UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD — MATEMÁTICAS II

CURSO 2014-2015

**Instrucciones:** a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

**Ejercicio 1.-** **[2'5 puntos]** Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13'5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el mínimo posible.

**Ejercicio 2.-** **[2'5 puntos]** Calcula $\displaystyle\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx$.

**Ejercicio 3.-** Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda x + y - z & = & -1 \\ \lambda x \quad + \lambda z & = & \lambda \\ x + y - \lambda z & = & 0 \end{array}\right.$$

a) **[1'5 puntos]** Discute el sistema según los valores de $\lambda$.

b) **[1 punto]** Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

**Ejercicio 4.-** Sean los puntos $A(0,1,1)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,2,0)$ y $D(2,1,m)$.

a) **[0'75 puntos]** Calcula $m$ para que $A, B, C$ y $D$ estén en un mismo plano.

b) **[0'75 puntos]** Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos $A$ y $B$ son simétricos.

c) **[1 punto]** Calcula el área del triángulo de vértices $A, B$ y $C$.

**Instrucciones:** a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x^2)}$ es finito e igual a uno, calcula los valores de $a$ y $b$.

**Ejercicio 2.- [2'5 puntos]** Determina la función $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x)=\ln(x)$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,2)$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

**Ejercicio 3.-** Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$$

a) **[1'5 puntos]** Encuentra el valor, o los valores, de $m$ para los que $A$ y $B$ tienen el mismo rango.

b) **[1 punto]** Determina, si existen, los valores de $m$ para los que $A$ y $B$ tienen el mismo determinante.

**Ejercicio 4.-** Sea el plano $\pi \equiv 2x+y-z+8=0$.

a) **[1'5 puntos]** Calcula el punto $P'$, simétrico del punto $P(2,-1,5)$ respecto del plano $\pi$.

b) **[1 punto]** Calcula la recta $r'$, simétrica de la recta $r\equiv \dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-5}{1}$ respecto del plano $\pi$.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CURSO 2013-2014

**MATEMÁTICAS II**

**Instrucciones:**

**a) Duración:** 1 hora y 30 minutos.

**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

**c)** La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

**d)** Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

**e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

**Ejercicio 1.-** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

**a)** [**1'75 puntos**] Halla $a, b$ y $c$ para que la gráfica de $f$ tenga un punto de inflexión de abscisa $x = \frac{1}{2}$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ tenga por ecuación $y = 5 - 6x$.

**b)** [**0'75 puntos**] Para $a = 3$, $b = -9$ y $c = 8$, calcula los extremos relativos de $f$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

**Ejercicio 2.-** Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas respectivamente por

$$f(x) = \frac{|x|}{2} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

**a)** [**1 punto**] Esboza las gráficas de $f$ y $g$ sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

**b)** [**1'5 puntos**] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de $f$ y $g$.

**Ejercicio 3.-** Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 5 \end{array}\right\}$$

**a)** [**1'5 puntos**] Calcula $\alpha$ de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + y - 7z = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.

**b)** [**1 punto**] Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

**Ejercicio 4.-** Considera la recta $r$ que pasa por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(-1, 1, 0)$.

**a)** [**1 punto**] Halla la ecuación de la recta $s$ paralela a $r$ que pasa por $C(-2, 3, 2)$.

**b)** [**1'5 puntos**] Calcula la distancia de $r$ a $s$.

**Instrucciones:**
**a) Duración:** 1 hora y 30 minutos.

**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

**c)** La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

**d)** Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

**e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de 125 $m^3$. Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.

**Ejercicio 2.- [2'5 puntos]** Sea $f$ la función definida por $f(x) = x\ln(x+1)$ para $x > -1$ (ln denota el logaritmo neperiano). Determina la primitiva de $f$ cuya gráfica pasa por el punto $(1, 0)$.

**Ejercicio 3.- [2'5 puntos]** Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Determina, si existe, la matriz $X$ que verifica $AX + B = A^2$.

**Ejercicio 4.-** Sea $r$ la recta definida por $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{array} \right.$

**a) [1'5 puntos]** Determina la ecuación general del plano que contiene a $r$ y pasa por el origen de coordenadas.

**b) [1 punto]** Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicularmente a $r$ en el punto $(1, 1, 0)$.

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

---

**Ejercicio 1.-** [**2'5 puntos**] Calcula $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$.

---

**Ejercicio 2.-** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

**a)** [**0'75 puntos**] Halla, si existe, el punto de la gráfica de $f$ en el que la recta tangente es $y = 3 - x$.

**b)** [**1'75 puntos**] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $f$ y la recta del apartado anterior.

---

**Ejercicio 3.-** Considera el siguiente sistema de ecuaciones con incógnitas $x, y, z$,

$$\left.\begin{array}{rcl} \lambda y + (\lambda+1)z & = & \lambda \\ \lambda x \ + \ z & = & \lambda \\ x \ + \ \lambda z & = & \lambda \end{array}\right\}$$

**a)** [**1'5 puntos**] Discute el sistema según los valores del parámetro $\lambda$.

**b)** [**0'5 puntos**] Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

**c)** [**0'5 puntos**] Para $\lambda = 0$, si es posible, da tres soluciones distintas.

---

**Ejercicio 4.-** Sean $A(-3, 4, 0)$, $B(3, 6, 3)$ y $C(-1, 2, 1)$ los vértices de un triángulo.

**a)** [**1 punto**] Halla la ecuación del plano $\pi$ que contiene al triángulo.

**b)** [**1 punto**] Halla la ecuación de la recta perpendicular a $\pi$ que pasa por el origen de coordenadas.

**c)** [**0'5 puntos**] Calcula el área del triángulo $ABC$.

---

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

**Ejercicio 1.-** Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 e^{-x^2}$

**a)** **[0'75 puntos]** Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de $f$.

**b)** **[1'25 puntos]** Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

**c)** **[0'5 puntos]** Esboza la gráfica de $f$.

**Ejercicio 2.-** **[2'5 puntos]** Sea $f\colon (-1,3) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{x+9}{(x+1)(x-3)}$. Determina la primitiva de $f$ cuya gráfica pasa por el punto $(1,0)$.

**Ejercicio 3.-** **[2'5 puntos]** Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Halla la matriz $X$ que verifica $A^{-1}XA = B - A$.

**Ejercicio 4.-** Considera el punto $A(8,-1,3)$ y la recta $r$ dada por $\dfrac{x+1}{2} = y - 2 = \dfrac{z-1}{3}$.

**a)** **[1'25 puntos]** Calcula la ecuación del plano que pasa por $A$ y es perpendicular a $r$.

**b)** **[1'25 puntos]** Halla el punto simétrico de $A$ respecto de $r$.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CURSO 2013-2014

MATEMÁTICAS II

Universidades Públicas de Andalucía

**Instrucciones:** **a) Duración:** 1 hora y 30 minutos.

**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

**c)** La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

**d)** Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

**e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

**Ejercicio 1.-** Sea $f$ la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{2x} + \ln x$ para $x > 0$ (ln denota el logaritmo neperiano).

**a)** [**1'75 puntos**] Determina el punto de la gráfica de $f$ en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.

**b)** [**0'75 puntos**] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = 1$.

---

**Ejercicio 2.-** [**2'5 puntos**] Calcula $\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln(4-x)dx$ (ln denota el logaritmo neperiano).

---

**Ejercicio 3.-** Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & (m+1)y & + & 2z & = & -1 \\ mx & + & y & + & z & = & m \\ (1-m)x & + & 2y & + & z & = & -m-1 \end{array}\right\}$$

**a)** [**1'75 puntos**] Discute el sistema según los valores del parámetro $m$.

**b)** [**0'75 puntos**] Resuélvelo para $m = 2$. Para dicho valor de $m$, calcula, si es posible, una solución en la que $z = 2$.

---

**Ejercicio 4.-** Considera los vectores $\vec{u} = (1,-1,0)$, $\vec{v} = (0,1,2)$, $\vec{w} = (1+\alpha, 2\alpha, 2-3\alpha)$. Halla los valores de $\alpha$ en cada uno de los siguientes casos:

**a)** [**1 punto**] $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ están en el mismo plano.

**b)** [**0'5 puntos**] $\vec{w}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

**c)** [**1 punto**] El volumen del tetraedro que tiene por aristas a los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ es $1/6$.

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

**Ejercicio 1.-** [**2'5 puntos**] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Halla $b, c$ y $d$ sabiendo que $f$ tiene un máximo relativo en $x = -1$ y que $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = 4$.

**Ejercicio 2.-** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

a) [**0'5 puntos**] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = 2$.

b) [**0'75 puntos**] Esboza el recinto limitado por la gráfica de $f$, la recta $2x + y - 7 = 0$ y el eje $OX$, calculando los puntos de corte.

c) [**1'25 puntos**] Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.

**Ejercicio 3.-** Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) [**0'75 puntos**] ¿Para qué valores de $m$ se verifica que $A^2 = 2A + I$? ($I$ denota la matriz identidad).

b) [**1'75 puntos**] Para $m = 1$, calcula $A^{-1}$ y la matriz $X$ que satisface $AX - B = AB$.

**Ejercicio 4.-** Considera el punto $P(2, -2, 0)$ y la recta $r$ dada por

$$\begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

a) [**1'25 puntos**] Halla la ecuación del plano que contiene a $P$ y es perpendicular a $r$.

b) [**1'25 puntos**] Calcula la distancia de $P$ a $r$.

**MATEMÁTICAS II**

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

**Ejercicio 1.-** **[2'5 puntos]** Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{a}{\ln x}\right)$ es finito, calcula $a$ y el valor del límite (ln denota el logaritmo neperiano).

**Ejercicio 2.-** **[2'5 puntos]** Determina una función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que $f(1)=-1$ y que

$$f'(x)=\begin{cases} x^2-2x & \text{si} \quad x<0 \\ e^x-1 & \text{si} \quad x\geq 0. \end{cases}$$

**Ejercicio 3.-** Se sabe que el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es $-3$. Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

**a)** **[1 punto]** $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$.

**b)** **[1'5 puntos]** $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

**Ejercicio 4.-** Considera los vectores $\vec{u}=(1,-1,3)$, $\vec{v}=(1,0,-1)$ y $\vec{w}=(\lambda,1,0)$.

**a)** **[0'75 puntos]** Calcula los valores de $\lambda$ que hacen que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean ortogonales.

**b)** **[0'75 puntos]** Calcula los valores de $\lambda$ que hacen que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes.

**c)** **[1 punto]** Para $\lambda=1$ escribe el vector $\vec{r}=(3,0,2)$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

**Ejercicio 1.-** Considera la función derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ ax + b & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

**a)** [**1'75 puntos**] Calcula $a$ y $b$.

**b)** [**0'75 puntos**] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = -1$.

---

**Ejercicio 2.-** Considera el recinto limitado por las siguientes curvas

$$y = x^2, \quad y = 2 - x^2, \quad y = 4.$$

**a)** [**1 punto**] Haz un esbozo del recinto y calcula los puntos de corte de las curvas.

**b)** [**1'5 puntos**] Calcula el área del recinto.

---

**Ejercicio 3.-** Considera las matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**a)** [**0'5 puntos**] Calcula $A^{-1}$.

**b)** [**2 puntos**] Halla la matriz $X$ que verifica que $A^tX + B = I$, siendo $I$ la matriz identidad y $A^t$ la matriz traspuesta de $A$.

---

**Ejercicio 4.-** Sea $r$ la recta dada por $\dfrac{x+2}{2} = y + 1 = \dfrac{z-1}{-3}$ y sea $s$ la recta dada por $\left\{ \begin{array}{r} x - y - 3 = 0 \\ 3y - z + 6 = 0 \end{array} \right.$

**a)** [**1 punto**] Estudia la posición relativa de $r$ y $s$.

**b)** [**1'5 puntos**] Halla la ecuación general del plano que contiene a $r$ y es paralelo a $s$.

---

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CURSO 2013-2014

**MATEMÁTICAS II**

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** De entre todos los triángulos rectángulos de área 8 cm$^2$, determina las dimensiones del que tiene la hipotenusa de menor longitud.

**Ejercicio 2.- [2'5 puntos]** Calcula $\displaystyle\int \frac{dx}{2x(x+\sqrt{x})}$. (Sugerencia: cambio de variable $t=\sqrt{x}$).

**Ejercicio 3.-** Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ es 3, halla los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:

a) **[1 punto]** $\det(A^3)$, $\det(A^{-1})$, $\det(A+A^t)$ ($A^t$ indica la traspuesta de $A$).

b) **[0'75 puntos]** $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{pmatrix}$.

c) **[0'75 puntos]** $\det \begin{pmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{pmatrix}$.

**Ejercicio 4.-** Sea $r$ la recta definida por $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y $s$ la recta dada por $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$.

a) **[1'75 puntos]** Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a $r$ y a $s$.

b) **[0'75 puntos]** Calcula la distancia entre $r$ y $s$.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CURSO 2013-2014

**MATEMÁTICAS II**

**Instrucciones:**
**a) Duración:** 1 hora y 30 minutos.

**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

**c)** La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

**d)** Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

**e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

**Ejercicio 1.-** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función derivable definida por

$$f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{b}{x} + \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

donde ln denota el logaritmo neperiano.

**a)** [**1'25 puntos**] Calcula $a$ y $b$.

**b)** [**1'25 puntos**] Para $a = 3$ y $b = 2$ calcula los extremos absolutos de $f$ en el intervalo $[0, e]$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

---

**Ejercicio 2.-** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^x \cos(x)$.

**a)** [**1 punto**] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = 0$.

**b)** [**1'5 puntos**] Calcula la primitiva de $f$ cuya gráfica pasa por el punto $(0, 0)$.

---

**Ejercicio 3.-** Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} mx & - & 2y & + & z & = & 1 \\ x & - & 2my & + & z & = & -2 \\ x & - & 2y & + & mz & = & 1 \end{array}\right\}.$$

**a)** [**1'75 puntos**] Discute el sistema según los valores del parámetro $m$.

**b)** [**0'75 puntos**] Si es posible, resuelve el sistema para $m = -2$.

---

**Ejercicio 4.-** Considera el plano $\pi$ de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$, y la recta $r$ de ecuación

$$\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3}$$

**a)** [**0'5 puntos**] Determina la posición relativa de $\pi$ y $r$.

**b)** [**1 punto**] Halla la ecuación general del plano que contiene a $r$ y es perpendicular a $\pi$.

**c)** [**1 punto**] Halla las ecuaciones paramétricas del plano paralelo a $\pi$ que contiene a $r$.

---

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

---

**Ejercicio 1.-** **[2'5 puntos]** Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x) - e^x + ax}{x\,\mathrm{sen}(x)}$ es finito, calcula $a$ y el valor del límite.

---

**Ejercicio 2.-** **[2'5 puntos]** Calcula

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4}\,dx.$$

---

**Ejercicio 3.-** Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & mz & = & 0 \\ mx & + & 2y & + & z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2mz & = & 0 \end{array}\right\}.$$

a) **[0'75 puntos]** Halla los valores del parámetro $m$ para los que el sistema tiene una única solución.

b) **[1 punto]** Halla los valores del parámetro $m$ para los que el sistema tiene alguna solución distinta de la solución nula.

c) **[0'75 puntos]** Resuelve el sistema para $m = -2$.

---

**Ejercicio 4.-** Considera los puntos $A(1,1,2)$ y $B(1,-1,-2)$ y la recta $r$ dada por $\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = \ \ t \\ z = 1 \end{array}\right.$

a) **[1 punto]** Halla la ecuación general del plano que contiene a $r$ y es paralelo a la recta que pasa por $A$ y por $B$.

b) **[1'5 puntos]** Halla el punto de la recta $r$ que está a la misma distancia de $A$ y de $B$.

---

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CURSO 2013-2014

MATEMÁTICAS II

**Instrucciones:**

**a)** **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

**c)** La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

**d)** Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

**e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

**Ejercicio 1.-** [**2'5 puntos**] De entre todos los números reales positivos, determina el que sumado con su inverso da suma mínima.

**Ejercicio 2.-** [**2'5 puntos**] Calcula $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$. (Sugerencia: integración por partes).

**Ejercicio 3.-** Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:

**a)** [**0'5 puntos**] det(3A)

**b)** [**0'5 puntos**] det($\mathrm{A}^{-1}$)

**c)** [**0'75 puntos**] $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

**d)** [**0'75 puntos**] $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

**Ejercicio 4.-** Sea $r$ la recta que pasa por los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(2,-1,3)$.

**a)** [**1'25 puntos**] Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta $r$.

**b)** [**1'25 puntos**] Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a $r$ y pasa por el origen de coordenadas.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CURSO 2012-2013

MATEMÁTICAS II

**Instrucciones:**

**a)** **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

**c)** La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

**d)** Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

**e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de $\sqrt{5}$ cm. de radio, de forma que uno de sus lados está contenido en el diámetro del semicírculo y el lado opuesto tiene sus vértices sobre la semicircunferencia. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que es el de mayor perímetro posible.

**Ejercicio 2.- [2'5 puntos]** Halla $\displaystyle\int \frac{x+1}{1+\sqrt{x}}\,dx$. *Sugerencia:* se puede hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$.

**Ejercicio 3.-** Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 3 \end{array}\right\}.$$

**a) [1'5 puntos]** Determina el valor de $m$ para el que al añadir la ecuación

$$x+my+4z=-3$$

al sistema anterior se obtenga un sistema con las mismas soluciones.

**b) [1 punto]** Calcula la solución del sistema para la que la suma de los valores de las incógnitas sea 6.

**Ejercicio 4.-** Del paralelogramo $ABCD$ se conocen los vértices $A(-1,0,3), B(2,-1,1)$ y $C(3,2,-3)$.

**a) [1 punto]** Halla la ecuación del plano que contiene al paralelogramo.

**b) [1 punto]** Halla la ecuación de la recta que contiene a la diagonal $AC$ del paralelogramo.

**c) [0'5 puntos]** Calcula las coordenadas del vértice $D$.

**Instrucciones:**

**a)** **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

**c)** La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

**d)** Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

**e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

---

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina $a, b$ y $c$ sabiendo que la recta normal a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = 0$ es $y + x = -3$ y que el punto de inflexión tiene abscisa $x = 1$.

---

**Ejercicio 2.-** Sea $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = |\ \ln(x)|$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).

**a)** **[1'25 puntos]** Esboza el recinto limitado por la gráfica de $g$ y la recta $y = 1$. Calcula los puntos de corte entre ellas.

**b)** **[1'25 puntos]** Calcula el área del recinto anterior.

---

**Ejercicio 3.-** Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**a)** **[1'25 puntos]** Calcula $X$ e $Y$ tales que $X - Y = A^t$ y $2X - Y = B$ ($A^t$ es la matriz traspuesta de $A$).

**b)** **[1'25 puntos]** Calcula $Z$ tal que $AZ = BZ + A$.

---

**Ejercicio 4.-** Considera los puntos $A(1, 2, 3)$ y $B(-1, 0, 4)$.

**a)** **[1'25 puntos]** Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento $AB$ en tres partes iguales.

**b)** **[1'25 puntos]** Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A$ y es perpendicular al segmento $AB$.

---

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CURSO 2012-2013

MATEMÁTICAS II

**Instrucciones:**
- **a)** **Duración:** 1 hora y 30 minutos.
- **b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- **c)** La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
- **d)** Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- **e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

**Ejercicio 1.-** Sea $f$ la función definida por $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ para $x > 0, x \neq 1$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).

**a)** **[1'25 puntos]** Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de $f$.

**b)** **[1'25 puntos]** Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = e$.

---

**Ejercicio 2.-** **[2'5 puntos]** Sea $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x}}.$$

Determina la primitiva de $g$ cuya gráfica pasa por el punto $P(1, 0)$. *Sugerencia:* se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

---

**Ejercicio 3.-** Sean

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**a)** **[1'25 puntos]** Determina el rango de $A$ según los valores del parámetro $m$.

**b)** **[0'75 puntos]** Discute el sistema $AX = B$ según los valores del parámetro $m$.

**c)** **[0'5 puntos]** Resuelve el sistema $AX = B$ para $m = 1$.

---

**Ejercicio 4.-** Considera los puntos $A(1, 2, 1), B(-1, 0, 2)$ y $C(3, 2, 0)$ y el plano $\pi$ determinado por ellos.

**a)** **[1'75 puntos]** Halla la ecuación de la recta $r$ que está contenida en $\pi$ y tal que $A$ y $B$ son simétricos respecto de $r$.

**b)** **[0'75 puntos]** Calcula la distancia de $A$ a $r$.

---

**Instrucciones:**
**a)** **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

**c)** La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

**d)** Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

**e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

**Ejercicio 1.-** Sea $f$ la función definida por $f(x) = \dfrac{k}{(x-a)(2x-1)}$ para $x \neq a$ y $x \neq \frac{1}{2}$.

**a)** [**1 punto**] Halla $a$ y $k$ sabiendo que la gráfica de $f$ pasa por el punto $(0,2)$ y que la recta $x=2$ es una asíntota de dicha gráfica.

**b)** [**1'5 puntos**] Para $k=4$ y $a=2$, halla los extremos relativos de $f$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

---

**Ejercicio 2.-** [**2'5 puntos**] Calcula $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}(2x)\, dx$.

---

**Ejercicio 3.-** Sean $A$ y $B$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y } B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}.$$

**a)** [**1'25 puntos**] Calcula las matrices $X$ e $Y$ para las que $2X - Y = A$ y $X - 3Y = B$.

**b)** [**1'25 puntos**] Halla la matriz $Z$ que verifica $B^2 + ZA + B^t = 3I$ ($I$ denota la matriz identidad y $B^t$ la matriz traspuesta de $B$).

---

**Ejercicio 4.-** Considera las rectas $r$ y $s$ dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 5 = 0 \end{cases}$$

**a)** [**1 punto**] Determina la posición relativa de $r$ y $s$.

**b)** [**1'5 puntos**] Calcula la distancia entre $r$ y $s$.

---

# UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
# PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CURSO 2012-2013

**MATEMÁTICAS II**

**Instrucciones:**

**a)** **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

**c)** La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

**d)** Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

**e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

**Ejercicio 1.-** **[2'5 puntos]** Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos(x) + b\,\mathrm{sen}(x)}{x^3}$ es finito, calcula $b$ y el valor del límite.

---

**Ejercicio 2.-** Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x) = |x(x-2)| \quad \text{y} \quad g(x) = x+4.$$

**a)** **[1'25 puntos]** Esboza las gráficas de $f$ y $g$ sobre los mismos ejes. Calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

**b)** **[1'25 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de $f$ y $g$.

---

**Ejercicio 3.-** Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$.

**a)** **[0'75 puntos]** Determina los valores de $m$ para los que los vectores fila de $M$ son linealmente independientes.

**b)** **[1 punto]** Estudia el rango de $M$ según los valores de $m$.

**c)** **[0'75 puntos]** Para $m=1$, calcula la inversa de $M$.

---

**Ejercicio 4.-** Sea $r$ la recta que pasa por el punto $(1,0,0)$ y tiene como vector dirección $(a,2a,1)$ y sea $s$ la recta dada por

$$\left\{\begin{array}{rcr} -2x+y & = & -2 \\ -ax+z & = & 0 \end{array}\right.$$

**a)** **[1 punto]** Calcula los valores de $a$ para los que $r$ y $s$ son paralelas.

**b)** **[1'5 puntos]** Calcula, para $a=1$, la distancia entre $r$ y $s$.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CURSO 2012-2013

**MATEMÁTICAS II**

**Instrucciones:**

**a)** **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

**c)** La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

**d)** Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

**e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

---

**Ejercicio 1.-** Sea $f:(-\infty,1)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} x+2e^{-x} & \text{si} \quad x\le 0,\\ a\sqrt{b-x} & \text{si} \quad 0<x<1.\end{cases}$

**a)** [**1'5 puntos**] Determina $a$ y $b$ sabiendo que $f$ es derivable en todo su dominio.

**b)** [**1 punto**] Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x=0$.

---

**Ejercicio 2.-** [**2'5 puntos**] Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $g(x)=\ln(x^2+1)$ (donde ln denota el logaritmo neperiano). Calcula la primitiva de $g$ cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

---

**Ejercicio 3.-** Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

**a)** [**1'5 puntos**] Comprueba que $A^2=2I$ y calcula $A^{-1}$.

**b)** [**1 punto**] Calcula $A^{2013}$ y su inversa.

---

**Ejercicio 4.-** Considera los puntos $P(2,3,1)$ y $Q(0,1,1)$.

**a)** [**1'75 puntos**] Halla la ecuación del plano $\pi$ respecto del cual $P$ y $Q$ son simétricos.

**b)** [**0'75 puntos**] Calcula la distancia de $P$ a $\pi$.

---

**Instrucciones:**

**a)** **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

**c)** La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

**d)** Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

**e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

**Ejercicio 1.-** Sea $g$ la función definida por $g(x) = \dfrac{mx^3}{(x-n)^2}$ para $x \neq n$.

**a)** **[1'75 puntos]** Halla $m$ y $n$ sabiendo que la recta $y = 2x - 4$ es una asíntota de la gráfica de $g$.

**b)** **[0'75 puntos]** Determina si la gráfica de $g$ es simétrica respecto al origen.

---

**Ejercicio 2.-** **[2'5 puntos]** De la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que alcanza un máximo relativo en $x = 1$, que la gráfica tiene un punto de inflexión en $(0,0)$ y que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{4}$. Calcula $a, b, c$ y $d$.

---

**Ejercicio 3.-** Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

**a)** **[0'75 puntos]** Halla $A^{-1}$.

**b)** **[1'25 puntos]** Calcula la matriz $X$ que satisface $AX = B^tC$ ($B^t$ es la matriz traspuesta de $B$).

**c)** **[0'5 puntos]** Halla el determinante de $A^{2013}B^tB(A^{-1})^{2013}$.

---

**Ejercicio 4.-** **[2'5 puntos]** Calcula la distancia entre las rectas

$$r \equiv x = y = z \quad \text{y} \quad s \equiv x - 1 = y - 2 = z - 3.$$

---

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CURSO 2012-2013

MATEMÁTICAS II

**Instrucciones:**

**a)** **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

**c)** La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

**d)** Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

**e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Se sabe que un punto de inflexión de la gráfica de $f$ tiene abscisa $x = 1$ y que $f$ tiene un mínimo relativo en $x = 2$ de valor -9. Calcula $a, b$ y $c$.

**Ejercicio 2.- [2'5 puntos]** Calcula $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2}{x^2 - 6x + 5}\,dx$.

**Ejercicio 3.-** Sabiendo que el determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$ es 4, calcula los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilizas:

**a)** **[1 punto]** $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$.

**b)** **[1'5 puntos]** $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}$

**Ejercicio 4.- [2'5 puntos]** Considera las rectas

$$r \equiv x = y = z \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & 1 \end{array} \right. \qquad \text{y} \quad t \equiv \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 1 + 2\lambda \\ y & = & 3\lambda \\ z & = & -1 + \lambda \end{array} \right.$$

Halla la recta que corta a $r$ y a $s$ y es paralela a $t$.

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Un alambre de 10 metros de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triángulo equilátero y con el otro un cuadrado. Halla la longitud de dichos trozos para que la suma de las áreas sea mínima.

**Ejercicio 2.-**

**a)** **[2 puntos]** Determina la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = (2x+1)e^{-x}$ y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

**b)** **[0'5 puntos]** Calcula la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = 0$.

**Ejercicio 3.-** Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**a)** **[1 punto]** Halla, si es posible, $A^{-1}$ y $B^{-1}$.

**b)** **[0'25 puntos]** Halla el determinante de $AB^{2013}A^t$ siendo $A^t$ la matriz traspuesta de $A$.

**c)** **[1'25 puntos]** Calcula la matriz $X$ que satisface $AX - B = AB$ .

**Ejercicio 4.-** Considera el plano $\pi$ de ecuación $2x + y + 3z - 6 = 0$.

**a)** **[1'5 puntos]** Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano $\pi$ con los ejes coordenados.

**b)** **[1 punto]** Calcula el volumen del tetraedro determinado por el plano $\pi$ y los planos coordenados.

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

**Ejercicio 1.-** Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{2\ln(x)}{x^2}$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).

a) **[1'75 puntos]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de $f$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[0'75 puntos]** Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de $f$.

---

**Ejercicio 2.-** Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $g(x)=-x^2+6x-5$.

a) **[0'75 puntos]** Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de $g$ en el punto de abscisa $x=4$.

b) **[1'75 puntos]** Esboza el recinto limitado por la gráfica de $g$ y la recta $x-2y+2=0$. Calcula el área de este recinto.

---

**Ejercicio 3.-** Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 4y & + & 6z & = & 6 \\ & & my & + & 2z & = & m+1 \\ -3x & + & 6y & - & 3mz & = & -9 \end{array}\right\}.$$

a) **[1'75 puntos]** Discute el sistema según los valores del parámetro $m$.

b) **[0'75 puntos]** Resuélvelo para $m=3$. Para dicho valor de $m$, calcula, si es posible, una solución en la que $y=0$.

---

**Ejercicio 4.-** Considera los puntos $A(1,0,2), B(-1,3,1), C(2,1,2)$ y $D(1,0,4)$.

a) **[1 punto]** Halla la ecuación del plano que contiene a $A, B$ y $C$.

b) **[1'5 puntos]** Halla el punto simétrico de $D$ respecto del plano $x-y-5z+9=0$.

---

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

---

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo isósceles de 6 metros de base (el lado desigual) y 4 metros de alto.

---

**Ejercicio 2.-** Sean $f$ y $g$ las funciones definidas por $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$ para $x \neq -1$.

**a) [0'5 puntos]** Calcula los puntos de corte entre las gráficas de $f$ y $g$.

**b) [0'5 puntos]** Esboza las gráficas de $f$ y $g$ sobre los mismos ejes.

**c) [1'5 puntos]** Halla el área del recinto limitado por las gráficas de $f$ y $g$.

---

**Ejercicio 3.-** Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & mz & = & m-2 \\ mx & + & y & + & 3z & = & m-2 \end{array}\right\}.$$

**a) [1'75 puntos]** Discute el sistema según los valores del parámetro $m$.

**b) [0'75 puntos]** Resuélvelo, si es posible, para $m = 2$.

---

**Ejercicio 4.- [2'5 puntos]** Determina el punto de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = z+1$ que equidista de los planos

$$\pi_1 \equiv x - y + 3z + 2 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -4 + \lambda - 3\mu \\ y & = & 1 + \lambda \\ z & = & \mu \end{array}\right.$$

---

**Instrucciones:**

**a)** **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

**c)** La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

**d)** Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

**e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

**Ejercicio 1.-** Sea $f$ la función definida por $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ para $x \geq -1, x \neq 0$.

**a)** [**1 punto**] Calcula los límites laterales de $f$ en $x = 0$.

**b)** [**1'5 puntos**] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de $f$.

---

**Ejercicio 2.-** [**2'5 puntos**] Calcula $\displaystyle\int_2^4 \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}}\,dx$. *Sugerencia:* se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{e^x}$.

---

**Ejercicio 3.-** Sea $M$ una matriz cuadrada de orden 3 tal que su determinante es $\det(M) = 2$. Calcula:

**a)** [**0'5 puntos**] El rango de $M^3$.

**b)** [**0'75 puntos**] El determinante de $2M^t$ ($M^t$ es la matriz traspuesta de $M$).

**c)** [**0'75 puntos**] El determinante de $(M^{-1})^2$.

**d)** [**0'5 puntos**] El determinante de $N$, donde $N$ es la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de $M$.

---

**Ejercicio 4.-** Considera los puntos $A(0,5,3), B(-1,4,3), C(1,2,1)$ y $D(2,3,1)$.

**a)** [**1'75 puntos**] Comprueba que los cuatro puntos son coplanarios y que $ABCD$ es un rectángulo.

**b)** [**0'75 puntos**] Calcula el área de dicho rectángulo.

---

**Instrucciones:**

**a) Duración:** 1 hora y 30 minutos.

**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

**c)** La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

**d)** Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

**e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Se considera la función derivable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{a}{x-2} & \text{si } x < 1 \\[2ex] a + \dfrac{b}{\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Calcula los valores de $a$ y $b$.

---

**Ejercicio 2.- [2'5 puntos]** Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$. Determina la primitiva de $f$ cuya gráfica pasa por el punto $(-1, 0)$.

---

**Ejercicio 3.-** Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

**(a) [1'25 puntos]** ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? Razona las respuestas.

**(b) [1'25 puntos]** Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50 %, un 20 % y un 25 % de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

---

**Ejercicio 4.- [2'5 puntos]** Determina el punto $P$ de la recta $r \equiv \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto $A(3, 2, 1)$.

---

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

---

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10 unidades, determina las dimensiones del de área máxima.

---

**Ejercicio 2.-** Sean las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$ y $g(x) = 2\sqrt{x}$ respectivamente.

**(a)** **[0'75 puntos]** Halla los puntos de corte de las gráficas de $f$ y $g$. Realiza un esbozo del recinto que limitan.

**(b)** **[1'75 puntos]** Calcula el área de dicho recinto.

---

**Ejercicio 3.-** Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & kz & = & 1 \\ 2x & + & ky & & & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & k \end{array}\right.$$

**(a)** **[1 punto]** Clasifica el sistema según los valores del parámetro $k$.

**(b)** **[0'75 puntos]** Resuélvelo para $k = 1$.

**(c)** **[0'75 puntos]** Resuélvelo para $k = -1$.

---

**Ejercicio 4.-** Considera el punto $P(1, 0, 2)$ y la recta $r$ dada por las ecuaciones $\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y - 4 & = & 0 \\ y + 2z - 8 & = & 0 \end{array}\right.$

**(a)** **[1 punto]** Calcula la ecuación del plano que pasa por $P$ y es perpendicular a $r$.

**(b)** **[1'5 puntos]** Calcula el punto simétrico de $P$ respecto de la recta $r$.

---

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CURSO 2011-2012

**MATEMÁTICAS II**

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Un alambre de longitud 2 metros se divide en dos trozos. Con el primero se forma un rectángulo cuya base es el doble de su altura y con el segundo trozo se forma un cuadrado. Calcula las longitudes de dichos trozos para que la suma de las áreas del rectángulo y el cuadrado resultantes sea mínima.

---

**Ejercicio 2.-** Se considera el recinto del plano situado en el primer cuadrante limitado por las rectas $y = 4x$, $y = 8 - 4x$ y la curva $y = 2x - x^2$.

**(a)** **[0'5 puntos]** Realiza un esbozo de dicho recinto.

**(b)** **[2 puntos]** Calcula su área.

---

**Ejercicio 3.-** Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ky & + & 2z & = & k+1 \\ x & + & 2y & + & kz & = & 3 \\ (k+1)x & + & y & + & z & = & k+2 \end{array}\right.$$

**(a)** **[1'25 puntos]** Determina los valores de $k$ para los que el sistema tiene más de una solución.

**(b)** **[0'5 puntos]** ¿Existe algún valor de $k$ para el cual el sistema no tiene solución?

**(c)** **[0'75 puntos]** Resuelve el sistema para $k = 0$.

---

**Ejercicio 4.-** Se consideran los vectores $\vec{u} = (k, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, -2)$ y $\vec{w} = (1, 1, k)$, donde $k$ es un número real.

**(a)** **[0'75 puntos]** Determina los valores de $k$ para los que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

**(b)** **[1 punto]** Determina los valores de $k$ para los que $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{v} - \vec{w}$ son ortogonales.

**(c)** **[0'75 puntos]** Para $k = -1$, determina aquellos vectores que son ortogonales a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y tienen módulo 1.

---

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CURSO 2011-2012

**MATEMÁTICAS II**

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

**Ejercicio 1.-** Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 3) - x$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.

**(a)** [**1'5 puntos**] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de $f$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

**(b)** [**1 punto**] Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = -2$.

**Ejercicio 2.-** [**2'5 puntos**] Calcula los valores de $a$ y $b$ sabiendo que la función $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + b\ln(x)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano, tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que

$$\int_1^4 f(x)\, dx = 27 - 8\ln(4)$$

**Ejercicio 3.-** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, sea $B$ la matriz que verifica que $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

**(a)** [**1 punto**] Comprueba que las matrices $A$ y $B$ poseen inversas.

**(b)** [**1'5 puntos**] Resuelve la ecuación matricial $A^{-1}X - B = BA$.

**Ejercicio 4.-** [**2'5 puntos**] Encuentra los puntos de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{2-y}{2} = z - 3$ cuya distancia al plano $\pi \equiv x - 2y + 2z = 1$ vale cuatro unidades.

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

**Ejercicio 1.-** Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x(x-2)$

**(a)** [**1 punto**] Calcula las asíntotas de $f$.

**(b)** [**1 punto**] Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f$.

**(c)** [**0'5 puntos**] Determina, si existen, los puntos de inflexión de la gráfica de $f$.

---

**Ejercicio 2.-** Sea $f$ una función continua en el intervalo $[2,3]$ y $F$ una función primitiva de $f$ tal que $F(2)=1$ y $F(3)=2$. Calcula:

**(a)** [**0'75 puntos**] $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$

**(b)** [**0'75 puntos**] $\displaystyle\int_2^3 (5f(x)-7)\,dx$

**(c)** [**1 punto**] $\displaystyle\int_2^3 (F(x))^2 f(x)\,dx$

---

**Ejercicio 3.-** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$

**(a)** [**1 punto**] ¿Para qué valores del parámetro $k$ no existe la inversa de la matriz $A$? Justifica la respuesta.

**(b)** [**1'5 puntos**] Para $k=0$, resuelve la ecuación matricial $(X+I)\cdot A = A^t$, donde $I$ denota la matriz identidad y $A^t$ la matriz traspuesta de A.

---

**Ejercicio 4.-** De un paralelogramo $ABCD$ conocemos tres vértices consecutivos: $A(2,-1,0)$, $B(-2,1,0)$ y $C(0,1,2)$.

**(a)** [**1 punto**] Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.

**(b)** [**0'75 puntos**] Halla el área de dicho paralelogramo.

**(c)** [**0'75 puntos**] Calcula el vértice $D$.

---

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a\cdot \operatorname{sen}(x) - xe^x}{x^2}$ es finito, calcula el valor de $a$ y el de dicho límite.

**Ejercicio 2.-** Sea la función $f$ definida por $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$ para $x \neq -1$ y $x \neq 1$.

**(a) [1'25 puntos]** Halla una primitiva de $f$.

**(b) [1'25 puntos]** Calcula el valor de $k$ para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de $f$ en el intervalo $[2, k]$ sea $\ln(2)$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

**Ejercicio 3.-** Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & \lambda+1 \\ & & 3y & + & 2z & = & 2\lambda+3 \\ 3x & + & (\lambda-1)y & + & z & = & \lambda \end{array}\right.$$

**(a) [1 punto]** Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

**(b) [1 punto]** Halla los valores de $\lambda$ para los que el sistema tiene una única solución.

**(c) [0'5 puntos]** ¿Existe algún valor de $\lambda$ para el que el sistema admite la solución $\left(\dfrac{-1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$?

**Ejercicio 4.-** Sean $r$ y $s$ las rectas dadas por

$$r \equiv \left\{\begin{array}{lcl} x+y-z & = & 6 \\ x+z & = & 3 \end{array}\right. \qquad\qquad s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2}$$

**(a) [1'25 puntos]** Determina el punto de intersección de ambas rectas.

**(b) [1'25 puntos]** Calcula la ecuación general del plano que las contiene.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CURSO 2011-2012

**MATEMÁTICAS II**

| | |
|---|---|
| **Instrucciones:** | **a) Duración:** 1 hora y 30 minutos. |
| | **b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. |
| | **c)** La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma. |
| | **d)** Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara. |
| | **e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. |

## Opción A

**Ejercicio 1.-** Sea la función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + k & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

**(a)** [**1'25 puntos**] Calcula el valor de $k$.

**(b)** [**1'25 puntos**] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f$ en el punto de abscisa $x = 1$.

---

**Ejercicio 2.-** Sea $\quad I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x}}\, dx$

**(a)** [**1'75 puntos**] Expresa la integral $I$ aplicando el cambio de variable $t = \sqrt{1 - x}$

**(b)** [**0'75 puntos**] Calcula el valor de $I$.

---

**Ejercicio 3.-** Considera el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} kx & + & 2y & = & 2 \\ 2x & + & ky & = & k \\ x & - & y & = & -1 \end{array} \right.$$

**(a)** [**0'5 puntos**] Prueba que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro $k$.

**(b)** [**1 punto**] Especifica para qué valores del parámetro $k$ es determinado y para cuáles indeterminado.

**(c)** [**1 punto**] Halla las soluciones en cada caso.

---

**Ejercicio 4.-** Sean los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, -1)$, $C(0, 1, -2)$ y $D(1, 2, 0)$.

**(a)** [**1 punto**] Halla la ecuación del plano $\pi$ determinado por los puntos $A$, $B$ y $C$.

**(b)** [**0'5 puntos**] Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.

**(c)** [**1 punto**] Calcula la distancia del punto $D$ al plano $\pi$.

---

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

**Ejercicio 1.-** Sea la función $f$ definida por $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$ para $x \neq 1$.

**(a)** **[1'25 puntos]** Estudia las asíntotas de la gráfica de la función $f$.

**(b)** **[1'25 puntos]** Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f$.

---

**Ejercicio 2.-** Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{9-x^2}{4}$

**(a)** **[0'75 puntos]** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = 1$.

**(b)** **[1'75 puntos]** Esboza el recinto limitado por la gráfica de $f$, la recta $x+2y=5$ y el eje de abscisas. Calcula el área de dicho recinto.

---

**Ejercicio 3.-** Considera el sistema de ecuaciones con tres incógnitas

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & \lambda \\ & & 2\lambda y & + & \lambda z & = & \lambda \\ -x & - & y & + & \lambda z & = & 0 \end{array}\right.$$

**(a)** **[1'25 puntos]** Clasifícalo según los distintos valores del parámetro $\lambda$.

**(b)** **[1'25 puntos]** Resuélvelo para $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.

---

**Ejercicio 4.-** **[2'5 puntos]** Halla el punto simétrico de $P(2,1,-5)$ respecto de la recta $r$ definida por

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - z & = & 0 \\ x + y + 2 & = & 0 \end{array}\right.$$

---

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CURSO 2011-2012

**MATEMÁTICAS II**

| | |
|---|---|
| **Instrucciones:** | **a) Duración:** 1 hora y 30 minutos.<br>**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.<br>**c)** La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.<br>**d)** Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.<br>**e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. |

## Opción A

---

**Ejercicio 1.-** Sea la función $f\colon [1,\ e] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.

**(a)** [**0'75 puntos**] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f$.

**(b)** [**1 punto**] Calcula los extremos absolutos y relativos de la función $f$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

**(c)** [**0'75 puntos**] Estudia los intervalos de concavidad y de convexidad.

---

**Ejercicio 2.-** Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 4x$

**(a)** [**0'75 puntos**] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = 1$.

**(b)** [**0'75 puntos**] Esboza el recinto limitado por la gráfica de $f$ y la recta $y = -x - 2$, determinando los puntos de corte de ambas gráficas.

**(c)** [**1 punto**] Calcula el área del recinto anterior.

---

**Ejercicio 3.-** Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & (k+1)y & + & 2z & = & -1 \\ kx & + & y & + & z & = & 2 \\ x & - & 2y & - & z & = & k+1 \end{array}\right.$$

**(a)** [**1'75 puntos**] Clasifícalo según los distintos valores de $k$.

**(b)** [**0'75 puntos**] Resuélvelo para el caso $k = 2$.

---

**Ejercicio 4.-** Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x+3}{-6} = \dfrac{y-9}{4} = \dfrac{z-8}{4}$ y $s \equiv \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-9}{-2} = \dfrac{z-8}{-2}$

**(a)** [**1 punto**] Determina la posición relativa de las rectas $r$ y $s$.

**(b)** [**1'5 puntos**] Calcula la distancia entre $r$ y $s$.

---

| | | |
|---|---|---|
| | **UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**<br>PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD<br>CURSO 2011-2012 | **MATEMÁTICAS II** |

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

---

**Ejercicio 1.-** Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$

**(a)** [**0'75 puntos**] Calcula $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

**(b)** [**1'25 puntos**] Halla los extremos relativos de $f$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan), determinando si son máximos o mínimos.

**(c)** [**0'5 puntos**] Determina las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de $f$.

---

**Ejercicio 2.-** Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x^2 + 4x$ respectivamente.

**(a)** [**0'75 puntos**] Halla los puntos de corte de sus gráficas y realiza un esbozo del recinto que limitan.

**(b)** [**1'75 puntos**] Calcula el área de dicho recinto.

---

**Ejercicio 3.-** [**2'5 puntos**] Encuentra la matriz $X$ que satisface la ecuación $XA + A^3B = A$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

---

**Ejercicio 4.-** [**2'5 puntos**] Los puntos $A(1,1,5)$ y $B(1,1,2)$ son vértices consecutivos de un rectángulo $ABCD$. El vértice $C$, consecutivo a $B$, está en la recta $x = \dfrac{y-6}{-2} = \dfrac{z+1}{2}$. Determina los vértices $C$ y $D$.

---

**UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CURSO 2011-2012

**MATEMÁTICAS II**

**Instrucciones:**

**a) Duración:** 1 hora y 30 minutos.

**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

**c)** La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

**d)** Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

**e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

**Ejercicio 1.-** Sea la función $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln(x)$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.

**(a)** [**1'75 puntos**] Halla los extremos absolutos de $f$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) en el intervalo $\left[\dfrac{1}{e},\ e\right]$.

**(b)** [**0'75 puntos**] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = e$.

---

**Ejercicio 2.-** Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ respectivamente.

**(a)** [**0'75 puntos**] Realiza un esbozo de las gráficas de $f$ y $g$ en el intervalo $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

**(b)** [**1'75 puntos**] Calcula el área total de los recintos limitados por ambas gráficas y las rectas $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$.

---

**Ejercicio 3.-** [**2'5 puntos**] Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determina, si existe, la matriz $X$ que verifica $AXB = C^t$, siendo $C^t$ la matriz traspuesta de $C$.

---

**Ejercicio 4.-** El punto $M(1,-1,0)$ es el centro de un paralelogramo y $A(2,1,-1)$ y $B(0,-2,3)$ son dos vértices consecutivos del mismo.

**(a)** [**1 punto**] Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.

**(b)** [**1'5 puntos**] Determina uno de los otros dos vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.

| | | |
|---|---|---|
| Universidades Públicas de Andalucía | **UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**<br>PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD<br>CURSO 2011-2012 | **MATEMÁTICAS II** |

**Instrucciones:**

**a) Duración:** 1 hora y 30 minutos.

**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

**c)** La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

**d)** Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

**e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

---

**Ejercicio 1.-** Sea $f$ la función definida por $f(x) = \dfrac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ para $x \neq -1$ y $x \neq 2$.

**(a)** [**1 punto**] Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de $f$.

**(b)** [**1 punto**] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f$.

**(c)** [**0'5 puntos**] Calcula, si existe, algún punto de la gráfica de $f$ donde ésta corta a la asíntota horizontal.

---

**Ejercicio 2.-** [**2'5 puntos**] Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2\cos(x)$. Determina la primitiva de $f$ cuya gráfica pasa por el punto $(\pi, 0)$.

---

**Ejercicio 3.-** Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} kx & + & 2y & & & = & 3 \\ -x & & & + & 2kz & = & -1 \\ 3x & - & y & - & 7z & = & k+1 \end{array}\right.$$

**(a)** [**1'75 puntos**] Estudia el sistema para los distintos valores del parámetro $k$.

**(b)** [**0'75 puntos**] Resuélvelo para $k = 1$.

---

**Ejercicio 4.-** [**2'5 puntos**] Calcula de manera razonada la distancia del eje OX a la recta $r$ de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - 3y & = & 4 \\ 2x - 3y - z & = & 0 \end{array}\right.$$

---

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Queremos hacer junto a la carretera un cercado rectangular para unos caballos en una zona llana. Cada metro del lado del cercado que está junto a la carretera nos cuesta 100 euros, mientras que para el resto del cercado nos cuesta 10 euros el metro. ¿Cuáles son las dimensiones del prado de área máxima que podemos cercar con 3000 euros?

**Ejercicio 2.- [2'5 puntos]** Calcula un número positivo $a$, menor que 2, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y = \frac{1}{2}x^2$ y las dos rectas horizontales de ecuaciones $y = a$ e $y = 2$, tenga un área de $\frac{14}{3}$ unidades cuadradas.

**Ejercicio 3.-** Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 2y & + & 4z & = & 4 \\ 2x & & & + & z & = & a \\ -3x & - & 3y & + & 3z & = & -3 \end{array}\right\}$$

**(a) [1'75 puntos]** Discútelo según los valores del parámetro $a$.

**(b) [0'75 puntos]** Resuélvelo cuando sea posible.

**Ejercicio 4.-** Dada la recta $r$ definida por $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = -z+3$ y la recta $s$ definida por $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ 2y - z = -2 \end{array}\right.$

**(a) [1'25 puntos]** Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a $r$.

**(b) [1'25 puntos]** Halla la ecuación del plano que contiene a $s$ y es paralelo a $r$.

| | | |
|---|---|---|
| Universidades Públicas de Andalucía | **UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**<br>**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD**<br>CURSO 2010-2011 | **MATEMÁTICAS II** |

| | |
|---|---|
| **Instrucciones:** | a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.<br>b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.<br>c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.<br>d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.<br>e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. |

## Opción B

---

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** En una empresa los ingresos (en euros) dependen de la edad. Si la edad, $x$, es de 18 a 50 años, los ingresos vienen dados por la fórmula $-x^2+70x$, mientras que para edades iguales o superiores a 50 años los ingresos están determinados por la expresión,

$$\frac{400x}{x-30}$$

Calcula cuál es el máximo de los ingresos y a qué edad se alcanza.

---

**Ejercicio 2.-** Dada la función $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=-2x^2+3x-1$

**(a)** **[0'5 puntos]** Prueba que las rectas $y=-x+1$ e $y=3x-1$ son tangentes a su gráfica.

**(b)** **[2 puntos]** Halla el área del recinto limitado por la gráfica de $f$ y las rectas mencionadas en el apartado anterior.

---

**Ejercicio 3.-** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

**(a)** **[1 punto]** Demuestra que $A^2+2A=I$ y que $A^{-1}=A+2I$, siendo $I$ la matriz identidad de orden 2.

**(b)** **[1'5 puntos]** Calcula la matriz $X$ que verifica la ecuación $A^2+XA+5A=4I$.

---

**Ejercicio 4.-** Dada la recta $r$ definida por $\dfrac{x+7}{2}=\dfrac{y-7}{-1}=z$ y la recta $s$ definida por $\left\{\begin{array}{l}x=2\\ y=-5\\ z=\lambda\end{array}\right.$

**(a)** **[1'75 puntos]** Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a ambas.

**(b)** **[0'75 puntos]** Calcula la distancia entre $r$ y $s$.

---

| | |
|---|---|
| **Instrucciones:** | a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.<br>b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.<br>c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.<br>d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.<br>e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. |

## Opción A

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, determina $a$, $b$ y $c$ sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en (1,0), y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación $y = -3x + 3$.

**Ejercicio 2.-** Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = 4 - 3|x| \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2$$

**(a)** [**1 punto**] Esboza las gráficas de $f$ y $g$. Determina sus puntos de corte.

**(b)** [**1'5 puntos**] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de $f$ y $g$.

**Ejercicio 3.-** Sean $A$ y $B$ dos matrices que verifican:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**(a)** [**1 punto**] Halla las matrices $(A + B)(A - B)$ y $A^2 - B^2$.

**(b)** [**1'5 puntos**] Resuelve la ecuación matricial $XA - XB - (A + B)^t = 2I$, siendo $I$ la matriz identidad de orden 2 y $(A + B)^t$ la matriz traspuesta de $A + B$.

**Ejercicio 4.-** Sea el punto $P(2, 3, -1)$ y la recta $r$ dada por las ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$

**(a)** [**1 punto**] Halla la ecuación del plano perpendicular a $r$ que pasa por $P$.

**(b)** [**1'5 puntos**] Calcula la distancia del punto $P$ a la recta $r$ y determina el punto simétrico de $P$ respecto de $r$.

| | | |
|---|---|---|
| Universidades Públicas de Andalucía | **UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**<br>**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD**<br>CURSO 2010-2011 | **MATEMÁTICAS II** |

| | |
|---|---|
| **Instrucciones:** | a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.<br>b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.<br>c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.<br>d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.<br>e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. |

## Opción B

---

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** En el primer cuadrante representamos un rectángulo de tal manera que tiene un vértice en el origen de coordenadas y el vértice opuesto en la parábola $y = -x^2 + 3$. Determina las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

---

**Ejercicio 2.- [2'5 puntos]** Calcula:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx$$

---

**Ejercicio 3.-** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**(a)** [**1 punto**] Determina los valores de $\lambda$ para los que la matriz $A - 2I$ tiene inversa, siendo $I$ la matriz identidad de orden 3.

**(b)** [**1'5 puntos**] Para $\lambda = -2$, resuelve la ecuación matricial $AX = 2X + I$.

---

**Ejercicio 4.- [2'5 puntos]** Considera los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ dados respectivamente por las ecuaciones

$$(x, y, z) = (-2, 0, 7) + \lambda(1, -2, 0) + \mu(0, 1, -1) \qquad \text{y} \qquad 2x + y - z + 5 = 0$$

Determina los puntos de la recta $r$ definida por $x = y + 1 = \dfrac{z-1}{-3}$ que equidistan de $\pi_1$ y $\pi_2$.

---

| | | |
|---|---|---|
| Universidades Públicas de Andalucía | **UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**<br>**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD**<br>CURSO 2010-2011 | **MATEMÁTICAS II** |

| | |
|---|---|
| **Instrucciones:** | a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.<br>b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.<br>c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.<br>d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.<br>e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. |

## Opción A

---

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y de área máxima.

---

**Ejercicio 2.-** Considera las funciones $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$

**(a) [0'75 puntos]** Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

**(b) [1'75 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de $f$ y $g$.

---

**Ejercicio 3.-** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**(a) [1'75 puntos]** Calcula el rango de $A$ dependiendo de los valores de $\alpha$.

**(b) [0'75 puntos]** Para $\alpha = 2$, resuelve la ecuación matricial $AX = B$.

---

**Ejercicio 4.-** Considera los puntos $A(-1, k, 3)$, $B(k+1, 0, 2)$, $C(1, 2, 0)$ y $D(2, 0, 1)$.

**(a) [1'25 puntos]** ¿Existe algún valor de $k$ para el que los vectores $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ y $\vec{CD}$ sean linealmente dependientes?

**(b) [1'25 puntos]** Calcula los valores de $k$ para los que los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ forman un tetraedro de volumen 1.

---

| | | |
|---|---|---|
| Universidades Públicas de Andalucía | **UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**<br>**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD**<br>CURSO 2010-2011 | **MATEMÁTICAS II** |

| | |
|---|---|
| **Instrucciones:** | a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.<br>b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.<br>c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.<br>d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.<br>e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. |

## Opción B

---

**Ejercicio 1.-** Sea $f$ la función definida por $f(x) = \dfrac{3x^4+1}{x^3}$ para $x \neq 0$.

**(a)** [**1'25 puntos**] Estudia las asíntotas de la gráfica de la función.

**(b)** [**1'25 puntos**] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

---

**Ejercicio 2.-** Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + 4$ y $g(x) = x^2 - 1$

**(a)** [**0'75 puntos**] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = -2$.

**(b)** [**1'75 puntos**] Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta $y = x + 5$. Calcula el área de este recinto.

---

**Ejercicio 3.-** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

**(a)** [**1'25 puntos**] Calcula los valores de $\alpha$ para los que la matriz inversa de $A$ es $\dfrac{1}{12}A$.

**(b)** [**1'25 puntos**] Para $\alpha = -3$, determina la matriz $X$ que verifica la ecuación $A^t X = B$, siendo $A^t$ la matriz traspuesta de $A$.

---

**Ejercicio 4.-** Dados el plano $\pi$ de ecuación $x+2y-z=0$ y la recta $r$ de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{l} 3x - y = 5 \\ x + y - 4z = -13 \end{array} \right.$

**(a)** [**0'75 puntos**] Halla el punto de intersección del plano $\pi$ y la recta $r$.

**(b)** [**1'75 puntos**] Halla el punto simétrico del punto $Q(1, -2, 3)$ respecto del plano $\pi$.

---

**UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**
**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD**
CURSO 2010-2011

**MATEMÁTICAS II**

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

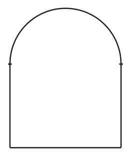
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

**Ejercicio 1.- [2’5 puntos]** Una ventana *normanda* consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo.



De entre todas las ventanas *normandas* de perímetro 10 $m$, halla las dimensiones del marco de la de área máxima.

---

**Ejercicio 2.- [2’5 puntos]** Calcula el valor de $b > 0$, sabiendo que el área de la región comprendida entre la curva $y = \sqrt{x}$ y la recta $y = bx$ es de $\frac{4}{3}$ unidades cuadradas.

---

**Ejercicio 3.-** Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**(a) [1 punto]** ¿Hay algún valor de $\lambda$ para el que $A$ no tiene inversa?

**(b) [1’5 puntos]** Para $\lambda = 1$, resuelve la ecuación matricial $A^{-1}XA = B$.

---

**Ejercicio 4.-** Dados los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,0,1)$ y $P(1,-1,1)$, y la recta $r$ definida por $\left\{ \begin{array}{l} x - y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$

**(a) [2 puntos]** Halla los puntos de la recta $r$ cuya distancia al punto $P$ es de 3 unidades.

**(b) [0’5 puntos]** Calcula el área del triángulo $ABP$.

---

| | | |
|---|---|---|
| Universidades Públicas de Andalucía | **UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**<br>**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD**<br>CURSO 2010-2011 | **MATEMÁTICAS II** |

| | |
|---|---|
| **Instrucciones:** | a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.<br>b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.<br>c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.<br>d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.<br>e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. |

## Opción B

**Ejercicio 1.-** Sea $f\colon \left[\frac{1}{e}, 4\right] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - \ln(x) + a & \text{si } \frac{1}{e} \le x \le 2 \\ bx + 1 - \ln(2) & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

donde ln denota la función logaritmo neperiano.

**(a)** [**1'25 puntos**] Calcula los valores de $a$ y $b$ para que $f$ sea derivable en el intervalo $\left(\frac{1}{e}, 4\right)$.

**(b)** [**1'25 puntos**] Para $a = 0$ y $b = \dfrac{1}{2}$ halla los extremos absolutos de $f$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

---

**Ejercicio 2.-** [**2'5 puntos**] Sea $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(1 - \ln(x))$, donde ln denota la función logaritmo neperiano. Determina la primitiva de $f$ cuya gráfica pasa por el punto $P(1, 1)$.

---

**Ejercicio 3.-** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**(a)** [**1'75 puntos**] Calcula el rango de $A$ según los diferentes valores de $t$.

**(b)** [**0'75 puntos**] Razona para qué valores de $t$ el sistema homogéneo $AX = \mathbf{0}$ tiene más de una solución.

---

**Ejercicio 4.-** Dados el punto $P(1, 1, -1)$ y la recta $r$ de ecuaciones $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$

**(a)** [**1 punto**] Halla la ecuación del plano que contiene a $r$ y pasa por $P$.

**(b)** [**1'5 puntos**] Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $y + z = 0$, que es perpendicular a $r$ y pasa por $P$.

---

| | | |
|---|---|---|
| Universidades Públicas de Andalucía | **UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**<br>**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD**<br>CURSO 2010-2011 | **MATEMÁTICAS II** |

| | |
|---|---|
| **Instrucciones:** | a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.<br>b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.<br>c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.<br>d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.<br>e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. |

## Opción A

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Un alambre de 100 $m$ de longitud se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se construye un cuadrado y con el otro un rectángulo cuya base es doble que su altura. Calcula las longitudes de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas de estas dos figuras sea mínima.

---

**Ejercicio 2.- [2'5 puntos]** Determina la función $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = \dfrac{1}{x}$ y su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,1)$.

---

**Ejercicio 3.-** Sean $A$ y $B$ dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son $|A| = \dfrac{1}{2}$ y $|B| = -2$. Halla:

**(a) [0'5 puntos]** $|A^3|$.

**(b) [0'5 puntos]** $|A^{-1}|$.

**(c) [0'5 puntos]** $|-2A|$.

**(d) [0'5 puntos]** $|AB^t|$, siendo $B^t$ la matriz traspuesta de $B$.

**(e) [0'5 puntos]** El rango de B.

---

**Ejercicio 4.-** Considera los puntos $A(1,0,2)$ y $B(1,2,-1)$.

**(a) [1'25 puntos]** Halla un punto $C$ de la recta de ecuación $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = z$ que verifica que el triángulo de vértices $A$, $B$ y $C$ tiene un ángulo recto en $B$.

**(b) [1'25 puntos]** Calcula el área del triángulo de vértices $A$, $B$ y $D$, donde $D$ es el punto de corte del plano de ecuación $2x - y + 3z = 6$ con el eje $OX$.

---

| | | |
|---|---|---|
| Universidades Públicas de Andalucía | **UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**<br>**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD**<br>CURSO 2010-2011 | **MATEMÁTICAS II** |

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

---

**Ejercicio 1.-** Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 4 - x^2$

**(a)** [**1 punto**] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = 2$.

**(b)** [**1'5 puntos**] Determina el punto de la gráfica en el que la recta tangente es perpendicular a la recta $x + 2y - 2 = 0$.

---

**Ejercicio 2.-** [**2'5 puntos**] Calcula:

$$\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 + x - 2}\, dx$$

---

**Ejercicio 3.-** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

**(a)** [**0'5 puntos**] Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 = -I$, siendo $I$ la matriz identidad de orden 3.

**(b)** [**1'25 puntos**] Justifica que $A$ es invertible y halla su inversa.

**(c)** [**0'75 puntos**] Calcula razonadamente $A^{100}$.

---

**Ejercicio 4.-** [**2'5 puntos**] Considera los planos $\pi_1$, $\pi_2$ y $\pi_3$ dados respectivamente por las ecuaciones

$$3x - y + z - 4 = 0, \qquad x - 2y + z - 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad x + z - 4 = 0$$

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3, 1, -1)$, es paralela al plano $\pi_1$ y corta a la recta intersección de los planos $\pi_2$ y $\pi_3$.

---

| | | |
|---|---|---|
| Universidades Públicas de Andalucía | **UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**<br>**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD**<br>CURSO 2010-2011 | **MATEMÁTICAS II** |

| | |
|---|---|
| **Instrucciones:** | a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.<br>b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.<br>c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.<br>d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.<br>e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. |

## Opción A

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total igual a 54 $m^2$. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que éste tenga volumen máximo.

**Ejercicio 2.-** Sea $f\colon(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\ln(x+1)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.

**(a)** **[0'75 puntos]** Esboza el recinto limitado por la gráfica de $f$, el eje $OY$ y la recta $y=1$. Calcula los puntos de corte de las gráficas.

**(b)** **[1'75 puntos]** Halla el área del recinto anterior.

**Ejercicio 3.-** Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -\lambda x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & 2 \\ \lambda x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

**(a)** **[1'75 puntos]** Clasifica el sistema según los valores del parámetro $\lambda$.

**(b)** **[0'75 puntos]** Resuelve el sistema para $\lambda=0$.

**Ejercicio 4.- [2'5 puntos]** Determina el punto simétrico del punto $A(-3,1,6)$ respecto de la recta $r$ de ecuaciones $x-1=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{2}$

| | |
|---|---|
| **Instrucciones:** | a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.<br>b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.<br>c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.<br>d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.<br>e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. |

## Opción B

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Sea $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$. Determina el punto $P$ de la gráfica de $f$ que se encuentra a menor distancia del punto $A(2,0)$. ¿Cuál es esa distancia?

**Ejercicio 2.- [2'5 puntos]** Halla:

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^{2x}-1)(\mathrm{e}^x+1)}dx$$

Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \mathrm{e}^x$.

**Ejercicio 3.-** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

**(a)** **[1'25 puntos]** Determina los valores de $\lambda$ para los que la matriz $A^2+3A$ no tiene inversa.

**(b)** **[1'25 puntos]** Para $\lambda = 0$, halla la matriz $X$ que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo $I$ la matriz identidad de orden 2.

**Ejercicio 4.-** Considera los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(2,1,0)$, y la recta $r$ dada por $\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+z=2 \end{array}\right.$

**(a)** **[1'75 puntos]** Determina la ecuación del plano que es paralelo a $r$ y pasa por $A$ y $B$.

**(b)** **[0'75 puntos]** Determina si la recta que pasa por los puntos $P(1,2,1)$ y $Q(3,4,1)$ está contenida en dicho plano.

| | UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA<br>PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD<br>CURSO 2009-2010 | MATEMÁTICAS II |
|---|---|---|
| Universidades Públicas de Andalucía | | |

| | |
|---|---|
| **Instrucciones:** | a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.<br>b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.<br>c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.<br>d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.<br>e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. |

## Opción A

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = a\,\mathrm{sen}(x) + bx^2 + cx + d$, determina los valores de las constantes $a$, $b$, $c$ y $d$ sabiendo que la gráfica de $f$ tiene tangente horizontal en el punto $(0, 4)$ y que la segunda derivada de $f$ es $f''(x) = 3\,\mathrm{sen}(x) - 10$.

**Ejercicio 2.- [2'5 puntos]** Sea la función $f$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x}$ para $x \neq -1$ y $x \neq 0$. Determina la primitiva $F$ de $f$ tal que $F(1) = 1$.

**Ejercicio 3.-** Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & 2y & + & 6z & = & 0 \\ 2x & + & \lambda y & + & 4z & = & 2 \\ 2x & + & \lambda y & + & 6z & = & \lambda - 2 \end{array}\right\}$$

**(a)** **[1'75 puntos]** Discútelo según los valores del parámetro $\lambda$.

**(b)** **[0'75 puntos]** Resuélvelo para $\lambda = 2$.

**Ejercicio 4.- [2'5 puntos]** Halla el punto simétrico de $P(1, 1, 1)$ respecto de la recta $r$ de ecuación

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

| | |
|---|---|
| **Instrucciones:** | a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.<br>b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.<br>c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.<br>d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.<br>e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. |

## Opción B

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

Estudia su continuidad y derivabilidad. Determina la función derivada de $f$.

---

**Ejercicio 2.-** Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$.

**(a)** **[1 punto]** Esboza las gráficas de $f$ y $g$, y halla su punto de corte.

**(b)** **[1'5 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y el eje de ordenadas.

---

**Ejercicio 3.-** De la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se sabe que $\det(A) = 4$. Se pide:

**(a)** **[1'25 puntos]** Halla $\det(-3A^t)$ y $\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix}$. Indica las propiedades que utilizas. ($A^t$ es la matriz traspuesta de $A$).

**(b)** **[0'75 puntos]** Calcula $\det(A^{-1}A^t)$.

**(c)** **[0'5 puntos]** Si $B$ es una matriz cuadrada tal que $B^3 = I$, siendo $I$ la matriz identidad, halla $\det(B)$.

---

**Ejercicio 4.-** Sean los puntos $A(2, \lambda, \lambda)$, $B(-\lambda, 2, 0)$ y $C(0, \lambda, \lambda - 1)$.

**(a)** **[1 punto]** ¿Existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para el que los puntos $A$, $B$ y $C$ estén alineados? Justifica la respuesta.

**(b)** **[1'5 puntos]** Para $\lambda = 1$ halla la ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices $A$, $B$ y $C$. Calcula la distancia del origen de coordenadas a dicho plano.

---

| | | |
|---|---|---|
| Universidades Públicas de Andalucía | **UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**<br>**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD**<br>CURSO 2009-2010 | **MATEMÁTICAS II** |

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

---

**Ejercicio 1.- [2’5 puntos]** Una hoja de papel tiene que contener 18 $\text{cm}^2$ de texto. Los márgenes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcula las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

---

**Ejercicio 2.-** Sea $I = \displaystyle\int \frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}dx$.

**(a) [1 punto]** Expresa $I$ haciendo el cambio de variable $t^2 = e^{-x}$.

**(b) [1’5 puntos]** Determina $I$.

---

**Ejercicio 3.-**

**(a) [1’75 puntos]** Discute, según los valores del parámetro $\lambda$, el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda \\ \lambda x & + & 2y & + & (\lambda+2)z & = & 4 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 6-\lambda \end{array}\right\}$$

**(b) [0’75 puntos]** Resuelve el sistema anterior para $\lambda = 0$.

---

**Ejercicio 4.- [2’5 puntos]** Halla la ecuación del plano que es paralelo a la recta $r$ de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} x-2y+11=0 \\ 2y+z-19=0 \end{array}\right.$ y contiene a la recta $s$ definida por $\left\{\begin{array}{l} x = 1-5\lambda \\ y = -2+3\lambda \\ z = 2+2\lambda \end{array}\right.$

---

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

---

**Ejercicio 1.-** Considera la función $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ cx & \text{si} \quad 2 < x \le 4 \end{cases}$$

**(a)** [**1'75 puntos**] Sabiendo que $f$ es derivable en todo el dominio y que verifica $f(0) = f(4)$, determina los valores de $a$, $b$ y $c$.

**(b)** [**0'75 puntos**] Para $a = -3$, $b = 4$ y $c = 1$ halla los extremos absolutos de $f$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

---

**Ejercicio 2.-** Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 4$.

**(a)** [**0'75 puntos**] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = 1$.

**(b)** [**1'75 puntos**] Esboza el recinto limitado por la gráfica de $f$, el eje de ordenadas y la recta de ecuación $y = 2x + 3$. Calcula su área.

---

**Ejercicio 3.-** [**2'5 puntos**] Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz $X$ que cumpla la ecuación $AXB = C$.

---

**Ejercicio 4.-** Considera los planos $\pi_1$, $\pi_2$ y $\pi_3$ dados respectivamente por las ecuaciones

$$x + y = 1, \quad ay + z = 0 \qquad \text{y} \qquad x + (1+a)y + az = a + 1$$

**(a)** [**1'5 puntos**] ¿Cuánto ha de valer $a$ para que no tengan ningún punto en común?

**(b)** [**1 punto**] Para $a = 0$, determina la posición relativa de los planos.

---

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 90 cm. Si se hace girar alrededor de uno de sus catetos, el triángulo engendra un cono. ¿Qué medidas han de tener los catetos del triángulo para que el volumen del cono engendrado sea máximo? (Recuerda que el volumen del cono es: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$).

**Ejercicio 2.-** Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = |x|$.

**(a)** [**1 punto**] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados.

**(b)** [**1'5 puntos**] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de $f$ y $g$.

**Ejercicio 3.-** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

**(a)** [**1'25 puntos**] Comprueba que se verifica $2A - A^2 = I$.

**(b)** [**1'25 puntos**] Calcula $A^{-1}$. (Sugerencia: Puedes usar la igualdad del apartado (a)).

**Ejercicio 4.- [2'5 puntos]** Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $6x + 3y + 2z = 6$ con los ejes de coordenadas.

| | | |
|---|---|---|
| Universidades Públicas de Andalucía | **UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**<br>**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD**<br>CURSO 2009-2010 | **MATEMÁTICAS II** |

| | |
|---|---|
| **Instrucciones:** | a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.<br>b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.<br>c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.<br>d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.<br>e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. |

## Opción B

**Ejercicio 1.-** Sea $f$ la función definida como $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ para $x \neq \pm 1$.

**(a)** [**1 punto**] Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de $f$.

**(b)** [**0'75 puntos**] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f$.

**(c)** [**0'75 puntos**] Esboza la gráfica de $f$.

---

**Ejercicio 2.-** Dada la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln\, x$, donde ln es la función logaritmo neperiano, se pide:

**(a)** [**0'75 puntos**] Comprueba que la recta de ecuación $y = -\mathrm{e}x + 1 + \mathrm{e}^2$ es la recta normal a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = \mathrm{e}$.

**(b)** [**1'75 puntos**] Calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f$, el eje de abscisas y la recta normal del apartado (a).

---

**Ejercicio 3.-** Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} (m+2)x & - & y & - & z & = & 1 \\ -x & - & y & + & z & = & -1 \\ x & + & my & - & z & = & m \end{array}\right\}$$

**(a)** [**1'75 puntos**] Discútelo según los valores de $m$.

**(b)** [**0'75 puntos**] Resuélvelo para el caso $m = 1$.

---

**Ejercicio 4.-** Sean los puntos $A(1,1,1)$, $B(-1,2,0)$, $C(2,1,2)$ y $D(t,-2,2)$

**(a)** [**1'25 puntos**] Determina el valor de $t$ para que $A$, $B$, $C$ y $D$ estén en el mismo plano.

**(b)** [**1'25 puntos**] Halla la ecuación de un plano perpendicular al segmento determinado por $A$ y $B$, que contenga al punto $C$.

---

| **Instrucciones:** | |
|---|---|
| | a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos. |
| | b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. |
| | c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma. |
| | d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara. |
| | e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. |

## Opción A

---

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^x(x^2 + ax) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{b\,x^2 + c}{x+1} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Calcula las constantes $a$, $b$ y $c$ sabiendo que $f$ es derivable y que la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = 1$ tiene pendiente 3.

---

**Ejercicio 2.- [2'5 puntos]** Dada la función $f$ definida por $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 5x + 4}$ para $x \neq 1$ y $x \neq 4$.
Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $f$, el eje de abscisas, y las rectas $x = 2$, $x = 3$.

---

**Ejercicio 3.-** Considera las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

**(a) [0'75 puntos]** Calcula $A^{-1}$.

**(b) [1'75 puntos]** Resuelve la ecuación matricial $AXA^t - B = 2I$, donde $I$ es la matriz identidad de orden 2 y $A^t$ es la matriz traspuesta de $A$.

---

**Ejercicio 4.-** Considera los puntos $A(1, 2, 1)$ y $B(-1, 0, 3)$.

**(a) [1'25 puntos]** Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento $AB$ en tres partes iguales.

**(b) [1'25 puntos]** Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento $AB$ y que pasa por $A$.

---

| | | |
|---|---|---|
| Universidades Públicas de Andalucía | **UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**<br>**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD**<br>CURSO 2009-2010 | **MATEMÁTICAS II** |

| | |
|---|---|
| **Instrucciones:** | a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.<br>b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.<br>c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.<br>d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.<br>e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. |

## Opción B

---

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$. Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = -5$ y en el punto de abscisa $x = 2$.

---

**Ejercicio 2.-** Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|2-x|$.

**(a)** **[1 punto]** Esboza su gráfica.

**(b)** **[1'5 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $f$, el eje de abscisas y la recta de ecuación $x = 3$.

---

**Ejercicio 3.- [2'5 puntos]** Obtén un vector no nulo $v = (a, b, c)$, de manera que las matrices siguientes tengan simultáneamente rango 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$$

---

**Ejercicio 4.-** Considera el plano $\pi$ definido por $2x - y + nz = 0$ y la recta $r$ dada por

$$\frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$$

con $m \neq 0$.

**(a)** **[1'25 puntos]** Calcula $m$ y $n$ para que la recta $r$ sea perpendicular al plano $\pi$.

**(b)** **[1'25 puntos]** Calcula $m$ y $n$ para que la recta $r$ esté contenida en el plano $\pi$.

---

| | | |
|---|---|---|
| Universidades Públicas de Andalucía | **UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**<br>**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD**<br>CURSO 2009-2010 | **MATEMÁTICAS II** |

| | |
|---|---|
| **Instrucciones:** | a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.<br>b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.<br>c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.<br>d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.<br>e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. |

## Opción A

**Ejercicio 1.-** Sea $f$ la función definida como $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{a-x}$ para $x \neq a$.

**(a)** [**1'5 puntos**] Calcula $a$ y $b$ para que la gráfica de $f$ pase por el punto $(2,3)$ y tenga una asíntota oblicua con pendiente $-4$.

**(b)** [**1 punto**] Para el caso $a=2$, $b=3$, obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x=1$.

---

**Ejercicio 2.-** [**2'5 puntos**] Calcula

$$\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}(\sqrt{x})dx$$

Sugerencia: Efectúa el cambio $\sqrt{x} = t$.

---

**Ejercicio 3.-** Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

**(a)** [**0'5 puntos**] Indica los valores de $m$ para los que $A$ es invertible.

**(b)** [**2 puntos**] Resuelve la ecuación matricial $XA - B^t = C$ para $m = 0$. ($B^t$ es la matriz traspuesta de $B$).

---

**Ejercicio 4.-** Considera las rectas $r$ y $s$ de ecuaciones

$$x-1 = y = 1-z \qquad \text{y} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x-2y=-1 \\ y+z=1 \end{array} \right.$$

**(a)** [**0'75 puntos**] Determina su punto de corte.

**(b)** [**1 punto**] Halla el ángulo que forman $r$ y $s$.

**(c)** [**0'75 puntos**] Determina la ecuación del plano que contiene a $r$ y $s$.

---

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CURSO 2009-2010

**MATEMÁTICAS II**

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción B

---

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Calcula

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2}$$

---

**Ejercicio 2.-** Considera la función $f$ dada por $f(x) = 5 - x$ y la función $g$ definida como $g(x) = \dfrac{4}{x}$ para $x \neq 0$.

**(a) [1 punto]** Esboza el recinto limitado por las gráficas de $f$ y $g$ indicando sus puntos de corte.

**(b) [1'5 puntos]** Calcula el área de dicho recinto.

---

**Ejercicio 3.-** Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & y & + & z & = & \lambda+2 \\ 2x & - & \lambda y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & + & \lambda z & = & \lambda \end{array}\right\}$$

**(a) [1'75 puntos]** Discútelo según los valores de $\lambda$. ¿Tiene siempre solución?

**(b) [0'75 puntos]** Resuelve el sistema para $\lambda = -1$.

---

**Ejercicio 4.-** Los puntos $P(2, 0, 0)$ y $Q(-1, 12, 4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice $S$ pertenece a la recta $r$ de ecuación

$$\left\{\begin{array}{l} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

**(a) [1'5 puntos]** Calcula las coordenadas del punto $S$ sabiendo que $r$ es perpendicular a la recta que pasa por $P$ y $S$.

**(b) [1 punto]** Comprueba si el triángulo es rectángulo.

---

| | | |
|---|---|---|
| Universidades Públicas de Andalucía | **UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**<br>**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD**<br>CURSO 2009-2010 | **MATEMÁTICAS II** |

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Entre todos los triángulos rectángulos de 5 metros de hipotenusa, determina los catetos del de área máxima.

**Ejercicio 2.- [2'5 puntos]** Sea $f : (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x+2)$. Halla una primitiva $F$ de $f$ que verifique $F(0) = 0$. (ln denota el logaritmo neperiano).

**Ejercicio 3.-** Considera el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & 5 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & -4 \end{array}\right\}$$

**(a)** [**1'5 puntos**] Calcula razonadamente un valor de $\lambda$ para que el sistema resultante al añadirle la ecuación $x + y + \lambda z = 9$ sea compatible indeterminado.

**(b)** [**1 punto**] ¿Existe algún valor de $\lambda$ para el cual el sistema resultante no tiene solución?

**Ejercicio 4.-** Considera los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 2, 4)$ y la recta $r$ definida por

$$\frac{x+2}{2} = y - 1 = \frac{z-1}{3}$$

**(a)** [**1'5 puntos**] Determina la ecuación del plano formado por los puntos que equidistan de $A$ y de $B$.

**(b)** [**1 punto**] Halla la ecuación del plano paralelo a $r$ y que contiene los puntos $A$ y $B$.

| | | |
|---|---|---|
| Universidades Públicas de Andalucía | **UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**<br>**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD**<br>CURSO 2009-2010 | **MATEMÁTICAS II** |

| | |
|---|---|
| **Instrucciones:** | a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.<br>b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.<br>c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.<br>d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.<br>e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. |

## Opción B

**Ejercicio 1.-** Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x^2 + 3x)$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

**(a)** [**1'5 puntos**] Determina, si existen, los puntos de la gráfica de $f$ en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta de ecuación $x - 2y + 1 = 0$.

**(b)** [**1 punto**] Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = 3$.

---

**Ejercicio 2.-** [**2'5 puntos**] Calcula el valor de $a > 0$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$ vale 36 unidades cuadradas.

---

**Ejercicio 3.-** Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**(a)** [**0'5 puntos**] Determina los valores de $\alpha$ para los que $A$ tiene inversa.

**(b)** [**1'25 puntos**] Calcula la inversa de $A$ para $\alpha = 1$.

**(c)** [**0'75 puntos**] Resuelve, para $\alpha = 1$, el sistema de ecuaciones $AX = B$.

---

**Ejercicio 4.-** Considera los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(0, -2, 2)$, $C(-1, 0, 2)$ y $D(2, -1, 2)$.

**(a)** [**1 punto**] Calcula el volumen del tetraedro de vértices $A$, $B$, $C$ y $D$.

**(b)** [**1'5 puntos**] Determina la ecuación de la recta que pasa por $D$ y es perpendicular al plano que contiene a los puntos $A$, $B$ y $C$.