UNIDAD 7: Aplicaciones de las derivadas

CUESTIONES INICIALES-PÁG.174

1. Estudia la monotonía, crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -8x + 2x^2$ **b)** $g(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

a) La función $f(x) = -8x + 2x^2$ es decreciente en $(-\infty, 2)$ y creciente en $(2, +\infty)$.

b) La función $g(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ es decreciente en R – {3}.

2. Halla dos números positivos cuyo producto sea 16 y su suma sea la menor posible.

Los números buscados son 4 y 4.

3. Un centro comercial cuyo horario de apertura es de 10 horas diarias estima que el número de clientes, N, en función del número de horas, t, que lleva abierto es:

$$N(t) = -15t^2 + 180t, \quad 0 \le t \le 10$$

a) ¿Cuántos clientes habrá a las 3 horas de apertura?

b) Halla la hora de máxima clientela. ¿Cuál es el número máximo de clientes?

c) Si queremos acudir al centro comercial cuando haya un número de clientes inferior a 300, ¿entre qué horas deberíamos ir?

a) A las 3 horas de apertura habrá $N(3) = -15 \cdot 3^2 + 180 \cdot 3 = 405$ clientes.

b) La gráfica de $N(t) = -15t \cdot (t - 12)$ es parte de una parábola, que corta al eje OX en (0, 0) y (12, 0) y tiene el vértice en el punto (6, 450).

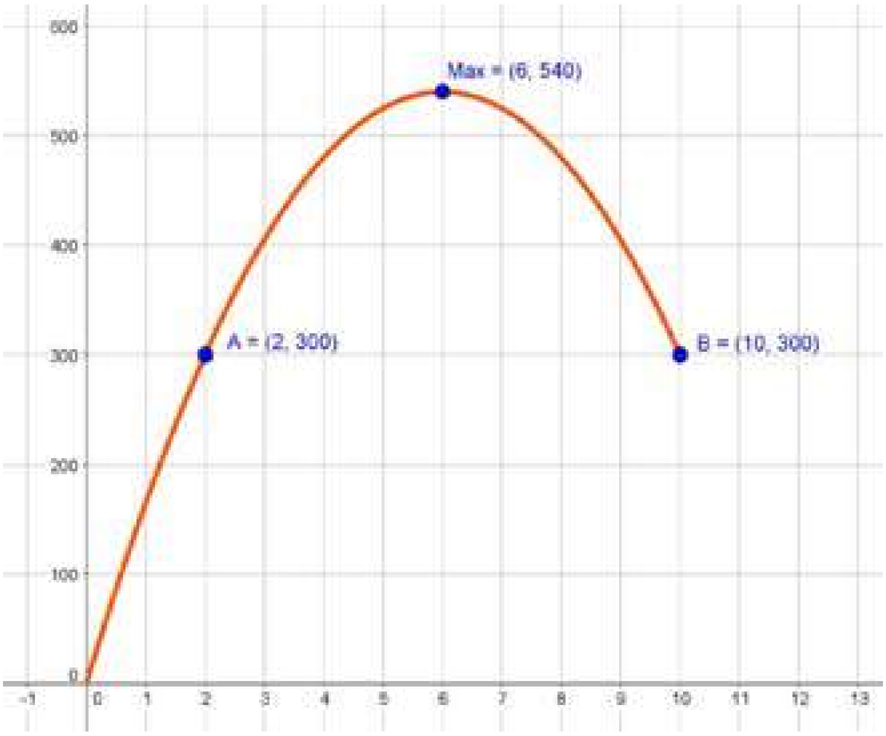
Por tanto, a las 6 horas de abrir el centro comercial se encuentra la máxima clientela. El número máximo de clientes es 540.

c) Veamos cuando N (t) = 300:

$$-15t^2 + 180t = 300 \Rightarrow t^2 - 12t + 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = 2 \end{cases}$$

Deberíamos ir durante las 2 primeras horas.

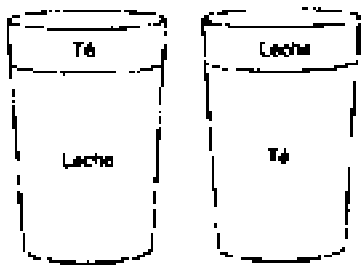
Todo lo anterior puede verse en la gráfica.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 187

1. Leche y té. Un par de amigos se juntan a merendar y uno de ellos pide un vaso de leche y el otro, un vaso de de té. Deciden hacer mezclas del siguiente modo: toman una cucharada de leche y la echan en el té; después toman una cucharada del té donde pusieron una cucharada de leche y la echan en la leche. ¿Habrá más leche en el té o más té en la leche?

Como comenzamos con dos vasos llenos, el uno de té y el otro de leche, al final la leche que hay en el té es la misma cantidad que el té que hay en la leche; como se puede ver en el siguiente dibujo.



2. Juego para dos. Dos amigas dicen alternativamente, un número natural del 1 al 10. La primera dice un número y la segunda dice otro, sumándole a este el que dijo la anterior, y así sucesivamente. Gana la partida la primera jugadora que consiga llegar a 100. Encuentra la estrategia ganadora para la primera jugadora y para la segunda.

Comenzando el juego desde el final, observamos que la 1ª jugadora (G) ganará siempre y cuando deje a la 2ª jugadora (P) con 89 en la penúltima jugada. Para ello, simulamos una partida.

1ª jugada: G dice 2
P dice lo que sea de 1 a 10

2ª jugada: G, el número necesario para sumar 12 o 23
P, el número que sea de1 a 10

3ª jugada: G, el número necesario para sumar 23 o 34
P, el número que sea de 1 a 10

…

Así sucesivamente G siempre tiene que decir el número necesario para sumar un múltiplo de 11 más 1: 12, 23, 34, 45, 56, 78 u 89.

Penúltima jugada: G dice el número necesario para sumar 89
P, el número que sea de 1 a 10

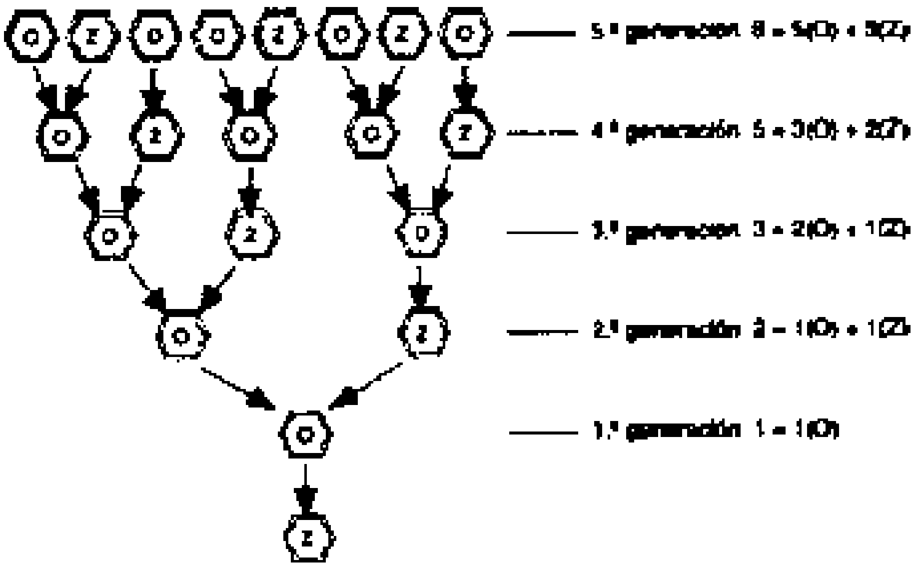
Última jugada: G ice un número de forma que obtiene100

Por lo tanto, la estrategia ganadora para el primer jugador es en la 1ª jugada decir cualquier número del 1 al 10 y en la siguiente jugada, a la vista de la suma que haya obtenido el 2º jugador, el primer jugador debe decir un número de modo que deje la suma en un múltiplo de 11 más 1, y así sucesivamente en las siguientes jugadas, hasta que en la penúltima deja l 2º jugador como resultado de la suma 89, de esta forma gana la partida.

La estrategia ganadora para el 2º jugador es la misma: ir diciendo números del 1 al 10 que dejen como resultado de la suma al primer jugador un número que sea múltiplo de 11 más 1, así en todas las jugadas; en la penúltima debe dejar al primer jugador como resultado de la suma 89 y de esta forma ganará la partida.

3. La sucesión de Fibonacci y las abejas. Las abejas macho (zánganos) nacen de huevos no fecundados, es decir, sólo tiene madre. Las abejas hembra (obreras) nacen de huevos fecundados, es decir, tiene madre y padre. ¿Cuántos antecesores tiene un zángano de la décima generación anterior a él?, y de estos, ¿cuántos son machos y cuántas son hembras? ¿En qué generación anterior a este zángano tiene 17 711 antecesores?

En el siguiente diagrama vemos la genealogía de las abejas. Designamos con Z a los zánganos y con O a las obreras.



Obtenemos la secuencia: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21… que es a sucesión de Fibonacci.

● En la décima generación anterior a él, un zángano tiene 89 antecesores, de los cuales 34 son machos y 55 son hembras. Puede verse en la tabla.

Generación	**1ª**	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**	**6ª**	**7ª**	**8ª**	**9ª**	**10ª**
Antecesores	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Antecesores machos		1	1	2	3	5	8	13	21	34
Antecesores hembras	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Continuando las sucesiones, obtenemos:

● En la vigésima generación anterior a él tiene 10 946 antecesores, de los cuales 4181 son machos y 6765 hembras.

● En la vigésima primera generación anterior a él tiene 17 711 antecesores.

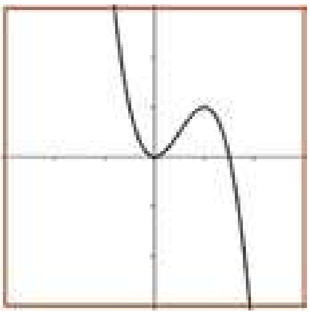
NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 189

1. Para las funciones que siguen, dibuja sus gráficas y determina el valor de la derivada en los puntos de abscisa $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 2$.

a) $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ **b)** $f(x) = \dfrac{8}{x^2+4}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$

Procedemos, en cada uno de los apartados, como se indica en el epígrafe DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

a) Para la función $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ seguimos los pasos:

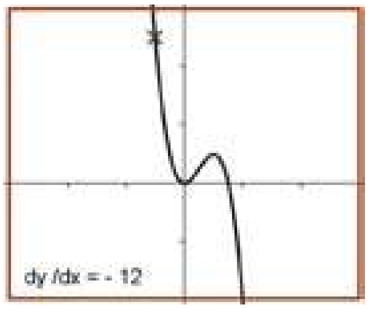


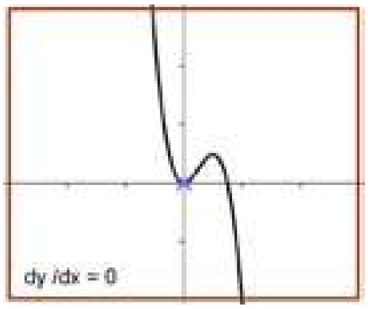
- En la tecla Y =, introducimos su expresión, tecleando – 2* X ^3 + 3 * X ^2. Pulsando GRAPH aparece su representación gráfica.

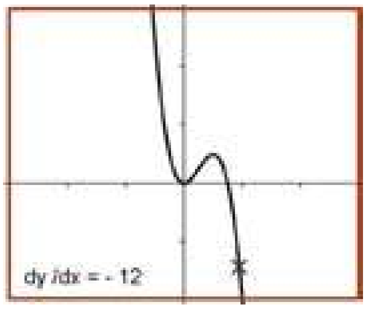
- Pulsando la tecla GRAPH aparecerá en pantalla la gráfica de la función.

- En el menú *CALCULATE*, que activamos pulsando la tecla CALC (se activa con 2nd TRACE), elegimos 6 : dy / dx. Volvemos a la pantalla de la representación gráfica e introducimos x = - 1, obteniendo como valor de la derivada en el punto anterior dy /dx = - 12.

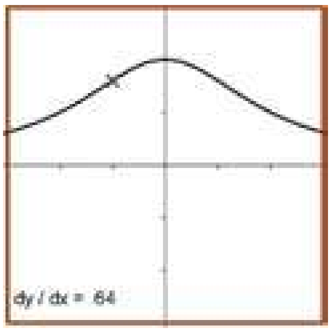
- Procediendo de manera análoga para los otros puntos, obtenemos: dy /dx = 0 y dy / dx = - 12. Todo ello puede verse en los gráficos que siguen.

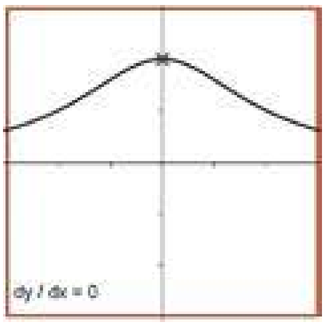


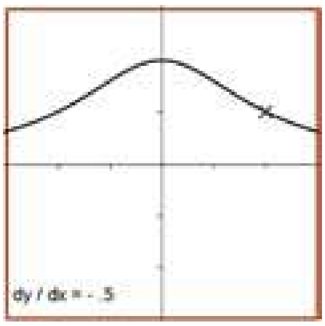




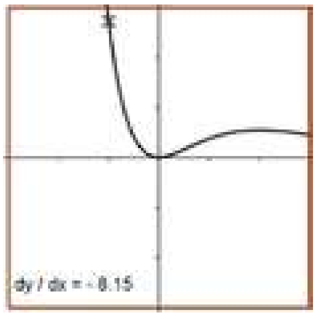
b) Para la función $f(x) = \dfrac{8}{x^2+4}$ obtenemos:

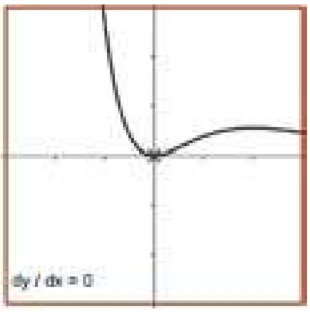


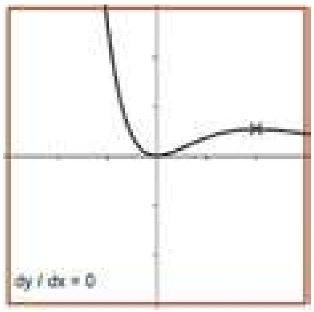




c) Para la función $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$ obtenemos:



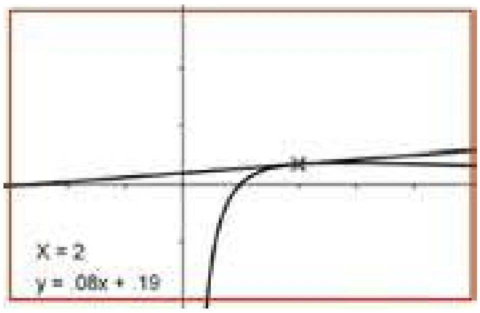




2. Representa la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ y dibuja la recta tangente en los puntos de abscisa $x_1 = 2$, $x_2 = e$ y $x_3 = 4$

Seguimos los pasos que se describen en el epígrafe RECTA TANGENTE A UNA GRÁFICA EN UN PUNTO:

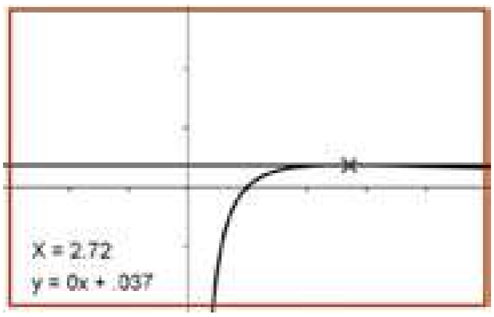
- En la tecla **Y =** introducimos la función del enunciado, tecleando la secuencia ln(x) / x. Realizamos la representación gráfica pulsando la tecla **GRAPH**.

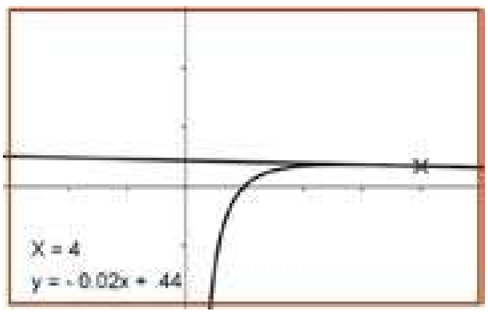


- Para dibujar la tangente en el punto de abscisa $x_1 = 2$, en el menú de **DRAW** (se activa con **2nd PRGM**) pulsamos la opción **5: Tangent (**, y en la pantalla que aparece introducimos la abscisa del punto pulsando X 2.

- Al pulsar Enter aparecerá la representación que vemos en el dibujo. En él aparece la gráfica de la función, la gráfica de la tangente, el punto de abscisa x = 2 resaltado y la ecuación de la recta tangente, y = 0,08x + 0,19.

- Para trazar la tangente en los puntos de abscisas $x_2 = e$ y $x_3 = 4$ se procede de igual forma. Antes de trazar las nuevas tangentes podemos borrar las tangentes trazadas pulsando **1: ClrDraw** del menú **DRAW**. Obtenemos los dibujos que aparecen a continuación.





3. Determina los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x) = 2x^4 - 4x^2$ **b)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$

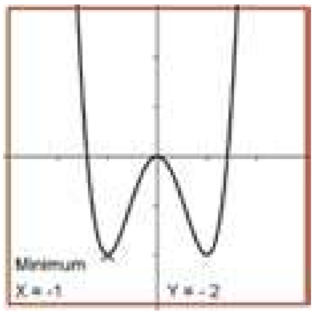
Procedemos como se indica en el epígrafe ESTUDIO DE LOS EXTREMOS RELATIVOS DE UNA FUNCIÓN.

a) Para $f(x) = 2x^4 - 4x^2$, seguimos los pasos:

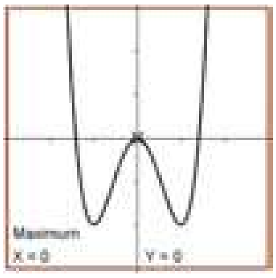
- Introducimos su expresión en **Y =**, tecleando la secuencia 2* X ^4 - 4 * X ^2. Pulsando **GRAPH** aparece su representación gráfica.

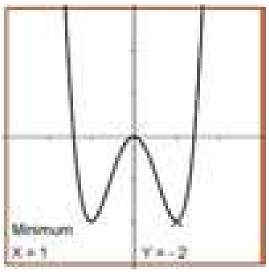
- En el menú **CALCULATE** asociado a **CALC** (que activamos en **2nd TRACE**) pulsamos **3: minimun** para determinar los mínimos.

- Procedemos de la siguiente manera: aparece en la pantalla el cursor parpadeante y la pregunta *Left Bound?* Movemos el cursor con las teclas ► ◄ y nos situamos, por ejemplo, en el punto X = -1,49, Y = -0,97 y pulsamos **ENTER**, apareciendo otra pantalla como la anterior con la pregunta *Right Bound?* Moviendo el cursor nos situamos, por ejemplo, en el punto X = -0,64, Y = - 1,3 y pulsamos **ENTER** y en la pantalla aparece la pregunta *Guess?* y las coordenadas del punto anterior. Finalmente pulsando **ENTER**, aparece la pantalla de la figura con el punto mínimo X = - 1, Y = - 2 resaltado en la gráfica.

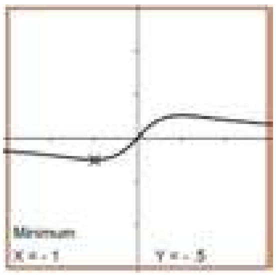


- De forma análoga encontramos el máximo en el punto (0,0) y otro mínimo en el punto (1, - 2).

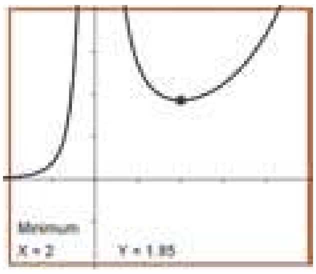




b) Para la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ obtenemos:



c) Para la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ obtenemos:



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 192

1. Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -3x + 5$ **c)** $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$ **e)** $f(x) = e^{2x}$

b) $f(x) = x^2 - 6x$ **d)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$

a) La función $f(x) = -3x + 5$ es estrictamente decreciente para cualquier número real.

b) La función $f(x) = x^2 - 6x$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, 3)$ y estrictamente creciente en $(3, +\infty)$.

c) La función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$ es estrictamente decreciente en $(-2, 0)$ y estrictamente creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

d) La función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, -2)$ y estrictamente creciente en $(2, +\infty)$.

e) La función $f(x) = e^{2x}$ es estrictamente creciente en todo R.

f) La función $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$ es estrictamente decreciente en R – {3}.

2. Estudia la monotonía de las siguientes funciones definidas a trozos:

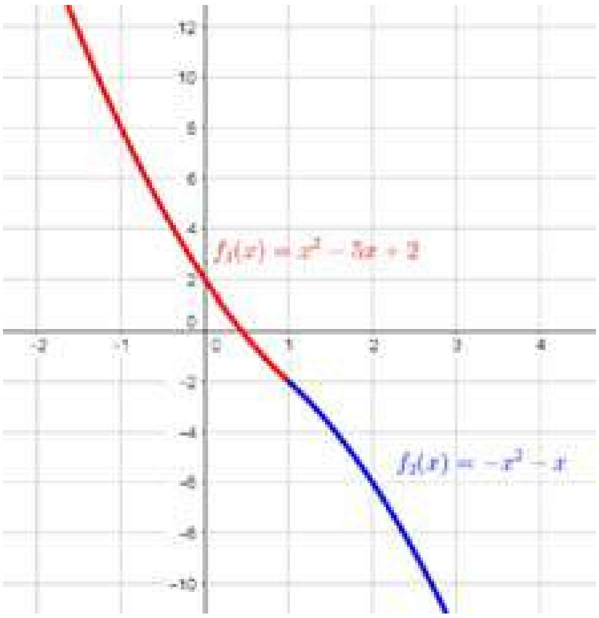
a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 2 & si\ x \le 1 \\ -x^2 - x & si\ x > 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & si\ x \le 2 \\ \ln(x-1) & si\ x > 2 \end{cases}$

a) La función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 2 & si\ x \le 1 \\ -x^2 - x & si\ x > 1 \end{cases}$ es decreciente en todo R.

Su función derivada es:

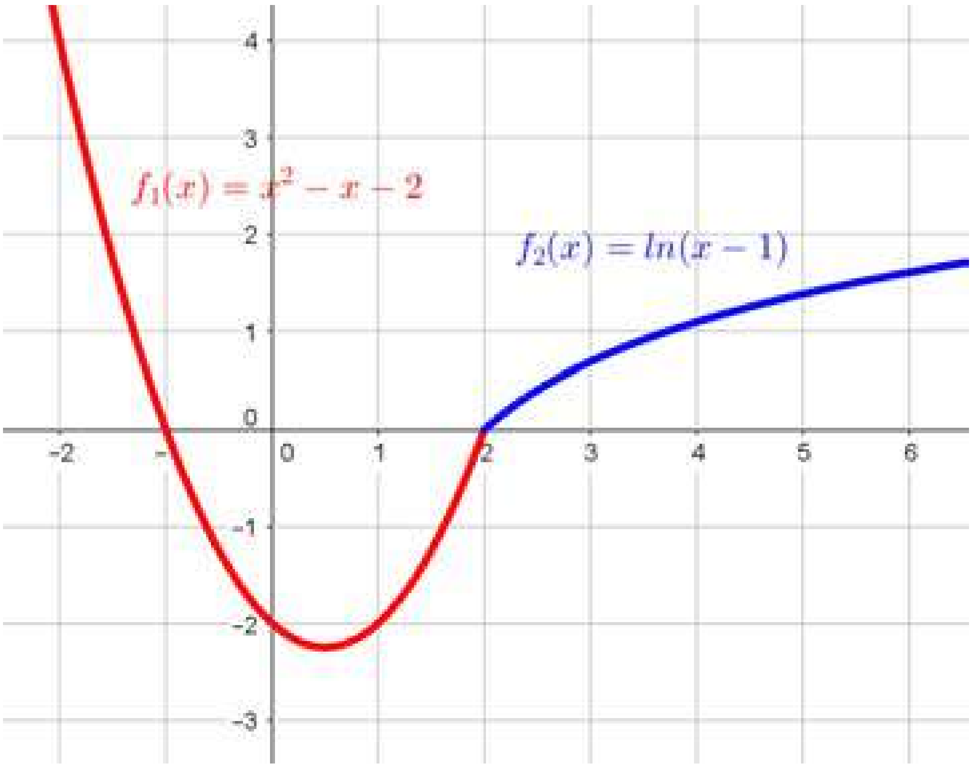
$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & si\ x \le 1 \\ -2x - 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

que es negativa para cualquier número real.



b) La función $f\ (x)=\begin{cases} x^2-x-2 \ si\ x\le 2 \\ \ln\ (x-1)\ \ si\ x>2 \end{cases}$ es decreciente en $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

Su función derivada es $f\ (x)=\begin{cases} 2x-1 \quad si\ x\le 2 \\ \dfrac{1}{x-1} \quad si\ x>2 \end{cases}$.



3. Una cadena de televisión decide emitir un nuevo programa en la franja horaria de las 17:00 horas a las 21:00 horas. El porcentaje P de audiencia de la primera emisión en función del tiempo t, medido en horas viene dado por la función:

$$P\ (t)=\frac{1}{5}\left(-t^3+49t^2-760t+3690\right),\ \ 17\le t\le 21$$

Los directivos de la cadena acuerdan que el programa seguirá emitiéndose si en algún momento se consigue un porcentaje de audiencia superior al 20%.

a) Encuentra en qué intervalos de tiempo la audiencia del programa aumentó y en cuales disminuyó.

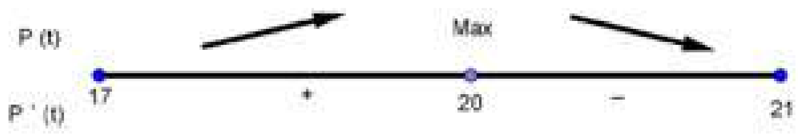
b) En vista de los resultados, ¿seguirá emitiéndose el programa?

a) Para estudiar el crecimiento utilizamos la derivada primera:

$$P\ '\ (t)=\frac{1}{5}\left(-3t^2+98t-760\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} t=20 \\ t=\dfrac{38}{3}=12{,}67 \end{cases}$$

El segundo resultado no es válido, no pertenece al intervalo de definición.

Estudiamos el signo de la primera derivada como puede verse en el esquema que sigue.



La audiencia aumenta de las 17 horas a las 20 horas y disminuye de las 20 horas a las 21 horas.

b) Calculamos el porcentaje a las 20 horas:

$$P\,(20) = \frac{1}{5}\left(-20^3 + 49 \cdot 20^2 - 760 \cdot 20 + 3690\right) = 18$$

El porcentaje máximo de audiencia se alcanza a las 20 horas y es del 18%, como no llega al 20% no se seguirá emitiendo el programa.

4. **Halla los extremos relativos de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = -(x-2)^2 + 5$

b) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

c) $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 12$

d) $f(x) = \dfrac{3}{1-x^2}$

e) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{8x}$

a) La función $f(x) = -(x-2)^2 + 5$ tiene un máximo relativo en el punto (2, 5).

b) La función $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ tiene un mínimo relativo en el punto $\left(e^{-1/2}, \dfrac{-e^{-1}}{2}\right)$.

c) La función $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 12$ tiene un máximo relativo en el punto (3, - 15) y un mínimo relativo en el punto (2, - 16).

d) La función $f(x) = \dfrac{3}{1-x^2}$ tiene un mínimo relativo en el punto (0, 3).

e) La función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ tiene un máximo relativo en el punto $\left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$ y un mínimo relativo en el punto (0, 0).

f) La función $f(x) = \dfrac{x^2+2}{8x}$ tiene un máximo relativo en el punto $\left(-\sqrt{2}, -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ y un mínimo relativo en el punto $\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

5. Halla a y b para que la función f (x) = - 2x² + ax – b tenga un máximo en (2, 2).

La derivada de f (x) = - 2x² + ax – b es f ´ (x) = - 4x + a.

Las condiciones del enunciado son:
- Alcanza un máximo en x = 2: f ´ (2) = 0 $\Rightarrow$ - 8 + a = 0 $\Rightarrow$ a = 8

- Pasa por (2, 2): f (2) = 2 $\Rightarrow$ - 8 + 2a – b = 2 $\Rightarrow$ 2a – b = 10

Resolviendo el sistema que sigue, obtenemos:

$$\begin{cases} a = 8 \\ 2a - b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 6 \end{cases}$$

6. Determina el valor de a para que la función $f(x) = x \cdot \ln \frac{x}{a}$, a > 0 tenga un mínimo relativo en x = 1.

Para que la función f (x) tenga un mínimo en x = 1, se debe verificar que f ´ (1) = 0. La derivada de $f(x) = x \cdot \ln \frac{x}{a}$ es $f'(x) = \ln \frac{x}{a} + 1$

Imponemos la condición f ´ (1) = 0:

$$f'(1) = \ln \frac{1}{a} + 1 = 0 \Rightarrow \ln \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow \frac{1}{a} = e^{-1} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{e} \Rightarrow a = e$$

Con la derivada segunda comprobamos que se trata de un mínimo: $f''(x) = \frac{1}{x}$ y $f''(1) = 1 > 0$.

7. La función f (x) = x³ + mx² + n tiene un valor mínimo relativo igual a 7 en el punto de abscisa x = 3. Determina los valores de los parámetros m y n. ¿Tiene algún valor máximo relativo? ¿Cuánto vale?

La derivada de f (x) = x³ + mx² + n es f ´ (x) = 3x² + 2mx. Se cumplirá f (3) = 7 y f ´ (3) = 0.

Operando:

$f(3) = 7 \Rightarrow 27 + 9m + n = 7 \Rightarrow 9m + n = -20$

$f'(3) = 0 \Rightarrow 27 + 6m = 0 \Rightarrow 6m = -27$

Resolviendo el sistema que sigue, obtenemos:

$$\begin{cases} 9m + n = -20 \\ 6m \qquad = -27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{9}{2} \\ n = \frac{41}{2} \end{cases}$$

La función es $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{41}{2}$.

Veamos si tiene algún máximo relativo:

$$f'(x) = 3x^2 - 9x = 3x(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \quad (mínimo) \end{cases}$$

La derivada segunda es f ´´ (x) = 6x – 9 y f ´´ (0) = - 9 < 0. Por tanto, en el punto $\left(0, \frac{41}{2}\right)$ la función tiene un máximo relativo.

8. Una empresa que fabrica bolsos estima que los costes de producción para x unidades son:

$C(x) = 0{,}2x^2 - 50x + 2500$

Si cada bolso se vende a 90 euros, se pide:
a) Determina la función que expresa los beneficios (ingresos – costes) en función de x, número de unidades producidas.

b) ¿Cuántas unidades deben venderse para que el beneficio sean máximo? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo?

a) La función que da los costes de producción es $C(x) = 0{,}2x^2 - 50x + 2500$.

La función que expresa los ingresos por las ventas de x bolsos es I (x) = 90x.

La función beneficio, B (x) = I (x) – C (x), es: $B(x) = 90x - (0{,}2x^2 - 50x + 2500)$, es decir:

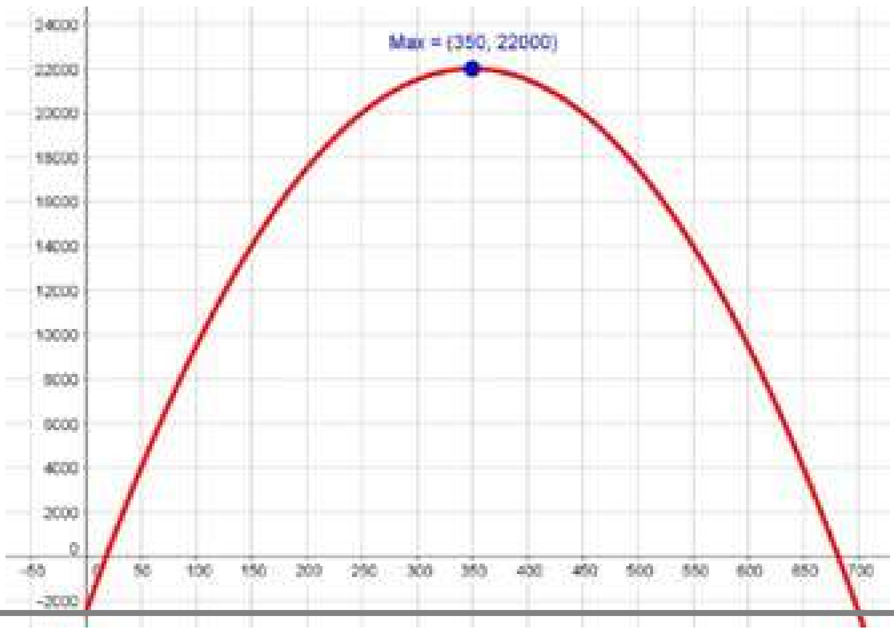
$$B(x) = -0{,}2x^2 + 140x - 2500$$

b) Para obtener el beneficio máximo, igualamos a cero la derivada:

$B'(x) = -0{,}4x + 140 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 350$ unidades.

Como B ´´ (x) = - 0,4 < 0, el valor obtenido corresponde a un máximo.

El beneficio máximo es $B(350) = -0{,}2 \cdot (350)^2 + 140 \cdot 350 - 2500 = 22\,000$ euros.



9. En una almazara (factoría donde se obtiene aceite) el coste medio por litro, en euros, que supone la fabricación de x litros de una determinada variedad de aceite de oliva viene dado por la función:

$$C\,(x) = 0{,}002x^2 - 5x + 3127$$

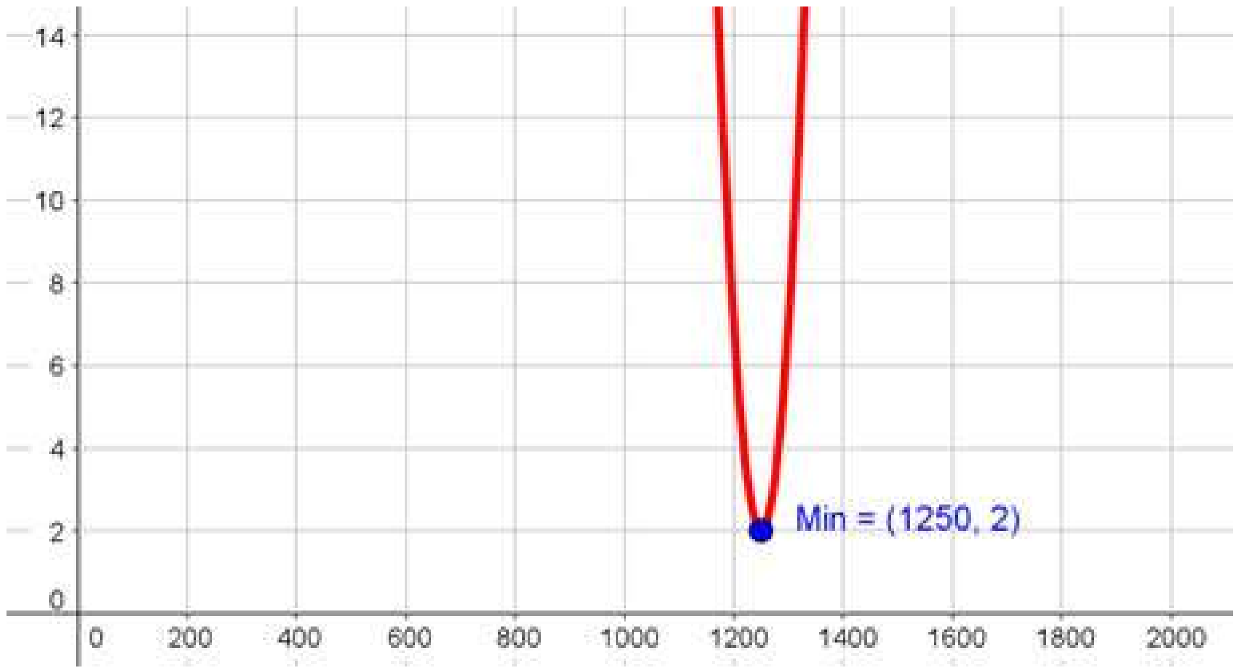
Determina el número de litros que han de producirse para minimizar dicho coste medio por litro y el valor mínimo del citado coste medio.

Para obtener el mínimo coste medio por litro derivamos e igualamos a cero:

$C\,'(x) = 0{,}004x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1250$

Con la derivada segunda comprobamos que se trata de un mínimo: $C\,''(x) = 0{,}004 > 0$.

Para minimizar el coste medio por litro han de producirse 1250 litros y el valor mínimo del coste medio por litro es de $C\,(1250) = 0{,}002 \cdot 1250^2 - 5 \cdot 1250 + 3127 = 2$ euros.



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 193

10. ¿Cuál es el número positivo que sumado con su recíproco da una suma mínima?

Llamamos x al número buscado y 1/x a su recíproco. La función a optimizar es $f\,(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Obtenemos las dos primeras derivadas: $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ y $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

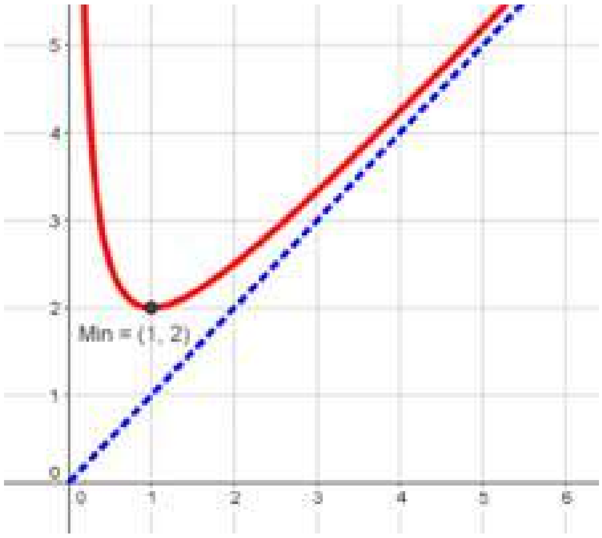
Los valores que anulan la primera derivada son:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Como $f''(1) = \dfrac{2}{1^3} = 2 > 0$, para x = 1 la función tiene un mínimo relativo

Por tanto, el número positivo que sumado con su recíproco da una suma mínima es 1; y el valor de la citada suma mínima es 2.

El valor mínimo y otras características de la función $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, con x > 0, pueden verse en la gráfica.



11. Descompón el número 60 en dos sumandos tales que el triple del cuadrado del primero más el doble del cuadrado del segundo sea mínimo. ¿Cuál es el valor de ese mínimo?

Sean x y 60 – x los números que tenemos que buscar.

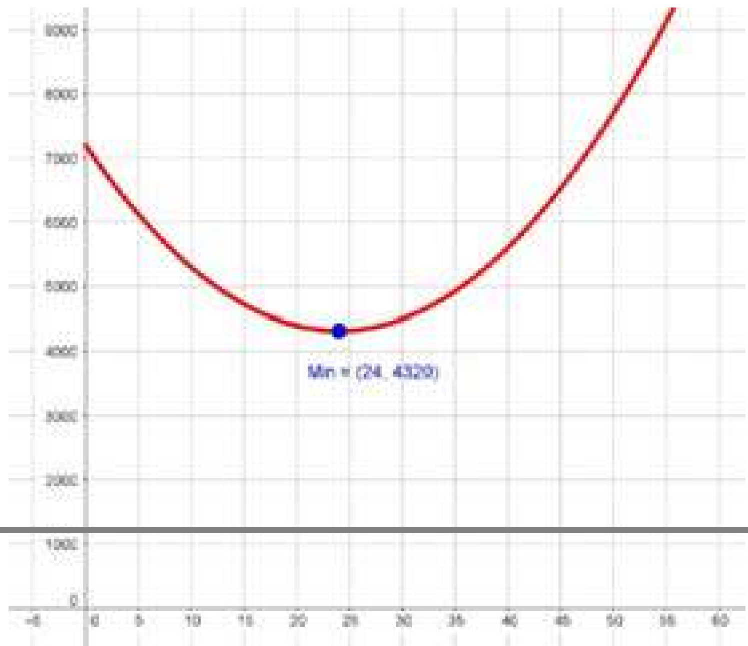
La función a optimizar es S (x) = $3x^2 + 2(60 - x)^2$, es decir, S (x) = $5x^2 - 240x + 7200$.

Anulamos la primera derivada: S ´ (x) = 10x – 240 = 0 $\Rightarrow$ x = 24.

La segunda derivada es S ´´ (x) = 10 > 0, por tanto, el valor obtenido pertenece a un mínimo.

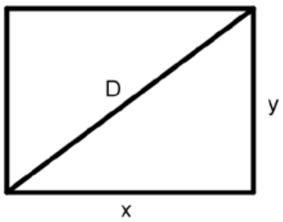
Los números buscados son 24 y 36.

El valor del mínimo es S (24) = $5 \cdot 24^2 - 240 \cdot 24 + 7200 = 4320$ o $3 \cdot 24^2 + 3 \cdot 36^2 = 4320$.



12. Entre todos los rectángulos de perímetro 12 metros, ¿cuál es el que tiene diagonal menor?

Sea el rectángulo de lados x e y, cuya diagonal designamos por D.



La función a minimizar es $D(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

La condición que relaciona a las variables x e y es 2x + 2y = 12, es decir, y = 6 – x.

Sustituimos la relación anterior en la función y obtenemos:

$$D(x) = \sqrt{x^2 + (6-x)^2} \quad \Rightarrow \quad D(x) = \sqrt{2x^2 - 12x + 36}$$

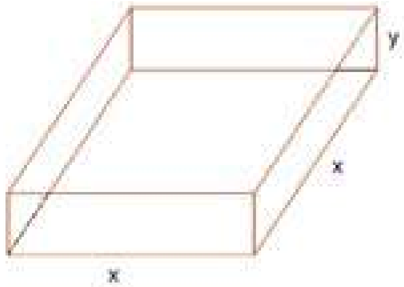
Para obtener el mínimo derivamos e igualamos a cero:

$$D'(x) = \frac{4x - 12}{2\sqrt{2x^2 - 12x + 36}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

Si un lado del rectángulo mide 3 metros el otro lado medirá y = 6 – 3 = 3 metros. Por tanto, el rectángulo buscado es un cuadrado.

13. Un fabricante de recipientes quiere construir una caja rectangular sin tapa y de base cuadrada, con 108 decímetros cuadrados de material. ¿Cuáles han de ser las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo?

Sea x la medida de los lados de la base cuadrada e y la altura de la caja rectangular.



La función a maximizar es, el volumen de la caja, V (x, y) = $x^2 \cdot y$.

La condición que liga a las variables (la superficie de las caras laterales y de la base) es $x^2 + 4xy = 108$.

Despejamos y de la condición anterior, $y = \frac{108 - x^2}{4x}$, y sustituimos en la función volumen:

$$V(x) = x^2 \cdot \frac{108 - x^2}{4x} \quad \Rightarrow \quad V(x) = 27x - \frac{1}{4}x^3$$

Para obtener el máximo derivamos e igualamos a cero:

$$V'(x) = 27 - \frac{3}{4}x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -6 \ (\textit{carece de sentido}) \\ x = 6 \end{cases}$$

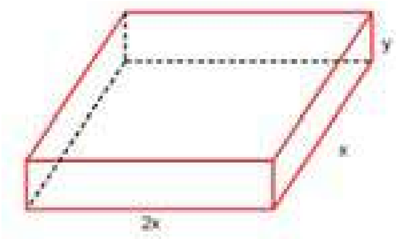
Con la derivada segunda comprobamos que, efectivamente, se trata de un máximo:

$$V''(x) = -\frac{3}{2}x \quad \Rightarrow \quad V'(6) = -9 < 0$$

Las dimensiones de la caja serán x = 6 dm e $y = \frac{108 - 36}{24} = 3\ dm$.

La capacidad máxima de la caja es $6^2 \cdot 3 = 108\ dm^3$.

14. El mismo fabricante quiere diseñar un contenedor rectangular con tapa, que tenga máximo volumen y que sea doble de largo que de anch0. Para ello dispone de 30 m^2 de chapa. ¿Qué medidas de ancho, largo y alto debe tener el contenedor?



Sean x y 2x las medidas de los lados de la base cuadrada e y la altura del contenedor.

La función a maximizar es, el volumen de la caja:
$V (x, y) = (2x) \cdot x \cdot y = 2x^2 \cdot y$.

La condición que liga a las variables (la superficie de las caras laterales, la base y la cara superior) es:

$$2 \cdot 2x \cdot x + 2 \cdot 2x \cdot y + 2 \cdot x \cdot y = 30, \text{ es decir, } 4x^2 + 6xy = 30.$$

Despejamos y de la condición anterior, $y = \frac{30 - 4x^2}{6x}$, y sustituimos en la función volumen:

$$V (x) = 2x^2 \cdot \frac{30 - 4x^2}{6x} \quad \Rightarrow \quad V (x) = 10x - \frac{4}{3}x^3$$

Para obtener el máximo derivamos e igualamos a cero:

$$V\,'(x) = 10 - 4x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Con la derivada segunda comprobamos que, efectivamente, s etrata de un máximo:

$$V\,''(x) = -\,8x \quad \Rightarrow \quad V\,'\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) < 0$$

El contenedor tiene que tener de ancho $\sqrt{\frac{5}{2}}$ m, $2\sqrt{\frac{5}{2}}$ m de largo y de alto $y = \frac{30 - 4 \cdot \frac{5}{2}}{6\sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}$ m.

15. El rendimiento de una máquina, a lo largo de las 7 horas que permanece en funcionamiento cada día, viene dado por la función $f(x) = x^3 - 10{,}5x^2 + 30x$, donde $x \in (0, 7)$ indica el número de horas transcurridas desde que la máquina se pone en marcha.

Determina en qué momento se produce el máximo y el mínimo rendimiento. Calcula el rendimiento de la máquina en esos dos momentos del día.

Hallamos las dos primeras derivadas de la función:

$$f\,'(x) = 3x^2 - 21x + 30 \quad y \quad f\,''(x) = 6x - 21$$

Los valores que anulan la primera derivada son:

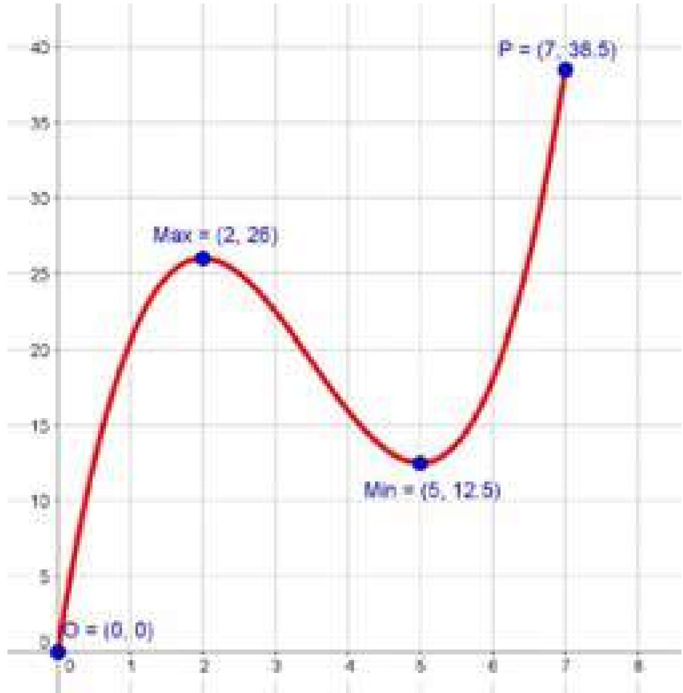
$$3x^2 - 21x + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\,(x^2 - 7x + 10) = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \end{cases}$$

Para x = 2, la segunda derivada es negativa f ´´ (2) = 6 · 2 – 21 = - 9 < 0. Cuando han transcurrido 2 horas el rendimiento es máximo.

Para x = 5, la segunda derivada es positiva f ´´ (5) = 6 · 5 – 21 = 9 > 0. Cuando han transcurrido 5 horas el rendimiento es mínimo.

El rendimiento máximo es f (2) = 2^3 – 10,5 · 2^2 + 30 · 2 = 26. El rendimiento mínimo es f (5) = 5^3 – 10,5 · 5^2 + 30 · 5 = 12,5.

En el dibujo de la función en el intervalo [0, 7] podemos ver que el rendimiento mínimo (absoluto) se alcanza cuando se arranca la máquina y el rendimiento máximo (absoluto) cuando concluye su jornada de trabajo.



16. Los beneficios en miles de euros obtenidos en un gimnasio inaugurado hace 5 años viene dados por la función f (x) = $2x^3 - 15x^2 + 24x + 26$, donde x $\in$ [0, 5] es el tiempo, medido en años, que lleva funcionando el gimnasio desde su apertura.

a) ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio y cuánto vale ese beneficio máximo?

b) El cuarto año de funcionamiento se produce una renovación general de las instalaciones del gimnasio. Explica razonadamente, en términos de aumento de beneficio, si dicha renovación tuvo éxito.

a) Las dos primeras derivadas de la función son:

f ´ (x) = $6x^2 - 30x + 24$ f ´´ (x) = 12x – 30

Los valores que anulan la primera derivada son:

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x^2 - 5x + 4) = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Para x = 4, la segunda derivada es $f''(4) = 12 \cdot 4 - 30 = 18 > 0$ y en el punto (4, 10) la función tiene un mínimo.

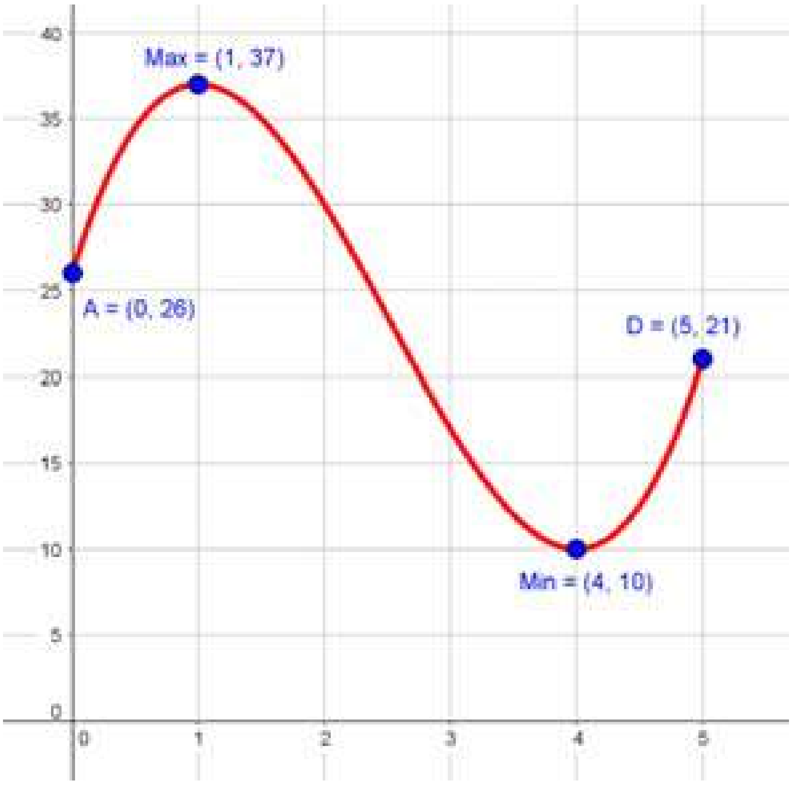
Para x = 1, la segunda derivada es $f''(1) = 12 \cdot 1 - 30 = -18 < 0$ y en el punto (1, 37) la función tiene un máximo.

Por tanto, el máximo se alcanza para x = 1, es decir, al cumplirse un año desde la apertura. El beneficio máximo alcanzado es de 37 000 euros.

b) Como puede verse en la gráfica de la función, en el cuarto año se produce el beneficio mínimo que es de 10 000 euros, año en el que se hace una renovación general de las instalaciones. La renovación tuvo éxito ya que en el quinto año obtuvo unos beneficios de 21 000 euros.

La renovación de las instalaciones supuso un aumento del beneficio de 21 000 – 10 000 = 11 000 euros.

Todo lo anterior puede verse en la gráfica.



17. Estudia el tipo de concavidad y la existencia o no de puntos de inflexión en las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$

b) $f(x) = x^4 - 24x^2 + 80$

c) $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$

d) $f(x) = (x^2 - 14) \cdot e^x$

e) $f(x) = \ln(x + 4)$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

a) La función f (x) = $3x^2 - 2x^3$ es cóncava hacia las y positivas en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y cóncava hacia las y negativas en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b) La función f (x) = $x^4 - 24x^2 + 80$ es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y cóncava hacia las y negativas en $(-2, 2)$. Tiene puntos de inflexión en (- 2, 0) y (2, 0).

c) La función $f(x) = \frac{2}{x+3}$ es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -3)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-3, +\infty)$. No tiene puntos de inflexión.

d) d) La función f (x) = $(x^2 - 14) \cdot e^x$ es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$ y cóncava hacia las y negativas en $(-6, 2)$. Tiene puntos de inflexión en $\left(-6, 22 \cdot e^{-6}\right)$ y $\left(2, -10 \cdot e^2\right)$

e) La función f (x) = ln (x + 4) es cóncava hacia las y negativas en $(-4, +\infty)$. No tiene puntos de inflexión.

f) La función $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ es cóncava hacia las y positivas en todo R y carece de puntos de inflexión.

18. Dada la función f (x) = $x^3 - kx^2 + x - 1$; halla k para que tenga un punto de inflexión en x = 2/3.

Las derivadas de la función f (x) = $x^3 - kx^2 + x - 1$ son:

$$f'(x) = 3x^2 - 2kx + 1 \text{ y } f''(x) = 6x - 2k$$

Se cumplirá:

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 \cdot \frac{2}{3} - 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

19. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva f (x) = $4x^3 - 12x^2 - 10$ en su punto de inflexión.

Las derivadas de de la función f (x) = $4x^3 - 12x^2 - 10$ son:

$$f'(x) = 12x^2 - 24x \text{ y } f''(x) = 24x - 24$$

Anulamos la segunda derivada: 24x – 24 = 0, entonces x = 1.

Las coordenadas del punto de tangencia (que coincide con el de inflexión) es (1, f (1)) = (1, - 18).

La pendiente de la recta tangente es f ´ (1) = - 12.

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - (-18) = -12 \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -12x - 6 \quad \Rightarrow \quad 12x + y = -6$$

20. Calcula los coeficientes de f (x) = $ax^2 + be^{2x} + c$, si la función tiene un punto de inflexión en x = 0 con tangente x – y = 1.

Las derivadas de de la función f (x) = $ax^2 + be^{2x} + c$ son:

$$f'(x) = 2ax + 2be^{2x} \text{ y } f''(x) = 2a + 4be^{2x}$$

Las condiciones del enunciado se traducen en f (0) = - 1, f ´ (0) = 1 y f ´´ (0) = 0.

Imponiendo las condiciones anteriores, operamos y obtenemos:

$$\begin{cases} b + c = -1 \\ 2b = 1 \\ 2a + 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

21. Las ganancias producidas por una máquina embotelladora de agua, que ha durado 6 años, se estima por la función f (x) = $ax^3 + bx^2$, 0 ≤ x ≤ 6 [f (x) representa la ganancia (en miles de euros) a los x años de funcionamiento, a y b son constantes].

a) Determina el valor de a y b, si se sabe que la función f (x) tiene un punto de inflexión en el punto (2, 32).

b) Si a = - 2 y b = 12, calcula el año en el que la máquina ha producido la mayor ganancia y el valor de dicha ganancia. Para estos valores de a y b representa la función f (x) en [0, 6].

a) Las derivadas de la función f (x) = $ax^3 + bx^2$ es f ´ (x) = $3ax^2 + 2bx$ y f ´´ (x) = 6ax + 2b.

Se cumplirá:

$$f(2) = 32 \;\Rightarrow\; 8a + 4b = 32 \;\Rightarrow\; 2a + b = 8$$
$$f''(2) = 0 \;\Rightarrow\; 12a + 2b = 0 \;\Rightarrow\; 6a + b = 0$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} 2a + b = 8 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 12 \end{cases}$$

b) La función es f (x) = $-2x^3 + 12x^2$, 0 ≤ x ≤ 6.

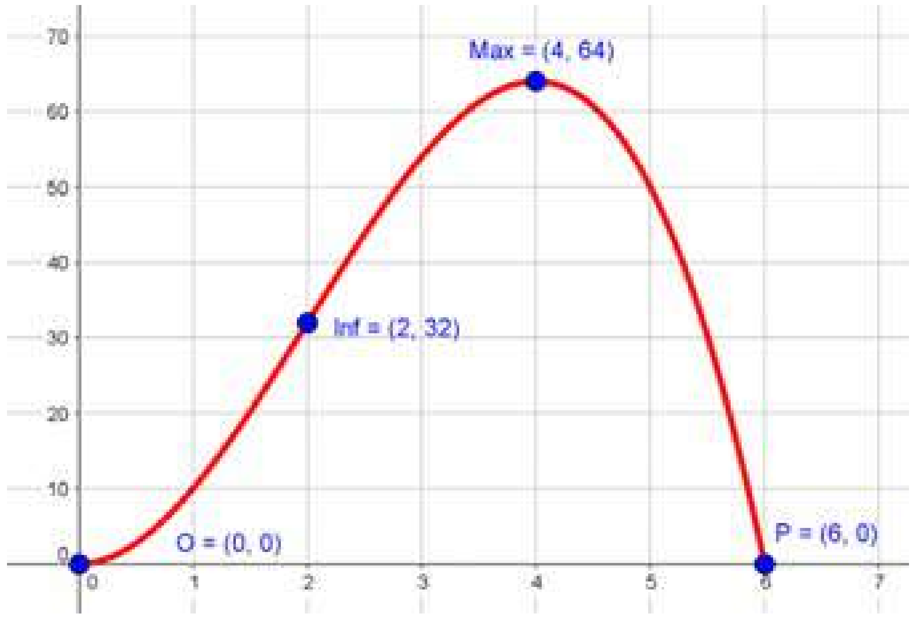
Para determinar los extremos relativos igualamos a cero la primera derivada:

$$f'(x) = -6x^2 + 24x = -6x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

El esquema que sigue aparece el estudio del signo de f ´ (x):

El punto (4, 64) es un máximo relativo y el máximo absoluto en [0, 6] ya que f (0) = 0 y f (6) = 0.

La máquina ha producido la mayor ganancia el cuarto año, y esta ascendió a 64 000 euros.



22. Halla los coeficientes a, b, c y d de la función f (x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de inflexión (1, 0) es 3x + y = 3 y que la función tiene un extremo relativo en x = 0.

22. Las derivadas de la función f (x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ son:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \;\text{ y }\; f''(x) = 6ax + 2b$$

Las condiciones del enunciado se traducen en f (1) = 0, f ´´ (1) = 0, f ´ (1) = - 3 y f ´ (0) = 0.

Imponiendo las condiciones anteriores, operamos y obtenemos:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 6a + 2b \qquad = 0 \\ 3a + 2b + c \quad = -3 \\ \qquad c \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}$$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 194

1. Según los datos facilitados por el Instituto Nacional de Estadística, el número de nacimientos en una determinada zona geográfica, durante los últimos 25 años, se justa a la función siguiente:

$$\mathbf{N (t) = t^3 - 36t^2 + 240t + 8000, \; 1 \le t \le 25}$$

donde N es el número de nacimientos y t es el año objeto de estudio. Se pide:

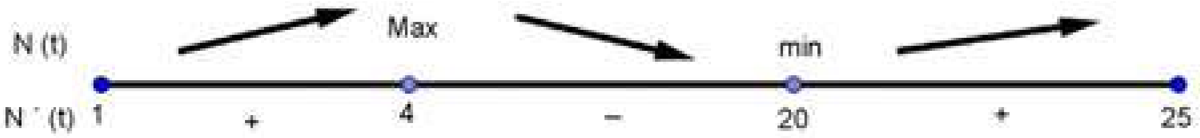
a) Determina los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de nacimientos en los 25 años.

b) ¿En qué años se obtienen el número máximo y el número mínimo de nacimientos? ¿Cuáles son dichos valores máximo y mínimo?

a) Para estudiar el crecimiento, utilizamos la primera derivada:

$$N'(t) = 3t^2 - 72t + 240 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 20 \end{cases}$$

El signo de la primera derivada puede verse en el esquema que sigue.



El número de nacimientos creció entre los años 1º y 4º y entre los años 20º y 25º. Decreció entre los años 4º y 20º.

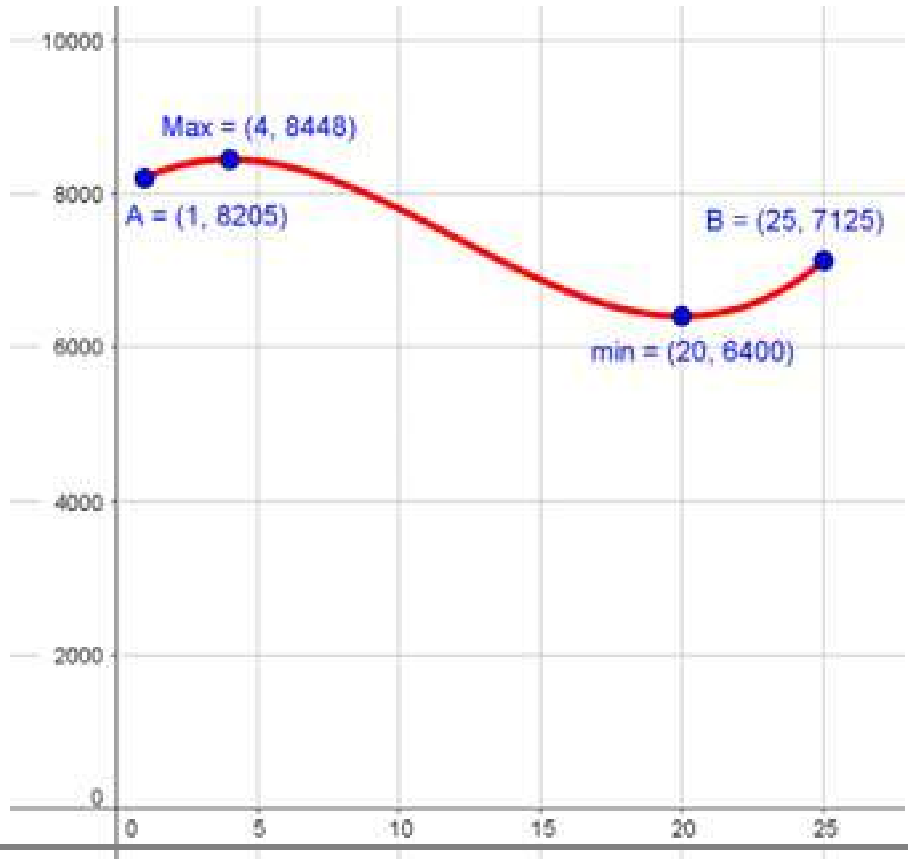
b) Hallamos los valores de la función en los extremos relativos, t = 4 y t = 20 y en los extremos del intervalo [1, 25], dominio de definición de la función. Obtenemos:

N (1) = 8205; N (4) = 8448; N (20) = 6400 y N (25) = 7125.

El número máximo de nacimientos ascendió a 8448 y se obtuvo en el 4º año.

El número mínimo de nacimientos fue 6400 y se obtuvo el año 20º.

Todo lo anterior puede observarse en la gráfica.



2. Sea y = f (x) una función polinómica de grado 3, con un máximo en (0, 0) y un mínimo en (2, - 4). Determina la expresión de la función y haz una gráfica aproximada de ella.

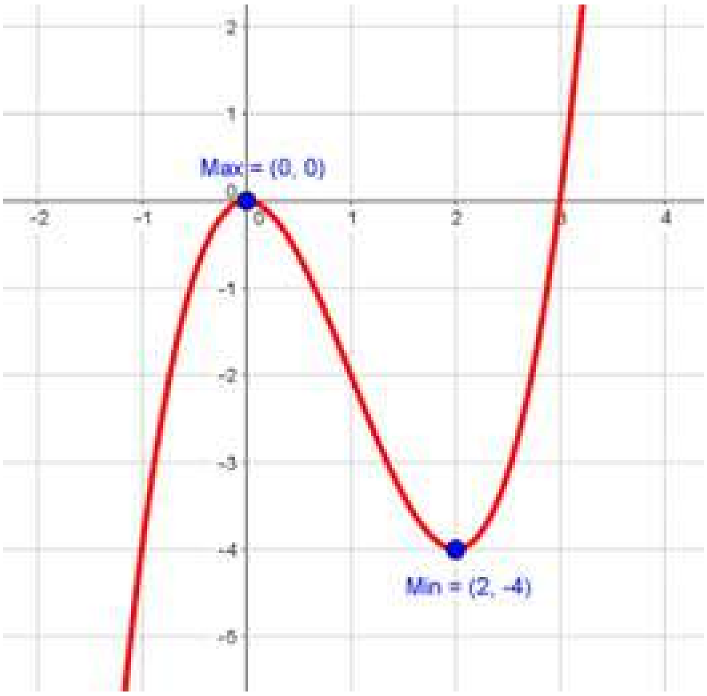
Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ la función buscada. Su derivada será $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Las condiciones del enunciado son $f(0) = 0$, $f(2) = -4$, $f'(0) = 0$ y $f'(2) = 0$.

Resolviendo el sistema resultante, obtenemos:

$$\begin{cases} d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = -4 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

La función es $f(x) = x^3 - 3x^2$ y su gráfica puede verse en la imagen.



3. Estudia la monotonía y la curvatura de las funciones:

a) $f(x) = x \cdot (5 - x)^2$ **b)** $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

a) Para estudiar la monotonía de la función $f(x) = x \cdot (5 - x)^2 = x^3 - 10x^2 + 25x$ utilizamos la primera derivada $f'(x) = 3x^2 - 20x + 25$.

La primera derivada $f'(x) = 3x^2 - 20x + 25$ se anula para $x = 5$ y $x = 5/3$. Estudiamos su signo y obtenemos:

- La función y = f (x) es creciente en $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right) \cup (5, +\infty)$.

- La función y = f (x) es decreciente en $\left(\frac{5}{3}, 5\right)$

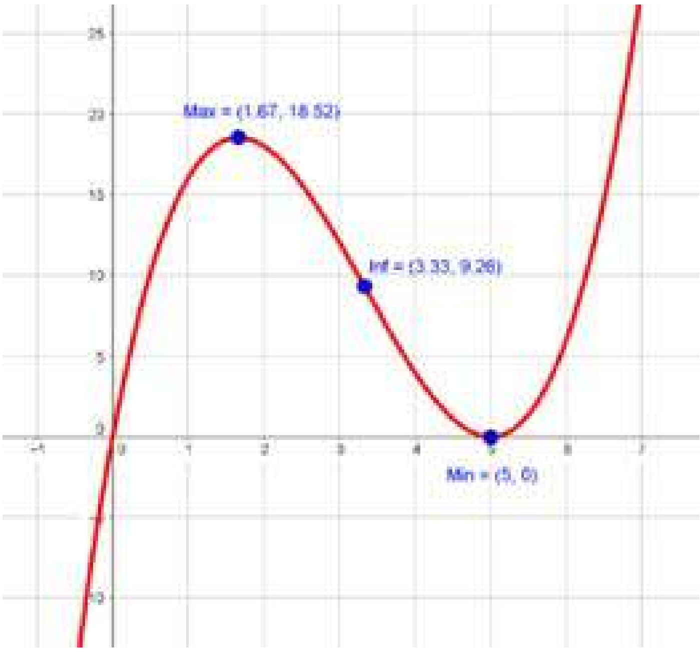
Para estudiar la monotonía de la función f (x) = x · (5 – x)^2 = x^3 – 10x^2 + 25x utilizamos la segunda deivada f ´´ (x) = 6x - 20.

La segunda derivada f ´´ (x) = 6x – 20 se anula para 10/3. Estudiamos su signo y obtenemos:

- La función y = f (x) es cóncava hacia las y negativas en $\left(-\infty, \dfrac{10}{3}\right)$.

- La función y = f (x) es cóncava hacia las y positivas en $\left(\dfrac{10}{3}, +\infty\right)$

Todo lo anterior puede verse en la gráfica de la función.



b) Para estudiar la monotonía de la función f (x) = x^2 · e^{-x} utilizamos la primera derivada f ´ (x) = (2x - x^2) · e^{-x}

La primera derivada f ´ (x) = (2x - x^2) · e^{-x} se anula para x = 0 y x = 2. Estudiamos su signo y obtenemos:

- La función y = f (x) es creciente en $(0, 2)$.

- La función y = f (x) es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

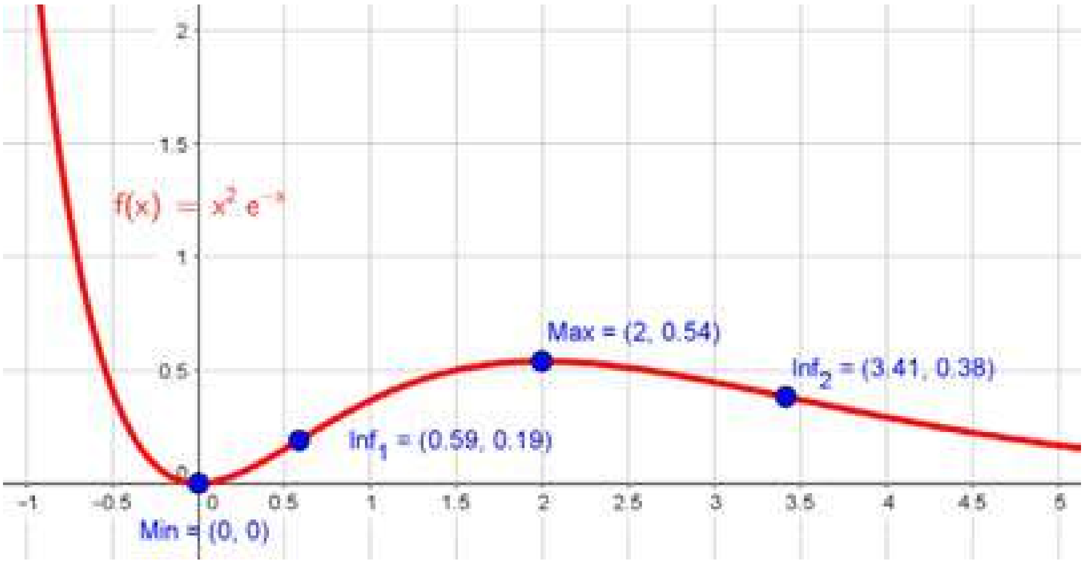
Para estudiar la concavidad de la función f (x) = x^2 · e^{-x} utilizamos la segunda derivada f ´´ (x) = (x^2 – 4x + 2) · e^{-x}

La segunda derivada f ´´ (x) = (x^2 – 4x + 2) · e^{-x} se anula para $x = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59$ y $x = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}14$.

Estudiamos su signo y obtenemos:
- La función y = f (x) es cóncava hacia las y negativas en $\left(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right)$.

- La función y = f (x) es cóncava hacia las y positivas en $\left(-\infty, 2-\sqrt{2}\right) \cup \left(2+\sqrt{2}, +\infty\right)$.

Todo lo anterior puede verse en la gráfica de la función.



4. Sean x e y dos números reales tales que x + y = 10. ¿Cuál es el mayor valor posible del producto (x + 1) · (y – 1)?

Sea P (x, y) = (x + 1) · (y – 1) la función a maximizar.

De la condición x + y = 10 despejamos y = 10 – x y sustituimos en la expresión anterior, obteniendo:

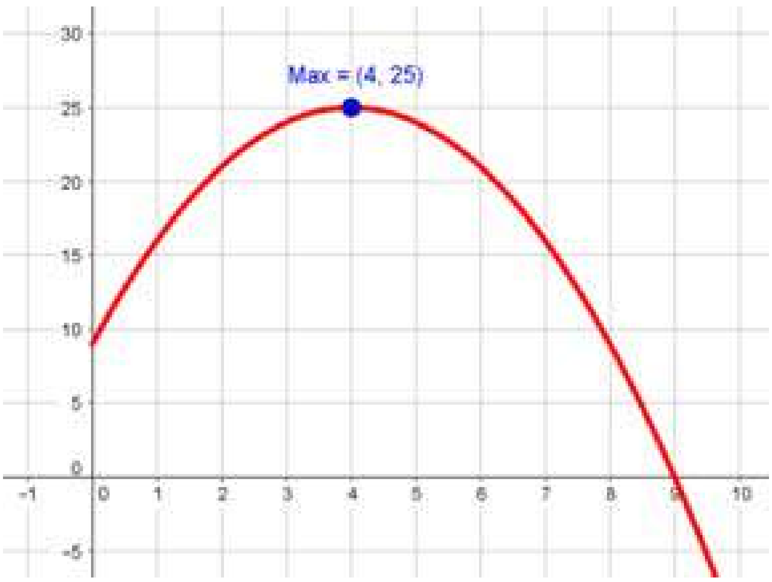
$$P(x) = (x+1)\cdot(10-x-1) \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x+1)\cdot(9-x) \quad \Rightarrow \quad P(x) = -x^2+8x+9$$

Para obtener el máximo, igualamos a cero la primera derivada:

$$P'(x) = -2x+8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

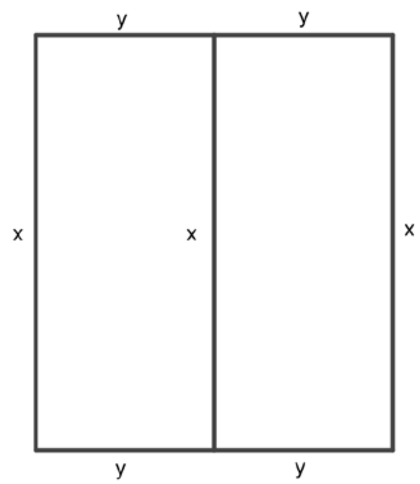
Con la derivada segunda comprobamos que es un máximo: $P''(x) = -2 < 0$.

Los números buscados son 4 y 6, y el máximo valor para el producto es 25.



5. Se quieren vallar dos campos de deporte rectangulares iguales y un lado común con 600 m de valla (se trata de vallar el contorno de ambos y el lado de separación). Halla las dimensiones si los cercados encierran una superficie máxima.

Sean x e y las dimensiones de los cercados, como puede verse en el dibujo.



La función a maximizar es A (x, y) = 2xy.

La relación que liga a las variables x e y es 3x + 4y = 600, es decir, $y = \frac{600 - 3x}{4}$

Sustituyendo la expresión anterior, obtenemos:

$$A(x) = 2x \cdot \frac{600 - 3x}{4} \quad \Rightarrow \quad A(x) = 300x - \frac{3}{2}x^2$$

Para obtener el máximo igualamos a cero la primera derivada:

$$A'(x) = 300 - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 100$$

Podemos comprobar con la segunda derivada, $A''(x) = -3 < 0$, que se trata de un máximo.

Si x = 100, entonces $y = \frac{600 - 3 \cdot 100}{4} = 75$.

Las dimensiones de los cercados serán de x = 100 metros e y = 75 metros.

6. Se desea construir un depósito con forma de prisma rectangular de base cuadrada y con una capacidad de 360 m^3. Los costes por m^2 son los siguientes: 40 euros para el fondo, 30 euros para las paredes laterales y 60 euros para el techo del depósito. Calcula las dimensiones del depósito para que el coste sea el menor posible.

Llamamos x cm a la medida del lado de la base cuadrada de la caja e y cm a la medida de la altura de la caja.

La superficie lateral de la caja es 4xy cm^2 y la superficie de la base y el techo es x^2 cm^2.

La función coste, en euros, que tenemos que minimizar es:

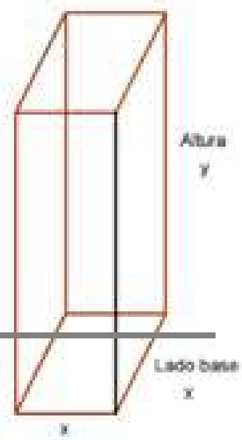
$$C(x, y) = 40x^2 + 4 \cdot 30xy + 60x^2$$

El volumen de la caja es el producto del área de la base por la altura, es decir, x^{2}y cm^3.

Como la capacidad es 360 cm^3, podemos escribir:

$$x^2 y = 360 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{360}{x^2}$$

Sustituyendo en la función coste, obtenemos:



$$C(x) = 100x^2 + \frac{43200}{x}$$

Hallamos las dos primeras derivadas de la función anterior para obtener:

$$C\,'(x) = 200x - \frac{43200}{x^2} \qquad \text{y} \qquad C\,''(x) = 200 + \frac{86400}{x^3}$$

Resolvemos la ecuación C ´ (x) = 0 y obtenemos:

$$200x - \frac{43200}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 200x^3 - 43200 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 216 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

Comprobamos en la segunda derivada que para x = 6 se obtiene un mínimo:

$$C\,''(6) = 200 + \frac{86400}{6^3} \; > \; 0$$

Si el lado de la base mide x = 6 cm, la altura medirá y = $\frac{360}{36} = 10$ cm.

En resumen, las dimensiones del depósito son 6 cm de lado de la base y 10 cm de altura.

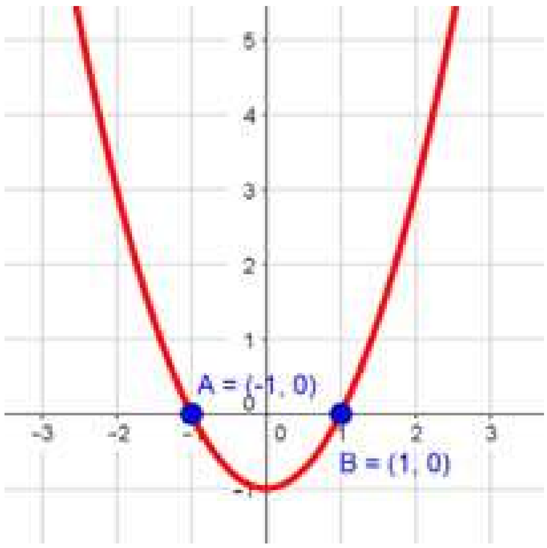
El coste mínimo asciende a $C(6) = 100 \cdot 36 + \frac{4300}{6}$ = 10 800 euros.

7. Sea una función f(x) de la que se conoce su derivada f ´ (x) = $x^2 - 1$.

a) Representa gráficamente f ´ (x).

b) Deduce de la gráfica los intervalos de crecimiento de f (x).

c) Halla la abscisa de los puntos máximos y mínimos de f (x).



a) La gráfica de la función f ´ (x) = $x^2 - 1$ es la parábola del dibujo.

b) La función f (x) es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ al ser f ´ (x) > 0.

La función f (x) es decreciente en el intervalo (- 1, 1) al ser f ´ (x) < 0.

c) La abscisa de los puntos máximos y mínimos son x = - 1 y x = 1; puntos en los cuales f ´ (x) = x^2 - 1 se anula.

8. El saldo de una cuenta bancaria en un periodo de 5 años viene dado por la función:

$$\mathbf{f(t) = -12t^3 + 90t^2 - 144t + 84, \; 0 \le t \le 5}$$

siendo t el tiempo en años.

a) Calcula los saldos inicial y final.
b) ¿En qué momento el saldo de la cuenta es máximo? ¿Y cuándo es mínimo?

c) Analiza si en algún momento el saldo es negativo y determina todos los periodos donde se observa un crecimiento del saldo.

a) El saldo inicial es f (0) = $-12 \cdot 0^3 + 90 \cdot 0^2 - 144 \cdot 0 + 84 = 84$ euros.

El saldo final es f (5) = $-12 \cdot 5^3 + 90 \cdot 5^2 - 144 \cdot 5 + 84 = 114$ euros.

b) Para determinar los máximos y los mínimos analizamos las dos primeras derivadas.

La primera derivada es $f'(t) = -36t^2 + 180t - 144$ y se anula para t = 1 y t = 4. La segunda derivada es $f''(t) = -72t + 180$.

Por tanto:

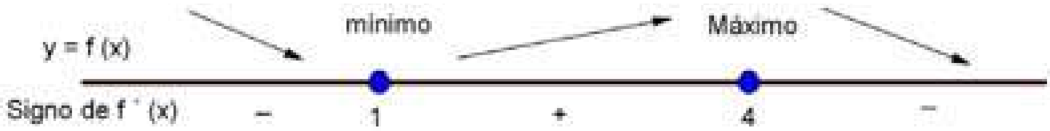
- Si t = 1, $f''(1) = 108 > 0$ y existe un mínimo en el punto (1, 18).

- Si t = 4, $f''(4) = -108 < 0$ y existe un máximo en el punto (4, 180).

c) Estudiamos la monotonía de la función analizando el signo de la primera derivada:

$$f'(t) = -36t^2 + 180t - 144 = -36(t-1)(t-4)$$

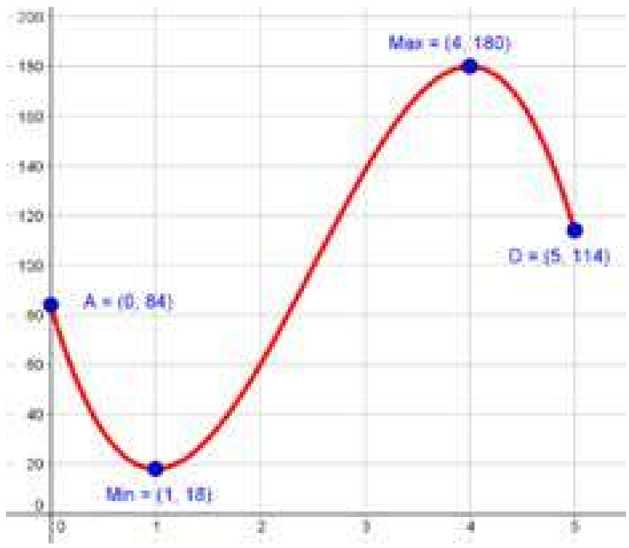
En el esquema que sigue aparece el signo de la primera derivada y la monotonía de la función:



c) Hallamos los valores de la función en las abscisas enteras y obtenemos:

t	0	1	2	3	4	5
f (t)	84	18	60	138	180	114

Observamos que la función nunca toma valores negativos. Esto puede verse en la gráfica del dibujo:



9. Se sabe que la expresión que representa el número medio de clientes N (t) que acude un día a un supermercado, en función del número de horas t que lleva abierto, es N (t) = at^2 + bt, 0 ≤ t ≤ 8, siendo a y b números reales.

Sabiendo que el máximo número de clientes que han acudido ese día ha sido de 160 y que se ha producido a las 4 horas de abrir, calcula a y b.

El máximo está en el punto (4, 160). Se cumplirá N (4) = 160 y N ´ (4) = 0.

Imponiendo las condiciones llegamos a las relaciones:

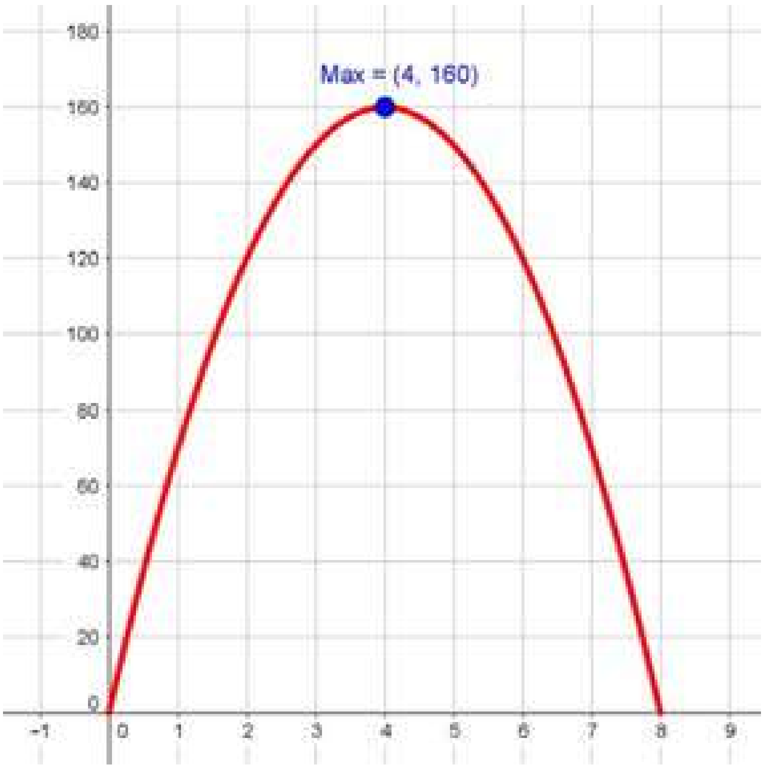
N (4) = 160 $\Rightarrow$ 16a + 4b = 160 $\Rightarrow$ 4a + b = 40

N ´ (4) = 0 $\Rightarrow$ 8a + b = 0

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} 4a + b = 40 \\ 8a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = 80 \end{cases}$$

La función es N (t) = - $10t^2$ + 80t.



PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 195

PUNTOS DE INFLEXIÓN

1. Utilizando medios tecnológicos (calculadora gráfica o programa informático) obtén la gráfica de la función f (x) = $4x^3 + 15x^2 - 18x + 10$.

a) Determina los puntos singulares: máximo, mínimo y punto de inflexión. ¿La recta determinada por los extremos relativos, pasa por el punto de inflexión?

b) Si llamamos M al máximo, P al mínimo e I al punto de inflexión, halla la razón de las longitudes de los segmentos MI e IP.

c) ¿Ocurre lo mismo para cualquier función cúbica con tres puntos singulares? ¿Podrías probarlo?

2. Dibuja la gráfica de la función f (x) = $x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 13x + 22$.

a) Halla las coordenadas de los puntos de inflexión, llamándolos B y C. Determina los puntos A y D, donde la recta determinada por B y C corta de nuevo a la gráfica anterior.

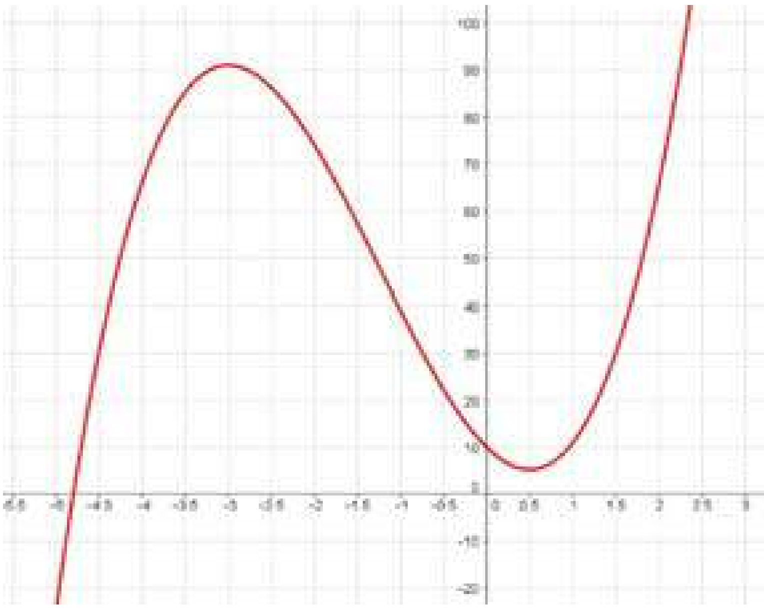
b) Calcula la longitud de los segmentos AB, BC y CD, y determina el valor de las razones: $\frac{AB}{CD}$ y $\frac{BC}{CD}$.

c) Elige otras funciones de cuarto grado cuya gráfica tenga la misma forma que la gráfica anterior y estudia las mismas razones.

d) Los resultados que has obtenido, ¿se mantienen para cualquier función de cuarto grado con dos puntos de inflexión? ¿Podrías probarlo?

La parte gráfica de estas actividades está resuelta con el programa GeoGebra.

1. La gráfica de la función puede verse en la imagen, después de ajustar adecuadamente la Vista gráfica.



a) Para determinar los puntos singulares hallamos las derivadas de la función f (x) = $4x^3 + 15x^2 - 18x + 10$ y obtenemos:

$f'(x) = 12x^2 + 30x - 18$ $\qquad$ $f''(x) = 24x + 30$ $\qquad$ $f'''(x) = 24$

Los valores que anulan la primera derivada son x = - 3 y x = 0,5. El valor que anula la segunda derivada es x = - 1,25.

Los puntos singulares de la función son:

Máximo: M (- 3, 91), $\qquad$ Mínimo: P (0,5; 5,25) $\qquad$ Punto de inflexión: I (-1,25; 48,125)

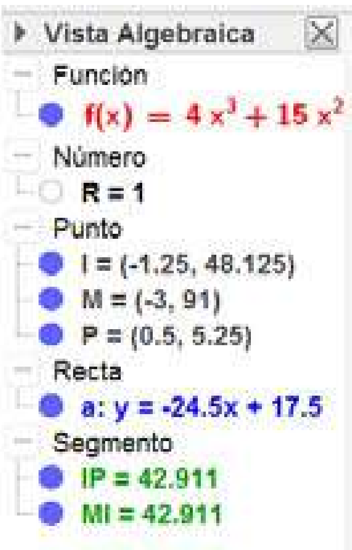
La recta determinada por los extremos relativos, M (- 3, 19) y P (0,5; 5,25), tiene por ecuación:

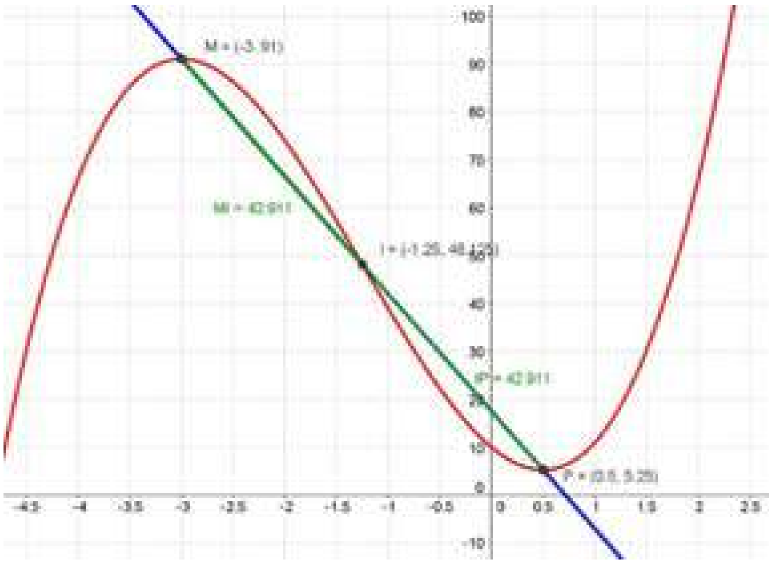
$$y = -24{,}5x + 17{,}5.$$

Comprobamos que la recta citada pasa por el punto de inflexión I (-1,25; 48,125):

$$y(-1{,}25) = -24{,}5 \cdot (-1{,}25) + 17{,}5 = 48{,}125$$

Todo lo anterior puede verse en las imágenes que siguen.





b) Siendo los puntos: M (- 3, 91), P (0,5; 5,25) e I (-1,25; 48,125), los segmentos MI e IP miden:

$$MI = \sqrt{(-3 + 1{,}25)^2 + (91 - 48{,}125)^2} = \sqrt{3{,}0625 + 1838{,}266} = 42{,}911$$

$$IP = \sqrt{(0{,}5 + 1{,}25)^2 + (5{,}25 - 48{,}125)^2} = \sqrt{3{,}0625 + 1838{,}266} = 42{,}911$$

Como los segmentos tienen la misma longitud, el valor de la razón pedida es 1.

c) Probamos con la función f (x) = $x^3 + 6x^2 - 36x + 29$.

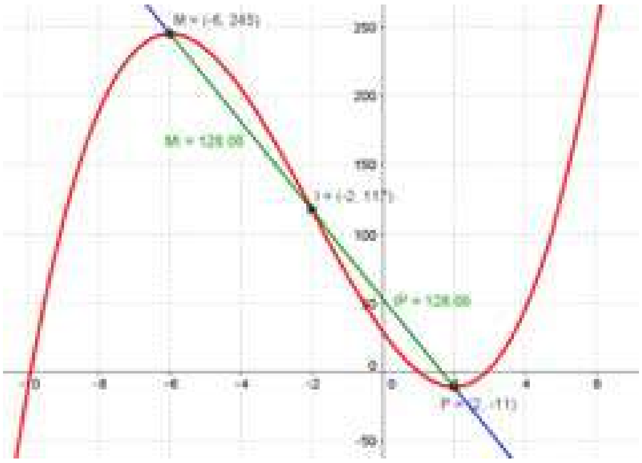
En la imagen puede verse que, en este caso, los puntos son:

Máximo: M (- 6, 245), $\qquad$ Mínimo: P (2, - 11) Punto de inflexión: I (- 2, 117)

Las longitudes de los segmentos MI e IP son:

$$MI = \sqrt{(-6+2)^2 + (245-117)^2} = \sqrt{16+16384} = 128,06$$

$$IP = \sqrt{(2+2)^2 + (-11-117)^2} = \sqrt{16+16384} = 128,06$$



Vamos a probar que los resultados obtenidos en las dos funciones anteriores son válidos para cualquier función cúbica con tres puntos singulares, es decir, el punto de inflexión (I) es el punto medio del segmento cuyos extremos son el máximo (M) y el mínimo relativo (P), por tanto, los tres puntos están alineados y los segmentos MI e IP tienen la misma longitud.

Sea la función cúbica f (x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$, con a ≠ 0.

Anulamos la primera derivada f ´ (x) = $3ax^2 + 2bx + c$ y obtenemos las abscisas del máximo (x_M) y del mínimo (x_P):

$$x = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} = \begin{cases} x_P = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \\ x_M = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \end{cases}$$

Anulamos la segunda derivada f ´´ (x) = 6ax + 2b y obtenemos la abscisa del punto de inflexión (x_I):

$$x_I = -\frac{2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$$

Comprobamos que la media aritmética de las abscisas del máximo (x_M) y del mínimo (x_P) coincide con la abscisa del punto de inflexión (x_I).

Teniendo en cuenta la relación de Cardano, correspondiente a la ecuación $3ax^2$ 2bx + c = 0, obtenemos:

$$\frac{x_M + x_P}{2} = \frac{-\frac{2b}{3a}}{2} = -\frac{b}{3a} = x_I$$

También puede comprobarse que la media aritmética de las ordenadas del máximo [y_M = f (x_M)] y del mínimo [y_P = f (x_P)] coincide con la ordenada del punto de inflexión [y_I = f (x_I)].

Las ordenadas del máximo (M) y del mínimo (P) son:

$$f\ (x_m) = a\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\right)^2 + c\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\right) + d$$

$$f\ (x_P) = a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\right)^2 + c\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\right) + d$$

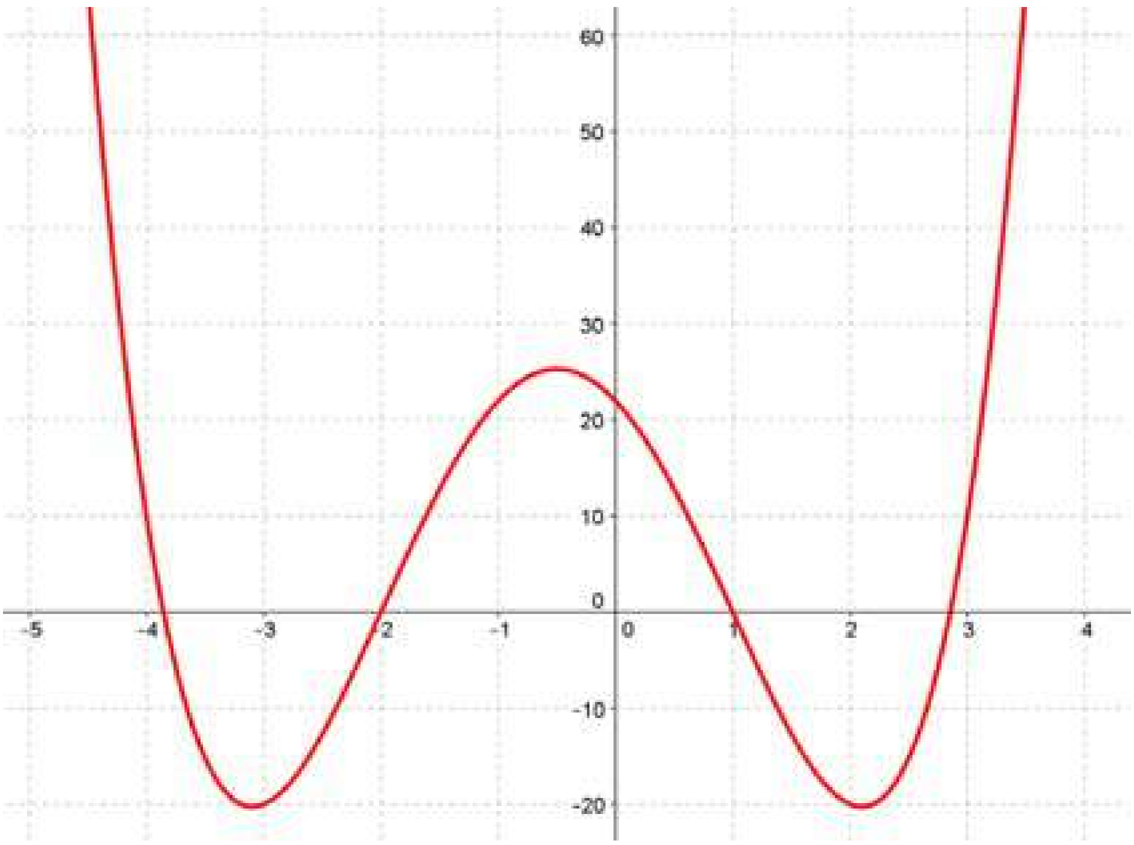
Operando y simplificando obtenemos que la media aritmética de las ordenadas del máximo (M) y del mínimo (P) son:

$$\frac{f\ (x_M) + f\ (x_P)}{2} = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$$

La ordenada del punto de inflexión es:

$$f\ (x_I) = f\left(-\frac{b}{3a}\right) = a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{3a}\right) + d = \ldots = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$$

2. Ajustando la Ventana gráfica obtenemos la gráfica de la función f (x) = $x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 13x + 22$ que puede verse en el dibujo.



a) Para hallar los puntos de inflexión de la función f (x) obtenemos las derivadas:

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x - 13$ $\qquad$ $f''(x) = 12x^2 + 12x - 24$ $\qquad$ $f'''(x) = 24x + 12$

Anulamos la segunda derivada y obtenemos:

$$12\,(x^2 + x - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 + \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_B = -2 \\ x_C = 1 \end{cases}$$

Los puntos de inflexión son:

$x_B = -2$; $\quad y_B = f(-2) = (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^3 - 12 \cdot (-2)^2 - 13 \cdot (-2) + 22 = 0 \quad \Rightarrow B(-2, 0)$

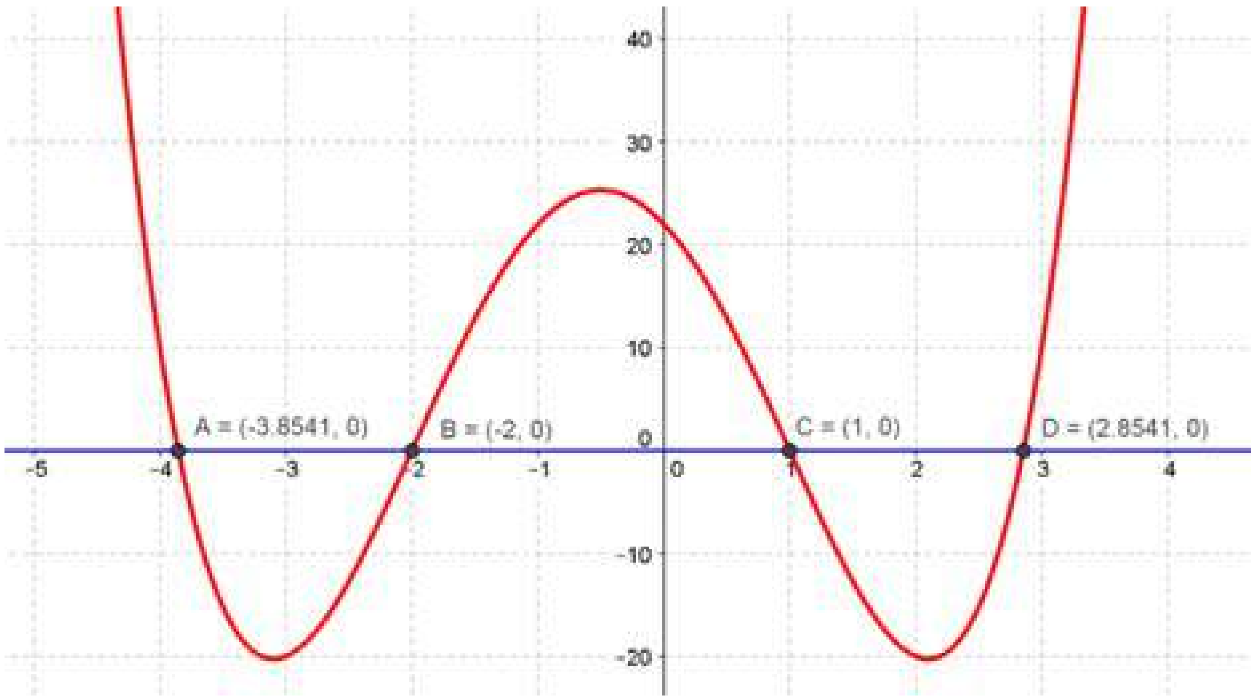
$x_B = 1$; $\quad y_B = f(1) = (1)^4 + 2 \cdot (1)^3 - 12 \cdot (1)^2 - 13 \cdot (1) + 22 = 0 \quad \Rightarrow C(1, 0)$

La recta determinada por B y C es y = 0 y los puntos A y D, donde la recta anterior corta a la gráfica son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 13x + 22 \\ y = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior, obtenemos los puntos: A (- 3,8541; 0) y D (2,8541; 0).

Los puntos anteriores pueden verse en la gráfica que sigue.



b) Calculamos la longitud de los segmentos AB, BC y CD:

AB = (- 2) – (- 3,8541) = 1,8541 BC = 1 – (- 2) = 3 CD = 2,8541 – 1 = 1,8541

El valor de las razones: $\frac{AB}{CD}$ y $\frac{BC}{CD}$ es:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{1,8541}{1,8541} = 1 \qquad \frac{BC}{CD} = \frac{3}{1,8541} = 1,6180$$

c) Para la función f (x) = $x^4 - 6x^2 - 6x + 1$, obtenemos:

Puntos de inflexión: B (- 1, 1) y C (1, - 9).

La ecuación de la recta determinada por los puntos de inflexión es y = - 5x – 4.

Los puntos A y D que la recta anterior corta a la gráfica son: A (- 2,2361; 7,1803) y D (2,2361; - 15,1803).

Las longitudes de los segmentos AB, BC y CD son:

$$AB = \sqrt{(-1-(-2,2361))^2 + (1-7,1803)^2} = 6,3027$$

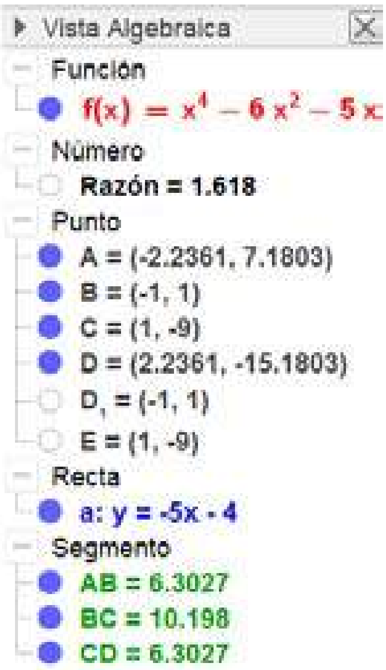
$$BC = \sqrt{(1-(-1))^2 + (-9-1)^2} = 10,1980$$

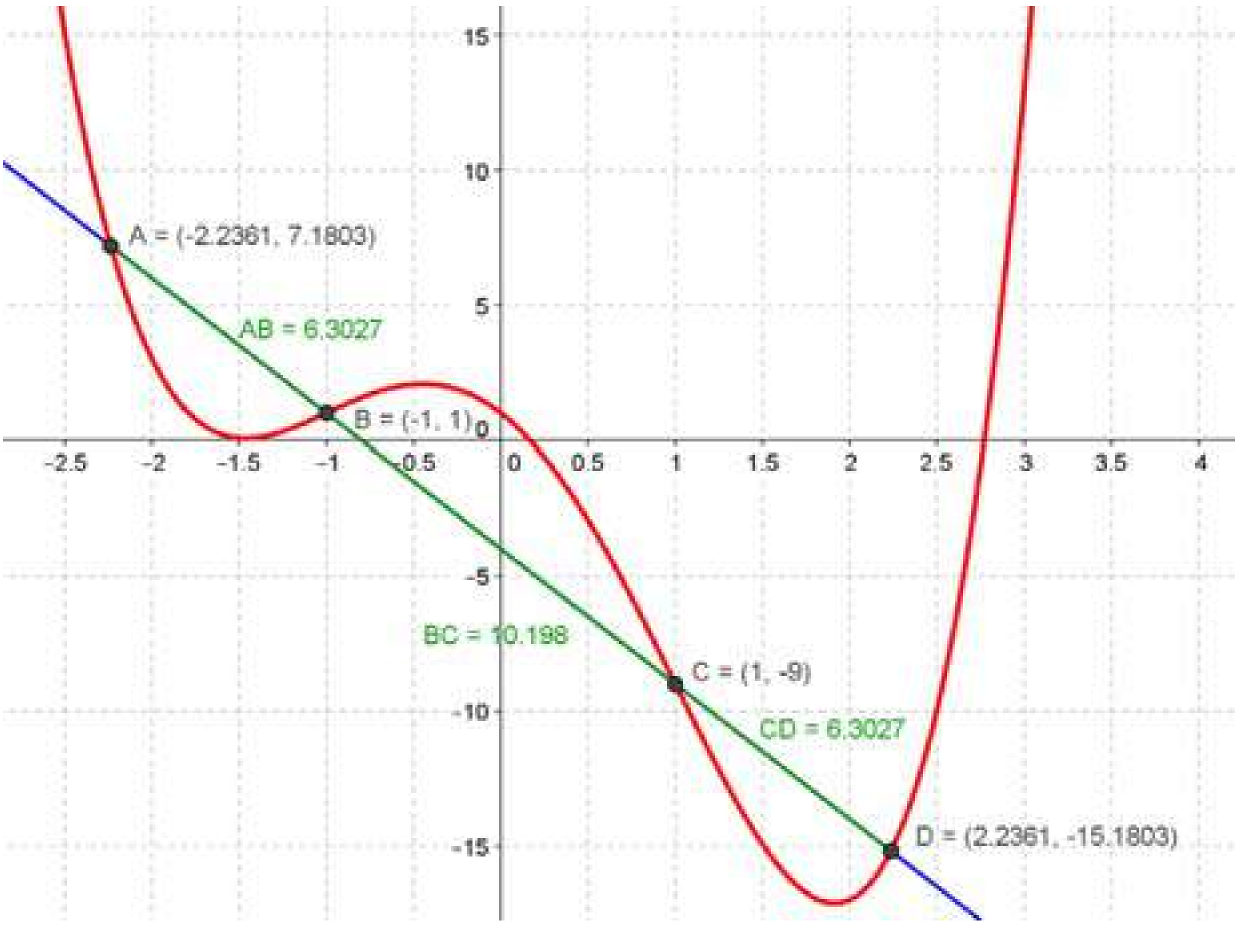
$$CD = \sqrt{(2,2361-1)^2 + (-15,1803+9)^2} = 6,3027$$

El valor de las razones: $\frac{AB}{CD}$ y $\frac{BC}{CD}$ es:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{6,3027}{6,3027} = 1 \qquad \frac{BC}{CD} = \frac{10,1980}{6,3027} = 1,6180$$

Todo lo anterior puede verse en las imágenes que siguen.


Vista Algebraica
Función
f(x) = x⁴ − 6 x² − 5 x
Número
Razón = 1.618
Punto
A = (-2.2361, 7.1803)
B = (-1, 1)
C = (1, -9)
D = (2.2361, -15.1803)
D₁ = (-1, 1)
E = (1, -9)
Recta
a: y = -5x - 4
Segmento
AB = 6.3027
BC = 10.198
CD = 6.3027


A = (-2.2361, 7.1803)
AB = 6.3027
B = (-1, 1)
BC = 10.198
C = (1, -9)
CD = 6.3027
D = (2.2361, -15.1803)

Para la función f (x) = $x^4 - 6x^2 + 5x$, obtenemos:

Puntos de inflexión: B (- 1, - 10) y C (1, 0).

La ecuación de la recta determinada por los puntos de inflexión es y = 5x – 5.

Los puntos A y D que la recta anterior corta a la gráfica son: A (- 2,2361; - 16,1803) y D (2,2361; 6,1803).

Las longitudes de los segmentos AB, BC y CD son:

$$AB = \sqrt{(-1-(-2{,}2361))^2 + (-10-(-16{,}1803))^2} = 6{,}3027$$

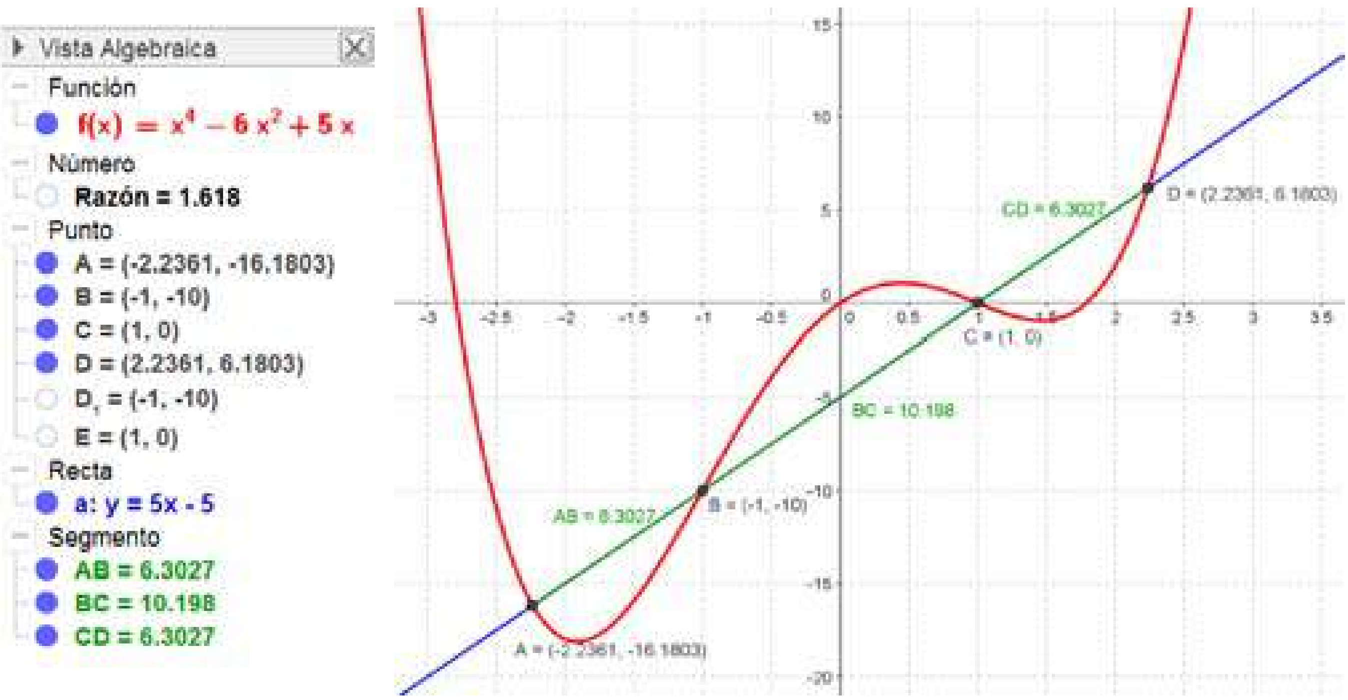
$$BC = \sqrt{(1-(-1))^2 + (0-(-10))^2} = 10{,}1980$$

$$CD = \sqrt{(2{,}2361-1)^2 + (6{,}1803-0+9)^2} = 6{,}3027$$

El valor de las razones: $\frac{AB}{CD}$ y $\frac{BC}{CD}$ es:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{6{,}3027}{6{,}3027} = 1 \qquad \frac{BC}{CD} = \frac{10{,}1980}{6{,}3027} = 1{,}6180$$

Todo lo anterior puede verse en las imágenes que siguen.



Para la función f (x) = $x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 12x + 24$, obtenemos:

Puntos de inflexión: B (1, 23) y C (3, 15).

La ecuación de la recta determinada por los puntos de inflexión es y = - 4x + 27.

Los puntos A y D que la recta anterior corta a la gráfica son: A (- 0,2361; 27,9443) y D (4,2361; 10,0557).

Las longitudes de los segmentos AB, BC y CD son:

$$AB = \sqrt{(1-(-0{,}2361))^2 + (23-27{,}9443)^2} = 5{,}0964$$

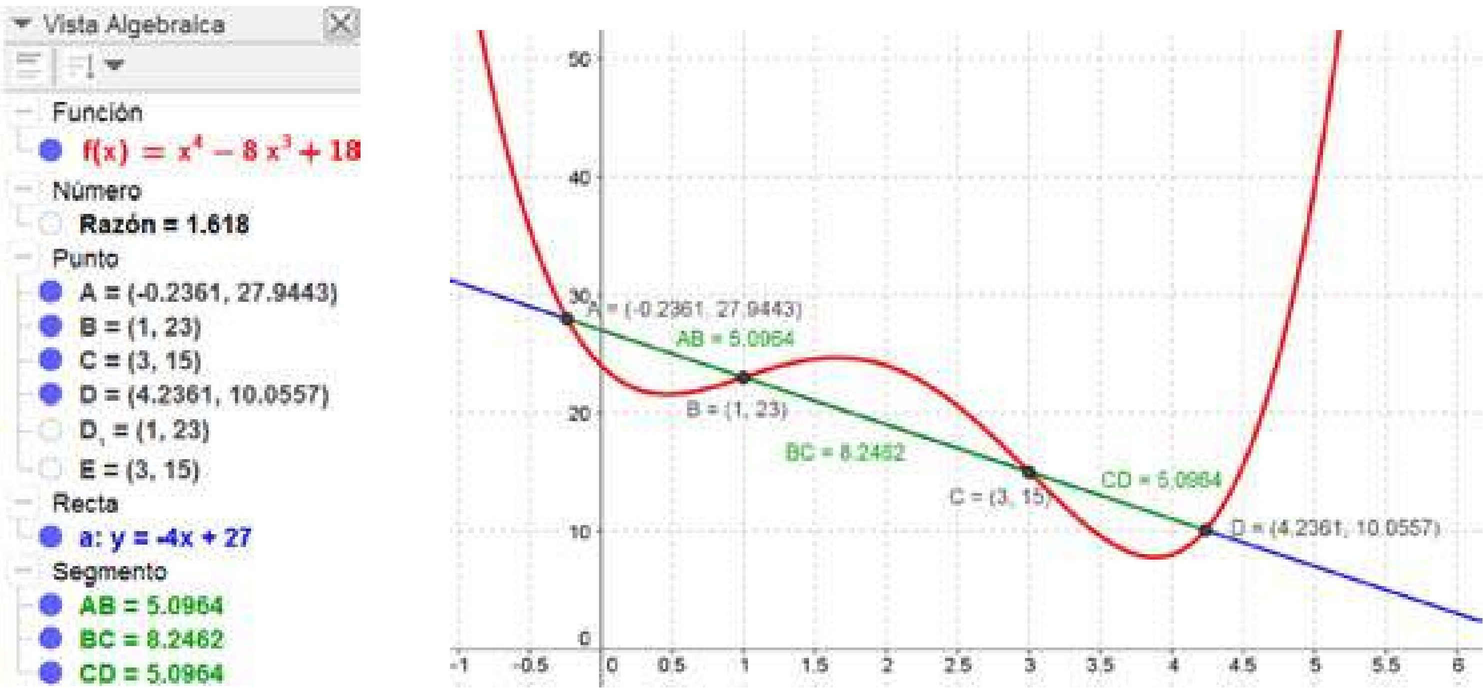
$$BC = \sqrt{(3-1)^2 + (15-23)^2} = 8{,}2462$$

$$CD = \sqrt{(4{,}2361-3)^2 + (10{,}0557-15)^2} = 5{,}0964$$

El valor de las razones: $\frac{AB}{CD}$ y $\frac{BC}{CD}$ es:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{5{,}0964}{5{,}0964} = 1 \qquad \frac{BC}{CD} = \frac{8{,}2462}{5{,}0964} = 1{,}6180$$

Todo lo anterior puede verse en las imágenes que siguen.



Vamos a probar que las razones anteriores se mantienen para cualquier función polinómica de cuarto grado cuya gráfica tenga la misma forma que las estudiadas con anterioridad.

Para simplificar los cálculos hacemos que la recta que une los cuatro puntos de corte con la gráfica, ABCD, sea el eje OX (y = 0). Tomamos los puntos de inflexión B (0, 0) y C (a, 0), con a > 0. El valor de las razones anteriores se mantendrá, sólo cambiará el valor de los segmentos AB, BC y CD.

Sea y = f (x) la función buscada, con B (0, 0) y C (a, 0) los puntos de inflexión, entonces:

$$f''(x)\ x \cdot (x - a) = x^2 - ax$$

Integrando, obtenemos:

$$f'(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} + b$$

$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{ax^3}{6} + bx + c$, con b y c constantes reales.

Calculamos las constantes b y c haciendo que los puntos B (0, 0) y C (a, 0) pertenezcan a la gráfica de la función y = f (x), obtenemos:

$$b = \frac{a^3}{12} \text{ y c = 0.}$$

La función es: $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{ax^3}{6} + \frac{a^3x}{12}$, es decir, $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2a}{12}x^3 + \frac{a^3}{12}x$

Hallamos los puntos de corte de de y = f (x) con la recta ABCD (y = 0):

$$\begin{cases} y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2a}{12}x^3 + \frac{a^3}{12}x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{12}x^4 - \frac{2a}{12}x^3 + \frac{a^3}{12}x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

La factorización del polinomio $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2a}{12}x^3 + \frac{a^3}{12}x$ es:

$$\frac{1}{12}x^4 - \frac{2a}{12}x^3 + \frac{a^3}{12}x = \frac{1}{12}x \cdot (x - a)\,(x^2 - ax - a^2)$$

Las soluciones del sistema son:

$$A: \begin{cases} x = \frac{a - a\sqrt{5}}{2} \\ y = 0 \end{cases} \quad B: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad C: \begin{cases} x = a \\ y = 0 \end{cases} \quad D: \begin{cases} x = \frac{a + a\sqrt{5}}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Las longitudes de los segmentos AB, BC y CD son:

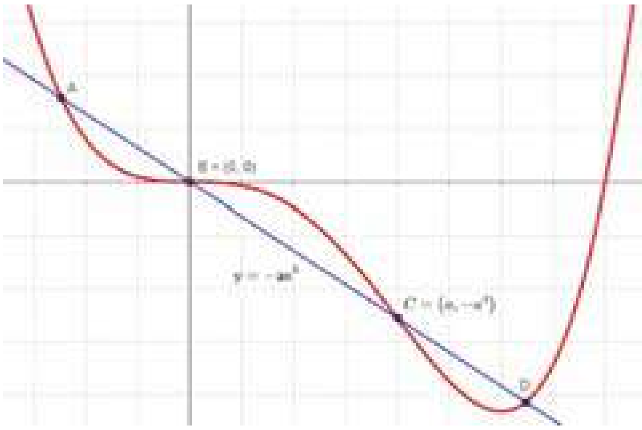
$$AB = \left| \frac{a - a\sqrt{5}}{2} \right| \qquad BC = a \qquad CD = \left| \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} \right|$$

El valor de las razones: $\frac{AB}{CD}$ y $\frac{BC}{CD}$ es:

$$\frac{AB}{CD}=1 \qquad \frac{BC}{CD}=\frac{a}{\left|\dfrac{-a+a\sqrt{5}}{2}\right|}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}6180$$

d) Consideramos una función polinómica de grado 4 que no tenga la forma de las anteriores, por ejemplo, la función que tiene como raíces a 0 (triple) y a 2a, con a positivo. Esta función es:

f (x) = $x^3 \cdot (x - 2a)$, es decir, f (x) = $x^4 - 2ax^3$



Hallamos sus puntos de inflexión:

f ´ (x) = $4x^3 - 6ax^2$

f ´´ (x) = $12x^2 - 12ax = 12x\,(x - a)$

Los puntos de inflexión son B (0, 0) y C (a, - a^4)

La ecuación de la recta determinada por los puntos B y C es y = - a^3x.

Hallamos los puntos A y D resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = x^4 - 2ax^3 \\ y = -a^3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 - 2ax^3 + a^3x = 0 \\ y = -a^3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\cdot(x-a)\cdot(x^2-ax-a^2)=0 \\ y = -a^3x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = 0, \quad x_C = a, \quad x_A = \dfrac{a - a\sqrt{5}}{2}, \quad x_D = \dfrac{a + a\sqrt{5}}{2} \\ y = -a^3x \end{cases}$$

Los puntos de intersección de la recta y la función son:

$$A\left(\frac{a-a\sqrt{5}}{2}, \frac{-a^4+a^4\sqrt{5}}{2}\right), \quad B\,(0, 0) \qquad C\,(a, -a^4) \qquad D\left(\frac{a+a\sqrt{5}}{2}, \frac{-a^4-a^4\sqrt{5}}{2}\right)$$

Las longitudes de los segmentos AB, BC y CD son:

$$AB=\sqrt{\left(\frac{a-a\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{-a^4+a^4\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2+a^8\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}=$$

$$=\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|\sqrt{a^2+a^8}$$

$$BC=\sqrt{a^2+(-a^4)^2}=\sqrt{a^2+a^8}$$

$$CD=\sqrt{\left(\frac{a-a\sqrt{5}}{2}-a\right)^2+\left(\frac{-a^4+a^4\sqrt{5}}{2}+a^4\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{-a+a\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{a^4-a^4\sqrt{5}}{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{a^2\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+a^8\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|\sqrt{a^2+a^8}$$

El valor de las razones: $\frac{AB}{CD}$ y $\frac{BC}{CD}$ es:

$$\frac{AB}{CD} = 1 \qquad \frac{BC}{CD} = \frac{\sqrt{a^2 + a^8}}{\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| \sqrt{a^2 + a^8}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180$$

Concluimos que en todas las funciones polinómicas de grado 4 con dos puntos de inflexión, de los tres segmentos que se forman al cortar la gráfica con la recta que pasa por los dos puntos de inflexión, dos son iguales y la razón del tercero con los anteriores es el número áureo:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180.$$