UNIDAD 10: Integrales definidas. Aplicaciones

CUESTIONES INICIALES-PÁG. 244

1. Halla el área de cada uno de los siguientes recintos:

a) Limitado por la recta y = $\frac{1}{4}$**x, el eje OX y la recta x = 2.**

b) Limitado por la recta $y=-\frac{1}{2}x-2$**, el eje OX y las rectas x = 2 y x = 4.**

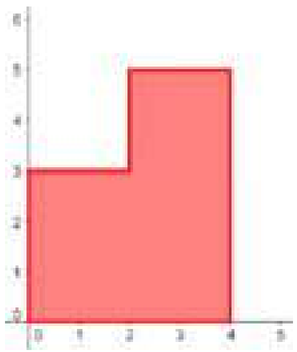
Las áreas pedidas son:

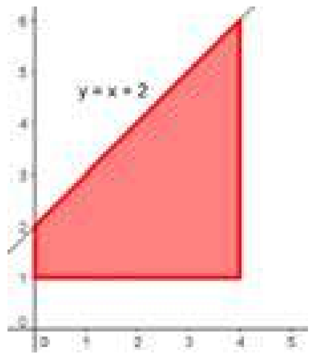
a) 0,5 unidades cuadradas.

b) 7 unidades cuadradas.

2. Calcula el área de los recintos de las siguientes figuras:

a)





a) Geométricamente el área del recinto es la de un rectángulo de base 4 unidades y altura 5 unidades menos la de un cuadrado de 2 unidades de lado. Por tanto, el área vale 16 unidades cuadradas.

Analíticamente el área es: $\int_0^4 5\,dx-4=16$

b) Geométricamente el área es un trapecio de base mayor 5 unidades, base menor 1 unidad y altura 4 unidades. Por tanto el área vale 12 unidades cuadradas.

Analíticamente el área es: $\int_0^4 (x+2)\,dx-4=12$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 259

1. Teoremas. A partir del siguiente enunciado, que es un teorema directo, enuncia el recíproco, el contrario y el contrarrecíproco:

«La suma de dos números naturales impares es un número par»

La solución queda:

Directo: Si sumamos dos números impares entonces, obtenemos un número par.

Este resultado es verdadero: (2n + 1) + (2m + 1) = 2 · (n + m + 1) que es un número par.

Recíproco: Si obtenemos un número par, entonces, sumamos dos números impares.

Este resultado es falso. Podemos obtener un número par de la suma de dos pares.

Contrario: Si no sumamos dos números impares, entonces, no obtenemos un número par.

Este resultado es falso. De la suma de dos números pares se obtiene un número par.

Contrarrecíproco: Si no obtenemos un número par, entonces, no sumamos dos números impares.

Este resultado es verdadero. Si no obtenemos un número par, estamos obteniendo un número imanar. Este resultado proviene de sumar un número impar y otro número par; por tanto, no sumamos dos números impares.

2. Desigualdad. Demuestra que si a y b son dos números reales positivos, entonces se verifica la siguiente desigualdad:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$$

La solución es:

Como en la hipótesis nos dicen que a y b son dos números reales positivos, podríamos decir que $m=\sqrt{a}$ y $n=\sqrt{b}$; así la desigualdad quedaría de la forma:

$$\frac{2}{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}} \leq m \cdot n$$

Operando en esta desigualdad obtenemos $\frac{2m^2n^2}{m^2+n^2} \leq m \cdot n$ o lo que es lo mismo, vamos a demostrar que:

$$m \cdot n - \frac{2m^2n^2}{m^2+n^2} \geq 0.$$

Operando convenientemente en la primera expresión, obtenemos:

$$m \cdot n \left[\frac{m^2+n^2-2mn}{m^2+n^2}\right] = m \cdot n \, \frac{(m-n)^2}{m^2+n^2}$$

Y como m y n son números reales positivos queda probado que esta expresión es mayor o igual que cero, que es lo que queríamos demostrar.

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 261

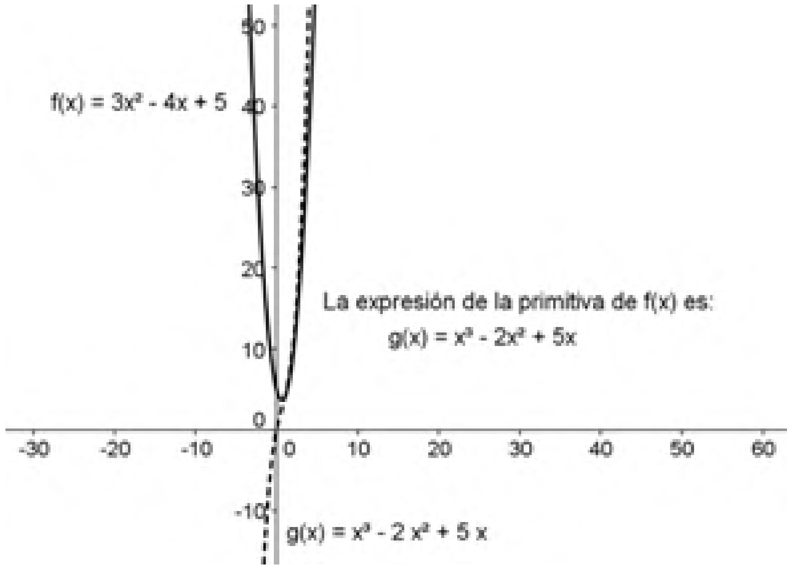
1. Calcula las siguientes integrales: a) $\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx$ **b)** $\int \ln x\,dx$

Seguimos los pasos descritos en el epígrafe INTEGRAL INDEFINIDA.

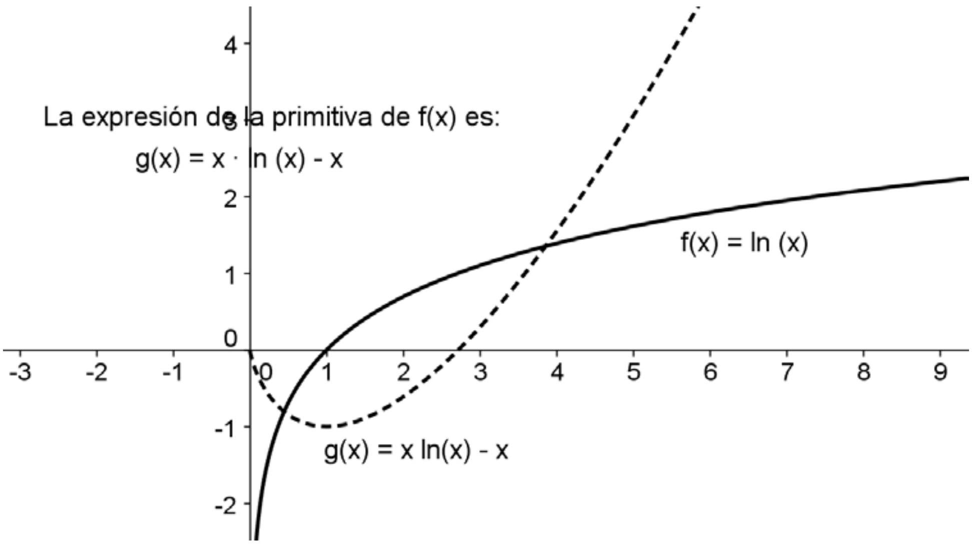
a) Para la integral $\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx$:

- Introducimos en el **Campo de Entrada** la expresión de la función que aparece en el integrando, tecleando **f(x)=3x^2-4x^3+5** y pulsando la tecla Enter, observaremos su gráfica.

- Con el comando **Integral [f]** dibujamos la gráfica de la función primitiva (en línea discontinua en el dibujo) y su expresión, $g(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$, podemos verla en la ventana algebraica o en el menú contextual de la gráfica.



a) Para la otra integral procedemos de manera análoga y obtenemos la primitiva $g(x) = x \cdot \ln (x) - x$, que puede verse en el dibujo.

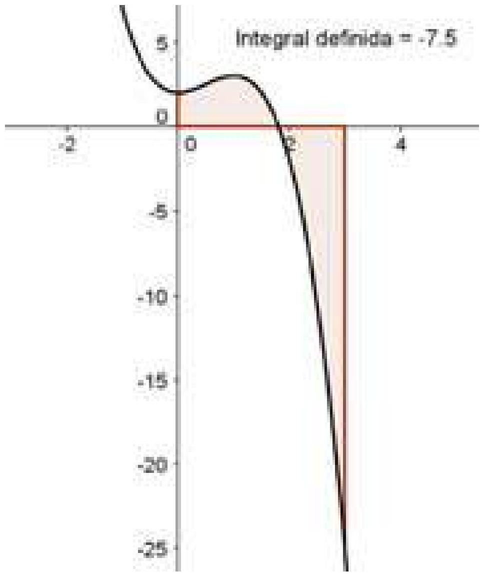


2. Obtén el valor de $\int_0^3 \left(-2x^3 + 3x^2 + 2\right) dx$; así como las sumas inferiores y superiores.

Seguimos los pasos del epígrafe INTEGRAL DEFINIDA. SUMAS INFERIORES Y SUPERIORES

- Introducimos en el **Campo de Entrada** la expresión de la función integrando, **f(x)=-2x^3+3x^2+2**, y visualizamos su gráfica.

- El comando **Integral [f, 0, 3]** calcula el valor de la integral definida, que es **a = -7.5**; dibuja la región delimitada por la gráfica de la función, el eje OX y las abscisas x = 0, x = 3; además vemos su valor en la ventana algebraica.

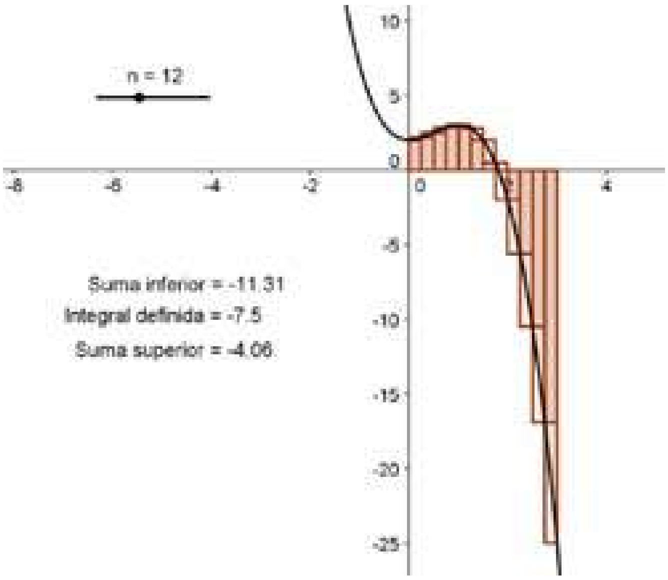


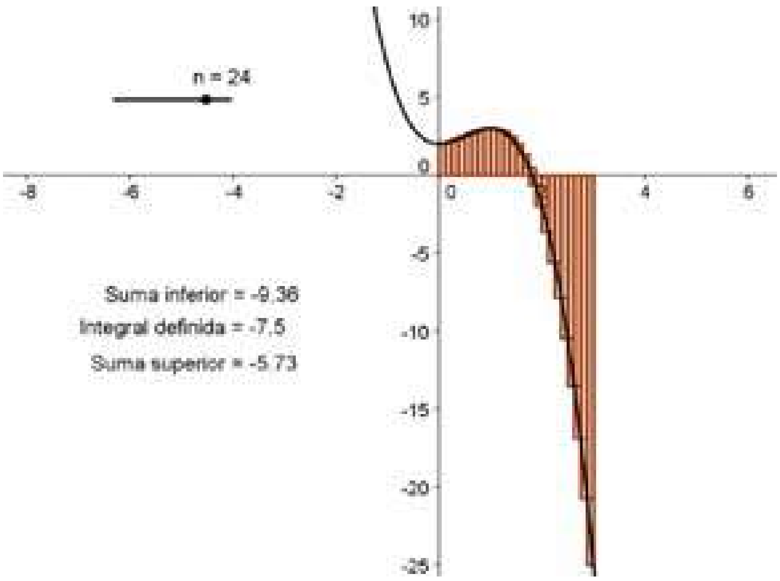
- Creamos un deslizador que llamamos **n** y hacemos que varíe de 1 a 30, con incrementos de una unidad.

- El comando **SumaInferior [f, 0, 3, n]** calcula y representa la suma inferior de la función con una partición del intervalo [0, 3] en n subintervalos. El valor de la citada suma puede verse en la ventana algebraica.

- El comando **SumaSuperior [f, 0, 3, n]** calcula y representa la suma superior de la función con una partición del intervalo [0, 3] en n subintervalos. El valor de la citada suma puede verse en la ventana algebraica.

- Tecleamos los textos "Integral definida =" +a; "Suma inferior =" +b y "Suma superior =" +c y observaremos los citados valores en la Ventana gráfica. Cambiamos el número de particiones desplazando el deslizador.





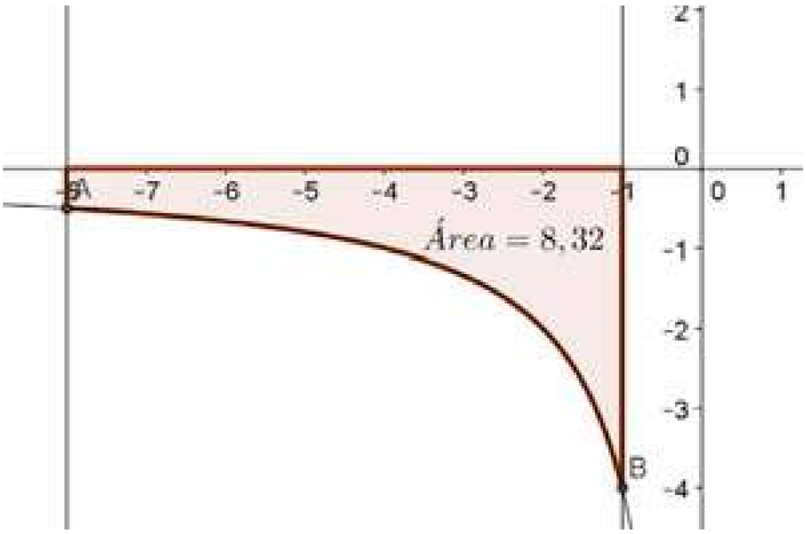
3. Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x) = $\frac{4}{x}$, el eje OX y las rectas x = -1 y x = -8.

Seguimos los pasos del epígrafe ÁREA ENCERRADA POR UNA CURVA:

- Representamos gráficamente la función f(x) = $\frac{4}{x}$, y las rectas x = -1 y x= -8. Para ello las tecleamos en el **Campo de Entrada**.

- Hallamos los puntos de corte de la función dada con cada una de las rectas, mediante intersección de objetos y obtenemos los puntos A y B.

- Calculamos el área de la región limitada por la gráfica de f(x), el eje OX y las abscisas de los puntos A y B, tecleando el comando **Integral [f, x(B), x(A)]**. El valor del área aparece en la ventana algebraica.



4. Calcula el área de la región finita y limitada por la gráfica de la función f(x) = $x^3 - x + 1$ y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.

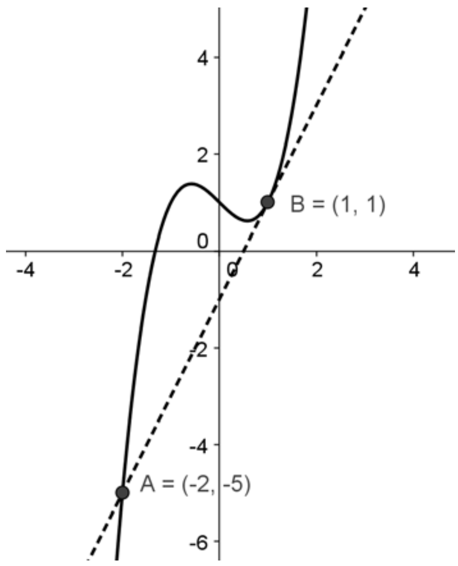
Calcula el área de la región finita y limitada por la gráfica de la función f(x) = $x^3 - x + 1$ y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.

Seguimos los pasos que siguen.

- Representamos gráficamente la función f(x) = $x^3 - x + 1$ introduciendo sus expresión en el **Campo de Entrada**. Para ello tecleamos **f(x)=x^3-x+1**.

- Con el comando **Tangente [1, f]** calculamos la ecuación de la tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x = 1, que puede verse en la ventana algebraica, y dibujamos la citada tangente. Obtenemos la recta de ecuación y = 2x – 1.

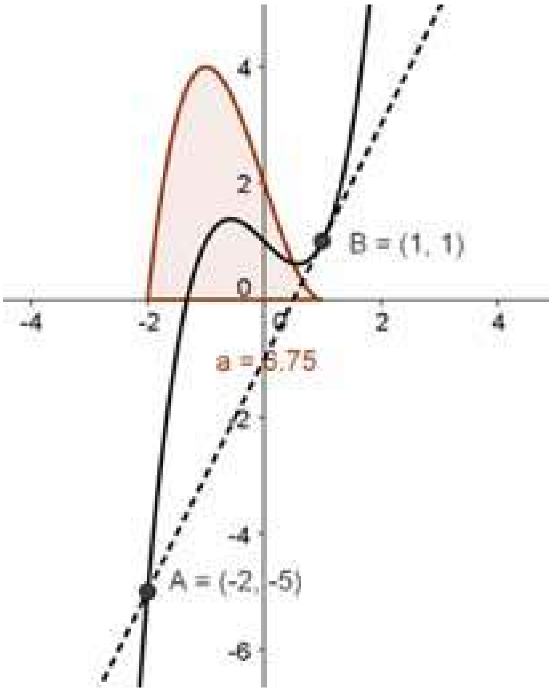
- Introducimos en el Campo de Entrada la función g(x) = 2x – 1, que coincide con la recta tangente anterior. Borramos la tangente trazada con anterioridad.



-Con la herramienta **Intersección de dos objetos**, haciendo clic sobre las gráficas de f(x) y g(x), hallamos los puntos de corte de ambas gráficas. Para estas funciones obtenemos los puntos A (- 2, - 5) y B (1, 1).

- El área buscada la proporciona la función f(x) – g(x) entre las abscisas de los puntos de corte de ambas curvas. Con el comando **Integral [f(x)-g(x),-2, 1]** hallamos el área encerrada entre las gráficas de las funciones. El valor del área es **a = 6.75** unidades cuadradas.

- Como puede verse en la imagen, Geogebra dibuja la región, cuya área calcula, en el semiplano superior. El valor del área también aparece en la ventana algebraica



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 264

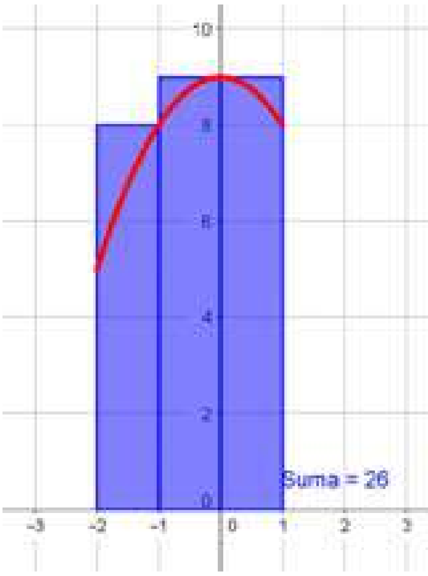
1. Sea la función $f(x) = 9 – x^2$. Consideremos el intervalo [- 2, 1] y la partición de dicho intervalo dada por P = {- 2, - 1, 0, 1}. Halla, de forma razonada, el valor de las sumas superior e inferior correspondiente a la función dada y a dicha partición.

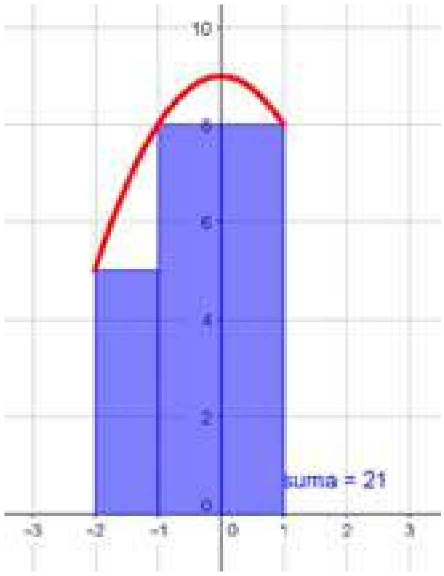
La partición P determina en el intervalo dado los siguientes intervalos [- 2, - 1], [- 1, 0], [0, 1].

Las sumas superiores e inferiores correspondientes a la función f (x) en P son:

S (P) = f (- 1) · (- 1 + 2) + f (0) · (0 + 1) + f (0) · (1 – 0) = 8 + 9 + 9 = 26

s (P) = f (- 2) · (- 1 + 2) + f (- 1) · (0 + 1) + f (1) · (1 – 0) = 5 + 8 + 8 = 21





2. Una partición decreciente verifica que f (- 2) = 64, f (- 1) = 42 y f (1) = 10. Halla, razonadamente, la suma superior y la suma inferior correspondientes a la función y = f (x) en el intervalo [- 2, 1] relativas a la partición P = {- 2, - 1, 1}.

La partición P determina en el intervalo dado los siguientes intervalos [- 2, - 1] y [- 1, 1].

Las sumas superiores e inferiores correspondientes a la función f (x) en P son:

S (P) = f (- 2) · (- 1 + 2) + f (- 1) · (1+ 1) = 64 + 42 · 2 = 148

s (P) = f (- 1) · (- 1 + 2) + f (1) · (1 + 1) = 42 + 10 · 2 = 62

3. Halla las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^3 \sqrt{x+3}\,dx$ **f)** $\int_4^9 \left(3-2\sqrt{x}\right)^3 \cdot \dfrac{4}{3\sqrt{x}}\,dx$ **k)** $\int_0^2 \dfrac{x^2+3x-2}{x^3+x^2+x+1}\,dx$

b) $\int_0^{\pi} \dfrac{2\cos 3x}{4+sen3x}\,dx$ **g)** $\int_3^6 \dfrac{5x}{x^2+9}\,dx$ **l)** $\int_{-1}^0 \dfrac{x^2}{x+2}\,dx$

c) $\int_0^4 \dfrac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\,dx$ **h)** $\int_1^e (x+3)\cdot \ln x\,dx$ **m)** $\int_{-1/2}^{1/2} \dfrac{5}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

d) $\int_2^4 \dfrac{3x^2-3x-2}{x-1}\,dx$ **i)** $\int_5^8 \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-2}\,dx$ **n)** $\int_0^{1/2} \dfrac{e^{2x}}{5-e^{2x}}\,dx$

e) $\int_{\pi/8}^{\pi} \cos^3 4x \cdot sen\, 4x\,dx$ **j)** $\int_3^5 \dfrac{5-x}{x^2-x-2}\,dx$ **p)** $\int_{-1}^0 \left(e^{-x}-x\cdot e^x\right)dx$

3. El valor de cada una de las integrales definidas es:

a) $\int_0^3 \sqrt{x+3}\, dx = 4\sqrt{6} - 2\sqrt{3}$

b) $\int_0^{\pi} \dfrac{2\cos 3x}{4+sen 3x}\, dx = 0$

c) $\int_0^4 \dfrac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\, dx = 0{,}4547$

d) $\int_2^4 \dfrac{3x^2 - 3x - 2}{x-1}\, dx = 15{,}803$

e) $\int_{\pi/8}^{\pi} \cos^3 4x \cdot sen\, 4x\, dx = -\dfrac{1}{16}$

f) $\int_4^9 \left(3 - 2\sqrt{x}\right)^3 \cdot \dfrac{4}{3\sqrt{x}}\, dx = -\dfrac{80}{3}$

g) $\int_3^6 \dfrac{5x}{x^2+9}\, dx = 2{,}29$

h) $\int_1^e (x+3)\cdot \ln x\, dx = \dfrac{e^2}{4} + \dfrac{13}{4}$

i) $\int_5^8 \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-2}\, dx = 11{,}599$

j) $\int_3^5 \dfrac{5-x}{x^2-x-2}\, dx = 0{,}2877$

k) $\int_0^2 \dfrac{x^2+3x-2}{x^3+x^2+x+1}\, dx = 0{,}2169$

l) $\int_{-1}^0 \dfrac{x^2}{x+2}\, dx = 0{,}27$

m) $\int_{-1/2}^{1/2} \dfrac{5}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx = \dfrac{5\pi}{4}$

n) $\int_0^{1/2} \dfrac{e^{2x}}{5-e^{2x}\, dx} = 0{,}28$

p) $\int_{-1}^0 \left(e^{-x} - x\cdot e^x\right) dx = e$

4. Sea la función f(x) = $|x^2-2x| = \begin{cases} x^2-2x & si\ x \le 0\ \ o\ x \ge 2 \\ 2x-x^2 & si\ \ -2<x<2 \end{cases}$ **. Halla** $\int_1^3 f(x)\,dx$ **.**

$$\int_1^3 f(x)\,dx\ =\ \int_1^2 (2x-x^2)\,dx + \int_2^3 (x^2-2x)\,dx = \left[\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)_1^2+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)_2^3\right] = 2$$

5. Halla un polinomio de primer grado P(x) = ax + b sabiendo que P (1) = 1 y que $\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = 6$.

Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

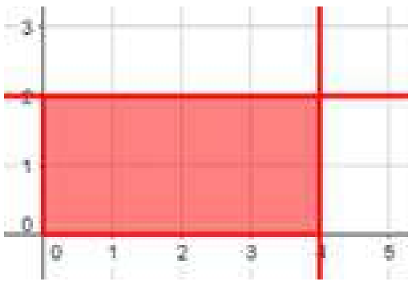
$$\int_{-1}^{1} (ax+b)\,dx = \left(\frac{ax^2}{2}+bx\right)_{-1}^{1} = \left(\frac{a}{2}+b\right)-\left(\frac{a}{2}-b\right) = 2b \quad \Rightarrow \quad 2b = 6 \quad \Rightarrow \quad b = 3$$

Como P (1) = 1 $\Rightarrow$ a + b = 1 $\Rightarrow$ a = - 2.

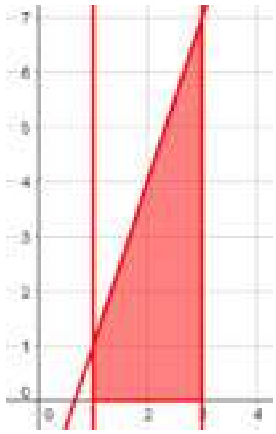
El polinomio es P(x) = - 2x + 3

6. En cada una de las figuras indica, mediante una integral definida, el área del recinto sombreado:

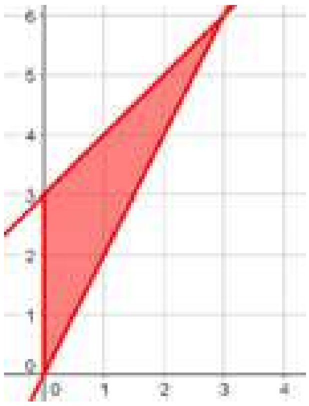
a)



b)



c)



a) $\int_0^4 2\,dx = (2x)_0^4 = 8\ \ uc$

b) La ecuación de la recta que pasa por A y D es: y = 3x - 2.

La integral buscada es $\int_1^3 (3x-2)\,dx = \left(\frac{3x^2}{2}-2x\right)_1^3 = 8\ uc$

c) Las ecuaciones de las rectas de la figura son: y = 2x; y = x + 3

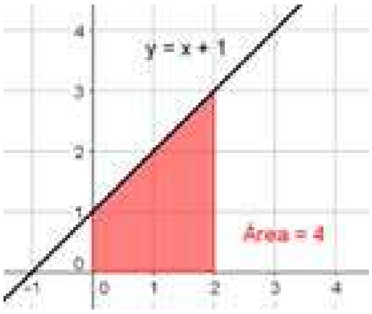
La integral buscada es $\int_0^3 (x+3-2x)\,dx = \left(3x - \frac{x^2}{2}\right)_0^3 = \frac{9}{2}\,uc$

7. Halla estas integrales y comprueba mediante las respectivas gráficas los resultados obtenidos en cada una de ellas:

a) $\int_0^2 (x+1)\,dx$ **b)** $\int_1^3 (x+1)\,dx$ **c)** $\int_{-4}^{-2} (x+1)\,dx$

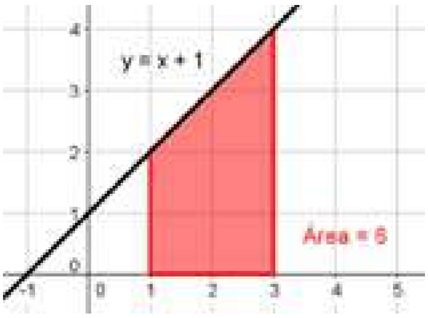
a) $\int_0^2 (x+1)\,dx = \left(\frac{(x+1)^2}{2}\right)_0^2 = 4\,uc$

En la gráfica podemos ver este mismo resultado:



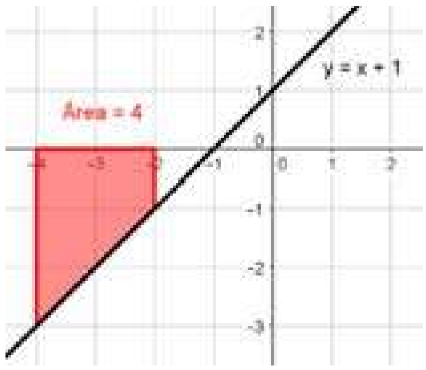
b) $\int_1^3 (x+1)\,dx = \left(\frac{(x+1)^2}{2}\right)_1^3 = 6\,uc$

En la gráfica podemos ver este mismo resultado:



c) $\int_{-4}^{-2} (x+1)\,dx = \left(\frac{(x+1)^2}{2}\right)_{-4}^{-2} = -4$

En la gráfica podemos ver este mismo resultado:



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 265

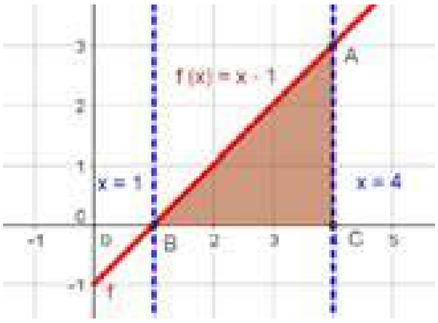
8. Halla, por métodos geométricos y mediante integrales, las áreas de los siguientes recintos:

a) El recinto limitado por la recta y = x – 1, el eje OX y las rectas x = 1 y x = 4.

b) El recinto limitado por la recta 2y = x + 3, el eje OX y las rectas x = -1 y x = 2.

Las áreas pedidas son:

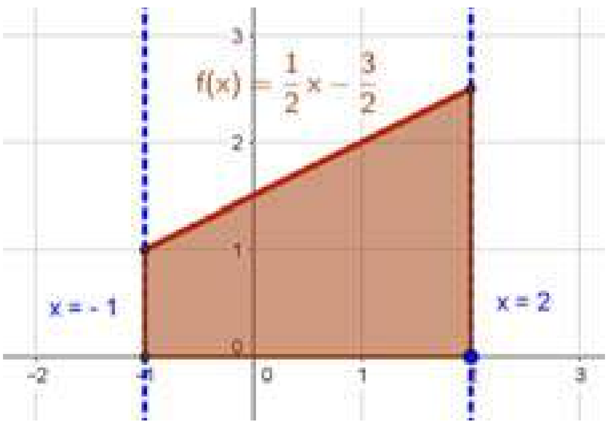
a) Por métodos geométricos es un triángulo ABC, como vemos en la figura. Su área es 4,5 uc.



Por medio de integrales el área es $A = \int_1^4 (x-1)\,dx = 4{,}5\ uc$.

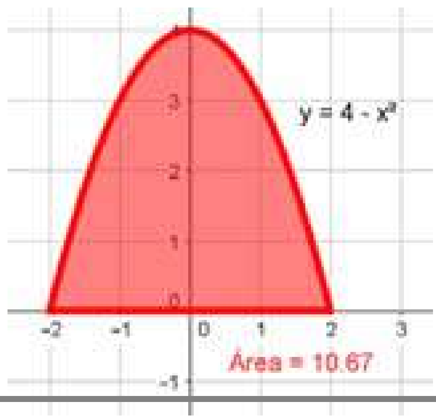
b) Por métodos geométricos es un trapecio ABCD, como vemos en la figura. Su área es 5,25 uc.

Por medio de integrales el área es $A = \int_{-1}^{2} \frac{x+3}{2}\,dx = 5{,}25\ uc$.



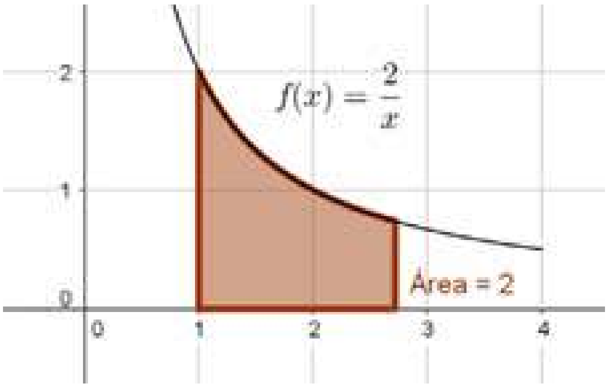
9. Halla el área del recinto limitado por la curva y = 4 – x^2 y el eje OX.

El área buscada es $\int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \frac{32}{3} = 10{,}67$ uc.



10. Calcula el área del recinto limitado por la curva y = $\frac{2}{x}$, el eje OX y las rectas x = 1 y x = e.

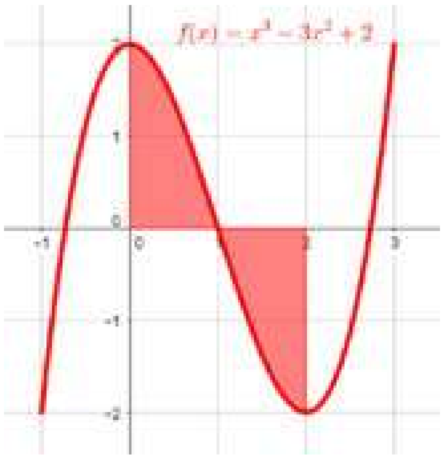
El área pedida es: $\int_1^e \frac{2}{x}\,dx = 2$ uc.



11. Halla el área de la región limitada por la curva y = $x^3 - 3x^2 + 2$, el eje OX y las rectas x = 0 y x = 2.

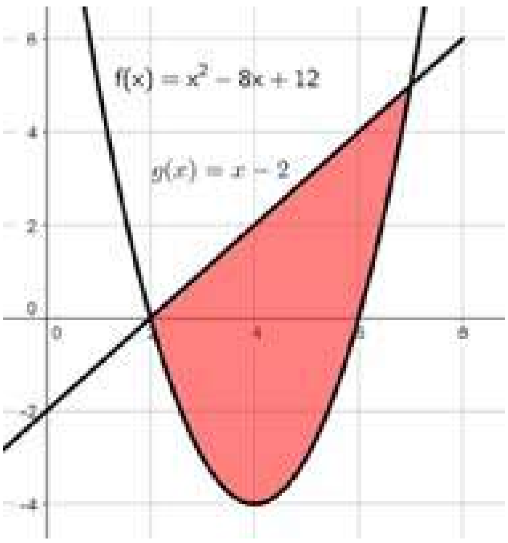
El área, A, del recinto sombreado de la figura es:

$$A = 2 \cdot \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2)\,dx = 2{,}5\ uc$$

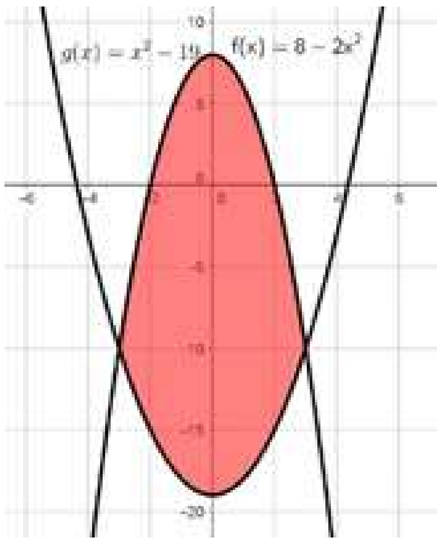


12. Calcula el área de cada uno de los siguientes recintos:

a)



b)



a) Ambas curvas se cortan en los puntos solución del sistema $\begin{cases} y = x-2 \\ y = x^2-8x+12 \end{cases}$ que son A (2, 0) y B (7, 5)

El área del recinto sombreado es: $A = \int_2^7 \left[x-2-\left(x^2-8x+12\right)\right] dx = 20{,}83 \;\; uc$

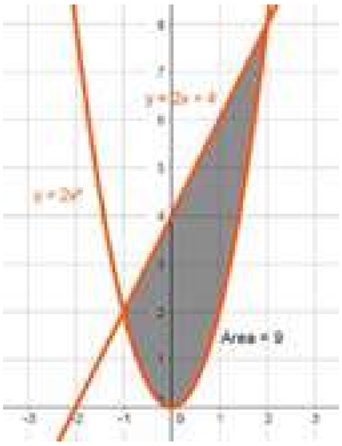
b) Ambas curvas se cortan en los puntos solución del sistema $\begin{cases} y = x^2-19 \\ y = 8-2x^2 \end{cases}$ que son A (- 3, - 10) y B (3, - 10)

El área del recinto sombreado es: $A = 2\int_0^3 \left[\left(8-2x^2\right)-\left(x^2-19\right)\right] dx = 108 \;\; uc$

13. Calcula el área delimitada por la parábola de ecuación y = 2x² y la recta y = 2x + 4.

El área buscada viene dada por las integrales:

$$\int_{-1}^{2} (2x+4)\,dx - \int_{-1}^{2} 2x^2\,dx = \left[x^2+4x-2\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{20}{3}-\left(-\frac{7}{3}\right) = 9\;uc\,.$$



14. Halla el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones de los siguientes apartados:

a) $y = x^3$; $y = \sqrt{x}$

b) $y = x^2 - 9$; $y = -2x^2$

c) $y^2 = 4x$; $x^2 = 4y$

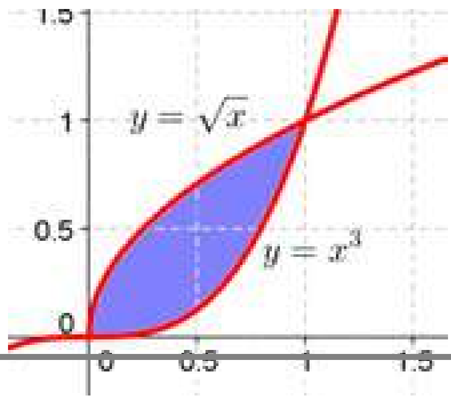
d) $y = e^x$; $y = e^{-x}$; $x = 1$

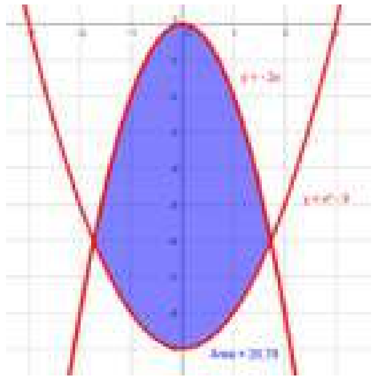
a) Encontramos los puntos de corte de ambas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \quad (0,0);(1,1)$$

El área del recinto sombreado de la figura es:

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{x}-x^3\right) dx = \frac{5}{12} = 0{,}42\;uc$$





b) Encontramos los puntos de corte de ambas resolviendo el sistema:

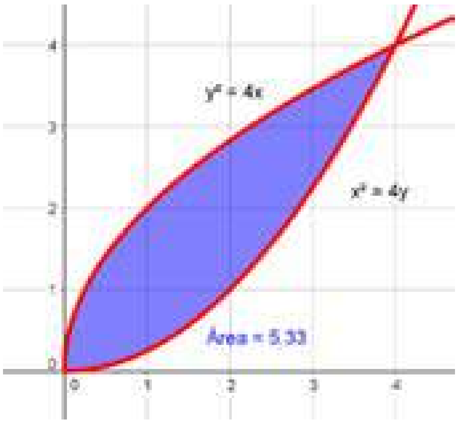
$$\begin{cases} y = x^2 - 9 \\ y = -2x^2 \end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{3}, -6\right); \left(-\sqrt{3}, -6\right)$$

El área del recinto sombreado de la figura es:

$$A = 2 \cdot \int_{-\sqrt{3}}^{0} \left(x^2 - 9 - (-2x^2)\right) dx = 12\sqrt{3} = 20{,}78\ uc$$

c) Encontramos los puntos de corte de ambas curvas resolviendo el sistema:

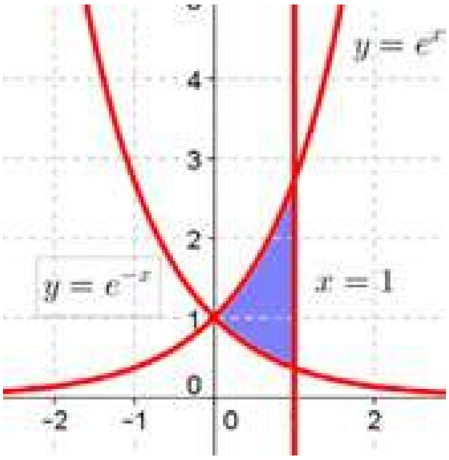
$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = \dfrac{x^2}{4} \end{cases} \Rightarrow (0, 0); (4, 4)$$



El área del recinto sombreado de la figura es:

$$A = \int_0^4 \left(\sqrt{4x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{16}{3} = 5{,}33\ uc.$$

d) Encontramos los puntos de corte de ambas resolviendo el sistema:



$$\begin{cases} y = e^x \\ y = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow (0, 1)$$

El área del recinto sombreado de la figura es:

$$A = \int_0^1 e^x\ dx - \int_0^1 e^{-x}\ dx = 1{,}086\ uc$$

15. Sea la función f(x) = $\begin{cases} 2 & si \quad x \le -3 \\ x^2 & si \quad -3 < x < 1 \\ 1 & si \quad x \ge 1 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad de esta función.

b) Haz la gráfica de la misma.

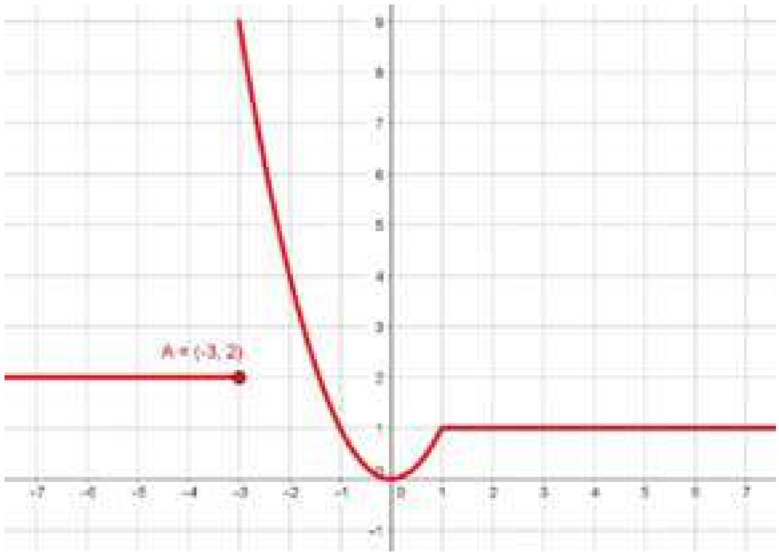
c) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas x = 0 y x = 2.

a) Estudiamos la continuidad en x = 1 y en x = -3

Como $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^-} 2 = 2$; $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} x^2 = 9$ y f (- 3) = 2, la función dada no es continua en x = - 3.

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 1 = 1$ y f (1) = 1, la función dada es continua en x = 1.

b) La gráfica es:

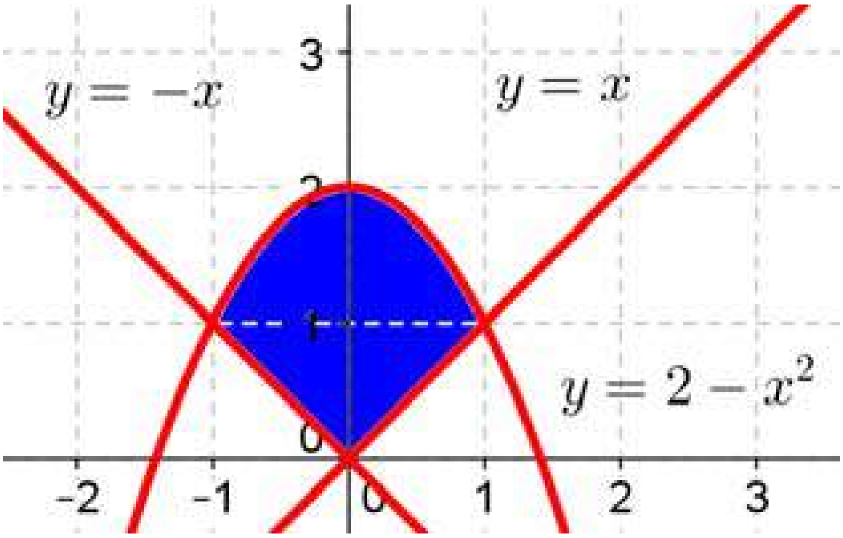


c) El área pedida es: $A = \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^2 1\, dx = \frac{4}{3}\, uc = 1{,}33\, uc$

16. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x) = 2 – x² y las bisectrices de los cuadrantes primero y segundo.

En la gráfica esta sombreada la región cuya área queremos hallar. Su valor es:

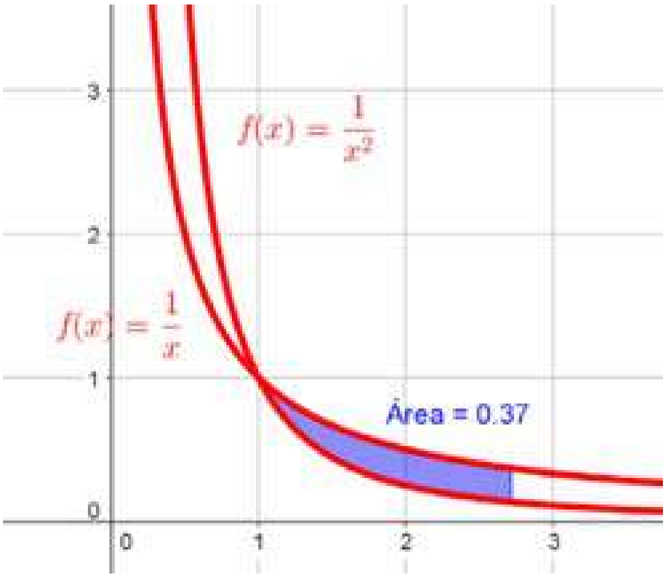
$$A = 2 \cdot \int_0^1 \left(2 - x^2 - x\right) dx = \frac{7}{3} = 2{,}33\, uc$$



17. Encuentra el área del recinto delimitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y la recta x = e.

El área del recinto es:

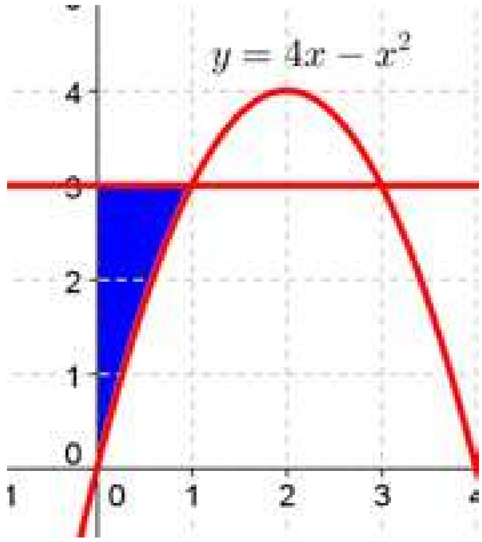
$$\int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[\ln x + \frac{1}{x}\right]_1^e = \left(\ln e + \frac{1}{e}\right) - \left(\ln 1 - \frac{1}{1}\right) = 1 + \frac{1}{e} - 1 = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$$



ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 266

1. Consideramos la curva de ecuación y = 4x – x². Halla el área del recinto limitado por esta curva y el eje OY en el intervalo [0, 1].

En la imagen podemos ver sombreado el recinto cuya área queremos hallar.



El área vale:

$$A = 1 \cdot 3 - \int_0^1 \left(4x - x^2\right) dx = \frac{4}{3} = 1{,}33\ uc$$

2. Sea la función f(x) = $\begin{cases} ax+6 & si \quad x \leq -1 \\ bx^2 - 2x + 1 & si \quad -1 < x \leq 2 \\ \dfrac{x-5}{(x+1)^2} & si \quad x > 2 \end{cases}$

a) Halla a y b para que esta función sea continua en su dominio.

b) Para los valores de a y b hallados, calcula $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$

El dominio de esta función es el conjunto de los números reales.

Ha de ser continua en x = -1 y en x = 2. Para ello se debe cumplir:

- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (ax + 6) = -a + 6$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (bx^2 - 2x + 1) = b + 3$, entonces, a + b = 3.

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (bx^2 - 2x + 1) = 4b - 3$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{x-5}{(x+1)^2}\right) = -\dfrac{1}{3}$, entonces, $4b - 3 = -\dfrac{1}{3}$.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} a + b = 3 \\ 4b = \dfrac{8}{3} \end{cases}$ obtenemos: $\begin{cases} a = \dfrac{7}{3} \\ b = \dfrac{2}{3} \end{cases}$.

b) $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx = \int_{-2}^{-1} \left(\dfrac{7}{3}x + 6\right) dx + \int_{-1}^{2} \left(\dfrac{2}{3}x^2 - 2x + 1\right) dx = 4{,}5$

3. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 x \cdot e^{5x^2}\ dx$ **b)** $\int_1^2 \left(x^2 - 5x + \frac{1}{x^2}\right) dx$ **c)** $\int_1^e x \cdot \ln x\ dx$

a) $\int_0^1 x \cdot e^{5x^2}\ dx = \left(\frac{1}{10} e^{5x^2}\right)_0^1 = \frac{e^5 - 1}{10} \approx 14{,}74$

b) $\int_1^2 \left(x^2 - 5x + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{-14}{3} = -4{,}67$

c) $\int_1^e x \cdot \ln x\ dx = \frac{e^2 + 1}{4} \approx 2{,}10$

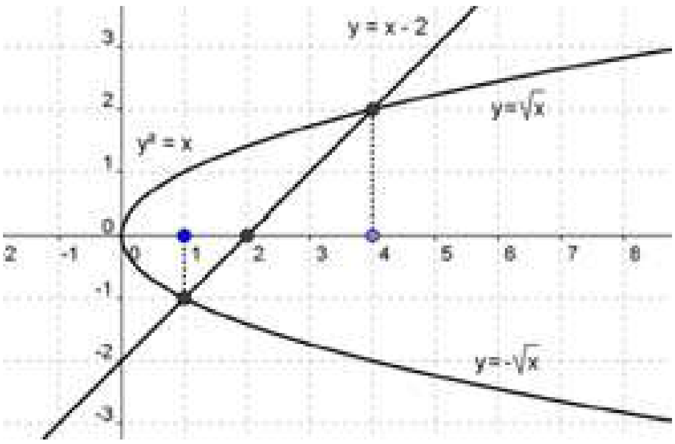
4. Determina el área limitada por la parábola de ecuación $y^2 = x$ y la recta de ecuación $y = x - 2$.

Realizamos un dibujo del enunciado para encontrar la región limitada por la parábola y por la recta.

Debe observarse que la parábola $y^2 = x$ da lugar a dos funciones de ecuaciones $y = -\sqrt{x}$ e $y = \sqrt{x}$.

Encontramos los puntos de corte de ambas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y^2 = x \\ y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow \quad (1, -1)\ ;\ (4\ ,2)$$



Observando con detenimiento el dibujo vemos que el área buscada es:

$$A = \int_0^4 \sqrt{x}\ dx - \int_2^4 (x-2)\ dx - \left[\int_0^1 -\sqrt{x}\, dx + \int_1^2 (x-2)\ dx\right] =$$

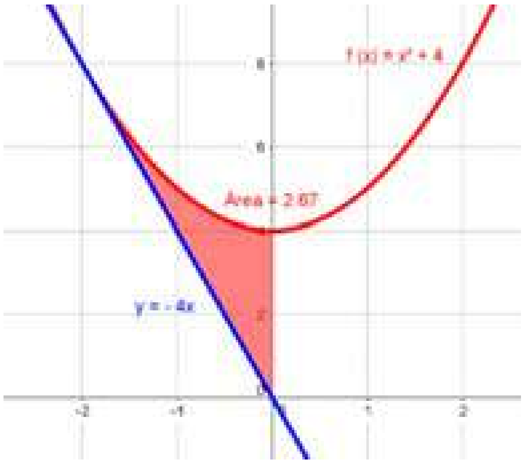
$$= \left[\frac{2}{3} x^{3/2}\right]_0^4 - \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^4 - \left\{\left[-\frac{2}{3} x^{3/2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2\right\} = 4{,}5\ uc$$

5. Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función y = x^2 + 4, la recta tangente a la misma en el punto de abscisa - 2 y el eje OY.

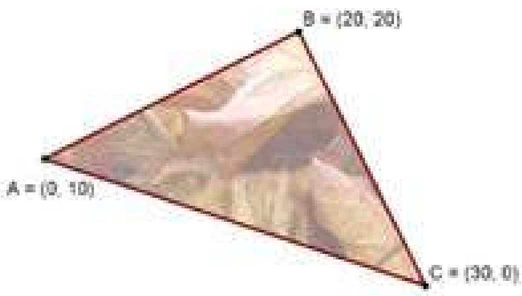
La recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto (- 2, 8) tiene por ecuación y = - 4x.

El área del recinto sombreado de la figura que queremos hallar viene dada por:

$$\int_{-2}^{0}\left(x^2+4\right)dx-\int_{-2}^{0}(-4x)\,dx=\frac{8}{3}=2{,}67\ uc\,.$$

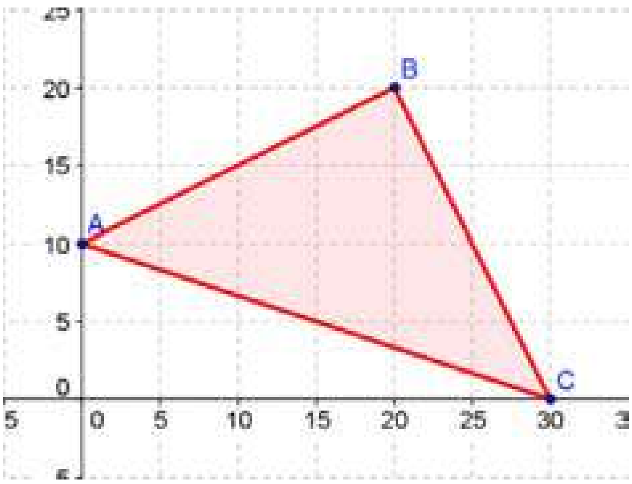


6. En la imagen vemos el diseño de un cartel con forma de triángulo ABC. Halla el área del mismo sabiendo que sus vértices son puntos de un sistema cartesiano en el que cada unidad esta dada en metros.



Se trata de un triángulo isósceles. Lo dibujamos en unos ejes coordenados y obtenemos la figura siguiente:

Hallamos el área de dos formas distintas:



a) El área del triángulo = área del rectángulo de base 30 y altura 20 menos el área de dos triángulos rectángulos de base 10 y altura 20 menos el área del triángulo rectángulo de base 30 y altura 10

Área = 30 · 20 – 2 · 10 · 20 / 2 – 30 · 10/2 =250 m^2

b) Hallamos las ecuaciones de las rectas que contienen los lados del triángulo:

recta AB: $y=\frac{1}{2}x+10$

recta BC: y = -2x + 60

recta AC: $y=\frac{-1}{3}x+10$

Por tanto el área del triángulo es:

$$\int_0^{20}\left[\left(\frac{1}{2}x+10\right)-\left(\frac{-1}{3}x+10\right)\right]dx+\int_{20}^{30}\left[(-2x+60)-\left(\frac{-1}{3}x+10\right)\right]dx=\frac{500}{3}+\frac{250}{3}=250\,m^2$$

7. Halla la función polinómica de grado 3 cuya gráfica pasa por el punto P (1, 0), tiene por tangente la recta y = 2x + 1 en el punto de abscisa x = 0, y su integral entre 0 y 1 vale 3.

Sea f (x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ la función polinómica de tercer grado buscada.

Su derivada es f ´ (x) = $3ax^2 + 2bx + c$.

Las condiciones para determinar los coeficientes a, b, c y d son:

- Su gráfica pasa por el punto P (1, 0), es decir, f (1) = 0.

- La recta tangente hace tangencia en el punto x = 0, y (0) = 2 · 0 + 1 = 1, es decir, pasa por el punto Q (0,1), o lo que es lo mismo, f (0) = 1.

- La pendiente de la tangente es 2 luego f ´ (0) = 2.

- La integral $\int_0^1 f\,(x)\,dx = 3$.

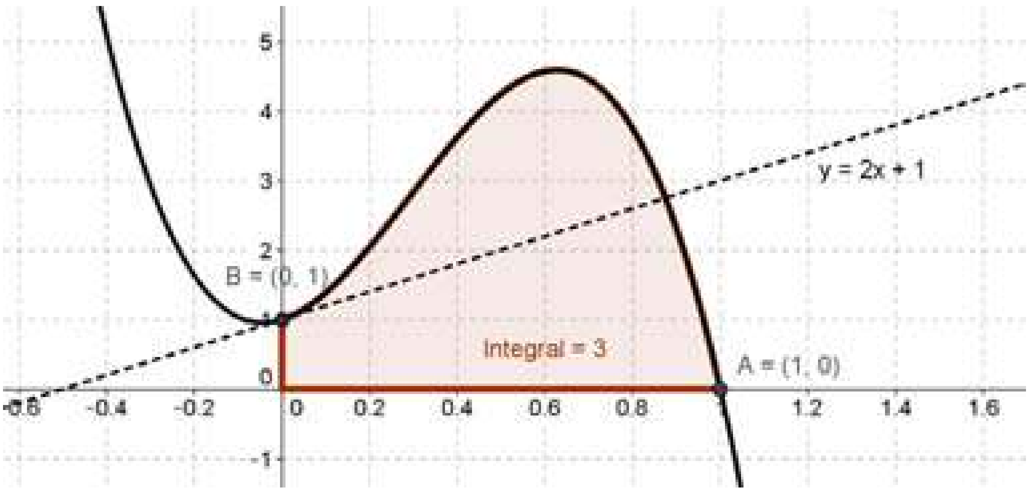
Imponiendo cada una de las condiciones obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ d=1 \\ c=2 \\ 3a+4b+6c+12d=36 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: a = - 24; b = 21; c = 2 y d = 1. La función buscada es:

f (x) = $-24x^3 + 21x^2 + 2x + 1$

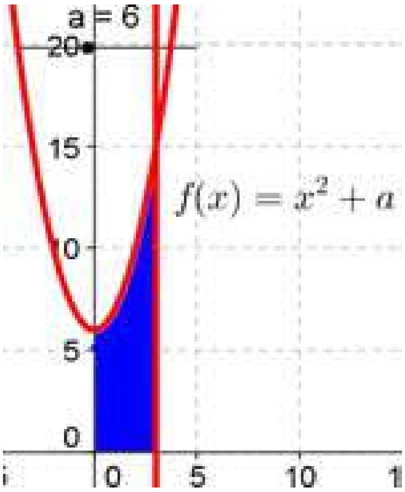
En el dibujo puede verse la gráfica de la función obtenida cumpliendo todas las condiciones del enunciado.



8. Sea la función f(x) = x^2 + a, con a > 0. Halla el valor de a para el cual el área determinada por la gráfica de la función, el eje de abscisas, el eje de ordenadas y la recta x = 3, valga 27 unidades cuadradas.

En la gráfica podemos ver las condiciones del enunciado y la zona sombreada cuya área nos dan.

$$A = \int_0^3 (x^2 + a)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + ax\right)_0^3 = 9 + 3a \Rightarrow 9 + 3a = 27 \Rightarrow a = 6 \text{ unidades}$$



9. Calcula la siguiente integral $\int_{-1}^{2} \left|x^2 + 3x\right| dx$.

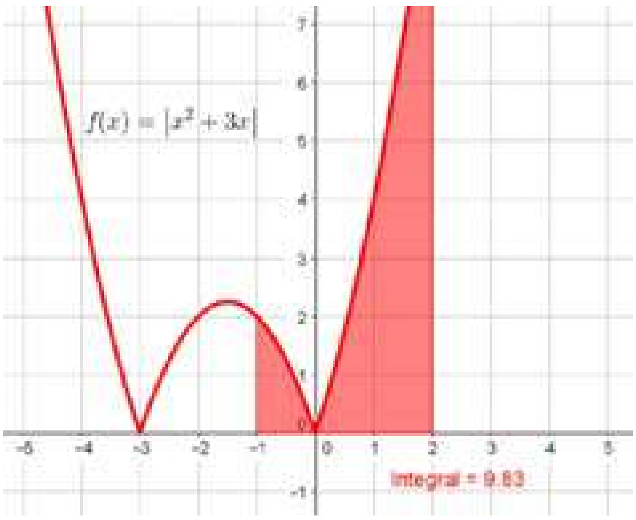
La función del integrando puede definirse de la forma:

$$f(x) = \left|x^2 + 3x\right| = \begin{cases} x^2 + 3x & si\ x \in (-\infty, -3] \cup [0, +\infty) \\ -x^2 - 3x & si\ x \in (-3, 0) \end{cases}$$

El valor de la integral coincide con el área del recinto que puede verse en el gráfico. Este valor es:

$$\int_{-1}^{2} \left|x^2 + 3x\right| dx = \int_{-1}^{0} (-x^2 - 3x)\,dx + \int_{0}^{2} (x^2 + 3x)\,dx =$$

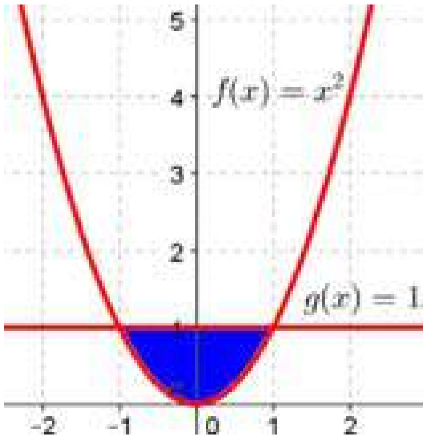
$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{2} = \frac{59}{6} = 9{,}83\ uc$$



10. La superficie de media mesa está limitada por las funciones f (x) = x^2 y g (x) = 1, estando x expresado en metros. El barniz para la mesa se vende en

botes con cada uno de los cuales se barnizan 2 metros cuadrados. ¿Cuántos botes se necesitan para barnizar la mesa entera?

La gráfica podemos ver la zona sombreada cuya área de media mesa queremos hallar.



A = $2 \cdot \int_0^1 \left(1-x^2\right) dx = 2\cdot\left(x-\frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{4}{3}$

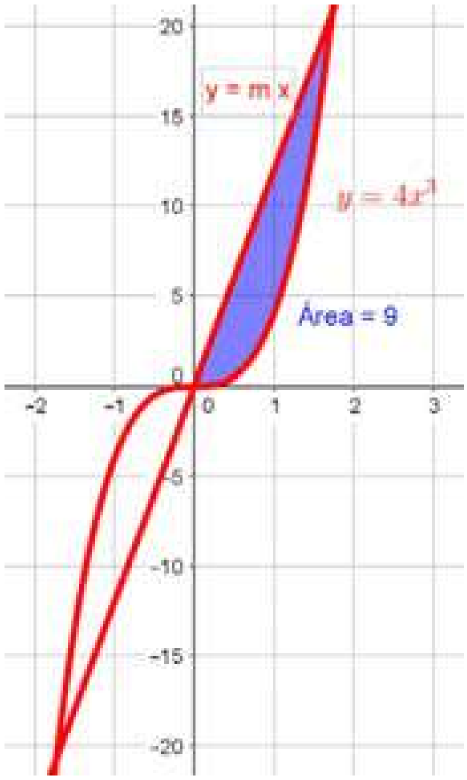
La superficie de la mesa entera es $\frac{8}{3}\, m^2$

Necesitamos $\frac{8}{3} : 2 = \frac{4}{3}$

Tendrán que comprar 1 + 1/3 de botes de barniz, es decir 2 botes de barniz y sobraran 2/3 de bote de barniz.

11. Hallar el valor de m para que el área delimitada, en el primer cuadrante, por la función y = 4x^3 y la recta y = mx sea de 9 unidades cuadradas.

El recinto, cuya área es de 9 unidades cuadradas, es la región sombreada del dibujo.



Encontramos los puntos de corte de ambas curvas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = 4x^3 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow (0,0)\ ;\left(\frac{\sqrt{m}}{2}, \frac{m\sqrt{m}}{2}\right);\left(-\frac{\sqrt{m}}{2}, -\frac{m\sqrt{m}}{2}\right)$$

Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\int_0^{\sqrt{m}/2} \left(mx - 4x^3\right) dx = 9$$

De aquí obtenemos que $\frac{m^2}{16} = 9$, de modo que m = 12.

12. Sea la función $f(x) = \frac{4x-2}{x^2-x+1}$. Halla b para que sea cierta la siguiente igualdad: $\int_{-1}^{b} f(x)\, dx = 0$

Sabemos que:

$$\int_{-1}^{b} f(x)\, dx = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{b} \frac{4x-2}{x^2-x+1} dx = \left[2\ln\left(x^2-x+1\right)\right]_{-1}^{b} = 2\ln\left(b^2-b+1\right) - 2\ln 3 = 0$$

Operando, obtenemos $b^2 - b + 1 = 3$. Resolviendo la ecuación la igualdad se cumple para dos valores de b: b = 2 y b = - 1

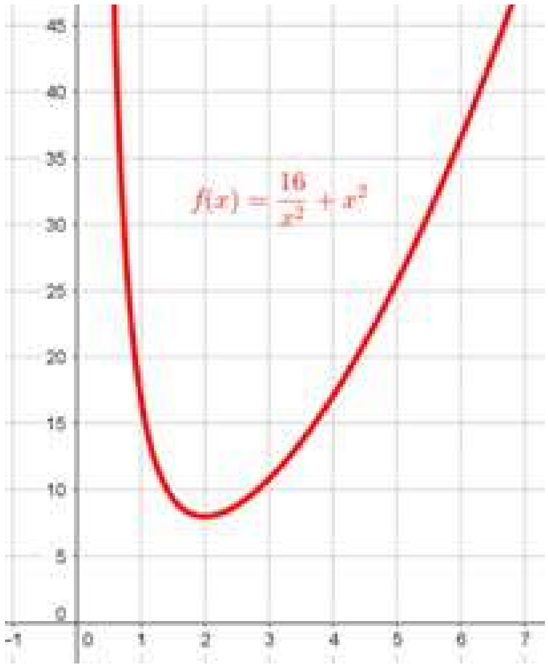
13. Dada la función f(x) = $\frac{a}{x^2} + x^2$ con x > 0 y a una constante.

a) Si se sabe que f ´ (2) = 1, ¿cuánto valdría a?

b) Para a = 16 haz la gráfica de la función dada y calcula el área del recinto limitado por la curva, el eje OX y las rectas x = 2 y x = 3.

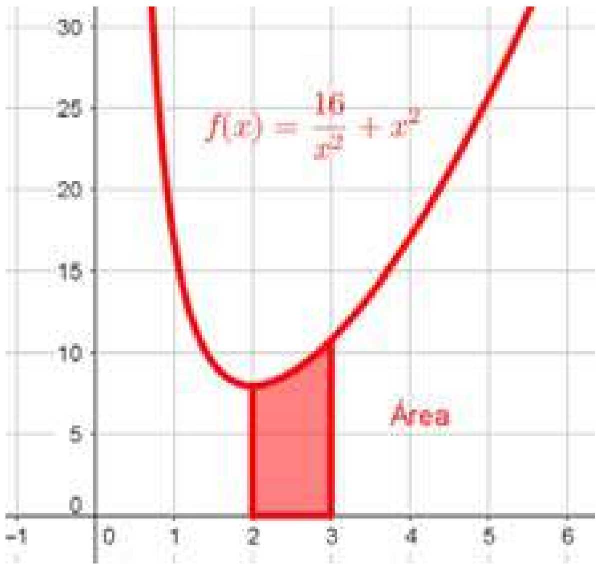
a) Sabemos que f ´ (2) = 1 y que f ´ (x) = $\frac{-2a}{x^3} + 2x$. Por tanto tenemos que: $\frac{-2a}{8} + 4 = 1$, entonces a = 12.

b) En la gráfica hemos dibujado la función f(x) = $\frac{16}{x^2} + x^2$ para valores positivos de la variable.



El área del recinto es:

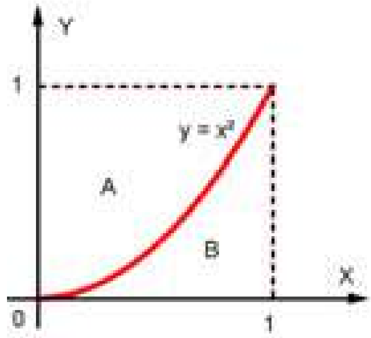
$$A = \int_2^3 \left(\frac{16}{x^2} + x^2 \right) dx = \left[\frac{-16}{x} + \frac{x^3}{3} \right]_2^3 = 9\ uc$$



PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 267

Razones de áreas

Queremos investigar posibles patrones que aparecen si se halla la razón de las áreas que se forman cuando las funciones y = x^n (n $\in$ Z, n $\in$Q) se representan entre dos valores arbitrarios a y b, con a < b.



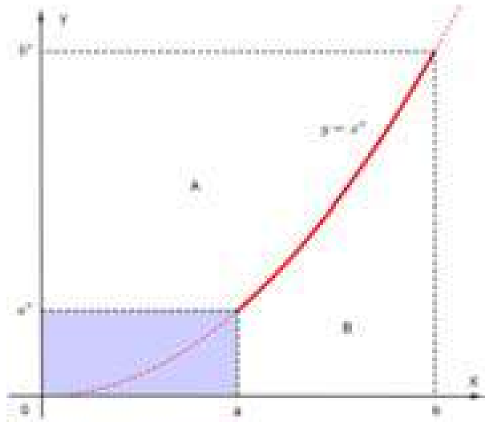
1. Sea la función y = x^2. Consideramos:

- La región B delimitada por y = x^2, x = 0, x = 1 y el eje OX.

- La región A delimitada por y = x^2, y = 0, y = 1 y el eje OY.

Halla la razón: $\dfrac{\text{Área } A}{\text{Área } B}$.

2. Calcula la razón de las áreas para otras funciones del tipo y = x^n, n $\in$ Z^+, entre x = 0 y x = 1.



3. Estudia qué ocurre para áreas comprendidas entre x = 0 y x = 2, entre x = 1 y x = 2, etc.

4. Analiza el caso general, con y = x^n entre a y b, tal que a < b, y para las regiones:

- La región A delimitada por y = x^n, y = a^n, y = b^n y el eje OY.

- La región B delimitada por y = x^n, x = a, x = b y el eje OX.

5. Los resultados que obtienes, ¿se mantienen para funciones del tipo y = x^n, $n \in Z^-$**, entre x = 0 y x = 1; entre x = 0 y x = 2; entre x = 1 y x = 2, etc.? ¿Y para funciones del tipo y = x^n,** $n \in Q$**, en los mismos intervalos?**

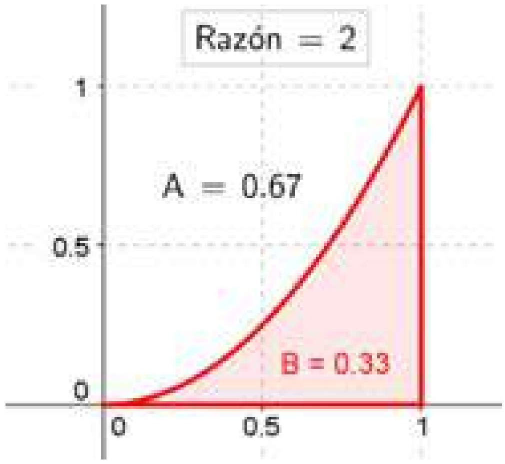
1. Para la función y = x^2 hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} = 0,33$$

$$A = 1 - B = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0,67$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.



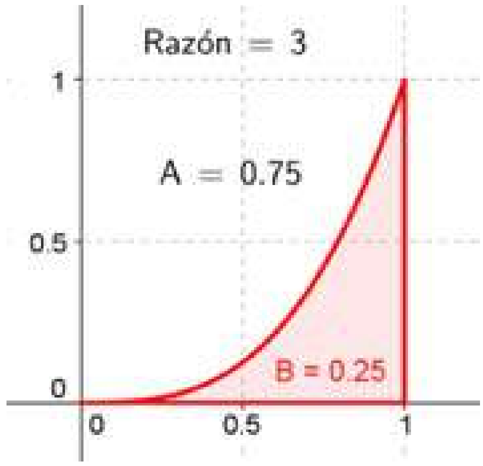
2. Para la función y = x^3 hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$A = 1 - B = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.



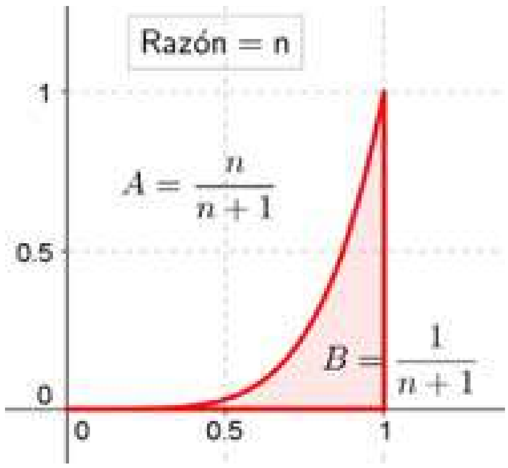
Para la función y = x^n, con $n \in Z^+$, hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$A = 1 - B = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{n}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} = n.$

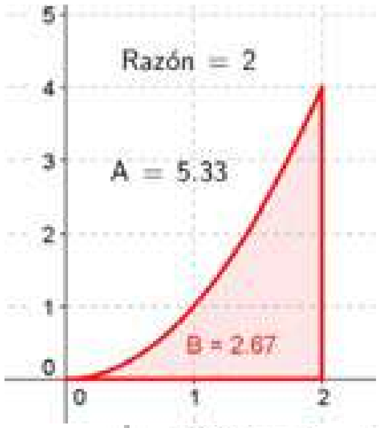
En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.



Observamos que la razón de las áreas coincide con el exponente de la función y = x^n.

3. Estudiamos las áreas comprendidas entre x = 0 y x = 2.

Para la función y = x^2 hallamos las áreas de las regiones B y A:



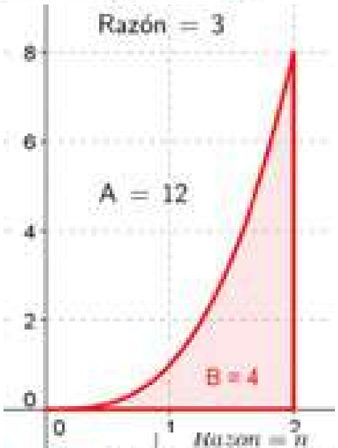
$$B = \int_0^2 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} = 2{,}67$$

$$A = 8 - B = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} = 5{,}33$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{16}{3}}{\frac{8}{3}} = 2.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

Para la función y = x^3 hallamos las áreas de las regiones B y A:



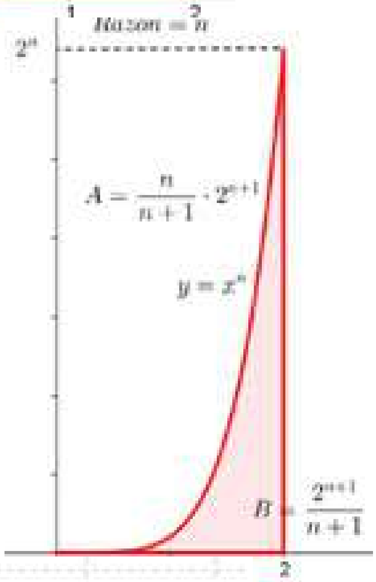
$$B = \int_0^2 x^3\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{16}{4} = 4$$

$$A = 16 - B = 16 - 4 = 12$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{12}{4} = 3.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

Para la función y = x^n, con $n \in Z^+$, hallamos las áreas de las regiones B y A:



$$B = \int_0^1 x^n\, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$A = 2 \cdot 2^n - \frac{2^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot 2^{n+1}$$

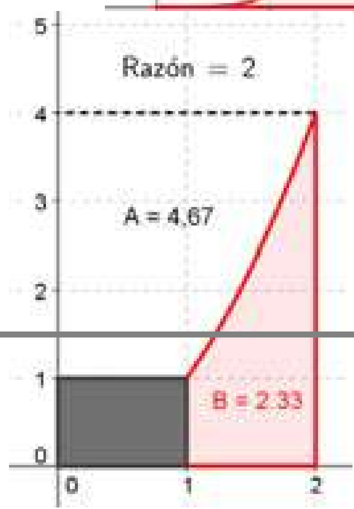
La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{n}{n+1} \cdot 2^{n+1}}{\frac{1}{n+1} \cdot 2^{n+1}} = n.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

Observamos que la razón de las áreas coincide con el exponente de la función y = x^n.

Estudiamos las áreas comprendidas entre x = 1 y x = 2.

Para la función y = x^2 hallamos las áreas de las regiones B y A:



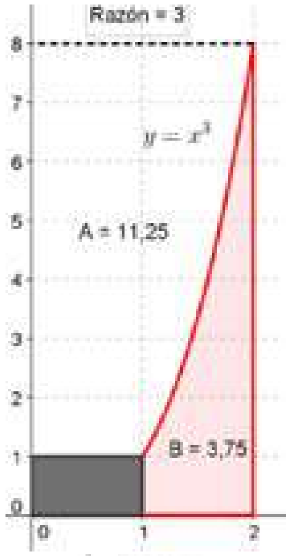
$$B = \int_1^2 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2{,}33$$

$$A = 8 - 1 - B = 7 - \frac{7}{3} = \frac{14}{3} = 4{,}67$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{14}{3}}{\frac{7}{3}} = 2.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

Para la función y = x^3 hallamos las áreas de las regiones B y A:

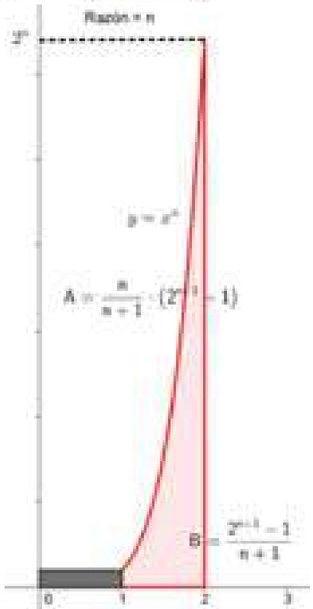


$$B = \int_1^2 x^3\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75$$

$$A = 16 - 1 - B = 15 - \frac{15}{4} = \frac{45}{4} = 11{,}25$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{45}{4}}{\frac{15}{4}} = 3.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.



Para la función y = x^n, con $n \in Z^+$, hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_1^2 x^n\, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_1^2 = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

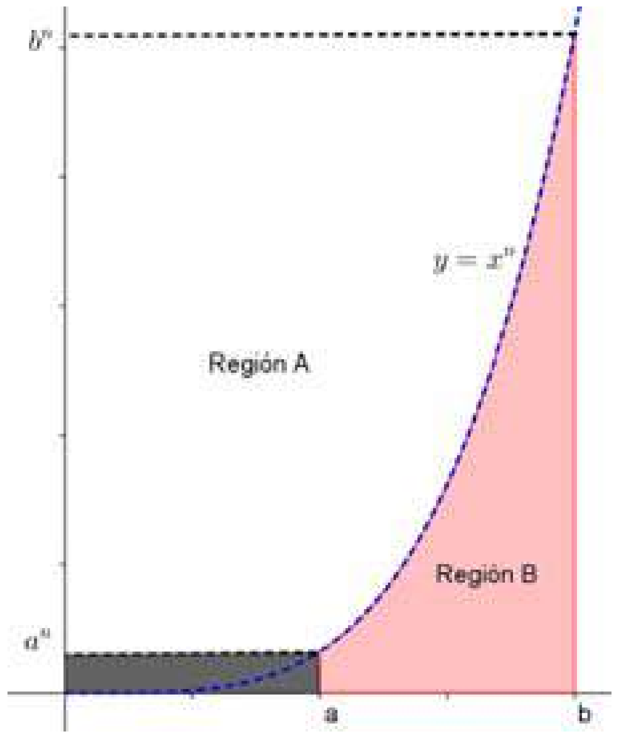
$$A = 2 \cdot 2^n - 1 - \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot (2^{n+1} - 1)$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{n}{n+1} \cdot (2^{n+1} - 1)}{\frac{1}{n+1} \cdot (2^{n+1} - 1)} = n.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

Observamos que la razón de las áreas coincide con el exponente de la función y = x^n.

4. Analizamos el caso general, con $y = x^n$ entre a y b, tal que a < b, y para las regiones:
- La región A delimitada por $y = x^n$, $y = a^n$, $y = b^n$ y el eje OY.
- La región B delimitada por $y = x^n$, x = a, x = b y el eje OX.



El área de la Región B es:

$$B = \int_a^b x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_1^2 = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

El área de la Región A es:

$$A = b^n \cdot b \; - a^n \cdot a - \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)$$

La razón de las áreas es:

$$Razón = \frac{Área\ A}{Área\ B} = \frac{\dfrac{n}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)}{\dfrac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)} = n$$

5. Estudiamos las funciones $y = x^n$, $n \in Z^-$.

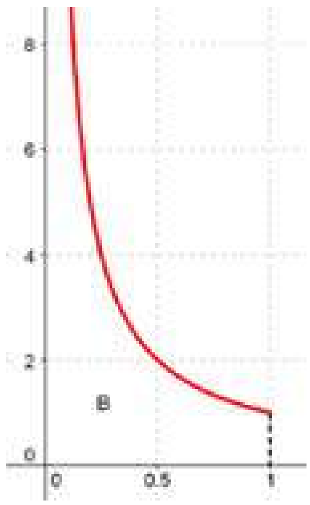
Comenzamos con $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$.

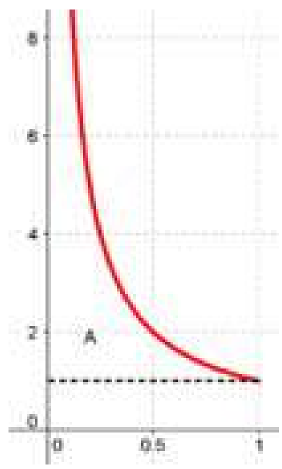
● **Entre 0 y 1:**

El área de la región B es: $B = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \left[\ln x\right]_0^1 = \ln 1 - \ln 0 = 0 - (-\infty) = +\infty$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y} dy = \left[\ln y\right]_1^{+\infty} = \ln(+\infty) - \ln 1 = +\infty - 0 = +\infty$$





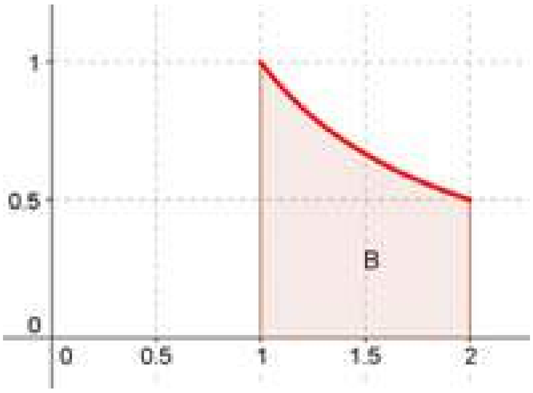
● **Entre 0 y a, con a > 0,** se obtienen los mismos resultados, es decir, las áreas de las regiones A y B son infinitas.

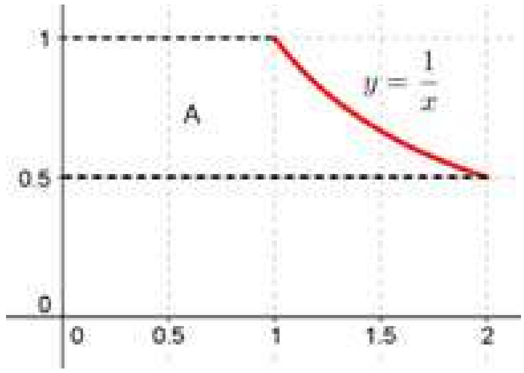
● **Entre 1 y 2:**

$$B = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 = 0{,}6931$$

$$A = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{y}\,dy = \left[\ln y\right]_{1/2}^{1} = \ln 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0 - (-\ln 2) = \ln 2 = 0{,}6931$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\ln 2}{\ln 2} = 1$



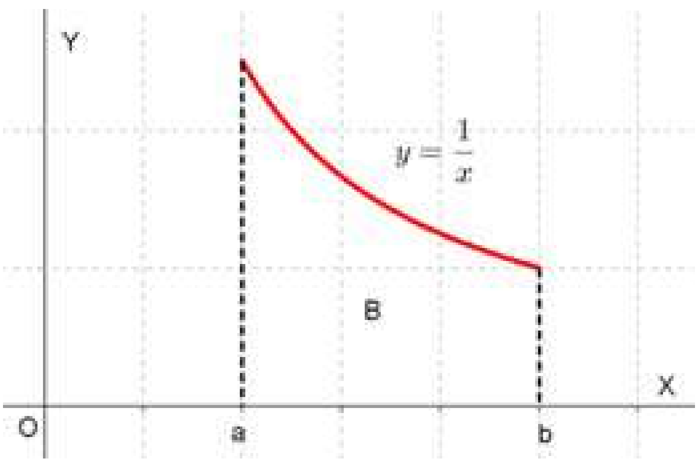


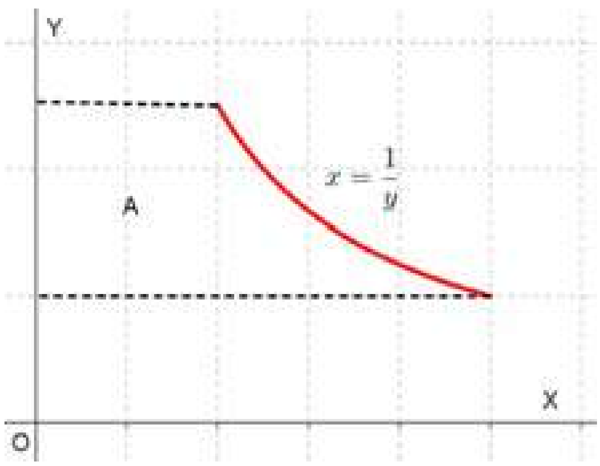
● **Entre a y b:**

$$B = \int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$$

$$A = \int_{1/b}^{1/a} \frac{1}{y}\,dy = \left[\ln y\right]_{1/b}^{1/a} = \ln\left(\frac{1}{a}\right) - \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln a - (-\ln b) = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{b}{a}} = 1$





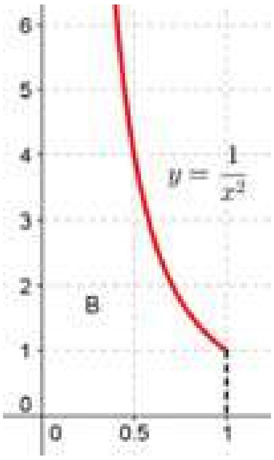
Consideramos $y = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$.

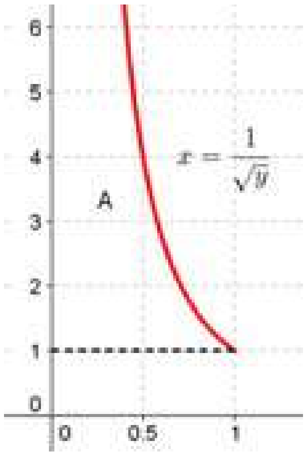
● **Entre 0 y 1:**

El área de la región B es: $B=\int_0^1 x^{-2}\,dx=\left[-\dfrac{1}{x}\right]_0^1=-1-\left(-\dfrac{1}{0}\right)=-1+\infty=+\infty$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy=\left[2\sqrt{y}\right]_1^{+\infty}=+\infty-2=+\infty$$



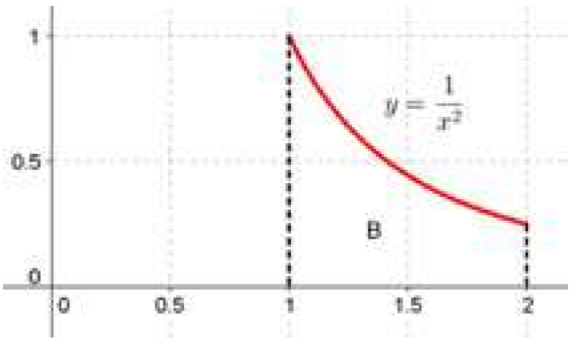


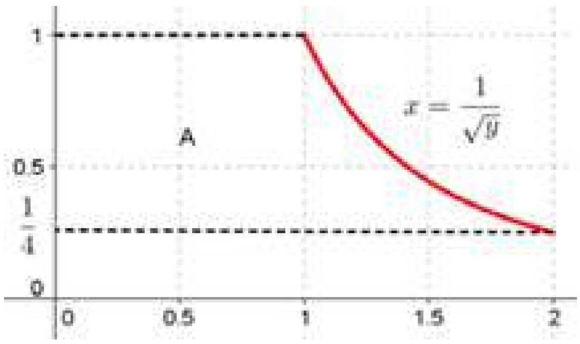
● **Entre 0 y a, con a > 0,** se obtienen los mismos resultados, es decir, las áreas de las regiones A y B son infinitas.

● **Entre 1 y 2:**

$$B=\int_1^2 x^{-2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=-\frac{1}{2}-(-1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$A=\int_{1/4}^{1}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy=\left[2\sqrt{y}\right]_{1/4}^{1}=2-2\cdot\frac{1}{\sqrt{4}}=2-1=1$$





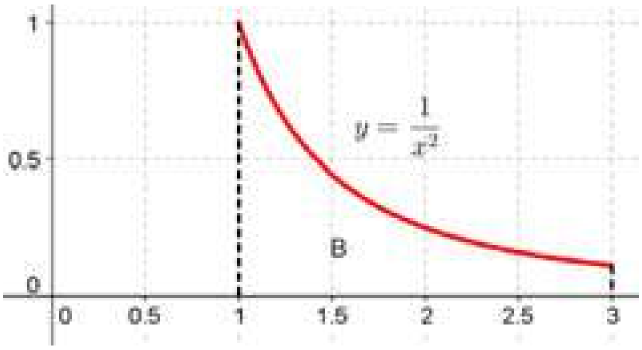
El valor de la razón es: $Razón=\dfrac{Área\ A}{Área\ B}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$

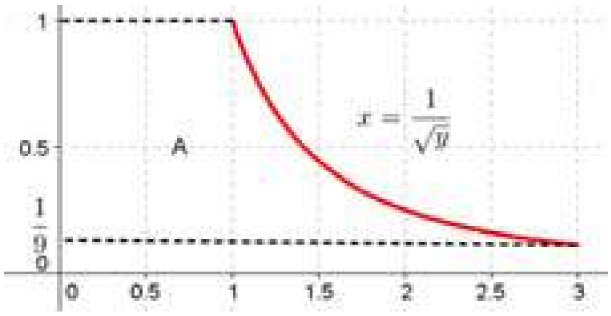
● **Entre 1 y 3:**

$$B=\int_1^3 x^{-2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^3=-\frac{1}{3}-(-1)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$A=\int_{1/9}^{1}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy=\left[2\sqrt{y}\right]_{1/9}^{1}=2-2\cdot\frac{1}{\sqrt{9}}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

El valor de la razón es: $Razón=\dfrac{Área\ A}{Área\ B}=\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}=2$



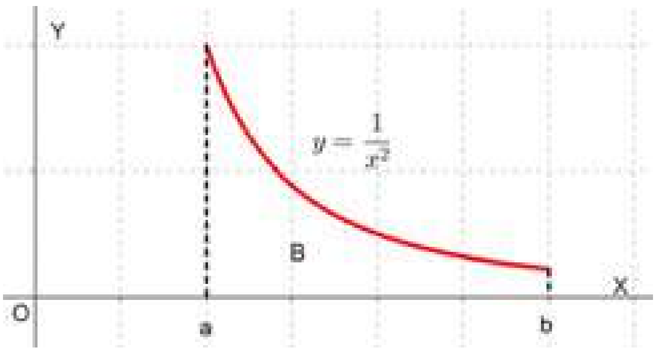


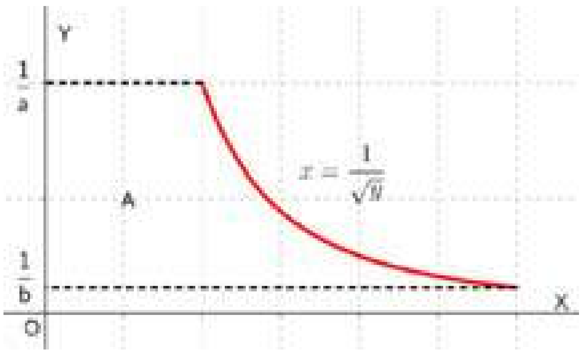
● **Entre a y b:**

$$B=\int_a^b x^{-2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b=-\frac{1}{b}-\left(-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

$$A=\int_{1/b^2}^{1/a^2}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy=\left[2\sqrt{y}\right]_{1/b^2}^{1/a^2}=\frac{2}{a^2}-\frac{2}{b^2}=2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$$

El valor de la razón es: $Razón=\dfrac{Área\ A}{Área\ B}=\dfrac{2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)}{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)}=2$





Consideramos $y=x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$.

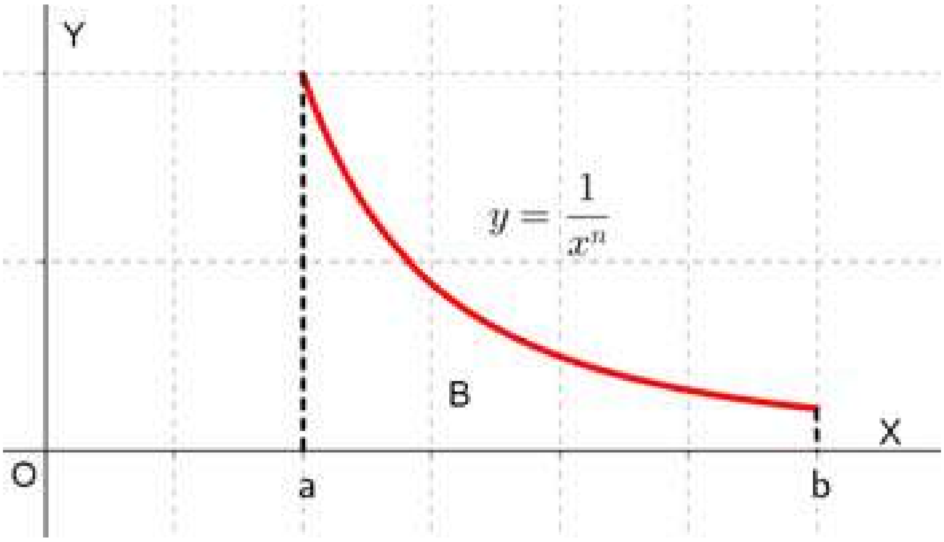
● **Entre a y b:**

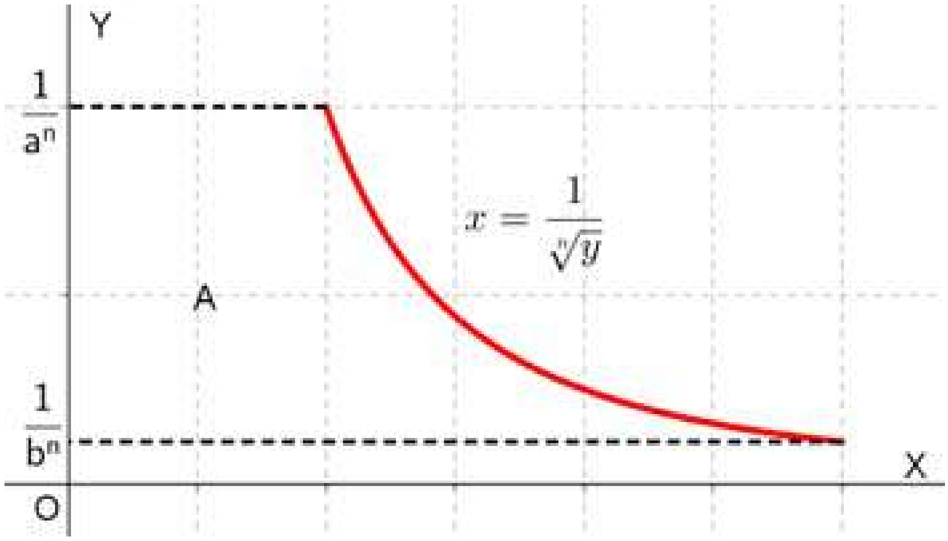
$$B=\int_a^b x^{-n}\,dx=\left[\frac{1}{-n+1}x^{-n+1}\right]_a^b=\frac{1}{-n+1}b^{-n+1}-\frac{1}{-n+1}a^{-n+1}=\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{a^{n-1}}-\frac{1}{b^{n-1}}\right]$$

$$A=\int_{1/b^{n2}}^{1/a^n} y^{-1/n}\,dy=\left[\frac{n}{n-1}y^{\frac{n-1}{n}}\right]_{1/b^n}^{1/a^n}=\frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{a^n}\right)^{\frac{n-1}{n}}-\frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{b^n}\right)^{\frac{n-1}{n}}=$$

$$=\frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{a^{n-1}}-\frac{1}{b^{n-1}}\right]$$

El valor de la razón es: $Razón=\dfrac{Área\ A}{Área\ B}=\dfrac{\dfrac{n}{n-1}\left(\dfrac{1}{a^{n-1}}-\dfrac{1}{b^{n-1}}\right)}{\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{1}{a^{n-1}}-\dfrac{1}{b^{n-1}}\right)}=n$





Estudiamos las funciones $y=x^{\frac{p}{q}}$, $\dfrac{p}{q}\in Q^+$. Comenzamos con $y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

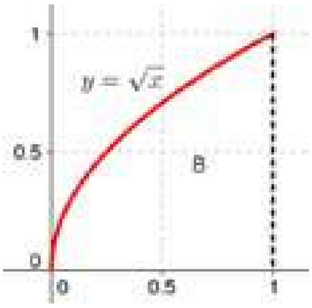
● **Entre 0 y 1:**

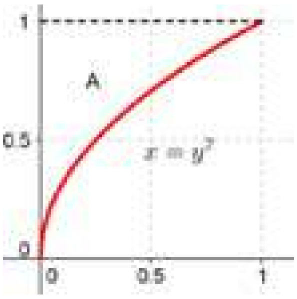
El área de la región B es: $B=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1=\dfrac{2}{3}-0=\dfrac{2}{3}$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{1}^{+\infty} y^2\ dy = \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{2}$





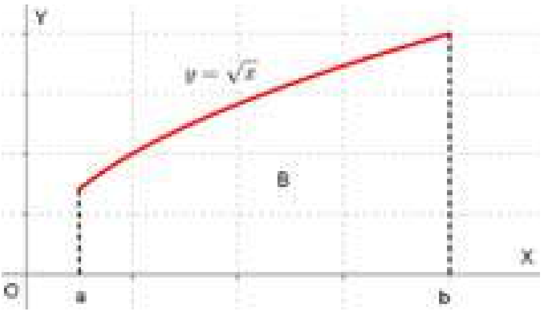
- **Entre a y b:**

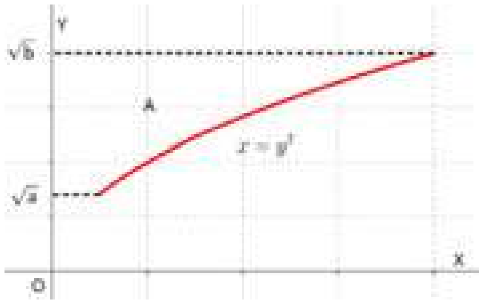
El área de la región B es: $B = \int_a^b x^{\frac{1}{2}}\ dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_a^b = \frac{2}{3}\sqrt{b^3} - \frac{2}{3}\sqrt{a^3} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3}\right)$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} y^2\ dy = \left[\frac{1}{3}y^3\right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} = \frac{1}{3}\sqrt{b^3} - \frac{1}{3}\sqrt{a^3} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3}\right)$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{1}{3}\left(\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3}\right)}{\frac{2}{3}\left(\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3}\right)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{2}$





Consideramos la función $y = x^{\frac{p}{q}},\ \frac{p}{q} \in Q^+$ **entre a y b.**

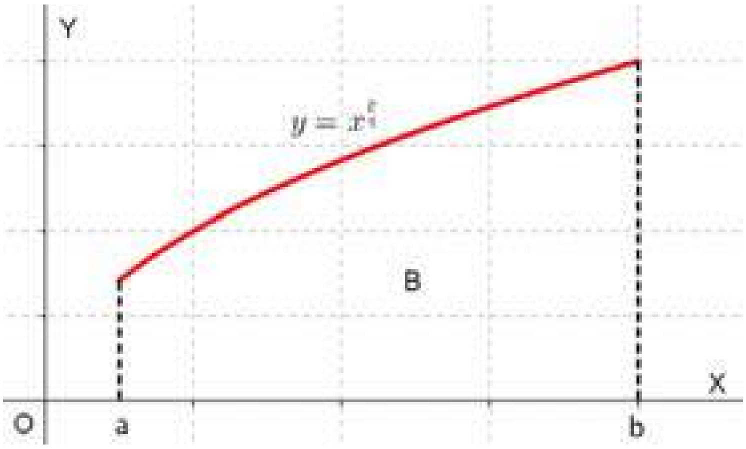
El área de la región B es:

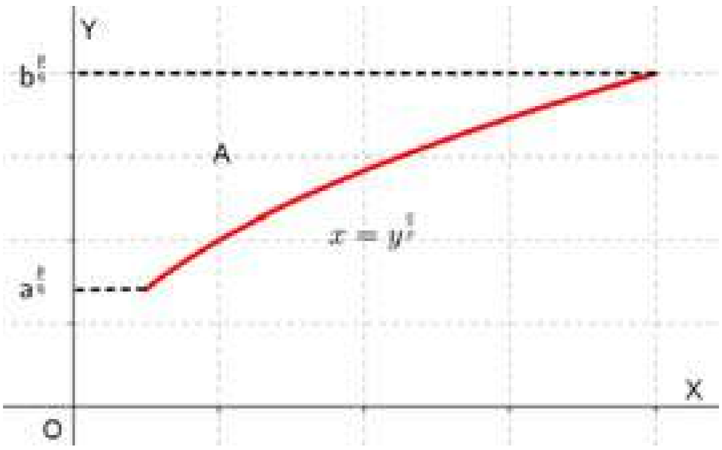
$$B = \int_a^b x^{\frac{p}{q}}\ dx = \left[\frac{q}{p+q}x^{\frac{p+q}{p}}\right]_a^b = \frac{q}{p+q}b^{\frac{p+q}{q}} - \frac{q}{p+q}a^{\frac{p+q}{q}} = \frac{q}{p+q}\left(b^{\frac{q}{p+q}} - a^{\frac{q}{p+q}}\right)$$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{a^{\frac{p}{q}}}^{b^{\frac{p}{q}}} y^{\frac{q}{p}}\, dy = \left[\frac{p}{p+q}\, y^{\frac{p+q}{p}} \right]_{a^{\frac{p}{q}}}^{b^{\frac{p}{q}}} = \frac{p}{p+q}\left[\left(b^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p+q}{p}} - \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p+q}{p}} \right] = \frac{p}{p+q}\left[b^{\frac{p+q}{q}} - a^{\frac{p+q}{q}} \right]$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\dfrac{p}{p+q}\left[b^{\frac{p+q}{q}} - a^{\frac{p+q}{q}} \right]}{\dfrac{q}{p+q}\left[b^{\frac{p+q}{q}} - a^{\frac{p+q}{q}} \right]} = \dfrac{p}{q}$





Estudiamos las funciones $y = x^{\frac{p}{q}}, \dfrac{p}{q} \in Q^-$. Comenzamos con $y = x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

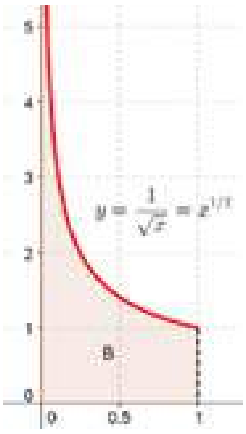
● **Entre 0 y 1:**

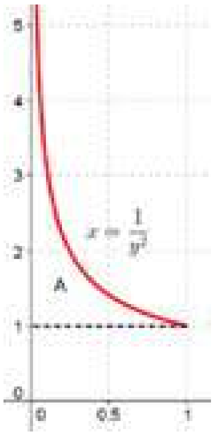
El área de la región B es: $B = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2}\, dy = \left[-\frac{1}{y} \right]_1^{+\infty} = -\frac{1}{+\infty} - (-1) = 0 + 1 = 1$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$





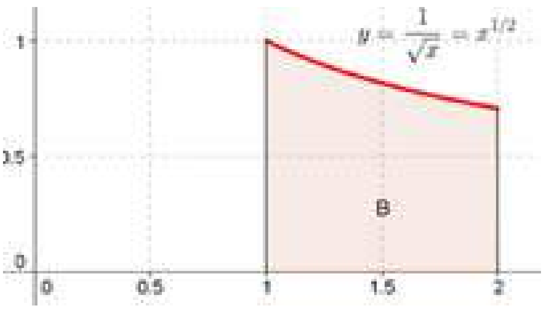
● **Entre 1 y 2:**

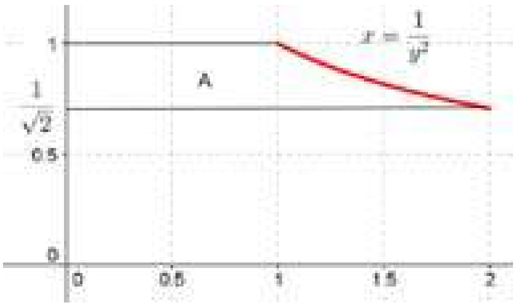
El área de la región B es: $B = \int_1^2 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^2 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{1} = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{y^2}\,dy = \left[-\frac{1}{y}\right]_{1/\sqrt{2}}^{1} = -1 - \left(-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \sqrt{2} - 1$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2\left(\sqrt{2} - 1\right)} = \dfrac{1}{2}$





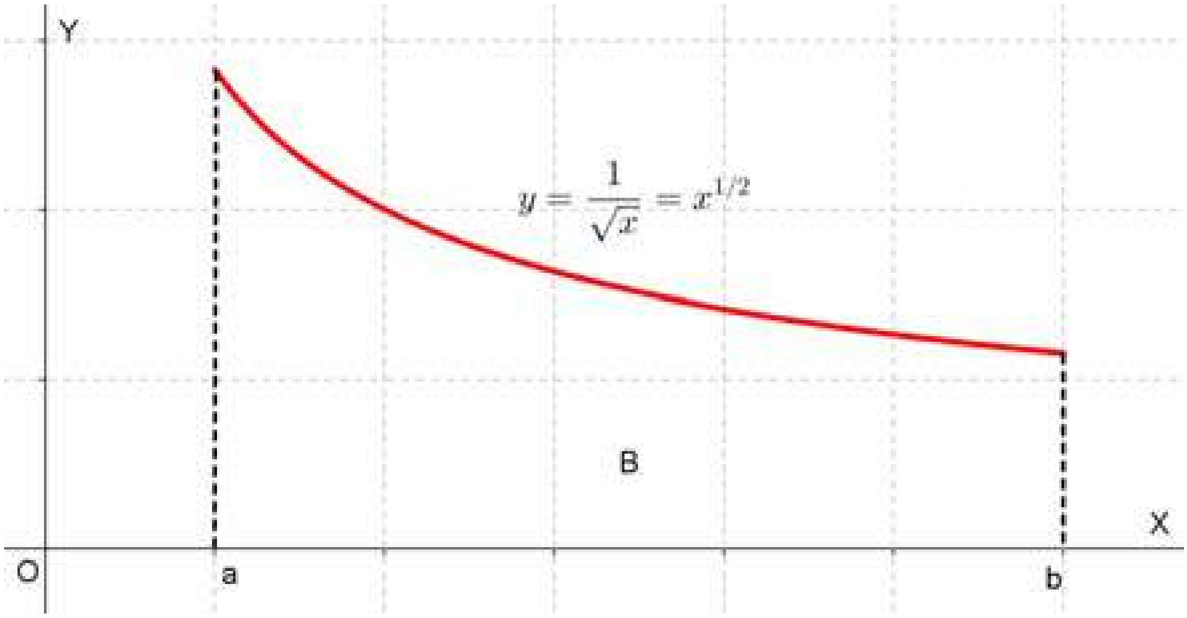
● **Entre a y b:**

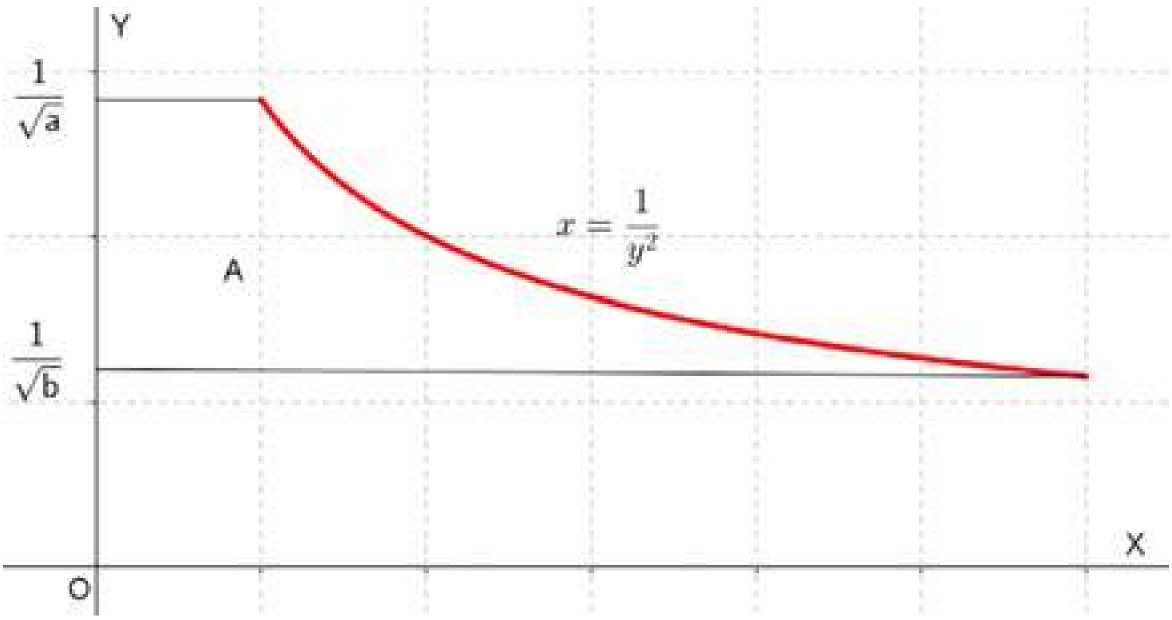
El área de la región B es: $B = \int_a^b x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_a^b = 2\sqrt{b} - 2\sqrt{a} = 2\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{1/\sqrt{b}}^{1/\sqrt{a}} \frac{1}{y^2}\,dy = \left[-\frac{1}{y}\right]_{1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{a}} = -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a}}} - \left(-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{b}}}\right) = \sqrt{b} - \sqrt{a}$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{2\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)} = \dfrac{1}{2}$





Podemos comprobar con otras funciones del mismo tipo, por ejemplo:

$y = x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\quad y = x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\quad y = x^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$, $\quad \ldots$

que se obtienen resultados análogos al anterior.

Para finalizar, h**acemos**, **los cálculos para la función** $y = x^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{p}}$ **entre a y b.**

El área de la región B es:

$$B = \int_a^b x^{-\frac{p}{q}}\,dx = \left[\frac{q}{q-p}x^{\frac{q-p}{q}}\right]_a^b = \frac{q}{q-p}b^{\frac{q-p}{q}} - \frac{q}{q-p}a^{\frac{q-p}{q}} = \frac{q}{q-p}\left[b^{\frac{q-p}{q}} - a^{\frac{q-p}{q}}\right]$$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{1/b^{p/q}}^{1/a^{p/q}} y^{-\frac{q}{p}}\,dy = \left[\frac{p}{p-q}\right]_{1/b^{\frac{p}{q}}}^{1/a^{\frac{p}{q}}} = \frac{p}{p-q}\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{p/q}\right]^{\frac{p-q}{p}} - \frac{p}{p-q}\left[\left(\frac{1}{b}\right)^{p/q}\right]^{\frac{p-q}{p}} = \ldots =$$

$$= \frac{p}{q-p}\left[b^{\frac{q-p}{q}} - a^{\frac{q-p}{q}}\right]$$

El valor de la razón es: $Razón = \frac{Área\ A}{Área\ B} = \frac{\frac{p}{q-p}\left[b^{\frac{q-p}{q}} - a^{\frac{q-p}{q}}\right]}{\frac{q}{q-p}\left[b^{\frac{q-p}{q}} - a^{\frac{q-p}{q}}\right]} = \frac{p}{q}$