UNIDAD 14: Estadística inferencial. Muestreo. Estimación puntual y por intervalos

CUESTIONES INICIALES-PÁG. 336

1. En una ciudad de 20 000 habitantes quieren pasar una encuesta sobre la opinión de los ciudadanos acerca de la construcción de un parking. ¿Cómo escogerían a 500 habitantes de esa ciudad para pasarles la encuesta?

Mediante muestreo aleatorio simple. Asignando un número del 00000, 00001, 00002, …, hasta el 20000 a cada uno de los ciudadanos y después con una tabla de números aleatorios se sacan los 500 que vamos a elegir.

2. La probabilidad de que un alumno apruebe Economía es 0,8. En un grupo de 22 alumnos ¿cuál es la probabilidad de que al menos 20 aprueben Economía?

Estamos ante una distribución binomial B (22; 0,8). Hallamos la probabilidad:

$$P\left(X \geq 20\right) = P\ (X = 20) + P\ (X = 21) + P\ (X = 22) = 0{,}1545.$$

3. Una empresa produce varillas ortopédicas. Las longitudes de las mismas siguen una normal de media 19 cm. y desviación típica 5 mm. Los cirujanos exigen que la longitud de las varillas ha de estar entre 18,5 cm. y 19,5 cm ¿Qué porcentaje de varillas de esta empresa se ajustan a estas medidas?

La longitud de las varillas se ajusta a una normal N (19; 0,5). Tenemos que: P (18,5 < X < 19,5) = 0,6827. Es decir, el 68,27% de las varillas se ajusta a las medidas exigidas.

4. En una distribución normal de media 12 y desviación típica 2 se sabe que P(X < a) = 0,1587. Halla el valor de a.

Estamos ante una distribución normal N (12, 2).
Mediante las condiciones del enunciado obtenemos:

$$P\ (X < a) = P\left(Z < \frac{a-12}{2}\right) = 0{,}1587, \text{ entonces; } P\left(Z < \frac{12-a}{2}\right) = 1 - 0{,}1587 = 0{,}8413$$

de modo que utilizando la tabla de la normal N (0, 1) obtenemos $\frac{12-a}{2} = 1$, es decir, a = 10.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 361

1. Negativo y positivo. Analiza la última falacia y encuentra el error que nos lleva a al igualdad – 1 = 1.

El error cometido está en el paso:

$$2 \cos 210º \cdot \cos 90º = 2 \cos 90º \cdot \cos (-30º) \Leftrightarrow \cos 210º = \cos 30º.$$

Simplificamos o dividimos por cos 90º = 0. Esta simplificación nos puede conducir a cualquier resultado, ya que:

Si a · 0 = b · 0 y simplificamos por 0, entonces a = b.

2. El mismo número. Analiza el razonamiento siguiente para demostrar: «todos los números son el mismo número» y encuentra el error:

$$\mathbf{a \neq b \Leftrightarrow a + b = t \Leftrightarrow (a + b) \cdot (a - b) = t \cdot (a - b) \Leftrightarrow a^2 - b^2 = ta - tb \Leftrightarrow a^2 - ta = b^2 - tb \Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - ta + \frac{t^2}{4} = b^2 - tb + \frac{t^2}{4} \Leftrightarrow \left(a - \frac{t}{2}\right)^2 = \left(b - \frac{t}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a - \frac{t}{a} = b - \frac{t}{2} \Leftrightarrow a = b$$

En este caso el error lo cometemos en el paso:

$$\left(a - \frac{t}{2}\right)^2 = \left(b - \frac{t}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a - \frac{t}{2} = b - \frac{t}{2}$$

La raíz cuadrada de una expresión tiene dos raíces, opuestas, y tomamos la que nos conviene para crear el error.

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 362

1. Calcula veinte números aleatorios:
a) Entre 0 y 1. **b) Entre 0 y 1; redondeados con cuatro cifras decimales.**
c) Entre 10 y 25. **d) Enteros entre 3 y 15.**
e) De la distribución normal N(0, 1) **f) De la distribución normal N(10, 2).**

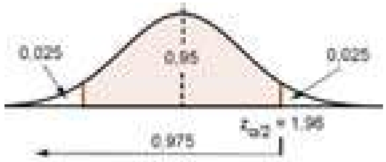
1. Los distintos números aleatorios pueden verse en la tabla que sigue.

	A	B	C	D	E	F
1	a)	b)	c)	d)	e)	f)
2	0,676999557	0,3619	12,68848412	8	2,081714706	9,085064189
3	0,795021401	0,3623	23,76185703	6	-0,309151679	9,480357263
4	0,694230407	0,8912	14,14641495	14	0,57190471	12,63625471
5	0,176998511	0,0062	13,03534633	9	-0,152770345	9,789429548
6	0,707523092	0,3082	11,69939014	5	0,718883534	5,931356984
7	0,310924779	0,7514	24,74153758	6	-0,638064719	12,46710656
8	0,105602506	0,4074	17,23693024	12	-0,086965864	9,820790787
9	0,112847693	0,3607	18,29620357	3	-0,055854967	12,35378076
10	0,606468982	0,3429	21,4604154	6	-1,086602771	7,500973053
11	0,596630047	0,16	14,7459197	7	1,203736122	6,477491873
12	0,187766511	0,4423	22,3915043	5	0,279643754	9,217813407
13	0,821392133	0,1314	24,19633083	11	0,226031729	12,19285006
14	0,570238654	0,2657	16,81973469	5	-1,008933079	9,549011493
15	0,969824501	0,7029	19,16681734	5	1,266173916	9,899965312
16	0,934876275	0,3199	17,03584406	4	0,560394768	10,36954906
17	0,450160599	0,369	11,55229726	13	-0,390749205	11,09013202
18	0,997754375	0,6673	13,61677296	5	-0,851815129	11,10248535
19	0,943726792	0,3118	23,19711971	7	-0,349960111	9,20877668
20	0,367809035	0,9776	22,40417143	4	0,58822373	8,404458167
21	0,57708387	0,8819	20,23678356	7	-0,368407812	7,2328463

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 363

2. Según los datos de cierta comunidad autónoma relativos al impuesto sobre la renta, en el pasado ejercicio fiscal la contribución media fue de 4000 euros. En una muestra de 500 declaraciones del año en curso, elegidos al azar, la contribución media ha sido de 4120 euros, con una desviación típica de 1200 euros. Obtén intervalos de confianza para la contribución media con una confianza del 95% y del 99%.

a) A una confianza del 95% le corresponde un valor crítico $z_{\alpha/2}$ = 1,96 pues:



Los intervalos de confianza para la media tienen la forma:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(4120 - 1{,}96 \cdot \frac{1200}{\sqrt{500}}; 4120 + 1{,}96 \cdot \frac{1200}{\sqrt{500}}\right) = (4014{,}82; 4225{,}18).$$

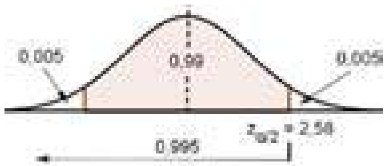
Para obtener el intervalo de confianza en la calculadora seguimos los pasos:

- En la tecla **STAT** activamos el menú **TEST**, y dentro de es último **7: ZIntervalo…** Aparece la pantalla de la primera imagen de la izquierda. En ella seleccionamos **Est** (**Stats**) e introducimos el valor de la desviación típica σ del problema, en este caso 1200; el valor de la media muestral, 4120; el tamaño de la muestra, n = 500 y en **Nivel-C** (**C-Level**) el nivel de confianza elegido, en este caso .95.

- Activamos la orden **Calcular** (**Calculate**) pulsando **ENTER**. Obtenemos el intervalo de confianza para la media poblacional, (4014,8; 4225,2); acompañado de la media muestral $\bar{x}$ = 4120.000 y el tamaño muestral n = 500.000.

ZIntervalo
Entr : Dat **Est**
σ : 1200
$\bar{x}$ = 4120
n : 500
Nivel-C : .95
Calcular

ZIntervalo
(4014.8, 4225.2)
$\bar{x}$ = 4120.000
n = 500.000



A una confianza del 99% le corresponde un valor crítico $z_{\alpha/2}$ = 2,58 pues:

El intervalo de confianza es:

$$\left(4120 - 2{,}58 \cdot \frac{1200}{\sqrt{500}}; 4120 + 2{,}58 \cdot \frac{1200}{\sqrt{500}}\right) = (3981{,}54; 4258{,}46).$$

Para obtener el intervalo de confianza en la calculadora seguimos los pasos:

- En la tecla **STAT** activamos el menú **TEST**, y dentro de es último **7: ZIntervalo…** Aparece la pantalla de la primera imagen de la izquierda. En ella seleccionamos **Est** (**Stats**) e introducimos el valor de la desviación típica σ del problema, en este caso 1200; el valor de la media muestral, 4120; el tamaño de la muestra, n = 500 y en **Nivel-C** (**C-Level**) el nivel de confianza elegido, en este caso .99.

- Activamos la orden **Calcular** (**Calculate**) pulsando **ENTER**. Obtenemos el intervalo de confianza para la media poblacional, (3981,8; 4258,2); acompañado de la media muestral $\bar{x}$ = 225.000 y el tamaño muestral n = 60.000.

ZIntervalo
Entr : Dat **Est**
σ : 1200
$\bar{x}$ = 4120
n : 500
Nivel-C : .99
Calcular

ZIntervalo
(3981.8, 4258.2)
$\bar{x}$ = 4120.000
n = 500.000

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 366

1. En una gran urbanización viven 400 personas y desean extraer una muestra aleatoria de 40 personas. Explica cómo deben elegir la muestra utilizando muestreo aleatorio simple.

Se asigna un número a cada una de las 400 persona y con una tabla de números aleatorios se eligen las 40 personas de la muestra.

2. Los asistentes a un concierto son jóvenes un 55%, adultos un 30% y el resto ancianos. ¿Cómo extraer una muestra de 180 asistentes para hacer un estudio sobre el grado de satisfacción de las obras escuchadas?

Elegimos la muestra mediante muestreo estratificado. Los estratos son los jóvenes, los adultos y los ancianos. Tomamos x jóvenes, y adultos y z ancianos:

$$\frac{x}{55} = \frac{y}{30} = \frac{z}{15} = \frac{180}{100}$$

Operando, obtenemos: x = 99 jóvenes; y = 54 adultos y z = 27 ancianos.

3. En la siguiente tabla se pueden ver el número de libros que hay en las estanterías de cada uno de los departamentos de un colegio:

Departamento	Lengua	Matemáticas	Idiomas	Ciencias	Historia	Educación física
Nº de libros	860	680	560	460	745	235

Se quiere seleccionar una muestra, mediante muestreo aleatorio estratificado, de 590 libros para formar una biblioteca de alumnos en el centro. Halla el número de libros a elegir en cada departamento.

Elegimos la muestra mediante muestreo estratificado y obtenemos:

$$\frac{L}{860} = \frac{M}{680} = \frac{I}{560} = \frac{C}{460} = \frac{H}{745} = \frac{EF}{235} = \frac{590}{3540}$$

Hallando las incógnitas, obtenemos: 143 libros de Lengua, 113 de Matemáticas, 93 de Idiomas, 77 de Ciencias, 124 de Historia y 39 de Ecuación física.

4. Consideremos la población formada por los elementos 1, 2, 3, 4 y 5.

a) Construye todas las muestras, sin reemplazamiento, de tamaño 2.

b) Halla la media de la población y la desviación típica de la población

c) Halla la media y la desviación típica de la distribución muestral de medias.

a) En la tabla tenemos las 20 muestras sin reemplazamiento de tamaño 2 que podemos obtener:

Elementos	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	2, 1	2, 3	2, 4	2, 5	3, 1	3, 2	3, 4	3, 5
Media muestral	1,5	2	2,5	3	1,5	2,5	3	3,5	2	2,5	3,5	4

Elementos	4, 1	4, 2	4, 3	4, 5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4
Media muestral	2,5	3	3,5	4,5	3	3,5	4	4,5

b) La media de la población μ = 3 y la desviación típica de la población σ = 1,41.

c) La media de la distribución muestral de medias es $\mu_{\bar{x}}$ = 3 y la desviación típica de la distribución muestral de medias es $\sigma_{\bar{x}}$ = 0,87.

5. Los pesos de los estudiantes de un centro escolar se distribuyen normalmente con media de 68 kg. y desviación típica de 0,15 kg. Si tomamos muestras de 25 estudiantes halla la media y la desviación típica de la distribución muestral de medias.

La media de la distribución muestral de medias es $\mu_{\bar{x}}$ = 68 kg y la desviación típica de la distribución muestral de medias es $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{0,15}{\sqrt{25}} = 0,03$ kg.

6. Se sabe que el número de días de permanencia de los enfermos en una clínica sigue una distribución normal de media 7,5 días y varianza 16 días. Elegimos al azar una muestra de 64 enfermos. Encuentra la media y la varianza de la distribución muestral de medias.

La media de la distribución muestral de medias es $\mu_{\bar{x}}$ = 7,5 días y la desviación típica de la distribución muestral de medias es $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{4}{\sqrt{64}} = 0,5$ días, por lo que la varianza es $\sigma^2_{\bar{x}} = 0,25$.

7. Sabemos que la distribución muestral de medias para muestras de tamaño 36 tiene varianza 16. Halla la desviación típica de la población original.

Sabemos que $\dfrac{\sigma}{\sqrt{36}} = 4$; por lo que σ = 24

8. El tiempo de espera de los pacientes que usan ortodoncia en la consulta de un odontólogo sigue una normal de media 15 minutos y desviación típica 8 minutos.

a) Si hay citadas 4 personas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera sea mayor de 12 minutos?

b) Si, un día de muchas urgencias, hay citadas 9 personas, ¿cuál es la probabilidad de que sean atendidos en menos de 18 minutos?

La distribución muestral de medias es normal $N\left(15; \dfrac{8}{\sqrt{4}}\right) = N\left(15; 4\right)$. La probabilidad pedida es:

P $\left(\overline{X} > 12\right)$ = 0,7734.

b) En este caso la distribución muestral de medias es normal $N\left(15; \dfrac{8}{\sqrt{9}}\right) = N\left(15; \dfrac{8}{3}\right)$. La probabilidad pedida es: P $\left(\overline{X} < 18\right)$ = 0,8697.

9. En un hospital el peso de los recién nacidos se ha distribuido según una normal de media 3,3 kgs. y desviación típica 0,2 kgs. Halla la probabilidad de que en una muestra de tamaño 121 el peso de los recién nacidos sea menor de 3 250 gramos.

La distribución muestral de medias es normal $N\left(3,3; \dfrac{0,2}{\sqrt{121}}\right) = N\left(3,3; 0,018\right)$. La probabilidad pedida es:

P $\left(\overline{X} < 3,250\right)$ = 0,0027.

10. Una empresa fabrica bombillas con una duración media de 1800 horas y desviación típica de 60 horas. Esta empresa vende todos los días 500 cajas de 50 bombillas cada una.

a) ¿En cuántas cajas cabe esperar que la media de duración de las bombillas sea mayor de 1810 horas?

b) La probabilidad de que una muestra al azar de 36 bombillas tenga una duración mayor de 1810 horas.

a) La duración media de las pilas es normal N (1800; 60). La distribución muestral de medias también es normal $N\left(1800; \dfrac{60}{\sqrt{50}}\right) = N\left(1800; 8,49\right)$. Hallamos la probabilidad P $\left(\overline{X} > 1810\right)$ = 0,1194, es decir, el 11,94% de las cajas que corresponde a 59,7 ≈ 60 cajas.

b) La distribución muestral de medias es normal $N\left(1800; \dfrac{60}{\sqrt{36}}\right) = N\left(1800; 10\right)$. La probabilidad pedida es

P $\left(\overline{X} > 1810\right)$ = 0,1587

11. En unas elecciones se pregunta por la intención de voto y 120 de 400 se muestran partidarios de votar al partido A. ¿Cuál es la probabilidad de que voten a este candidato entre un 25% y un 35%?

Del enunciado obtenemos el parámetro p = $\frac{120}{400} = 0,3$. La distribución muestral de proporciones es normal $N\left(0,3;\ \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{400}}\right) = N\left(0,3;\ 0,0229\right)$.

Hallamos la probabilidad pedida: $P\left(0,25 < \hat{p} < 0,35\right) = 0,971$.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 367

12. En una región se sabe que 2 de cada 3 accidentes son producidos por animales en la calzada. Halla la probabilidad de que en los próximos 100 accidentes en esta región:

a) Sean producidos por animales más del 60%.

b) Sean producidos por animales menos del 70%.

c) El número de accidentes producidos por animales este entre el 40% y el 80%.

Del enunciado obtenemos el parámetro p = $\frac{2}{3}$. La distribución muestral de proporciones es normal $N\left(\frac{2}{3};\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{100}}\right) = N\left(2/3,\ 0,0471\right)$.

Las probabilidades pedidas son:

a) $P\left(\hat{p} > 0,6\right) = 0,9215$

b) $P\left(\hat{p} < 0,7\right) = 0,7604$

c) $P\left(0,4 < \hat{p} < 0,8\right) = 0,9977$

13. Se supone que la temperatura del cuerpo humano sigue una distribución normal de media 37 ºC y varianza 0,64 ºC. En una muestra de 400 personas halla:

a) La probabilidad de que la temperatura media del cuerpo sea menor de 36,9 ºC.

b) La probabilidad de que la temperatura media del cuerpo este comprendida entre 36,95 ºC y 37,05 ºC.

La temperatura media del cuerpo humano es normal N (37; 0,8). La distribución muestral de medias también es normal $N\left(37; \frac{0,8}{\sqrt{400}}\right) = N\left(37; 0,04\right)$.

Las probabilidades son:

a) $P\left(\overline{X} < 36,9\right) = 0,0062$.

b) $P\left(36,95 < \overline{X} < 37,05\right) = 0,7887$.

14. Una compañía de seguros hace una encuesta a 200 personas sobre su disponibilidad de seguro de hogar resultando que 150 tenían contratado un seguro de hogar. ¿En cuántas personas de una muestra de 400 cabe esperar que al menos el 70% tengan seguro de hogar?

Del enunciado obtenemos el parámetro p = $\frac{150}{200} = 0,75$. La distribución muestral de proporciones es normal $N\left(0,75; \sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{400}}\right) = N\left(0,75; 0,0217\right)$.

Hallamos la probabilidad $P\left(\hat{p} > 0,7\right) = 0,9894$, es decir, el 98,94% de las personas que son 396 personas.

15. El cociente intelectual de los alumnos de un centro escolar se distribuye con media 110 y desviación típica desconocida. Halla la desviación sabiendo que el 15,87% de las muestras de 64 alumnos tienen un cociente intelectual medio inferior a 108.

El cociente intelectual es normal N (110 ; σ). La distribución muestral de medias también es normal $N\left(110; \frac{\sigma}{\sqrt{64}}\right)$.

Sabemos que $P\left(\overline{X} < 108\right)$ = 0,1587. De aquí obtenemos:

$$P\left(Z < \frac{108-110}{\frac{\sigma}{8}}\right) = 0,1587 \quad \Rightarrow \quad P\left(Z < \frac{110-108}{\frac{\sigma}{8}}\right) = 1 - 0,1587 = 0,8413 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{\frac{\sigma}{8}} = 0,9998 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 16$$

16. Supongamos que la talla media de los peces de una piscifactoría es de 30 cm con una desviación típica de 3 cm. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de 81 peces la talla media esté entre 29 cm. y 32 cm? ¿En cuántos peces de una muestra de 169 peces la talla media es superior a 30,5 cm?

La talla media de los peces es normal N (30; 3). La distribución muestral de medias también es normal $N\left(30; \frac{3}{\sqrt{81}}\right) = N\left(30, 1/3\right)$.

La probabilidad pedida es $P\left(29 < \overline{X} < 32\right) = 0{,}9987$.

En este caso a distribución muestral de medias es normal $N\left(30; \frac{3}{\sqrt{169}}\right) = N\left(30, 3/13\right)$.

La probabilidad pedida es $P\left(\overline{X} > 30{,}5\right) = 0{,}0151$, es decir, 3 peces.

17. Supongamos que la cantidad de agua recogida cada día en un determinado pantano sigue una distribución normal de desviación típica 3 l. Se elige una muestra aleatoria y se obtienen las siguientes cantidades de agua: 12,3; 5,8; 7,6; 4,8; 7; 4,2; 9,5; 5; 13,4, 10,6. Encuentra el intervalo de confianza para la cantidad media de agua recogida en el pantano cada día con un nivel de confianza del 95%.

La media muestral es $\overline{x} = 8{,}02$. La cantidad de agua media recogida es normal N (8,02; 3). La distribución muestral de medias es también normal $N\left(8{,}02; \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

Al nivel de confianza del 95% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 1.96$ El intervalo de confianza pedido es:

$\left(8{,}02 - 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}, 8{,}02 + 1{,}96 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \left(6{,}1606; 9{,}8794\right)$.

18. En un grupo de 60 estudiantes universitarios se observa que 48 tienen uno o ningún hermano. Halla el intervalo de confianza del 90% para la proporción de dichos estudiantes en ese grupo.

La proporción de hermanos es $p = \frac{48}{60} = 0{,}8$. La distribución muestral de proporciones es normal $N\left(0{,}8; \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{60}}\right) = N\left(0{,}8; 0{,}052\right)$.

Al nivel de confianza del 90% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}$ = 1,645. El intervalo de confianza pedido es:

$\left(0{,}8 - 1{,}645 \cdot 0{,}052 ; 0{,}8 + 1{,}645 \cdot 0{,}052\right) = (0{,}7145; 0{,}8855)$.

19. Un médico osteopata quiere estudiar la influencia de una dieta pobre en calcio en la osteoporosis. Para ello toma una muestra de 225 enfermos de osteoporosis y obtiene que la dieta media de calcio es 920 mg. Suponiendo que la toma de calcio en estos enfermos sigue una distribución normal de desviación típica 175 mg. Encuentra el intervalo de confianza al 99% para la cantidad media de calcio que toman estos enfermos.

La dieta media de calcio es normal N (920; 175). La distribución muestral de medias es también normal $N\left(920; \frac{175}{\sqrt{225}}\right)$.

Al nivel de confianza del 99% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}$ = 2,58. El intervalo de confianza pedido es:

$$\left(920-2{,}58\cdot\frac{175}{\sqrt{225}}\,;\,920+2{,}58\cdot\frac{175}{\sqrt{225}}\right)=(889{,}9;\,950{,}1).$$

20. En una ciudad se toma, al azar, una muestra de 250 jóvenes de menos de 30 años y se obtuvo que 50 no hablan inglés.

a) Halla, con una confianza del 98%, el intervalo para estimar la proporción de jóvenes que no hablan inglés.

b) Queremos repetir la experiencia para conseguir una cota de error de 0,02 con el mismo nivel de confianza del 98%. ¿De cuántos jóvenes se compondrá la muestra?

La proporción de jóvenes que no hablan inglés es p = 0,2.

a) La distribución muestral de proporciones es normal $N\left(0{,}2;\,\sqrt{\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{2500}}\right)$.

Al nivel de confianza del 98% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}$ = 2,33. El intervalo de confianza pedido es:

$$\left(0{,}2-2{,}33\cdot\sqrt{\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{250}}\,;\,0{,}2+2{,}33\cdot\sqrt{\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{250}}\right)=\left(0{,}1411;\,0{,}2589\right).$$

b) El número, n, de elementos de la muestra será:

$$0{,}02=2{,}33\cdot\sqrt{\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{n}}$$, es decir, n = 2172 personas.

21. Un país quiere estimar el gasto medio de los turistas de playa con un error no superior a 30 €. Para ello toma una muestra de 81 turistas de playa. Sabiendo que la desviación típica poblacional es de 100 €. ¿Cuál es el máximo nivel de confianza con el que se realizará la estimación?

De los datos del problema podemos escribir la igualdad $30 = z_{\alpha/2}\cdot\frac{100}{\sqrt{81}}$, de donde obtenemos que

$z_{\alpha/2}$ = 2,7. P (-2,7 < $z_{\alpha/2}$ < 2,7) = 0,993, de modo que el nivel de confianza es del 99,3%

22. Si estimamos que el 20% de los españoles no tienen acceso a Internet. Halla el error máximo que cometemos con una confianza del 99% si tomamos una muestra de 2025 españoles.

Al nivel de confianza del 99% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}$ = 2,58.

El error es igual a $2{,}58\cdot\sqrt{\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{2025}}$ = 0,023. La cota de error máxima es 0,023.

23. Un centro de salud hace un estudio sobre la relación entre las pulsaciones de los hombres y de las mujeres. Para ello se toman muestras de 100 individuos cada una y se obtienen para los hombres una media de 79 pulsaciones por minuto con una desviación típica de 3,8 pulsaciones por minuto y para las mujeres una media de 80 pulsaciones por minuto con una desviación típica de 3,2 pulsaciones por

minuto. Al nivel de confianza del 98%, ¿son superiores las pulsaciones de los hombres respecto a las mujeres o al revés?

23. Al nivel de confianza del 95% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Al nivel de confianza del 98% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 2{,}33$

El intervalo de confianza para la diferencia de medias es:

$$\left(80 - 79 - 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{3{,}4^2}{100} + \frac{3{,}2^2}{100}},\ 80 - 79 + 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{3{,}4^2}{100} + \frac{3{,}2^2}{100}}\right) = (-0{,}0879;\ 2{,}0879)$$

Por tanto, $\mu_M - \mu_H \in (-0{,}0879;\ 2{,}0879)$ y esto indica que las pulsaciones de las mujeres son mayores que las de los hombres.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 368

1. La duración media de los ramos de flores puestos en un jarrón es una variable aleatoria que se puede aproximar a una distribución normal de desviación típica 10 horas. Se toma una muestra de 12 ramos de esas flores y se obtienen las siguientes duraciones en horas:

64, 58, 72, 66, 84, 50, 62, 74, 86, 52, 76, 62

Halla el intervalo de confianza al 99% para la duración media de los ramos de flores.

La duración media de los ramos de flores es normal sigue una distribución normal N (67,17; 11.03). Al nivel de confianza del 99% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}$ = 2,58. El intervalo de confianza pedido es:

$$\left(67{,}17 - 2{,}58 \cdot \frac{11{,}03}{\sqrt{12}};\ 67{,}17 + 2{,}58 \cdot \frac{11{,}03}{\sqrt{12}}\right) = (58{,}968;\ 75{,}372).$$

2. Una empresa hace un estudio de mercado para conocer el precio medio de los libros best seller que se venden en el mercado. Para ello elige una muestra de 324 libros encontrando un precio medio de 20 €. Se sabe que el precio de estos libros sigue una distribución normal de desviación típica 5€.

a) Halla el intervalo de confianza al 90% para el precio medio de estos libros.

b) Halla el error que se comete al estimar esa media con el intervalo anterior.

a) El precio medio de los libros sigue una distribución normal $N\left(20, \frac{5}{\sqrt{324}}\right)$.

Al nivel de confianza del 90% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}$ = 1,645. El intervalo de confianza pedido es:

$$\left(20 - 1{,}645 \cdot \frac{5}{\sqrt{324}};\ 20 + 1{,}645 \cdot \frac{5}{\sqrt{324}}\right) = (19{,}543;\ 20{,}457).$$

b) El error viene dado por $E = 1{,}645 \cdot \dfrac{5}{\sqrt{324}} = 0{,}4569$

3. La estatura media de los niños de 10 años en España es de 135 cm con una desviación típica de 8 cm. Halla el tamaño de la muestra necesario para que el intervalo de confianza al 95% en el que se encuentra la media poblacional tenga una amplitud de 2cm. Libro ud 15 - 40

Al nivel de confianza del 95% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Imponiendo las condiciones del enunciado tenemos: $1 = 1{,}96 \cdot \dfrac{8}{\sqrt{n}}$, es decir, n = 246 niños.

4. El número de horas diarias que los estudiantes de 2º de Bachillerato de una comunidad dedican a preparar Los exámenes finales durante las tres últimas semanas de curso sigue una distribución normal de media y desviación típica desconocidas. Para estimar el tiempo medio se toma una muestra de 256 estudiantes de ese curso y con un nivel de confianza del 98% se obtiene un intervalo de confianza de amplitud 3,6 minutos. Halla la desviación típica poblacional.

Al nivel de confianza del 98% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 2{,}33$

Siendo la amplitud del intervalo 3,6 entonces el error es 1,8. Por tanto, $1{,}8 = 2{,}33 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{256}}$

$\Rightarrow \sigma = 12{,}36$ este es el valor de la desviación típica poblacional.

5. Se lanza al aire una moneda 400 veces y se obtienen 160 veces cruz.

a) Halla el intervalo de confianza al 90% de la probabilidad de obtener cruz.

b) ¿Cuál es el tamaño mínimo de la muestra que hemos de tomar para conseguir un error inferior a 0,04 con un nivel de confianza del 95%?

5. La proporción de cruces es p = 0,4. La distribución muestral de proporciones es normal $N\left(0{,}4,\ \sqrt{\dfrac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{400}}\right)$.

a) Al nivel de confianza del 90% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 1{,}645$. El intervalo de confianza pedido es:

$$\left(0{,}4 - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{400}}\ ;\ 0{,}4 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{400}}\right) = (0{,}3597;\ 0{,}4403).$$

b) Al nivel de confianza del 95% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

El número mínimo, n, de veces que lanzamos la moneda es:

$$0{,}04 = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{n}} \quad \Rightarrow \quad n = 577.$$

6. Una empresa fabrica pantallas de ordenador cuya resolución sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 22 píxeles. Para una muestra de 196 pantallas se obtiene el intervalo de confianza (1276,34; 1283,66). Halla la resolución media de estas pantallas y el nivel de confianza con el que se ha obtenido.

La resolución media de estas pantallas es $\frac{1283,66+1276,34}{2}=1280$ pixeles.

Hallamos el nivel de confianza mediante la igualdad: 1280 - $z_{\alpha/2}\cdot\frac{22}{13}=1276,34$; de donde $z_{\alpha/2}$ = 2,1627 que corresponde a un nivel de confianza del 96,92%

7. La cuarta parte de una población ha sido vacunada contra una enfermedad. ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra de esa población para que con un nivel de confianza del 95% la proporción muestral y la poblacional no difieren en más de 0,02?

La proporción de población vacunada es p = 0,25. La distribución muestral de proporciones es normal $N\left(0,25,\ \sqrt{\frac{0,25\cdot 0,75}{n}}\right)$

Al nivel de confianza del 95% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}$ = 1,96. Con las condiciones del problema obtenemos:

$$0,02 = 1,96\cdot\sqrt{\frac{0,25\cdot 0,75}{n}} \quad\Rightarrow\quad n=1801$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 1801 personas.

8. Un hospital hace un estudio sobre la relación entre enfermo de cáncer de pulmón y fumador. Obtiene que de 121 enfermos de cáncer de pulmón 42 eran fumadores. Halla el intervalo de confianza para la proporción con un nivel de confianza del 98%. Se sabe que esta proporción en la población es del 30%. ¿Esta proporción está incluida en el intervalo anterior?

8. La proporción de fumador y cáncer de pulmón es p = 42/121 = 0,347. La distribución muestral de proporciones es normal $N\left(0,347,\ \sqrt{\frac{0,347\cdot 0,653}{121}}\right)$.

Al nivel de confianza del 95% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}$ = 1,96. El intervalo de confianza pedido es:

$$\left(0,347-1,96\cdot\sqrt{\frac{0,347\cdot 0,653}{121}}\ ;\ 0,347+1,96\cdot\sqrt{\frac{0,347\cdot 0,653}{121}}\right)=(0,2622;\ 0,4318).$$

Como podemos ver, el valor del 30% correspondiente a 0,3 está dentro de este intervalo.

9. Un fabricante de memorias USB afirma que la desviación típica de la duración media de las mismas es de 40 usos.

a) Tomamos una muestra de 60 USBs y con confianza del 95 % observamos que la duración media es de 600 usos. Encuentra el intervalo de confianza para la duración media poblacional.

b) ¿Para qué nivel de confianza el error máximo cometido en la estimación de la media poblacional con una muestra de 60 USBs es 10,12?

a) La duración media de estas memoria es normal N (600, 40). La distribución muestral de medias es también normal $N\left(600; \frac{40}{\sqrt{60}}\right)$.

Al nivel de confianza del 95% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}$ = 1,96. El intervalo de confianza pedido es:

$$\left(600 - 1{,}96 \cdot \frac{40}{\sqrt{60}}\ ;\ 600 + 1{,}96 \cdot \frac{40}{\sqrt{60}}\right) = (589{,}88;\ 610{,}12).$$

b) Hallamos el nivel de confianza mediante la igualdad: $10{,}12 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{40}{\sqrt{60}}$; de donde $z_{\alpha/2}$ = 1,96 que corresponde a un nivel de confianza del 95 %.

10. La dureza media de cierto plástico se distribuye normalmente. Para estimar la dureza media se toma una muestra de tamaño 49 y con un nivel de confianza del 95% se sabe que esta entre 7,372 y 7,428. ¿Cuál es la dureza media de estas 49 muestras? ¿Cuánto vale la desviación típica poblacional?

La duración media es $\frac{7{,}372 + 7{,}428}{2} = 7{,}4$.

Al nivel de confianza del 99% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}$ = 2,58. Como $\frac{7{,}428 - 7{,}372}{2} = 2{,}58 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{49}}$, de donde obtenemos $\sigma = 0{,}076$.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 369

Modelos de crecimiento poblacional

Analizamos alguno de los modelos propuestos para el estudio del crecimiento de los seres vivos (humanos, animales, plantas, microorganismos…).

1. Modelo de Malthus.

Thomas R. Malthus (1766-1834) publicó en el *Ensayo sobre el principio de la población* (1798) el modelo que lleva su nombre y que se caracteriza por el crecimiento continuo o exponencial. La expresión matemática es:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{rt}$$

En la fórmula anterior, y (t) es el número de individuos presentes en el tiempo t, y_0 el tamaño inicial de la población y r un parámetro que expresa el nacimiento o incorporación de nuevos individuos en cantidad constante, generación tras generación.

Comprueba que se cumple la relación y ´ (t) = r · y (t). Representa gráficamente las funciones dadas por el modelo anterior para distintos valores de y_0 y el parámetro r, y analiza las gráficas resultantes.

2. Modelo de Verhults o ley logística.
Pierre F. Verhults (1804-1849) modificó, en 1838, el modelo de maltusiano considerando el hecho de que debe haber una tamaño máximo de la población o valor k, ya que el espacio (o el agua o los alimentos o medio ambiente) es limitado. Obtuvo la siguiente expresión:

$$y\ (t) = \frac{k \cdot y_0}{y_0 + (k - y_0) \cdot e^{-rt}}$$

Comprueba que se cumple la relación y ´ (t) = r · y (t) · (k – y (t)). Representa gráficamente las funciones dadas por el modelo anterior para distintos valores de las variables k, r e y_0, analiza las gráficas resultantes. Compara los resultados obtenidos con el modelo anterior.

3. Otros modelos.
Existen otros modelos que estudian el crecimiento en situaciones más restringidas. Son el **modelo de Gompertz** y el **modelo de von Bertalanffy**. Busca sus expresiones matemáticas, representa gráficamente las funciones resultantes y analiza las gráficas obtenidas.

Busca contextos distintos de la Biología donde se apliquen alguno de estos modelos.

A continuación damos referencias donde encontrar información sobre los modelos de crecimiento.

● AMELKIN, V. V. (2003). *Ecuaciones diferenciales en la práctica.* Editorial URSS. Moscú.

● LAHOZ-BELTRA, Rafael. (2010). *Las matemáticas de la vida.* RBA. Barcelona.

● MARTÍN, Miguel Ángel. (2013). *Matemáticas bioenriquecidas*. Edición propia. Madrid.

● STEWART, Ian. (2011). *Las matemáticas de la vida*. Crítica. Barcelona.

● http://www.ecologia.info/leyes.htm

● www.uam.es/personal_pdi/ciencias/.../08_BioCap6_Leyes_Escala.ppt