C$

Para que pase por el origen de coordenadas se debe verificar que f (0) = 0. Por lo que C = 0 y la función buscada es: f(x) $= \frac{x^2 + 1}{2} \cdot \ln\left(x^2 + 1\right) - \frac{x^2}{2}$

11. Halla una función polinómica de segundo grado cuya derivada es la función g (x) = 4x – 3 y tiene una tangente en la recta y = x + 2.

La función es f(x) = $\int \left(4x - 3\right) dx = 2x^2 - 3x + C$

Si la recta dada es tangente a la gráfica de la función se verifica que g(x) = 4x – 3 = 1; por lo que
x = 1 e y = 3. El punto de tangencia es (1, 3).

Si f (1) = 3, se cumplirá 3 = 2 · 1^2 – 3 · 1 + C, entonces C = 4 y la función buscada será f (x) = $2x^2 - 3x + 4$.

12. Dada la función f(x) = x^3 – 12x. Encuentra la función F(x) primitiva de f(x) y que verifique F (2) = 1.

Las primitivas de la función dada se hallan mediante la integral de la misma y son:

F(x) = $\int \left(x^3 - 12x\right) dx = \frac{x^4}{4} - 6x^2 + C$

Como sabemos que F (2) = 1 sustituyendo obtenemos: C = 21.

La primitiva que pide el problema es: F(x) = $\frac{x^4}{4} - 6x^2 + 21$

13. Halla dos primitivas de la función f(x) = e^{2x+7}. ¿Alguna de las primitivas pasa por el punto (- 3, e)?

13. Todas las primitivas de la función dada son de la forma:

F(x) = $\int e^{2x+7}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x+7} + C$

La primitiva que pasa por el punto dado es: F(x) = $\frac{1}{2} e^{2x+7} + \frac{1}{2} e$

14. De una función y = f (x) se sabe que su derivada es g (x) = x · cos (x^2 + π). Halla f (x) sabiendo que tiene una tangente en el punto (0, 3).

La función es f(x) = $\int x \cdot \cos\left(x^2 + \pi\right) dx = \frac{1}{2} sen\left(x^2 + \pi\right) + C$

Si tiene una tangente en el punto (0, 3) se verifica que f (0) = 3, el valor de C = 3; por lo que la función buscada será f(x) = $\frac{1}{2} sen\left(x^2 + \pi\right) + 3$

15. Dada la función f (x) = (x – 1) · (x + 1) · (x – 3).

a) Halla una primitiva de f (x).

b) Justifica que F (x) = x^4 + 2x – 4 no es primitiva de f (x).

a) Las primitivas de la función dada son: $\int (x-1)(x+1)(x-3) dx$ = $\int \left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right) dx$ =

$= \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x + C$

b) La función F(x) no es primitiva de f(x) pues su derivada es F ´ (x) = $4x^3 + 2 \neq x^3 - 3x^2 - x + 3$ = f(x).

16. Halla una función f(x) polinómica de tercer grado que pase por los puntos (0, 0) y (1, 1) y tal que f ´´ (x) = 6x + 4.

Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

f ´(x) = $\int (6x+4)\,dx =$ $3x^2 + 4x + C$

f (x) = $\int (3x^2+4x+C)\,dx =$ $x^3 + 2x^2 + Cx + D$

Obligando a pasar por los puntos dados obtenemos: $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-2 \\ D=0 \end{cases}$ por lo que la función polinómica buscada es f(x) = x^3+2x^2-2x .

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 243

Matemáticas electorales

Cada vez que se celebran unas elecciones, locales o municipales (Ayuntamientos), autonómicas (Parlamentos de la Comunidad), generales (Congreso o Senado) o comunitarias (Parlamento Europeo), tras el recuento de votos hay que repartir los puestos de representación entre las diferentes candidaturas presentadas.

La Constitución Española establece que la representación debe ser proporcional al número de votos obtenido por cada candidatura, de modo que a mayor número de votos conseguidos, deberá corresponder mayor número de escaños. Llevar esto a la práctica no es tan sencillo como puede parecer a primera vista.

El sistema de reparto de representantes puede realizarse de múltiples formas. Existen los procedimientos:

- Reparto directamente proporcional.

- Métodos del divisor: regla D´Hondt, método de Saint Lagué puro o método de Saint Lagué modificado. - Métodos de cociente: cociente Hare, cociente Droop y cociente Imperiali.

- Método de la mayoría relativa.

Cada país ha optado por un sistema de reparto con una cierta intención política. Algunos sistemas electorales facilitan la gobernabilidad de la nación, ayuntamiento, etc. otorgando más poder del matemáticamente obtenido a las candidaturas más votadas. En otros casos se potencia la obtención de representación parlamentaria de las candidaturas con menos votos para potenciar la presencia política de las minorías.

Todo lo anterior forma parte del campo matemático denominado *Teoría de la elección social* que se ocupa, entre otros aspectos, de medir el poder en organizaciones políticas, económicas, educativas, etc. Se ocupa de los sistemas de votación, con o sin peso, la influencia de los miembros, las alianzas o coaliciones, los pactos, la cooperación, los índices de poder (índices de Shapley, Banzhaf o Deegan).

Estudia, analiza y describe cada uno de los sistemas de reparto de representantes que se nombran, el coste, en votos, que le cuesta a cada partido sus escaños, el beneficio o pérdida de escaños para cada candidatura según el sistema elegido.

Investiga sobre la medida del poder a través de los índices citados.

Ofrecemos bibliográfica donde encontrar información sobre las cuestiones expuestas, además en Internet puede localizarse, sin dificultad, trabajos realizados sobre los aspectos reseñados.

ESPINEL FEBLES, Mª. C. (1999) *El poder y las coaliciones*, Suma, nº 31, 109-117

ESPINEL FEBLES, Mª. C. (1999) *Sistema de reparto de poder en las elecciones locales*, Números nº 39, 13-19

GARFUNKEL, S. (1999) *Las matemáticas en la vida cotidiana.,* Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.

NORTES CHECA, A. (2001) *Matemáticas electorales: desproporcionalidad y alianzas*, Suma, nº 36, 43-49

PÉREZ CARRETERO, F. D. (2012) *Matemáticas y política. Las leyes electorales*, Suma, nº 71, 31-38

RAMÍREZ GONZÁLEZ, V. (1985) *Matemática Aplicada a la distribución de escaños. Método de reparto P. R. I.,* Epsilón nº 6/7

RAMÍREZ GONZÁLEZ, V. (1990) *Fórmulas electorales basadas en sucesiones de divisores.,* Suma nº 7, 29-38