Matemáticas II 2 BACHILLERATO

Biblioteca del profesorado

SOLUCIONARIO

El Solucionario de **Matemáticas** para 2.º de Bachillerato es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el departamento de Ediciones Educativas de Santillana Educación, S. L., dirigido por **Enrique Juan Redal**.

En su realización han intervenido:

M.ª José Barbero
Ana M.ª Gaztelu
Augusto González
José Lorenzo
Mercedes de Lucas
Pedro Machín
María José Rey
José del Río

EDICIÓN
Angélica Escoredo
Carlos Pérez

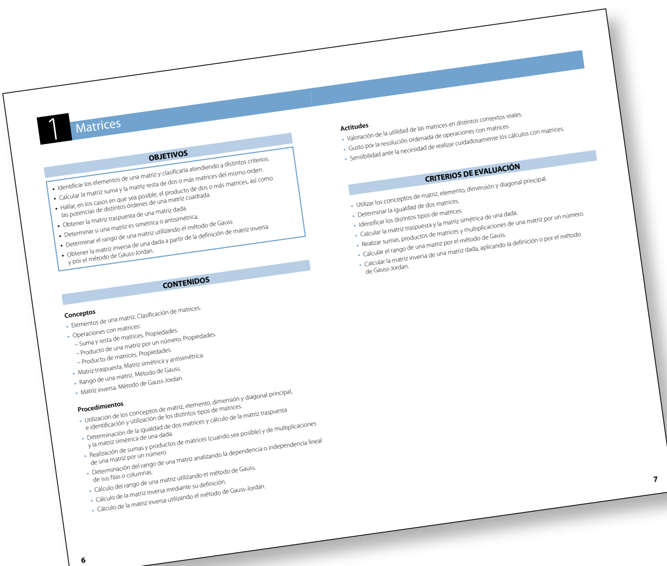
DIRECCIÓN DEL PROYECTO
Domingo Sánchez Figueroa

Proyecto **La Casa del Saber**

Santillana

Presentación

El nombre de la serie, **La Casa del Saber**, responde al planteamiento de presentar un proyecto de Matemáticas centrado en la adquisición de los contenidos necesarios para que los alumnos puedan desenvolverse en la vida real. El saber matemático debe garantizar no solo la interpretación y la descripción de la realidad, sino también la actuación sobre ella.


1 Matrices

OBJETIVOS

- Identificar los elementos de una matriz y clasificarla atendiendo a distintos criterios.
- Calcular la matriz suma y la matriz resta de dos o más matrices del mismo orden.
- Hallar, en los casos en que sea posible, el producto de dos o más matrices, así como las potencias de distintos órdenes de una matriz cuadrada.
- Obtener la matriz traspuesta de una matriz dada.
- Determinar si una matriz es simétrica o antisimétrica.
- Determinar el rango de una matriz utilizando el método de Gauss.
- Obtener la matriz inversa de una dada a partir de la definición de matriz inversa y por el método de Gauss-Jordan.

CONTENIDOS

Conceptos
- Elementos de una matriz. Clasificación de matrices.
- Operaciones con matrices:
  – Suma y resta de matrices. Propiedades.
  – Producto de una matriz por un número. Propiedades.
  – Producto de matrices. Propiedades.
- Matriz traspuesta. Matriz simétrica y antisimétrica.
- Rango de una matriz. Método de Gauss.
- Matriz inversa. Método de Gauss-Jordan.

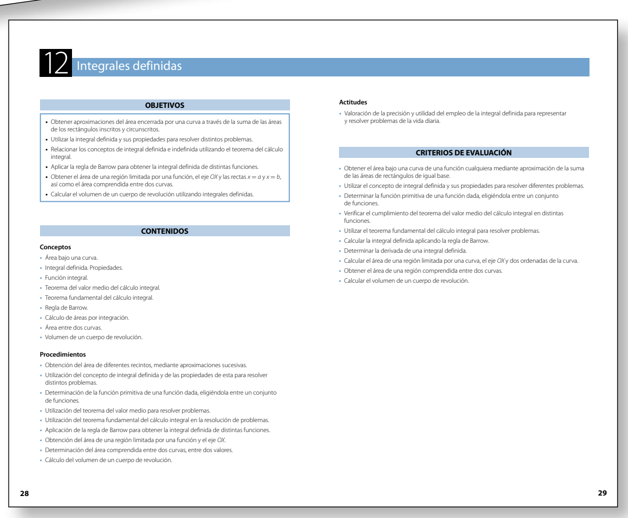
Procedimientos
- Utilización de los conceptos de matriz, elemento, dimensión y diagonal principal, e identificación y utilización de los distintos tipos de matrices.
- Determinación de la igualdad de dos matrices y cálculo de la matriz traspuesta y la matriz simétrica de una dada.
- Realización de sumas y productos de matrices (cuando sea posible) y de multiplicaciones de una matriz por un número.
- Determinación del rango de una matriz analizando la dependencia o independencia lineal de sus filas o columnas.
- Cálculo del rango de una matriz utilizando el método de Gauss.
- Cálculo de la matriz inversa mediante su definición.
- Cálculo de la matriz inversa utilizando el método de Gauss-Jordan.

Actitudes
- Valoración de la utilidad de las matrices en distintos contextos reales.
- Gusto por la resolución ordenada de operaciones con matrices.
- Sensibilidad ante la necesidad de realizar cuidadosamente los cálculos con matrices.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Utilizar los conceptos de matriz, elemento, dimensión y diagonal principal.
- Determinar la igualdad de dos matrices.
- Identificar los distintos tipos de matrices.
- Calcular la matriz traspuesta y la matriz simétrica de una dada.
- Realizar sumas, productos de matrices y multiplicaciones de una matriz por un número.
- Calcular el rango de una matriz por el método de Gauss.
- Calcular la matriz inversa de una matriz dada, aplicando la definición o por el método de Gauss-Jordan.

6 7


12 Integrales definidas

OBJETIVOS

- Obtener aproximaciones del área encerrada por una curva a través de la suma de las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos.
- Utilizar la integral definida y sus propiedades para resolver distintos problemas.
- Relacionar los conceptos de integral definida e indefinida utilizando el teorema del cálculo integral.
- Aplicar la regla de Barrow para obtener la integral definida de distintas funciones.
- Obtener el área de una región limitada por una función, el eje *OX* y las rectas $x = a$ y $x = b$, así como el área comprendida entre dos curvas.
- Calcular el volumen de un cuerpo de revolución utilizando integrales definidas.

CONTENIDOS

Conceptos
- Área bajo una curva.
- Integral definida. Propiedades.
- Función integral.
- Teorema del valor medio del cálculo integral.
- Teorema fundamental del cálculo integral.
- Regla de Barrow.
- Cálculo de áreas por integración.
- Área entre dos curvas.
- Volumen de un cuerpo de revolución.

Procedimientos
- Obtención del área de diferentes recintos, mediante aproximaciones sucesivas.
- Utilización del concepto de integral definida y de las propiedades de esta para resolver distintos problemas.
- Determinación de la función primitiva de una función dada, eligiéndola entre un conjunto de funciones.
- Utilización del teorema del valor medio para resolver problemas.
- Utilización del teorema fundamental del cálculo integral en la resolución de problemas.
- Aplicación de la regla de Barrow para obtener la integral definida de distintas funciones.
- Obtención del área de una región limitada por una función y el eje *OX*.
- Determinación del área comprendida entre dos curvas, entre dos valores.
- Cálculo del volumen de un cuerpo de revolución.

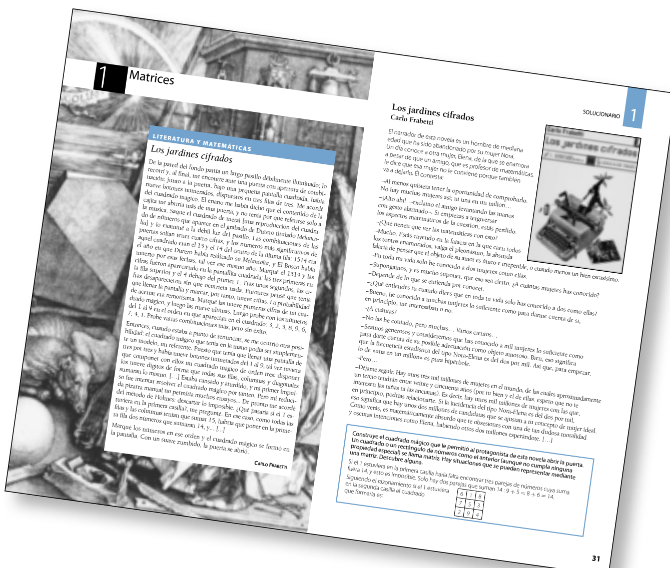
Actitudes
- Valoración de la precisión y utilidad del empleo de la integral definida para representar y resolver problemas de la vida diaria.

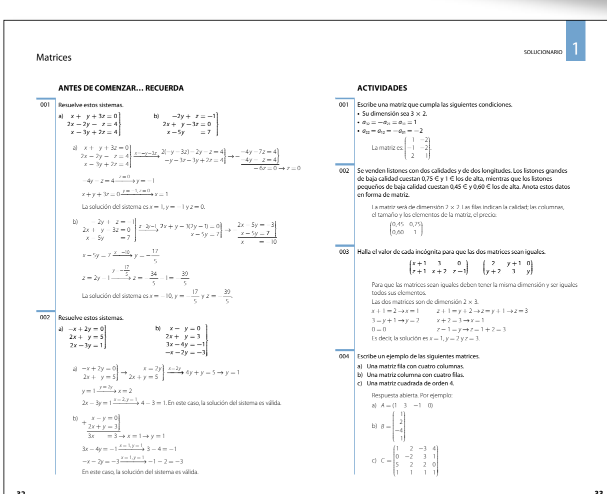
CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Obtener el área bajo una curva de una función cualquiera mediante aproximación de la suma de las áreas de rectángulos de igual base.
- Utilizar el concepto de integral definida y sus propiedades para resolver diferentes problemas.
- Determinar la función primitiva de una función dada, eligiéndola entre un conjunto de funciones.
- Verificar el cumplimiento del teorema del valor medio del cálculo integral en distintas funciones.
- Utilizar el teorema fundamental del cálculo integral para resolver problemas.
- Calcular la integral definida aplicando la regla de Barrow.
- Determinar la derivada de una integral definida.
- Calcular el área de una región limitada por una curva, el eje *OX* y dos ordenadas de la curva.
- Obtener el área de una región comprendida entre dos curvas.
- Calcular el volumen de un cuerpo de revolución.

28 29

En este sentido, y considerando las matemáticas a estos niveles como una materia esencialmente procedimental, recogemos en este material la **resolución de todos los ejercicios y problemas** formulados en el libro del alumno. Pretendemos que esta resolución no sea solo un instrumento sino que pueda entenderse como una propuesta didáctica para enfocar la adquisición de los distintos conceptos y procedimientos que se presentan en el libro del alumno.





Índice

Programación de las unidades

Resolución de las actividades

1 Matrices

OBJETIVOS

- Identificar los elementos de una matriz y clasificarla atendiendo a distintos criterios.
- Calcular la matriz suma y la matriz resta de dos o más matrices del mismo orden.
- Hallar, en los casos en que sea posible, el producto de dos o más matrices, así como las potencias de distintos órdenes de una matriz cuadrada.
- Obtener la matriz traspuesta de una matriz dada.
- Determinar si una matriz es simétrica o antisimétrica.
- Determinar el rango de una matriz utilizando el método de Gauss
- Obtener la matriz inversa de una dada a partir de la definición de matriz inversa y por el método de Gauss-Jordan.

CONTENIDOS

Conceptos

- Elementos de una matriz. Clasificación de matrices.
- Operaciones con matrices:
  – Suma y resta de matrices. Propiedades.
  – Producto de una matriz por un número. Propiedades.
  – Producto de matrices. Propiedades.
- Matriz traspuesta. Matriz simétrica y antisimétrica.
- Rango de una matriz. Método de Gauss.
- Matriz inversa. Método de Gauss-Jordan.

Procedimientos

- Utilización de los conceptos de matriz, elemento, dimensión y diagonal principal, e identificación y utilización de los distintos tipos de matrices.
- Determinación de la igualdad de dos matrices y cálculo de la matriz traspuesta y la matriz simétrica de una dada.
- Realización de sumas y productos de matrices (cuando sea posible) y de multiplicaciones de una matriz por un número.
- Determinación del rango de una matriz analizando la dependencia o independencia lineal de sus filas o columnas.
- Cálculo del rango de una matriz utilizando el método de Gauss.
- Cálculo de la matriz inversa mediante su definición.
- Cálculo de la matriz inversa utilizando el método de Gauss-Jordan.

Actitudes

- Valoración de la utilidad de las matrices en distintos contextos reales.
- Gusto por la resolución ordenada de operaciones con matrices.
- Sensibilidad ante la necesidad de realizar cuidadosamente los cálculos con matrices.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Utilizar los conceptos de matriz, elemento, dimensión y diagonal principal.
- Determinar la igualdad de dos matrices.
- Identificar los distintos tipos de matrices.
- Calcular la matriz traspuesta y la matriz simétrica de una dada.
- Realizar sumas, productos de matrices y multiplicaciones de una matriz por un número.
- Calcular el rango de una matriz por el método de Gauss.
- Calcular la matriz inversa de una matriz dada, aplicando la definición o por el método de Gauss-Jordan.

2 Determinantes

OBJETIVOS

- Reconocer el significado del determinante de una matriz cuadrada.
- Obtener los valores numéricos de determinantes de orden 2 y de orden 3, aplicando la regla de Sarrus.
- Utilizar las propiedades de los determinantes para simplificar su cálculo.
- Calcular el menor complementario y el adjunto de un elemento cualquiera de una matriz cuadrada.
- Obtener el valor de un determinante mediante el desarrollo por los elementos de una fila o de una columna.
- Calcular el valor de un determinante de cualquier orden *haciendo ceros*.
- Aplicar los determinantes para obtener el rango de una matriz.
- Utilizar los determinantes para decidir si una matriz tiene inversa y, en caso afirmativo, calcularla.

CONTENIDOS

Conceptos

- Determinantes de orden 2 y 3. Regla de Sarrus.
- Menor complementario y adjunto.
- Determinantes de cualquier orden.
- Rango de una matriz.
- Matriz adjunta de una matriz dada.

Procedimientos

- Cálculo del valor de un determinante de orden 2.
- Aplicación de la regla de Sarrus para obtener el valor del determinante asociado a una matriz cuadrada de orden 3.
- Utilización de las propiedades para simplificar el cálculo de determinantes.
- Obtención del menor complementario y del adjunto de un elemento cualquiera de una matriz cuadrada.
- Desarrollo de un determinante por los adjuntos de los elementos de una línea.
- Determinación de todos los menores de un orden dado de una matriz cuadrada.
- Cálculo del valor de un determinante de cualquier orden *haciendo ceros*.
- Obtención del rango de una matriz, hallando el orden de su mayor menor no nulo.
- Obtención de la matriz adjunta de una matriz.
- Cálculo de la matriz inversa de una matriz cuadrada dada, obteniendo la matriz traspuesta de su matriz adjunta y dividiéndola por el valor del determinante.

Actitudes

- Curiosidad e interés por la resolución de problemas que impliquen cálculos con determinantes, confiando en las propias capacidades para resolverlos.
- Perseverancia y flexibilidad en la resolución de problemas de determinantes.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Calcular el valor de un determinante de orden 2.
- Aplicar la regla de Sarrus para calcular el valor de un determinante de orden 3.
- Aplicar las propiedades de los determinantes para simplificar los cálculos.
- Obtener el menor complementario y el adjunto de un elemento cualquiera de una matriz cuadrada.
- Desarrollar un determinante por los adjuntos de los elementos de una línea.
- Calcular el valor de un determinante de cualquier orden *haciendo ceros*.
- Determinar todos los menores de un orden dado de una matriz cuadrada.
- Obtener el rango de una matriz.
- Determinar la matriz adjunta de una matriz dada.
- Calcular la matriz inversa de una matriz dada.

3 Sistemas de ecuaciones lineales

OBJETIVOS

- Resolver sistemas mediante su transformación en sistemas escalonados.
- Analizar, discutir y resolver por el método de Gauss sistemas de ecuaciones lineales y sistemas dependientes de un parámetro.
- Expresar sistemas de ecuaciones lineales utilizando matrices.
- Analizar la compatibilidad e incompatibilidad de los sistemas de ecuaciones aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius.
- Aplicar la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones.
- Discutir la compatibilidad y resolver sistemas de ecuaciones lineales homogéneos.
- Analizar, discutir y resolver sistemas de tres ecuaciones dependientes de parámetros.
- Discutir y resolver sistemas con distinto número de ecuaciones que de incógnitas.

CONTENIDOS

Conceptos

- Sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas de ecuaciones escalonados.
- Método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Teorema de Rouché-Fröbenius.
- Regla de Cramer.
- Sistemas homogéneos.
- Sistemas con distinto número de ecuaciones que de incógnitas.
- Sistemas dependientes de un parámetro.

Procedimientos

- Transformación de un sistema en otro equivalente escalonado y resolución del mismo.
- Aplicación del método de Gauss a la resolución y discusión de sistemas de ecuaciones lineales.
- Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones que tengan distinto número de ecuaciones que de incógnitas.
- Resolución de sistemas de ecuaciones dependientes de un parámetro utilizando el método de Gauss y discusión de sus soluciones en función de los valores de este.
- Resolución de sistemas por métodos matriciales, mediante la matriz inversa.
- Discusión y clasificación de sistemas de ecuaciones, aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, a partir del rango de la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.
- Utilización de la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones con igual número de ecuaciones que de incógnitas y con determinante distinto de cero.
- Discusión y resolución de sistemas homogéneos.
- Discusión y resolución de sistemas dependientes de parámetros.

Actitudes

- Valoración de la utilidad del lenguaje algebraico para representar, comunicar y resolver situaciones cotidianas.
- Valoración de la necesidad de interpretación crítica de las soluciones obtenidas.
- Confianza en las propias capacidades para resolver problemas.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Aplicar correctamente el lenguaje algebraico para expresar situaciones de la vida cotidiana.
- Obtener sistemas de ecuaciones equivalentes a uno dado por distintos procedimientos.
- Resolver un sistema de ecuaciones mediante su transformación en sistemas escalonados.
- Aplicar el método de Gauss para estudiar y resolver sistemas.
- Resolver sistemas de ecuaciones mediante métodos matriciales.
- Discutir y clasificar sistemas de ecuaciones aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius.
- Utilizar correctamente la regla de Cramer.
- Discutir y resolver sistemas de ecuaciones homogéneos.
- Discutir y resolver sistemas de ecuaciones dependientes de parámetros.

4 Geometría en el espacio

OBJETIVOS

- Determinar los elementos de un vector en el espacio.
- Utilizar el concepto de combinación lineal de vectores para establecer cuándo un vector depende linealmente de otros.
- Analizar cuándo varios vectores en el espacio son linealmente independientes o dependientes.
- Encontrar las coordenadas de un vector en una base y determinarlas cuando se cambia de base.
- Reconocer y determinar las distintas formas de expresar la ecuación de una recta en el espacio.
- Reconocer y determinar las distintas formas de expresar la ecuación de un plano en el espacio.
- Analizar las posiciones relativas de dos rectas en el espacio.
- Interpretar y resolver problemas de posiciones relativas de un plano y una recta en el espacio.
- Determinar las posiciones relativas de dos o tres planos en el espacio.

CONTENIDOS

Conceptos

- Vectores en el espacio. Módulo, dirección y sentido.
- Combinación lineal de vectores. Dependencia e independencia lineal de vectores.
- Base y dimensión de un espacio vectorial.
- Coordenadas de un vector.
- Ecuaciones de la recta en el espacio.
- Ecuaciones del plano.
- Posiciones relativas de dos rectas en el espacio.
- Posiciones relativas de recta y plano en el espacio.
- Posiciones relativas de dos planos en el espacio.
- Posiciones relativas de tres planos en el espacio.

Procedimientos

- Utilización del concepto de vector y cálculo de sus elementos.
- Realización de sumas de vectores libres y producto de un número por un vector.
- Obtención de combinaciones lineales de vectores, matrices y polinomios.
- Cálculo de las coordenadas de un vector en una base cualquiera y en la base canónica.
- Obtención de la ecuación de una recta en forma vectorial, paramétrica, continua y cartesiana o implícita, pasando de unas formas a otras.

- Obtención de la ecuación del plano en forma vectorial, paramétrica y general, pasando de unas formas a otras.
- Análisis de la posición relativa de dos rectas en el espacio, expresadas mediante dos puntos, un punto y un vector director, o mediante ecuaciones paramétricas, continuas o generales.
- Determinación de la posición relativa de dos planos en el espacio, mediante el análisis de las matrices asociadas a las ecuaciones generales de los planos.
- Determinación de las posiciones relativas de tres planos, obteniendo las matrices del sistema formado por las ecuaciones generales de los planos y aplicando correctamente el teorema de Rouché-Fröbenius.
- Estudio de la posición relativa de planos y rectas en el espacio mediante métodos matriciales y algebraicos.

Actitudes

- Valoración de la presencia de vectores en la realidad.
- Comprender el lenguaje geométrico en informaciones de todo tipo.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Determinar el módulo, dirección y sentido de un vector en el espacio.
- Obtener combinaciones lineales de vectores.
- Determinar la relación de linealidad entre dos vectores.
- Calcular las coordenadas de un vector en una base cualquiera y en la base canónica.
- Expresar la ecuación de una recta en forma vectorial, paramétrica, continua y cartesiana o implícita, pasando de una forma a otra correctamente.
- Obtener la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, eligiendo uno de los puntos y calculando un vector director de la misma.
- Expresar la ecuación de un plano en forma vectorial, paramétrica y general, pasando de una forma a otra correctamente.
- Estudiar la posición relativa de dos rectas en el espacio, distinguiendo la forma en que están expresadas, así como el procedimiento más adecuado para aplicar en cada caso.
- Analizar la posición relativa de planos y rectas en el espacio aplicando métodos matriciales (teorema de Rouché-Fröbenius) y algebraicos (análisis del valor del parámetro).
- Determinar la posición relativa de dos planos en el espacio, analizando las matrices asociadas a las ecuaciones de los planos.
- Aplicar correctamente el teorema de Rouché-Fröbenius para analizar la posición relativa de tres planos en el espacio.

5 Producto escalar

OBJETIVOS

- Expresar analíticamente el producto escalar de vectores.
- Aplicar el producto escalar a la determinación de ángulos entre vectores.
- Calcular vectores perpendiculares a uno dado.
- Determinar la perpendicularidad entre planos y rectas.
- Determinar las ecuaciones de un haz de planos secante y perpendicular a una recta.
- Calcular el ángulo que forman dos rectas, dos planos y una recta y un plano.
- Calcular las coordenadas de la proyección ortogonal de un punto sobre una recta o sobre un plano.
- Determinar la ecuación de la proyección ortogonal de una recta sobre un plano.
- Establecer estrategias para determinar las coordenadas de un punto simétrico de otro respecto de una recta o de un plano.
- Determinar distancias entre dos puntos, de un punto a un plano y de un punto a una recta.
- Hallar distancias entre planos y entre rectas determinando previamente sus posiciones relativas.

CONTENIDOS

Conceptos

- Producto escalar de dos vectores: definición, interpretación geométrica y expresión analítica.
- Aplicaciones del producto escalar: ángulo entre dos vectores, cálculo de vectores perpendiculares, vector perpendicular a un plano.
- Haces de planos.
- Ángulo que forman dos rectas y dos planos.
- Ángulo entre una recta y un plano.
- Proyección ortogonal de un punto sobre una recta o un plano. Proyección ortogonal de una recta sobre un plano.
- Punto simétrico respecto de otro punto, una recta o de un plano.
- Distancia entre un punto y otro punto, una recta o un plano.
- Distancia entre dos planos y entre dos rectas.

Procedimientos

- Expresión analítica del producto escalar entre dos vectores, análisis de sus propiedades e interpretación geométrica del módulo del producto escalar.
- Obtención del producto escalar entre dos vectores y utilización de sus propiedades para resolver distintos problemas: ángulo entre dos vectores, cálculo de vectores perpendiculares…
- Cálculo de las ecuaciones de los haces de planos secantes y perpendiculares a una recta.

- Determinación del ángulo que forman dos rectas, dos planos o una recta y un plano.
- Obtención de la proyección ortogonal de un punto sobre una recta o un plano, y de una recta sobre un plano.
- Obtención del punto simétrico de otro respecto de otro punto, una recta o un plano.
- Cálculo de la distancia entre dos puntos, de un punto a un plano y de un punto a una recta.
- Obtención de la distancia entre dos planos paralelos, entre una recta y un plano y entre dos rectas.

Actitudes

- Valorar la importancia de las representaciones gráficas para obtener y comunicar información.
- Gusto por la realización cuidadosa de los cálculos con vectores.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Calcular el producto escalar de dos vectores expresados en coordenadas.
- Determinar el ángulo entre dos vectores utilizando el producto escalar.
- Determinar el vector normal a un plano.
- Calcular rectas o planos perpendiculares a otras rectas u otros planos.
- Hallar las ecuaciones de los haces de planos secantes y perpendiculares a una recta.
- Calcular el ángulo entre dos rectas, dos planos o una recta y un plano.
- Determinar las coordenadas de la proyección ortogonal de un punto sobre una recta o un plano.
- Calcular las ecuaciones de la proyección ortogonal de una recta sobre un plano.
- Hallar las coordenadas del punto simétrico de otro respecto de otro punto, una recta o un plano.
- Calcular la distancia de un punto a otro punto, una recta o un plano.
- Determinar la distancia entre dos rectas, dos planos o una recta y un plano.

6 Productos vectorial y mixto

OBJETIVOS

- Expresar analíticamente el producto vectorial de vectores.
- Aplicar el producto vectorial al cálculo de bases ortogonales y al cálculo del vector director de una recta.
- Expresar analíticamente el producto mixto de vectores.
- Aplicar el producto mixto al cálculo del volumen de un paralelepípedo y de un tetraedro definido por tres vectores.
- Determinar el área un paralelogramo definido por dos vectores.
- Calcular la distancia de un punto a una recta utilizando el producto vectorial.
- Calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan utilizando el producto mixto.
- Determinar el lugar geométrico de los puntos del espacio que cumplen ciertas propiedades.
- Calcular la ecuación de una esfera.
- Determinar las posiciones relativas de un plano o una recta con una esfera.
- Hallar las ecuaciones de la recta tangente y normal a un punto de una esfera.

CONTENIDOS

Conceptos

- Producto vectorial de vectores: definición, interpretación geométrica y expresión analítica.
- Aplicaciones del producto vectorial: cálculo de bases ortogonales, cálculo del vector director de una recta, áreas de figuras planas en el espacio, distancia entre un punto y una recta…
- Producto mixto de vectores: definición, interpretación geométrica y expresión analítica.
- Aplicaciones del producto mixto: volumen de un paralelepípedo y de un tetraedro, distancia entre dos rectas que se cruzan…
- Lugares geométricos en el espacio.
- Esferas. Posiciones relativas entre rectas, planos y esferas.
- Recta tangente y normal a un punto de una esfera.

Procedimientos

- Expresión del producto vectorial entre dos vectores, interpretación geométrica y expresión en coordenadas.
- Aplicación del producto vectorial para calcular un vector perpendicular a otros dos.
- Aplicación del producto vectorial para hallar el área de un paralelogramo y de un triángulo, conocidas las coordenadas de sus vértices.
- Determinación del producto mixto entre dos vectores, interpretación geométrica y expresión en coordenadas.
- Cálculo mediante el producto mixto del volumen de un paralelepípedo y de un tetraedro.

- Determinación de la distancia entre dos rectas que se cruzan utilizando el producto mixto.
- Cálculo del radio y el centro de una superficie esférica.
- Determinación de la posición relativa de un plano o de una recta respecto de una superficie esférica.
- Determinación de la recta tangente o normal a un punto de una superficie esférica.

Actitudes

- Valorar la importancia de las representaciones gráficas para obtener y comunicar información.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Expresar analíticamente el producto vectorial y mixto de vectores.
- Determinar del vector director de una recta utilizando el producto vectorial.
- Determinar el área un paralelogramo definido por dos vectores.
- Aplicar el producto mixto al cálculo del volumen de un paralelepípedo y de un tetraedro definido por tres vectores.
- Calcular la distancia de un punto a una recta utilizando el producto vectorial y la distancia entre dos rectas que se cruzan utilizando el producto mixto.
- Determinar el lugar geométrico de los puntos del espacio que cumplen ciertas propiedades.
- Calcular el radio y el centro de una esfera.
- Determinar las posiciones relativas de un plano o una recta con una esfera comparando distancias y el radio de la esfera.
- Hallar las ecuaciones de la recta tangente y normal a un punto de una esfera.

7 Límites y continuidad

OBJETIVOS

- Determinar, si existe, el límite de una sucesión de números reales.
- Aplicar la definición de límite de una sucesión a la resolución del límite de una sucesión de números reales.
- Determinar el valor del límite de una función en el infinito.
- Aplicar la definición de límite de una función en el infinito a la resolución de límites de funciones.
- Aplicar las operaciones con límite: suma, diferencia, producto y cociente, en la resolución de límites.
- Determinar el límite de una función en un punto y obtener sus límites laterales.
- Resolver indeterminaciones de distinto tipo a la hora del cálculo de límites.
- Analizar la continuidad de una función en un punto, verificando si los límites laterales son iguales al valor que toma la función en ese punto.
- Determinar los puntos de discontinuidad de una función, y el tipo de discontinuidad que presentan.
- Aplicar los teoremas de Bolzano y de Weierstrass a la resolución de problemas en los que intervengan funciones continuas.

CONTENIDOS

Conceptos

- Límite de una sucesión.
- Límite de una función en el infinito.
- Operaciones con límites.
- Límites infinitos y en el infinito. Indeterminaciones.
- Límites laterales.
- Continuidad de una función en un punto y en un intervalo.
- Tipos de discontinuidades.
- Teoremas de Bolzano y de Weierstrass.

Procedimientos

- Determinación, si existe, del límite de una sucesión de números reales de la que conocemos su término general.
- Determinación, si existe, del límite de una función en un punto de manera aproximada y de forma exacta.
- Cálculo del límite de la suma, diferencia, producto y cociente de funciones, y del producto de un número por una función.
- Límite de funciones potenciales, exponenciales y racionales.

- Obtención de los límites laterales de una función en un punto.
- Resolución de indeterminaciones en el cálculo de límites.
- Análisis de la continuidad de una función en un punto, verificando si se cumple que los dos límites laterales son iguales al valor de la función en ese punto.
- Evaluación de la continuidad de una función en un intervalo.
- Estudio de las discontinuidades de una función, determinando de qué tipo son.
- Aplicación de los teoremas de Bolzano y de Weierstrass a la resolución de distintos problemas en los que intervengan funciones continuas.

Actitudes

- Reconocimiento de la utilidad del estudio de los límites y la continuidad de funciones en los distintos contextos del desarrollo científico.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Calcular, si existe, el límite de una sucesión de números reales.
- Calcular el límite, si existe, de una función en el infinito.
- Aplicar las operaciones con límites para resolver límites de funciones.
- Determinar el límite de una función en un punto.
- Calcular los límites laterales de una función en un punto.
- Resolver indeterminaciones de los tipos: $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^{∞} y $\frac{0}{0}$.
- Estudiar la continuidad de una función en un punto.
- Estudiar la continuidad de una función en un intervalo.
- Determinar las discontinuidades de una función y estudiar el tipo al que pertenecen.
- Aplicar e interpretar geométricamente el teorema de Bolzano para funciones continuas.
- Aplicar e interpretar geométricamente el teorema de Weierstrass para funciones continuas.

8 Derivada de una función

OBJETIVOS

- Utilizar la tasa de variación media de una función para interpretar situaciones de la vida cotidiana.
- Obtener la derivada de una función en un punto y sus derivadas laterales.
- Obtener la ecuación de la recta tangente y la recta normal a una función en un punto.
- Analizar la continuidad y derivabilidad de una función en un punto, teniendo en cuenta las relaciones entre ambas.
- Calcular la función derivada de una función, así como las derivadas sucesivas.
- Calcular derivadas usando las reglas de derivación.
- Obtener derivadas de operaciones con funciones.
- Aplicar la regla de la cadena al cálculo de la derivada de una función compuesta.
- Calcular la derivada de las funciones potenciales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
- Utilizar las técnicas de derivación para calcular la derivada de algunas funciones.

CONTENIDOS

Conceptos

- Tasa de variación media.
- Derivada de una función en un punto.
- Interpretación geométrica.
- Derivadas laterales.
- Continuidad y derivabilidad.
- Función derivada.
- Derivada de la suma y de la diferencia de funciones.
- Derivada del producto y cociente de funciones.
- Regla de la cadena.
- Derivadas de funciones potenciales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas e implícitas.

Procedimientos

- Obtención de la función derivada y de las derivadas sucesivas de una función.
- Cálculo de las derivadas laterales de una función en un punto.
- Análisis de la continuidad y derivabilidad de una función en un punto a partir de las relaciones entre ambas.
- Deducción y aplicación de las reglas de derivación para obtener la derivada de la suma, diferencia, producto y cociente de funciones.

- Utilización de la regla de la cadena para obtener la función derivada de distintas funciones compuestas.
- Deducción y aplicación de las reglas de derivación para obtener funciones derivadas de funciones potenciales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas e implícitas.

Actitudes

- Reconocimiento de la utilidad del estudio de la continuidad y derivabilidad de funciones en los distintos contextos del desarrollo científico.
- Valoración del lenguaje gráfico a la hora de tratar la información.
- Capacidad para formularse preguntas nuevas explorando al máximo un fenómeno o situación.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Hallar la tasa de variación media de una función en un intervalo.
- Determinar la derivada de una función en un punto, y sus derivadas laterales.
- Utilizar la interpretación geométrica de la derivada para resolver problemas.
- Obtener la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a una función en un punto.
- Analizar la continuidad y derivabilidad de una función en un punto.
- Obtener la función derivada de una función elemental.
- Calcular derivadas sucesivas de una función.
- Calcular derivadas de operaciones con funciones, y aplicar la regla de la cadena para hallar derivadas de funciones compuestas.
- Obtener la derivada de las funciones potenciales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, y de funciones compuestas de estas.
- Calcular la derivada de una función expresada en forma implícita.

9 Aplicaciones de la derivada

OBJETIVOS

- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función a partir del signo de su derivada primera.
- Obtener los máximos y los mínimos de una función a partir de sus derivadas primera y segunda.
- Determinar los intervalos de convexidad y concavidad de una función, así como sus puntos de inflexión, mediante el estudio de su derivada segunda.
- Conocer los pasos que hay que seguir para optimizar una función dada.
- Optimizar funciones.
- Reconocer los teoremas fundamentales del cálculo diferencial: teoremas de Rolle, Lagrange y Cauchy, así como sus aplicaciones en diferentes contextos.
- Aplicar los teoremas anteriores a la resolución de problemas.
- Determinar la regla de L'Hôpital y su aplicación al cálculo de límites.

CONTENIDOS

Conceptos

- Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.
- Convexidad y concavidad. Puntos de inflexión.
- Optimización.
- Teoremas de Rolle, Lagrange y Cauchy. Aplicaciones.
- Regla de L'Hôpital.

Procedimientos

- Determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función a partir del signo de su derivada primera.
- Obtención de los puntos críticos de una función y de sus máximos y mínimos a partir de sus derivadas primera y segunda.
- Determinación de los intervalos de convexidad y concavidad de una función, y de sus puntos de inflexión, mediante el estudio de su derivada segunda.
- Resolución de problemas reales de optimización de funciones.
- Reconocimiento de los teoremas del cálculo diferencial (teoremas de Rolle, Lagrange y Cauchy) y su aplicación en la resolución de problemas.
- Aplicación de la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites de funciones derivables.

Actitudes

- Valoración de la presencia de las derivadas en la vida real.
- Gusto por la presentación clara y ordenada de los desarrollos necesarios en el cálculo de derivadas.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función.
- Obtener los máximos y los mínimos de una función.
- Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de una función.
- Hallar los puntos de inflexión de una función.
- Resolver problemas reales de optimización de funciones: maximizar y minimizar.
- Comprender y aplicar en problemas reales los teoremas de Rolle, Lagrange y Cauchy.
- Aplicar la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites de operaciones con funciones derivables.

10 Representación de funciones

OBJETIVOS

- Obtener el dominio y puntos de corte con los ejes de una función.
- Determinar si una función es simétrica.
- Estudiar si una función es periódica y, en caso de que lo sea, calcular su período.
- Determinar las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
- Obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos a partir del estudio de la derivada primera.
- Calcular los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión a partir del estudio de la derivada segunda.
- Representar gráficamente una función.

CONTENIDOS

Conceptos

- Dominio y puntos de corte con los ejes.
- Simetrías.
- Periodicidad.
- Ramas infinitas. Asíntotas.
- Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.
- Convexidad y concavidad. Puntos de inflexión.
- Funciones polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y definidas a trozos.

Procedimientos

- Obtención del dominio y puntos de corte con los ejes de una función dada.
- Estudio de las simetrías de una función.
- Determinación del período de una función periódica.
- Cálculo de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de una función.
- Determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función a partir del signo de su derivada primera.
- Obtención de los máximos y mínimos de una función a partir de sus derivadas primera y segunda.
- Determinación de los intervalos de convexidad y concavidad de una función, y de sus puntos de inflexión, mediante el estudio de su derivada segunda.
- Representación gráfica de funciones polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y definidas a trozos utilizando todos los elementos anteriores.

Actitudes

- Reconocimiento de la utilidad del lenguaje gráfico como medio para el estudio y comprensión de fenómenos de la vida real.
- Aprecio de los medios tecnológicos como herramienta para analizar la realidad.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Hallar el dominio, las simetrías y los puntos de corte con los ejes de una función.
- Determinar si una función es periódica.
- Calcular las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas de una función, y determinar la posición relativa de la gráfica de una función respecto a ellas.
- Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función.
- Obtener los máximos y los mínimos de una función.
- Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de una función.
- Hallar los puntos de inflexión de una función.
- Representar gráficamente una función a partir del estudio de sus propiedades.

11 Integrales indefinidas

OBJETIVOS

- Establecer la relación entre una función y su posible función primitiva, realizando la derivada.
- Obtener funciones primitivas de funciones sencillas.
- Utilizar las propiedades de la integral indefinida para resolver distintos problemas.
- Determinar las integrales inmediatas de las funciones simples y compuestas.
- Utilizar el método de integración por partes para resolver integrales.
- Resolver integrales de funciones racionales atendiendo al número y el carácter de las raíces del polinomio del denominador.
- Resolver integrales aplicando el método de sustitución o cambio de variable.

CONTENIDOS

Conceptos

- Primitiva de una función.
- Integral de una función.
- Integral de funciones elementales.
- Integración por partes.
- Integración de funciones racionales.
- Integración por cambio de variable.

Procedimientos

- Comprobación, realizando la derivada, de la relación entre una función y su posible función primitiva, y obtención de funciones primitivas de funciones sencillas a partir de las reglas de derivación.
- Obtención de las integrales inmediatas de las funciones simples y compuestas más conocidas, aplicando las fórmulas pertinentes en cada caso.
- Utilización del método de integración por partes para resolver integrales de un producto, estableciendo los factores de manera correcta para que la integral resultante sea sencilla.
- Resolución de integrales de funciones racionales, reduciéndolas a la integral de una función racional con el grado del numerador menor que el grado del denominador, y analizando el tipo de raíces y la multiplicidad de este.
- Resolución de integrales aplicando el método de sustitución o cambio de variable, determinando el cambio más adecuado y obteniendo una integral más sencilla que la de partida.

Actitudes

- Sensibilidad y gusto por la presentación clara y ordenada de los cálculos numéricos.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar cálculos.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Comprobar, mediante derivación, si una función es o no primitiva de una función dada.
- Calcular las funciones primitivas de funciones sencillas a partir de las reglas de derivación.
- Obtener integrales inmediatas de funciones sencillas o compuestas.
- Resolver integrales utilizando el método de integración por partes.
- Resolver integrales de funciones racionales, analizando el grado del numerador y del denominador, y estudiando el tipo de raíces del denominador.
- Resolver integrales aplicando el cambio de variable.

12 Integrales definidas

OBJETIVOS

- Obtener aproximaciones del área encerrada por una curva a través de la suma de las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos.
- Utilizar la integral definida y sus propiedades para resolver distintos problemas.
- Relacionar los conceptos de integral definida e indefinida utilizando el teorema del cálculo integral.
- Aplicar la regla de Barrow para obtener la integral definida de distintas funciones.
- Obtener el área de una región limitada por una función, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$, así como el área comprendida entre dos curvas.
- Calcular el volumen de un cuerpo de revolución utilizando integrales definidas.

CONTENIDOS

Conceptos

- Área bajo una curva.
- Integral definida. Propiedades.
- Función integral.
- Teorema del valor medio del cálculo integral.
- Teorema fundamental del cálculo integral.
- Regla de Barrow.
- Cálculo de áreas por integración.
- Área entre dos curvas.
- Volumen de un cuerpo de revolución.

Procedimientos

- Obtención del área de diferentes recintos, mediante aproximaciones sucesivas.
- Utilización del concepto de integral definida y de las propiedades de esta para resolver distintos problemas.
- Determinación de la función primitiva de una función dada, eligiéndola entre un conjunto de funciones.
- Utilización del teorema del valor medio para resolver problemas.
- Utilización del teorema fundamental del cálculo integral en la resolución de problemas.
- Aplicación de la regla de Barrow para obtener la integral definida de distintas funciones.
- Obtención del área de una región limitada por una función y el eje OX.
- Determinación del área comprendida entre dos curvas, entre dos valores.
- Cálculo del volumen de un cuerpo de revolución.

Actitudes

- Valoración de la precisión y utilidad del empleo de la integral definida para representar y resolver problemas de la vida diaria.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Obtener el área bajo una curva de una función cualquiera mediante aproximación de la suma de las áreas de rectángulos de igual base.
- Utilizar el concepto de integral definida y sus propiedades para resolver diferentes problemas.
- Determinar la función primitiva de una función dada, eligiéndola entre un conjunto de funciones.
- Verificar el cumplimiento del teorema del valor medio del cálculo integral en distintas funciones.
- Utilizar el teorema fundamental del cálculo integral para resolver problemas.
- Calcular la integral definida aplicando la regla de Barrow.
- Determinar la derivada de una integral definida.
- Calcular el área de una región limitada por una curva, el eje *OX* y dos ordenadas de la curva.
- Obtener el área de una región comprendida entre dos curvas.
- Calcular el volumen de un cuerpo de revolución.

1 Matrices

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Los jardines cifrados

De la pared del fondo partía un largo pasillo débilmente iluminado; lo recorrí y, al final, me encontré ante una puerta con apertura de combinación: junto a la puerta, bajo una pequeña pantalla cuadrada, había nueve botones numerados, dispuestos en tres filas de tres. Me acordé del cuadrado mágico. El enano me había dicho que el contenido de la cajita me abriría más de una puerta, y no tenía por qué referirse sólo a la música. Saqué el cuadrado de metal [una reproducción del cuadrado de números que aparece en el grabado de Durero titulado *Melancolía*] y lo examiné a la débil luz del pasillo. Las combinaciones de las puertas solían tener cuatro cifras, y los números más significativos de aquel cuadrado eran el 15 y el 14 del centro de la última fila: 1514 era el año en que Durero había realizado su *Melancolía*, y El Bosco había muerto por esas fechas, tal vez ese mismo año. Marqué el 1514 y las cifras fueron apareciendo en la pantallita cuadrada: las tres primeras en la fila superior y el 4 debajo del primer 1. Tras unos segundos, las cifras desaparecieron sin que ocurriera nada. Entonces pensé que tenía que llenar la pantalla y marcar, por tanto, nueve cifras. La probabilidad de acertar era remotísima. Marqué las nueve primeras cifras de mi cuadrado mágico, y luego las nueve últimas. Luego probé con los números del 1 al 9 en el orden en que aparecían en el cuadrado: 3, 2, 5, 8, 9, 6, 7, 4, 1. Probé varias combinaciones más, pero sin éxito.

Entonces, cuando estaba a punto de renunciar, se me ocurrió otra posibilidad: el cuadrado mágico que tenía en la mano podía ser simplemente un modelo, un referente. Puesto que tenía que llenar una pantalla de tres por tres y había nueve botones numerados del 1 al 9, tal vez tuviera que componer con ellos un cuadrado mágico de orden tres: disponer los nueve dígitos de forma que todas sus filas, columnas y diagonales sumaran lo mismo. […] Estaba cansado y aturdido, y mi primer impulso fue intentar resolver el cuadrado mágico por tanteo. Pero mi reducida pizarra manual no permitía muchos ensayos... De pronto me acordé del método de Holmes: descartar lo imposible. ¿Qué pasaría si el 1 estuviera en la primera casilla?, me pregunté. En ese caso, como todas las filas y las columnas tenían que sumar 15, habría que poner en la primera fila dos números que sumaran 14, y... [...]

Marqué los números en ese orden y el cuadrado mágico se formó en la pantalla. Con un suave zumbido, la puerta se abrió.

CARLO FRABETTI

Los jardines cifrados
Carlo Frabetti

El narrador de esta novela es un hombre de mediana edad que ha sido abandonado por su mujer Nora. Un día conoce a otra mujer, Elena, de la que se enamora a pesar de que un amigo, que es profesor de matemáticas, le dice que esa mujer no le conviene porque también va a dejarlo. Él contesta:

–Al menos quisiera tener la oportunidad de comprobarlo. No hay muchas mujeres así; ni una en un millón…

–¡Alto ahí! –exclamó el amigo levantando las manos con gesto alarmado–. Si empiezas a tergiversar los aspectos matemáticos de la cuestión, estás perdido.

–¿Qué tienen que ver las matemáticas con esto?

–Mucho. Estás cayendo en la falacia en la que caen todos los tontos enamorados, valga el pleonasmo, la absurda falacia de pensar que el objeto de su amor es único e irrepetible, o cuando menos un bien escasísimo.

–En toda mi vida sólo he conocido a dos mujeres como ellas.

–Supongamos, y es mucho suponer, que eso sea cierto. ¿A cuántas mujeres has conocido?

–Depende de lo que se entienda por conocer.

–¿Qué entiendes tú cuando dices que en toda tu vida sólo has conocido a dos como ellas?

–Bueno, he conocido a muchas mujeres lo suficiente como para darme cuenta de si, en principio, me interesaban o no.

–¿A cuántas?

–No las he contado, pero muchas… Varios cientos…

–Seamos generosos y consideremos que has conocido a mil mujeres lo suficiente como para darte cuenta de su posible adecuación como objeto amoroso. Bien, eso significa que la frecuencia estadística del tipo Nora-Elena es del dos por mil. Así que, para empezar, lo de «una en un millón» es pura hipérbole.

–Pero…

–Déjame seguir. Hay unos tres mil millones de mujeres en el mundo, de las cuales aproximadamente un tercio tendrán entre veinte y cincuenta años (por tu bien y el de ellas. espero que no te interesen las niñas ni las ancianas). Es decir, hay unos mil millones de mujeres con las que, en principio, podrías relacionarte. Si la incidencia del tipo Nora-Elena es del dos por mil, eso significa que hay unos dos millones de candidatas que se ajustan a tu concepto de mujer ideal. Como verás, es matemáticamente absurdo que te obsesiones con una de tan dudosa moralidad y oscuras intenciones como Elena, habiendo otros dos millones esperándote. […]

Construye el cuadrado mágico que le permitió al protagonista de esta novela abrir la puerta. Un cuadrado o un rectángulo de números como el anterior (aunque no cumpla ninguna propiedad especial) se llama matriz. Hay situaciones que se pueden representar mediante una matriz. Descubre alguna.

Si el 1 estuviera en la primera casilla haría falta encontrar tres parejas de números cuya suma fuera 14, y esto es imposible. Solo hay dos parejas que suman 14 : $9 + 5 = 8 + 6 = 14$.

Siguiendo el razonamiento si el 1 estuviera en la segunda casilla el cuadrado que formaría es:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Resuelve estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + 3z = 0 \\ 2x - 2y - z = 4 \\ x - 3y + 2z = 4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -2y + z = -1 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x - 5y \quad = 7 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + 3z = 0 \\ 2x - 2y - z = 4 \\ x - 3y + 2z = 4 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=-y-3z} \left.\begin{array}{r} 2(-y-3z)-2y-z=4 \\ -y-3z-3y+2z=4 \end{array}\right\} \to - \begin{array}{r} -4y-7z=4 \\ -4y-\ \ z=4 \\ \hline -6z=0 \end{array} \to z=0$

$-4y - z = 4 \xrightarrow{z=0} y = -1$

$x + y + 3z = 0 \xrightarrow{y=-1,\, z=0} x = 1$

La solución del sistema es $x = 1$, $y = -1$ y $z = 0$.

b) $\left.\begin{array}{r} -2y + z = -1 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x - 5y \quad = 7 \end{array}\right\} \xrightarrow{z=2y-1} \left.\begin{array}{r} 2x+y-3(2y-1)=0 \\ x-5y=7 \end{array}\right\} \to - \begin{array}{r} 2x-5y=-3 \\ x-5y=7 \\ \hline x \quad = -10 \end{array}$

$x - 5y = 7 \xrightarrow{x=-10} y = -\dfrac{17}{5}$

$z = 2y - 1 \xrightarrow{y=-\frac{17}{5}} z = -\dfrac{34}{5} - 1 = -\dfrac{39}{5}$

La solución del sistema es $x = -10$, $y = -\dfrac{17}{5}$ y $z = -\dfrac{39}{5}$.

002 Resuelve estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \\ 2x - 3y = 1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ 2x + y = 3 \\ 3x - 4y = -1 \\ -x - 2y = -3 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x = 2y \\ 2x + y = 5 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=2y} 4y + y = 5 \to y = 1$

$y = 1 \xrightarrow{y=2y} x = 2$

$2x - 3y = 1 \xrightarrow{x=2,\, y=1} 4 - 3 = 1$. En este caso, la solución del sistema es válida.

b) $+\begin{array}{r} x - y = 0 \\ 2x + y = 3 \\ \hline 3x \quad = 3 \end{array} \to x = 1 \to y = 1$

$3x - 4y = -1 \xrightarrow{x=1,\, y=1} 3 - 4 = -1$

$-x - 2y = -3 \xrightarrow{x=1,\, y=1} -1 - 2 = -3$

En este caso, la solución del sistema es válida.

ACTIVIDADES

001 **Escribe una matriz que cumpla las siguientes condiciones.**

- **Su dimensión sea 3×2.**
- **$a_{32} = -a_{21} = a_{11} = 1$**
- **$a_{22} = a_{12} = -a_{31} = -2$**

La matriz es: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

002 **Se venden listones con dos calidades y de dos longitudes. Los listones grandes de baja calidad cuestan 0,75 € y 1 € los de alta, mientras que los listones pequeños de baja calidad cuestan 0,45 € y 0,60 € los de alta. Anota estos datos en forma de matriz.**

La matriz será de dimensión 2×2. Las filas indican la calidad; las columnas, el tamaño y los elementos de la matriz, el precio:

$$\begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}75 \\ 0{,}60 & 1 \end{pmatrix}$$

003 **Halla el valor de cada incógnita para que las dos matrices sean iguales.**

$$\begin{pmatrix} x+1 & 3 & 0 \\ z+1 & x+2 & z-1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & y+1 & 0 \\ y+2 & 3 & y \end{pmatrix}$$

Para que las matrices sean iguales deben tener la misma dimensión y ser iguales todos sus elementos.

Las dos matrices son de dimensión 2×3.

$x + 1 = 2 \rightarrow x = 1$ $\qquad z + 1 = y + 2 \rightarrow z = y + 1 \rightarrow z = 3$

$3 = y + 1 \rightarrow y = 2$ $\qquad x + 2 = 3 \rightarrow x = 1$

$0 = 0$ $\qquad z - 1 = y \rightarrow z = 1 + 2 = 3$

Es decir, la solución es $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$.

004 **Escribe un ejemplo de las siguientes matrices.**

a) Una matriz fila con cuatro columnas.

b) Una matriz columna con cuatro filas.

c) Una matriz cuadrada de orden 4.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

005 Escribe matrices que cumplan las siguientes condiciones.

a) Matriz diagonal de orden 4 que cumple que $a_{ii} = 7$.

b) Matriz identidad con tres filas.

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

006 Escribe matrices que cumplan estas condiciones.

a) Diagonal de orden 3.

b) Triangular superior con tres columnas, de forma que los elementos distintos de 0 cumplan que $a_{ij} = i + j$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

007 Realiza la siguiente operación con matrices:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

008 Averigua los elementos que faltan si $A + B = C$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & a & b \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & c & d \\ e & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} f & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & c & d \\ e & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4+c & 5+d \\ 5+e & a+3 & b-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$f = 5$ $\qquad 4 + c = 7 \rightarrow c = 3$ $\qquad 5 + d = 6 \rightarrow d = 1$

$5 + e = 1 \rightarrow e = -4$ $\qquad a + 3 = -1 \rightarrow a = -4$ $\qquad b - 1 = 0 \rightarrow b = 1$

009 Haz la siguiente operación con matrices:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -12 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & 15 & -13 \end{pmatrix}$$

010 Realiza las operaciones indicadas con estas matrices.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

a) $2(A-B)+3C$

b) $(-2)(A-C)-3(B+2C)$

a) $2(A-B)+3C=2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 3\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 15\\ 7 & 0\end{pmatrix}$

b) $(-2)(A-C)-3(B+2C)=(-2)\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ -2 & 4\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -1 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -18\\ 7 & 7\end{pmatrix}$

011 Calcula la siguiente operación con matrices:

$$2\cdot(3\quad 1\quad 4)\cdot 5\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}-3\cdot(3\quad 1\quad 4)\cdot\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$2\cdot(3\quad 1\quad 4)\cdot 5\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}-3\cdot(3\quad 1\quad 4)\cdot\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=(6\quad 2\quad 8)\cdot\begin{pmatrix}0\\ 5\\ -10\end{pmatrix}-(9\quad 3\quad 12)\cdot\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=$$

$$=6\cdot 0+2\cdot 5-8\cdot 10-9\cdot 5+3\cdot 1-12\cdot 0=10-80-45+3=-112$$

012 Halla el valor de x en esta igualdad de matrices.

$$(1\quad -1)\cdot\begin{pmatrix}x\\ 1\end{pmatrix}-(1\quad x\quad 9)\cdot\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=0$$

$$(1\quad -1)\cdot\begin{pmatrix}x\\ 1\end{pmatrix}-(1\quad x\quad 9)\cdot\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=0\rightarrow x-1-(3-x)=0\rightarrow 2x=4\rightarrow x=2$$

013 Realiza los productos que sean posibles entre las matrices A, B y C.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}7 & -6\\ -13 & 11\end{pmatrix}\qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 6\\ -5 & 2 & -8\\ 8 & -3 & 13\end{pmatrix}$$

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}-3 & 12\\ 7 & 0\\ -11 & 2\end{pmatrix}\qquad C\cdot A=\begin{pmatrix}-9 & 4 & -14\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$A\cdot C$ no se puede multiplicar, ya que la dimensión de A es 2×3 y la de C es 2×2.

$C\cdot B$ no se puede multiplicar, pues la dimensión de C es 2×2 y la de B es 3×2.

014 Determina la dimensión de la matriz resultante de esta operación y, después, compruébalo efectuando las operaciones.

$$2\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

La dimensión de la matriz resultante es 2×3.

$$2\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 6 & 0 & 2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}6 & 9 & -1\\ 12 & 15 & 3\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}22 & 25 & -3\\ 42 & 45 & 11\end{pmatrix}$$

015 Comprueba si se cumple que $A\cdot(B+C)=B\cdot A+C\cdot A$, siendo las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Si no es cierto, aplica correctamente la propiedad.

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

La igualdad correcta es: $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 12 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ -9 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

016 Realiza la operación $B\cdot A+C\cdot A$, sacando previamente factor común a la matriz A.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ -1 & 3 & -5\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

¿Qué propiedad has aplicado al sacar factor común?

Para sacar factor común aplicamos la propiedad distributiva por la derecha.

$B\cdot A+C\cdot A=(B+C)\cdot A$

$$(B+C)\cdot A=\left[\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ -1 & 3 & -5\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & -25\\ 8 & 12\end{pmatrix}$$

017 Calcula $(A\cdot B)^t$, siendo A y B las siguientes matrices.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 3\\ 5 & -4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 5 & 8\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 3\\ 5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 5 & 8\end{pmatrix}\right]^t=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 5 & 8\end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 3\\ 5 & -4\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ 1 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 7 & 3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31 & 15 & -40\\ 57 & 24 & -27\end{pmatrix}$$

018 **Realiza esta operación con matrices:**

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}^t \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t \right]$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}^t \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t \right] = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -1 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -4 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 60 \\ 27 & 33 \end{pmatrix}$$

019 **Completa la siguiente matriz para que sea antisimétrica.**

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ c & 0 & -3 \\ 2 & d & e \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ c & 0 & -3 \\ 2 & d & e \end{pmatrix}$ es antisimétrica si: $a = 0, b = -2, c = -1, d = 3, e = 0$.

020 **Estudia si la matriz $A + B$ es simétrica.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ no es simétrica.

021 **Completa los elementos que faltan en la matriz para que sus filas sean linealmente dependientes.**

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & b & 2 \\ -9 & a & 0 & c \end{pmatrix}$$

Para que sus dos filas sean dependientes tienen que ser proporcionales, $F_2 = \lambda F_1$.

$$\left. \begin{array}{r} -9 = 3\lambda \\ a = -\lambda \\ 0 = b\lambda \\ c = 2\lambda \end{array} \right\} \to \left. \begin{array}{l} \lambda = -3 \\ a = 3 \\ 0 = b \\ c = -6 \end{array} \right\} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & b & 2 \\ -9 & a & 0 & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ -9 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

022 **Determina el rango de las siguientes matrices.**

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

a) Ninguna de las tres filas es proporcional a otra.

Comprobamos si alguna fila es combinación lineal de las otras dos:

$$F_1 = \lambda F_2 + \mu F_3 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 1 = 2\lambda \\ -1 = \lambda + \mu \\ 3 = -\lambda + \mu \\ 0 = \lambda - \mu \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda = \dfrac{1}{2} \\ -1 = \dfrac{1}{2} + \mu \\ 3 = -\dfrac{1}{2} + \mu \\ 0 = \dfrac{1}{2} - \mu \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1}{2} \\ \mu = -\dfrac{3}{2} \\ \mu = \dfrac{7}{2} \\ \mu = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Como los valores de μ son diferentes, el sistema no tiene solución. Ninguna fila es combinación lineal de las otras dos, entonces las tres filas son linealmente independientes y, por tanto, el rango de la matriz es 3.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

b) Como $F_2 = 2F_1$ y $F_3 = 3F_1$, todas las filas son proporcionales. Luego el número de filas linealmente independientes es 1 y, por tanto, el rango de la matriz es 1.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} = 1$$

023 **Calcula el rango utilizando el método de Gauss:** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 + \frac{5}{3}F_1]{} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & \dfrac{19}{3} & \dfrac{35}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 + \frac{19}{3}F_2]{} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \dfrac{73}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

024 **Halla el rango mediante el método de Gauss:** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 8 & -3 & -2 & 14 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 8 & -3 & -2 & 14 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - 8F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 21 & -42 & -42 \\ 0 & 7 & -14 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - \frac{1}{3}F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 21 & -42 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 8 & -3 & -2 & 14 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

025 **Calcula, si es posible, la inversa de estas matrices utilizando la definición.**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 2a+4c=0 \\ 2b+4d=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 2(a+2c)=0 \\ 2(b+2d)=1 \end{array}\right\}$

El sistema no tiene solución, luego no existe matriz inversa.

b) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 3a-5c=1 \\ 3b-5d=0 \\ -a+2c=0 \\ -b+2d=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3a-5c=1 \\ 3b-5d=0 \\ a=2c \\ b=2d-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 6c-5c=1 \\ 6d-3-5d=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=5 \\ c=1 \\ d=3 \end{array}\right.$$

Comprobamos que $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ es la matriz inversa:

$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

026 **Halla, si es posible, la inversa de esta matriz:** $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a-3d+g=1 \\ 2b-3e+h=0 \\ 2c-3f+i=0 \\ 3a+d+g=0 \\ 3b+e+h=1 \\ 3c+f+i=0 \\ d=0 \\ e=0 \\ f=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a+g=1 \\ 2b+h=0 \\ 2c+i=3 \\ 3a+g=0 \\ 3b+h=1 \\ 3c+i=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a+g=1 \\ 3a+g=0 \\ 2b+h=0 \\ 3b+h=1 \\ 2c+i=3 \\ 3c+i=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-1 \\ b=1 \\ c=-4 \\ g=3 \\ h=-2 \\ i=11 \end{array}\right.$$

Comprobamos que $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$ es la matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

027 Calcula, por el método de Gauss-Jordan, la inversa de estas matrices.

a) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 12 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1=F_1-2F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_1=\frac{1}{6}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{2}{6} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2+\frac{2}{3}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_1=F_1+21F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 15 & 21 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1=-\frac{1}{3}F_1 \\ F_2=-3F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$

028 Halla, por el método de Gauss-Jordan, la inversa de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-\frac{2}{3}F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_3=F_3-\frac{1}{3}F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{F_1=F_1+\frac{9}{4}F_3 \\ F_2=F_2-\frac{15}{4}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} & -\frac{15}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{F_1=\frac{1}{3}F_1 \\ F_2=\frac{1}{3}F_2 \\ F_3=\frac{9}{4}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{4} \end{array}\right)$

029 **Clasifica las matrices y determina su dimensión.**

$$A = (1 \quad 2 \quad 2) \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$A = (1 \quad 2 \quad 2) \rightarrow$ Matriz fila de dimensión 1×3

$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz columna de dimensión 3×1

$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz cuadrada de orden 3

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz diagonal de orden 2

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz unidad de orden 2

$F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz triangular inferior de orden 3

$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz rectangular de dimensión 2×3

$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz triangular superior de orden 3

$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz triangular inferior de orden 2

030 **Una empresa de autobuses tiene tres líneas: *A*, *B* y *C*.**
El lunes salieron 5 autobuses en la línea *A*, 3 en la *B* y 4 en la *C*. El martes salieron 2 autobuses en la línea *A*, 1 en la *B* y 4 en la *C*. El miércoles salió 1 autobús en la línea *A*, 3 en la *B* y 5 en la *C*. Represéntalo en forma de matriz.

Lo representamos en una matriz de dimensión 3×3. Las filas representan los días de la semana: lunes, martes y miércoles. Las columnas corresponden a las líneas *A*, *B* y *C*, respectivamente. Cada elemento de la matriz es el número de autobuses.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

031 **Una fábrica elabora dos tipos de productos, *X* e *Y*, que vende a tres empresas *A*, *B* y *C*. Inicialmente distribuía 1.000 unidades de cada producto a cada una, pero en este mes la empresa *A* recibió 600 unidades de *X* y 300 de *Y*; la empresa *B* recibió 400 unidades de *X* y 800 de *Y*, y la empresa *C* recibió 900 unidades de *X* y 700 de *Y*. Representa mediante una matriz las disminuciones porcentuales que se han producido en la distribución de los productos a estas empresas.**

Las filas corresponden a cada tipo de empresa, *A*, *B* y *C*, y las columnas corresponden al tipo de producto, *X* e *Y*. Cada elemento de la matriz es la disminución porcentual de la producción.

$$100 - 100 \cdot \frac{600}{1.000} = 40 \qquad 100 - 100 \cdot \frac{300}{1.000} = 70$$

$$100 - 100 \cdot \frac{400}{1.000} = 60 \qquad 100 - 100 \cdot \frac{800}{1.000} = 20 \qquad \begin{pmatrix} 40 & 70 \\ 60 & 20 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$$

$$100 - 100 \cdot \frac{900}{1.000} = 10 \qquad 100 - 100 \cdot \frac{700}{1.000} = 30$$

032 **¿Son triangulares las siguientes matrices? ¿Por qué?**

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ No, porque ni todos los elementos situados por encima de la diagonal principal, ni todos los situados por debajo, son cero.

$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ No, porque no es cuadrada.

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Sí, porque todos los elementos situados por encima de la diagonal son cero.

033 **Pon dos ejemplos de estas matrices:**

a) Matriz columna **c) Matriz diagonal** **e) Matriz triangular superior**
b) Matriz fila **d) Matriz cuadrada** **f) Matriz triangular inferior**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $(3 \quad -2 \quad 9)$ d) $\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

034 Halla los valores de a y b para que las matrices sean iguales.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1-a & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1-a & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow b = 5,\ a = -2$$

035 Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & -9 \end{pmatrix}$$

Comprueba con esas matrices la propiedad conmutativa de la suma.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 12 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 12 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

036 Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

¿Qué relación hay entre $A - B$ y $B - A$?

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -8 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A - B$ y $B - A$ son matrices opuestas.

037 Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Calcula.

a) $A + B - C$
b) $A - B + C$
c) $-A - B + C$
d) $-A + B + C$
e) $A - (B - C)$
f) $C - (A + B)$

a) $A + B - C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A - B + C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

c) $-A - B + C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

d) $-A + B + C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

e) $A - (B - C) = A - B + C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

f) $C - (A + B) = -A - B + C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

038 Determina una matriz X que verifique: $A + X = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$.

$$A + X = B \rightarrow X = B - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

039 Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Realiza, si es posible, los siguientes productos.

a) AB b) BA c) AC d) BC

a) $AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -20 \end{pmatrix}$

b) No se pueden multiplicar B y A, ya que la dimensión de B es 2×3 y la de A es 2×2.

c) No se pueden multiplicar A y C, ya que la dimensión de A es 2×2 y la de C es 3×3.

d) $B \cdot C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

040 Comprueba que, en general, el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa multiplicando estas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 26 & 7 & -20 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -6 \\ 5 & 5 & -19 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

041 Comprueba que se cumple la propiedad distributiva del producto de matrices con respecto de la suma utilizando estas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(B + C) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$$

042 Expresa la condición que tienen que cumplir dos matrices M y N para que pueda realizarse su suma. Y, si lo que pretendemos es multiplicarlas, ¿qué condición deben cumplir las matrices?

(Galicia. Septiembre 2004. Bloque 1. Pregunta 2)

- Para que se puedan sumar dos matrices estas deben tener la misma dimensión.
- Para que se puedan multiplicar dos matrices el número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la segunda.

043 Con las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible:

a) $2A - 3B$ b) $2A \cdot 3B$ c) $A(B + C)$ d) $A - 3B$

a) $2A - 3B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}$

b) $2A \cdot 3B = \begin{pmatrix} 6 & -24 \\ 24 & -48 \end{pmatrix}$

c) $A(B + C) = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 9 & -10 \end{pmatrix}$

d) $A - 3B = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}$

044 Con las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible:

a) ABC b) $2AB$ c) $A(B - C)$ d) $B \cdot 3C$

a) $ABC = (AB)C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -17 \\ 28 & 75 \end{pmatrix}$

b) $2AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 18 & 28 \end{pmatrix}$

c) No se puede realizar esta operación ya que B y C no se pueden restar por no tener la misma dimensión.

d) $B \cdot 3C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 39 \\ 30 & 90 \\ 48 & 135 \end{pmatrix}$

045 Calcula AB y BA, siendo las matrices: $A = (1 \quad -3 \quad -1 \quad 2)$ $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

(La Rioja. Septiembre 2000. Propuesta A. Ejercicio 2)

$$AB = (1 \quad -3 \quad -1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -4$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad -3 \quad -1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 3 & -9 & -3 & 6 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

046 Sea A una matriz $m \times n$.

a) ¿Existe una matriz B tal que BA sea una matriz fila? Si existe, ¿qué dimensión tiene?

b) ¿Se puede encontrar una matriz B tal que AB sea una matriz fila? Si existe, ¿qué dimensión tiene?

c) Busca una matriz B tal que $BA = (0 \quad 0)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(Asturias. Junio 2001. Bloque 2)

a) Para que BA sea una matriz fila, la matriz B tiene que ser una matriz de dimensión $1 \times m$, y la dimensión del producto es $1 \times n$.

b) El número de filas de la matriz AB no depende de la matriz B, sino que es igual al número de filas de la matriz A, que es m. Solo es posible obtener una matriz fila si A es también una matriz fila.

c) La dimensión de la matriz B es $1 \times 3 \rightarrow B = (a \quad b \quad c)$.

$$BA = (a \quad b \quad c) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (a \quad a+b)$$

$$(a \quad a+b) = (0 \quad 0) \rightarrow a = 0, b = 0$$

$$B = (a \quad b \quad c) = (0 \quad 0 \quad c) \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

047 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$:

a) Calcule AB y BA.

b) Compruebe que $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

(Cataluña. Junio 2006. Cuestión 3)

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

Como en este caso, $AB = -BA$, entonces se cumple $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

048 Con las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

calcula $(A+B)^2$ y $A^2 + 2AB + B^2$. ¿Por qué no coinciden los resultados? ¿Cuál sería la fórmula correcta para el cuadrado de una suma de matrices?

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 22 & 31 & -34 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 40 & 10 & -26 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -9 \\ 47 & 32 & -36 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Como el producto de matrices no es conmutativo, el cálculo correcto sería:
$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

Lo comprobamos calculando de nuevo el segundo miembro:

$$A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 20 & 5 & -13 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -5 & 4 & -11 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 22 & 31 & -34 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

049 Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide:

a) Hallar $(A - I)^2$.

b) Calcular A^4 haciendo uso del apartado anterior.

(Madrid. Año 2006. Modelo. Opción B. Ejercicio 4)

a) $(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $(A - I)^2 = A^2 - 2A + I^2 = 0 \to A^2 = 2A - I \to A^4 = (2A - I)^2$

$$A^4 = (2A - I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -4 & -7 & 4 \\ -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

050 Sean $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $N = M + I$, donde I denota la matriz identidad de orden n.

Calcula N^2 y M^3.

(Galicia. Junio 2001. Bloque 1. Pregunta 1)

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

051 Sean A una matriz de dimensión 5×3, B una matriz de dimensión $m \times n$ y C una matriz de dimensión 4×7. Si sabemos que se puede obtener la matriz ABC, ¿cuáles son las dimensiones de B y de ABC?

Para poder obtener el producto, B tiene que tener tantas filas como columnas tenga A y tantas columnas como filas tenga C. Es decir, la dimensión de B es 3×4 y la dimensión del producto ABC es 5×7.

052 **Dadas tres matrices A, B y C, se sabe que ABC es una matriz de dimensión 2×3 y que BC es una matriz de dimensión 4×3. ¿Cuál es el orden de A?**

(Galicia. Junio 2002. Bloque 1. Pregunta 1)

La dimensión de ABC es $2 \times 3 \rightarrow$ El número de filas de A es 2 y el número de columnas de C es 3.

La dimensión de BC es $4 \times 3 \rightarrow$ El número de filas de B es 4 y el número de columnas de C es 3.

Las matrices se pueden multiplicar si el número de columnas de A es igual al número de filas de $B \rightarrow$ La dimensión de A es 2×4.

053 **Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular A^{10}.**

(Madrid. Año 2008. Modelo. Opción B. Ejercicio 3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

054 **Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y sea n un número natural cualquiera.**

Encuentra el valor de A^n para cada n y halla $A^{350} - A^{250}$.

(País Vasco. Junio 2003. Bloque A. Cuestión A)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{350} - A^{250} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1.050 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 750 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 0 \end{pmatrix}$

055 **Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Encuentra la regla del cálculo de las potencias sucesivas de A, es decir, de A^n para cualquier número natural n.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \qquad A^4 = IA = A$$

Así, si dividimos n entre 3 tenemos $n = 3p + q$, donde q, el resto al dividir n entre 3, es un número natural menor que 3.

$$A^n = A^{3p+q} = A^{3p}A^q = IA^q = A^q \quad \text{y} \quad A^q = \begin{cases} A & \text{si } q = 1 \\ A^2 & \text{si } q = 2 \\ I & \text{si } q = 0 \end{cases}$$

056 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, halla A^3, A^5 y A^n.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

057 Calcula $A^{2.000}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = 2^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2^3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En general:

- Si n es un número par resulta: $A^n = 2^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Si n es un número impar resulta: $A^n = 2^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Así, tenemos que: $A^n = 2^{2.000} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

058 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Comprobar que $A^3 - 2A^2 = 0$.

b) Hallar A^n.

(Madrid. Año 2005. Modelo. Opción B. Ejercicio 2)

a) $A^3 - 2A^2 = 0 \rightarrow A^2(A - 2I) = 0$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \qquad A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^2(A - 2I) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A^3 = 2A^2$

$A^4 = AA^3 = A2A^2 = 2A^3 = 2 \cdot 2A^2 = 2^2A^2$

$A^5 = 2^3A^2 \ldots$

En general: $A^n = 2^{n-2}A^2 = 2^{n-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = 2^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

059 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula A^n.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

060 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Para cada número natural n, hallar A^n.
b) Calcular $A^{22} - 12A^2 + 2A$.

(País Vasco. Junio 2006. Bloque A. Cuestión A)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^{22} - 12A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 22a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 12 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$

061 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar A^n para todo entero positivo n.

(Aragón. Junio 2001. Opción A. Cuestión 1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{cases} A & \text{si } n = 1 \\ A^2 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

062 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Halla el valor o los valores de a para que se cumpla la identidad $A^2 + 2A + I = 0$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y 0 la matriz nula de orden 3.

(Aragón. Junio 2000. Opción A. Cuestión 1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2a & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2A + I = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2a & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+2a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \rightarrow a = -1$$

063 Sean A, I y B las matrices dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Contestar razonadamente a la siguiente pregunta: ¿Existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que la igualdad $(A - \lambda I)^2 = B$ sea cierta?

En caso afirmativo, hallar dicho valor de λ.

(País Vasco. Julio 2007. Bloque A. Cuestión A)

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2+2 & -2\lambda+1 & -2\lambda \\ -2\lambda+1 & \lambda^2-2\lambda+2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^2 = B \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda^2+2 & -2\lambda+1 & -2\lambda \\ -2\lambda+1 & \lambda^2-2\lambda+2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & \lambda^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Igualando el elemento a_{13} de las dos matrices: $-2\lambda = -4 \rightarrow \lambda = 2$

Comprobamos el resultado para los demás elementos.

$$\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & -2\lambda+1 & -2\lambda \\ -2\lambda+1 & \lambda^2-2\lambda+2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & \lambda^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda=2} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

064 Demuestra que la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ verifica una ecuación del tipo $A^2+\alpha A+\beta I=0$, determinando α y β (I denota la matriz identidad).

(Galicia. Septiembre 2003. Bloque 1. Pregunta 1)

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \qquad A^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

$$A^2+\alpha A+\beta I=0 \rightarrow \begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}5+2\alpha+\beta & 4+\alpha\\ 4+\alpha & 5+2\alpha+\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r}5+2\alpha+\beta=0\\ 4+\alpha=0\end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases}\alpha=-4\\ \beta=3\end{cases}$$

065 Sean I y A las matrices cuadradas:

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}$$

Calcular, escribiendo las operaciones necesarias:

a) Las matrices A^2 y A^5.

b) Los números reales α y β para los que se verifica $(I+A)^3=\alpha I+\beta A$.

(C. Valenciana. Junio 2008. Bloque 1. Problema 2)

a) $A^2=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I$

$A^5=A^2A^2A=(-I)\cdot(-I)\cdot A=A=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}$

b) $(I+A)^3=(I+A)\cdot(I+A)\cdot(I+A)=(I+A)\cdot(I+2A+A^2)=I+3A+3A^2+A^3=$

$=I+3A+3A^2-A=I+2A-3I=2A-2I$

$(I+A)^3=\alpha I+\beta A$, siendo $\alpha=2$ y $\beta=-2$

066 Calcula la matriz traspuesta de cada una de estas matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 7\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}5 & -4 & 3\\ -4 & 3 & 1\\ 2 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix}0 & 1 & 7\\ -1 & 9 & 3\end{pmatrix}$$

$$A^t=\begin{pmatrix}1\\ 7\\ 2\end{pmatrix} \qquad B^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & 7\end{pmatrix} \qquad C^t=\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ -4 & 3 & 8\\ 3 & 1 & 9\end{pmatrix}$$

$$D^t=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} \qquad E^t=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 9\\ 7 & 3\end{pmatrix}$$

067 Con las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, comprueba que se cumplen las siguientes propiedades.

a) $(A^t)^t = A$

b) $(A+B)^t = A^t + B^t$

c) $(AB)^t = B^tA^t$

a) $(A^t)^t = \begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix} = A$

b) $(A+B)^t = \begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 5\end{pmatrix}$

$A^t + B^t = \begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 5\end{pmatrix}$

c) $(AB)^t = \begin{pmatrix}-3 & -3\\ 12 & 4\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}-3 & 12\\ -3 & 4\end{pmatrix}$

$B^tA^t = \begin{pmatrix}0 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 12\\ -3 & 4\end{pmatrix}$

068 Determina qué matrices son simétricas o antisimétricas, y realiza los cálculos que se indican, si es posible.

$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 5 & 3\\ -2 & 3 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & -3\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $E=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

a) A^tC

b) CD^t

c) $(B+E)^t$

d) DD^t

e) A^tC^t

f) $(3E)^t$

Son simétricas las matrices A y B, y es antisimétrica la matriz C.

a) $A^tC = \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 5 & 3\\ -2 & 3 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & -3\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5 & -4 & -7\\ 1 & 10 & -17\\ 1 & 4 & -5\end{pmatrix}$

b) No se puede multiplicar CD^t ya que la dimensión de C es 3×3 y la de D^t es 2×3.

c) $(B+E)^t = \begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

d) $DD^t = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

e) $A^tC^t = \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 5 & 3\\ -2 & 3 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ -2 & -3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 4 & 7\\ -1 & -10 & 17\\ -1 & -4 & 5\end{pmatrix}$

f) $(3E)^t = \begin{pmatrix}3 & 3\\ -3 & 3\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}3 & -3\\ 3 & 3\end{pmatrix}$

069 **Responde a estas preguntas.**

a) ¿Existe siempre el producto $A^t \cdot A$, siendo A una matriz cualquiera? ¿Por qué?

b) ¿El producto de dos matrices simétricas de la misma dimensión es también una matriz simétrica? ¿Por qué?

a) Sí, porque si la dimensión de A es $m \times n$ entonces la de A^t será $n \times m$, y por tanto, la dimensión de la matriz producto A^tA será $n \times n$.

b) En general, no, porque $(AB)^t = B^tA^t = BA$.

070 **Sean A, B y C tres matrices tales que su producto ABC es una matriz de dimensión 3×2 y su producto AC^t es una matriz cuadrada, siendo C^t la traspuesta de C. Calcula, razonando la respuesta, las dimensiones de A, B y C.**

(Galicia. Septiembre 2006. Bloque 1. Opción 1)

dimensión $(A) = m \times n$ dimensión $(B) = p \times q$ dimensión $(C) = r \times s$

dimensión $(ABC) = 3 \times 2 \rightarrow m = 3$ y $s = 2$, $n = p$ y $q = r$

La matriz AC^t es una matriz cuadrada $\rightarrow n = s$ y $m = r$.

dimensión $(A) = 3 \times 2$ dimensión $(B) = 2 \times 3$ dimensión $(C) = 3 \times 2$

071 **En cada una de las matrices, determina mentalmente cuál es el mayor número de filas y de columnas linealmente independientes.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$ 1 fila y 1 columna

$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow$ 1 fila y 1 columna

$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow$ 2 columnas (1.ª y 2.ª) y 2 filas

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ 2 columnas y 2 filas

$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$ 1 fila y 1 columna

$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$ 1 columna y 1 fila

072 **Calcula el rango de las siguientes matrices.**

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\\ 3 & 6\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & -3\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 porque la segunda columna es proporcional a la primera.

$$B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_2=C_2-4C_1]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 7 & 2\\ 2 & -6 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3=C_3-\frac{2}{7}C_2]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 7 & 0\\ 2 & -6 & \frac{12}{7}\end{pmatrix}$$

Como esta matriz es escalonada por columnas, Rango $(B)=3$.

$$C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & -3\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_2\leftrightarrow C_1]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & -3\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3=F_3-3F_1]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & -3\\ 0 & 2 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3+2F_2]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \text{ luego Rango } (C)=2.$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_2\leftrightarrow C_1]{}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3-4F_1]{}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -5 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3=F_3+5F_2]{}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}\rightarrow \text{Rango } (D)=3.$$

$$E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -4 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

Como esta matriz es escalonada, Rango $(E)=3$.

073 **¿Cuál es el mayor número de columnas linealmente independientes de la matriz** $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$**?**

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3=C_3-2C_1-C_2]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Como el rango por columnas es 2, solo hay dos columnas linealmente independientes.

074 **Sabiendo que el rango de la siguiente matriz es 2, determina el valor de *a*.**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ -11 & -4 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ -11 & -4 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3=C_3-C_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & -8 \\ -11 & -4 & a+11 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3=C_3+4C_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ -11 & -4 & a-5 \end{pmatrix}$$

Para que el rango sea 2, como esta matriz es escalonada por columnas, el término $a-5$ debe ser cero; luego $a=5$.

075 **Obtener el valor de *a* para que el rango de la matriz *A* sea igual a 2.**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & a \end{pmatrix}$$

(La Rioja. Junio 2003. Propuesta A. Ejercicio 1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-4F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -6 & -1 \\ 0 & 7 & -6 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

Para que el rango sea 2, el término $a+1$ tiene que ser cero, luego $a=-1$.

076 **Halla el valor de *k*, si existe, para que el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 5 & k & -10 \\ 1 & 1/3 & -2 \end{pmatrix}$ sea 1.**

La tercera columna es proporcional a la primera, luego el rango es, a lo más, 2.
Para que sea 1, la segunda debe ser proporcional a la primera, pero esto es imposible porque: $\dfrac{1}{-3} \neq \dfrac{1/3}{1}$.
Luego no hay ningún valor de *k* para el cual el rango sea 1.

077 **Discútase, según el valor de *a*, el rango de la matriz:**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

(Castilla y León. Septiembre 2005. Prueba A. Cuestión 2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2=F_2-2F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3+\frac{1}{3}F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & a+\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- Si $a=-\dfrac{1}{3} \rightarrow$ Rango de la matriz *A* es 2.
- Si $a\neq-\dfrac{1}{3} \rightarrow$ Rango de la matriz *A* es 3.

078 Calcula el rango de A, según los valores del parámetro a.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

(Extremadura. Junio 2007. Opción A. Ejercicio 3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - 3F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 8-2a \\ 0 & 0 & 0 & 12-3a \end{pmatrix}$$

- Si $a = 4 \rightarrow$ Rango de la matriz A es 1.
- Si $a \neq 4 \rightarrow$ Rango de la matriz A es 2. El rango no puede ser 3, pues las dos últimas filas de la matriz son proporcionales.

079 Calcule el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro k.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Murcia. Septiembre 2006. Bloque 1. Cuestión A)

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 + 2F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1}]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & k+1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_2 \leftrightarrow C_4]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & k+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

- Si $k = 1 \rightarrow$ Rango de la matriz A es 2.
- Si $k \neq 1 \rightarrow$ Rango de la matriz A es 3.

080 Discute el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ según los valores de k.

(Baleares. Junio 2006. Opción B. Cuestión 4)

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 + F_1 \\ F_3 = F_3 + kF_1}]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & k \\ 0 & 1+3k & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 = F_3 - \frac{1+3k}{5}F_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & k \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5}k^2 - \frac{1}{5}k + 1 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{3}{5}k^2 - \frac{1}{5}k + 1 = 0 \rightarrow 3k^2 + k - 5 = 0 \rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{6}$$

- Si $k = \dfrac{-1+\sqrt{61}}{6}$ o $k = \dfrac{-1-\sqrt{61}}{6} \rightarrow$ Rango de la matriz A es 2.
- Si $k \neq \dfrac{-1+\sqrt{61}}{6}$ y $k \neq \dfrac{-1-\sqrt{61}}{6} \rightarrow$ Rango de la matriz A es 3.

081 Calcula el rango de A según los distintos valores del parámetro real a.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

(Madrid. Junio 2002. Opción A. Ejercicio 2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2 \leftrightarrow C_4]{} \begin{pmatrix} 2 & 2 & a & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -4 & a+4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & a & 0 \\ 5 & 3 & -4 & a+4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=F_2+2F_1 \\ F_3=F_3+5F_1}]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & a-2 & 0 \\ 0 & 18 & -9 & a+4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3=F_3-\frac{9}{4}F_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{9}{4}(a-6) & a+4 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es siempre 3. El parámetro a no puede ser al mismo tiempo igual a 6 e igual a 4, entonces los elementos de la última fila nunca serán todos cero.

082 Discutir, en función del número real m, el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(Castilla y León. Septiembre 2007. Prueba B. Cuestión 1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ -2 & -1 & 2 \\ 1+m & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_1 \leftrightarrow C_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1+m & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3-2F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 0 & m+2 \\ 0 & m-3 & 3-2m \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & m-3 & 3-2m \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}$$

- Si $m=-2 \rightarrow$ Rango $(A)=2$, todos los elementos de la última fila son 0.
- Si $m=3 \rightarrow$ Rango $(A)=2$, las filas 2.ª y 3.ª son proporcionales.
- Si $m \neq -2$ y $m \neq 3 \rightarrow$ Rango $(A)=3$

083 Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$. Determine los valores de m para que los Rango $(A)<3$. ¿Puede ser Rango $(A)=1$ para algún valor de m?

(Cataluña. Año 2006. Serie 3. Cuestión 4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2=F_2-4F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4-m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-mF_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4-m \\ 0 & 0 & m^2-4m+3 \end{pmatrix}$$

$$m^2-4m+3=0 \rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=3 \end{cases}$$

- Si $m = 1$ o $m = 3 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$
- Si $m \neq 1$ y $m \neq 3 \rightarrow$ Rango $(A) = 3$

El rango de la matriz no puede ser 1, ya que sus tres filas no son proporcionales para ningún valor del parámetro m.

084 **Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$. Halla los valores de m para los que el rango de A es menor que 3.**

(Andalucía. Junio 2008. Opción B. Ejercicio 3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - mF_1 \\ F_3 = F_3 - mF_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m^2 - m & m^2 - m \\ 0 & 0 & m^2 - m \end{pmatrix}$$

$$m^2 - m = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

- Si $m = 0$ o $m = 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 1$
- Si $m \neq 0$ o $m \neq 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 3$

085 **Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ b+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}$.**

a) Prueba que, para cualquier valor de a y b, Rango $(A) \geq 2$.

b) Determina un par de valores reales de a y b para que Rango $(A) = 3$, y otro par de valores a y b de forma que Rango $(A) = 4$.

(Cantabria. Junio 2001. Bloque 2. Opción A)

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ b+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_2 - \frac{b+1}{a}F_1]{} \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & -\dfrac{b(b+1)}{a} & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 = F_3 - \frac{b+1}{a}F_2]{} \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & -\dfrac{b(b+1)}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{b(b+1)^2}{a^2} & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \leftrightarrow C_4]{} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b(b+1)}{a} \\ 0 & 0 & a & \dfrac{b(b+1)^2}{a^2} \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_4 = F_4 - \frac{b}{a}F_3]{} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b(b+1)}{a} \\ 0 & 0 & a & \dfrac{b(b+1)^2}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & a - \dfrac{b^2(b+1)^2}{a^3} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 = a^3F_4]{} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b(b+1)}{a} \\ 0 & 0 & a & \dfrac{b(b+1)^2}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & a^4 - b^2(b+1)^2 \end{pmatrix}$$

a) • Si $a \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) \geq 3$.

• Si $a = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 \\ b+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ para cualquier valor de b al menos

hay 2 filas distintas de cero y que no son proporcionales $\rightarrow$ Rango $(A) \geq 2$.

b) • Si $a = \sqrt{2}$ y $b = 1$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b(b+1)}{a} \\ 0 & 0 & a & \dfrac{b(b+1)^2}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & a^4 - b^2(b+1)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{a=\sqrt{2},\, b=1} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango $(A) = 3$, pues $a^4 - b^2(b+1)^2 = 0$.

• Si $a = 1$ y $b = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b(b+1)}{a} \\ 0 & 0 & a & \dfrac{b(b+1)^2}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & a^4 - b^2(b+1)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{a=1,\, b=0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En este caso el rango de la matriz es 4.

086 **Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.**

Vemos que ambas tienen rango máximo, o sea 2. Determinar los valores de c tales que la matriz $A + cB$ no tenga rango 2. ¿Cuál es el rango que tienen las respectivas matrices suma?

(Aragón. Septiembre 2003. Opción B. Cuestión 1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4(1+c) & 2-c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4(1+c) & 2-c \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_2 - 4F_1]{} \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 0 & 6-c \end{pmatrix}$$

• Si $c = -1$ o $c = 6$, el rango de la matriz no es 2.

– Si $c = -1 \rightarrow$ Rango de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ es 1.

– Si $c = 6 \rightarrow$ Rango de la matriz $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 28 & -4 \end{pmatrix}$ es 1.

• Si $c \neq -1$ y $c \neq 6 \rightarrow$ Rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4(1+c) & 2-c \end{pmatrix}$ es 2.

087 Sean A y B las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Es fácil comprobar que ambas tienen el máximo rango, o sea 3. Pero ¿qué ocurre si las combinamos linealmente? En concreto, estudia el rango de la matriz $A+\lambda B$ según los valores del parámetro λ.

(Aragón. Septiembre 2002. Opción A. Cuestión 1)

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\lambda&1+\lambda\\\lambda&2+\lambda&0\\1&1&2\lambda\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&\lambda&1+\lambda\\\lambda&2+\lambda&0\\1&1&2\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2=F_2-\lambda F_1\\F_3=F_3-F_1}]{}\begin{pmatrix}1&\lambda&1+\lambda\\0&2+\lambda-\lambda^2&-\lambda-\lambda^2\\0&1-\lambda&\lambda-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_2=C_2+C_3]{}\begin{pmatrix}1&1+2\lambda&1+\lambda\\0&2-2\lambda^2&-\lambda-\lambda^2\\0&0&\lambda-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1+2\lambda&1+\lambda\\0&2-2\lambda^2&-\lambda-\lambda^2\\0&0&\lambda-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1+2\lambda&1+\lambda\\0&2(1+\lambda)(1-\lambda)&-\lambda(1+\lambda)\\0&0&\lambda-1\end{pmatrix}$$

- Si $\lambda=1\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}=2$

- Si $\lambda=-1\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=2$

- Si $\lambda\neq 1$ y $\lambda\neq -1\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}1&\lambda&1+\lambda\\\lambda&2+\lambda&0\\1&1&2\lambda\end{pmatrix}=3$

088 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\\2&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-2&2&0\\3&-1&1\end{pmatrix}$, ¿es cierto que

Rango (AB) = Rango $(A)\cdot$ Rango (B)? Justifica tu respuesta.

(Canarias. Junio 2002. Opción A. Cuestión 3)

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\\2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&2&0\\3&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&0\\-5&3&-1\\2&2&2\end{pmatrix}$$

Rango $(AB)\leq 3$, Rango $(A)=2$ y Rango $(B)=2\rightarrow$ Es imposible que se verifique la igualdad.

089 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Encuentra dos matrices, B y C, de tamaño 3×2 y de rango 2, tales que el rango de AB sea 2 y el rango de AC sea 1.

(Navarra. Septiembre 2007. Grupo 1. Opción B)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Respuesta abierta.

- Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$ Rango $(AB) = 2$
- Si $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Rango $(AC) = 1$

090 Una matriz cuadrada de orden 3 tiene rango 2.

a) ¿Cuál es el rango de la matriz que resulta al quitar una fila?

b) ¿Cuál es el rango de la matriz que resulta al eliminar una columna?

c) ¿Qué sucedería en los casos anteriores si el rango de la matriz inicial fuera 3?

a) El rango de la matriz es 2 si eliminamos una fila que depende linealmente de las otras y es 1 si las dos filas que dejamos son proporcionales.

b) El rango de la matriz es 2 si eliminamos una columna que depende linealmente de las otras y es 1 si las dos columnas que dejamos son proporcionales.

c) En este caso, el rango siempre sería 2, porque las dos líneas que dejamos son siempre linealmente independientes.

091 Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos el método de reducción o de Gauss-Jordan:

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = \frac{1}{2}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 + F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_2 = \frac{1}{2}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 + 2F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right)$

La inversa de la matriz A es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-2F_1]{F_2=F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{F_2=\frac{1}{2}F_2 \\ F_3=-\frac{1}{3}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1=F_1-F_3 \\ F_2=F_2-2F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -5/6 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 \end{array}\right)$

La inversa de la matriz B es: $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ -5/6 & 1/2 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

c) Como la matriz C es la unidad, su inversa es ella misma.

092 **Halla la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.**

(Navarra. Junio 2004. Grupo 1. Opción B)

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-2F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{F_1=F_1-2F_2 \\ F_3=F_3+3F_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1=F_1+F_3 \\ F_2=F_2-F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$

La matriz inversa de A es: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

093 **Calcular, si es posible, la inversa de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$**

(Murcia. Junio 2008. Bloque 1. Cuestión A)

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2+F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{F_1=F_1-\frac{2}{5}F_2 \\ F_3=F_3+\frac{2}{5}F_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4/5 & 3/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 & 2/5 & 2/5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1=F_1-4F_3 \\ F_2=F_2-15F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & -1/5 & 2/5 & 2/5 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{F_2=\frac{1}{5}F_2 \\ F_3=-5F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1/5 & -2 & -2 & -5 \end{array}\right)$

La matriz inversa de A es: $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

094 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $(A^{-1})^{-1}$ y $B^{-1}B$.

¿Por qué se obtiene este resultado?

Por la definición de matriz inversa: $(A^{-1})^{-1}A^{-1} = I$; multiplicando a la derecha por A los dos miembros, se obtiene $(A^{-1})^{-1} = A$.

Por definición de matriz inversa: $B^{-1}B = I$.

095 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

b) Calcula $(B^2)^{-1}$, de la manera más rápida posible.

a) $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ $\qquad B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

b) $(B^2)^{-1} = (BB)^{-1} = B^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

096 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcula $(A^tA^{-1})^2\, A$.

(Andalucía. Junio 2000. Opción A. Ejercicio 4)

$$(A^tA^{-1})^2 A = A^tA^{-1}A^tA^{-1}A = A^tA^{-1}A^t$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 - 3F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 + F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2 = -\frac{1}{2}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^tA^{-1}A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 11/2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

097 Comprueba que la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz

$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(Baleares. Junio 2005. Opción B. Cuestión 4)

Para comprobar que una matriz es la inversa de otra, basta con multiplicar las matrices y ver que el resultado es la identidad.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

098 Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $m \in \mathbb{R}$. Determina para qué valores de m la matriz A es regular (inversible).

(Cantabria. Septiembre 2007. Bloque 2. Opción B)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & m & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m & 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - mF_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2m & 1-m^2 & -m & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1 = F_1 + 2F_2 \\ F_3 = F_3 - 2mF_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & m & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-m^2 & m & -2m & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 = F_1 - \frac{m}{1-m^2}F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/(1-m^2) & 2/(1-m^2) & -m/(1-m^2) \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-m^2 & m & -2m & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_2 = -F_2 \\ F_3 = \frac{1}{1-m^2}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/(1-m^2) & 2/(1-m^2) & -m/(1-m^2) \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m/(1-m^2) & -2m/(1-m^2) & 1/(1-m^2) \end{array}\right)$$

La inversa, si existe, de la matriz A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/(1-m^2) & 2/(1-m^2) & -m/(1-m^2) \\ 1 & -1 & 0 \\ m/(1-m^2) & -2m/(1-m^2) & 1/(1-m^2) \end{pmatrix}$$

Para poder calcular la inversa tenemos que dividir entre $(1 - m^2)$, luego esta expresión no puede ser cero. Es decir, la matriz A es invertible cuando $(1 - m^2) \neq 0 \rightarrow m \neq 1$ y $m \neq -1$.

099 Estudia para qué valores de m la matriz siguiente tiene inversa:

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$$

En caso de ser posible, halla su inversa para $m = -1$.

(Castilla-La Mancha. Año 2005. Supuesto 4. Bloque 3. Pregunta B)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} m & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} m & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1 = F_1 - \frac{1}{m-1}F_3 \\ F_2 = F_2 - \frac{1}{m-1}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} m & 0 & 0 & m/(m-1) & 0 & -1/(m-1) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(m-1) & 1 & -1/(m-1) \\ 0 & 0 & m-1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1 = \frac{1}{m_1}F_1 \\ F_3 = \frac{1}{m-1}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/(m-1) & 0 & -1/(m(m-1)) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(m-1) & 1 & -1/(m-1) \\ 0 & 0 & 1 & -1/(m-1) & 0 & 1/(m-1) \end{array}\right)$$

100 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Estudia, en función de los valores reales de k, si la matriz BA tiene inversa.

b) Haz lo mismo para la matriz AB.

(Asturias. Septiembre 2006. Bloque 1)

a) $BA = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \begin{pmatrix} 3 & k+2 \\ k & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_2 - \frac{k}{3}F_1]{} \begin{pmatrix} 3 & k+2 \\ 0 & -\frac{k^2}{3} - \frac{2k}{3} - 1 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{k^2}{3} - \frac{2k}{3} - 1 = 0 \rightarrow k^2 + 2k + 3 = 0$$

$$\rightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

Como BA es una matriz de orden 2 y su rango siempre es 2, tiene matriz inversa siempre.

b) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3k & k & 2k-2 \\ k & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - 3kF_1 \\ F_3 = F_3 - kF_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2k & -4k-2 \\ 0 & -k & -2k-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 = F_3 - \frac{1}{2}F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2k & -4k-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como AB es una matriz de orden 3 y su rango es $2 < 3$, esta matriz no tiene inversa.

101 Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde m es un número real. Encuentra los valores de m para los que AB tiene inversa.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2005. Bloque 3. Pregunta B)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2m & 2+2m \\ 1-m & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $m = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene inversa ya que su rango es 1.
- Si $m = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene inversa ya que su rango es 1.
- Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$ el rango de la matriz es 2, y por tanto, la matriz tiene inversa.

102 En la matriz A determina a, b y c para que su traspuesta coincida con su inversa. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ a & b & c\end{pmatrix}$

$A^t = A^{-1} \rightarrow AA^t = AA^{-1} \rightarrow AA^t = I$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ a & b & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1/\sqrt{2} & b\\ 0 & 1/\sqrt{2} & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & \dfrac{b+c}{\sqrt{2}}\\ a & \dfrac{b+c}{\sqrt{2}} & a^2+b^2+c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Multiplicando e igualando términos se obtiene este sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned}a&=0\\ \frac{b+c}{\sqrt{2}}&=0\\ a^2+b^2+c^2&=1\end{aligned}\right\}\xrightarrow{a=0}\left.\begin{aligned}b&=-c\\ b^2+c^2&=1\end{aligned}\right\}\xrightarrow{a=0,\,b=-c} c^2+c^2=1\rightarrow c=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Hay dos soluciones: $c=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, b=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, a=0 \qquad c=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, a=0$

103 Comprueba y contesta.

a) Si A es una matriz no singular y $(B-C)A=0$, siendo 0 la matriz nula, comprueba que $B=C$.

b) Según el resultado del apartado anterior, cuando $A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, la única matriz X que verifica la ecuación $XA=0$ es la matriz nula. ¿Es cierta esta afirmación? ¿Por qué?

Nota: Matriz singular es aquella que no tiene inversa.

(Asturias. Junio 2003. Bloque 2)

a) $(B-C)A=0 \rightarrow BA-CA=0 \rightarrow BA=CA \rightarrow BAA^{-1}=CAA^{-1} \rightarrow B=C$

b) La afirmación es falsa, pues el apartado a) requiere la condición de que la matriz A sea no singular, sin embargo, en este caso Rango $(A)=1$, con lo que la matriz es singular.

$$\begin{pmatrix}2 & -6\\ -1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[F_2=F_2+\frac{1}{2}F_1]{}\begin{pmatrix}2 & -6\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

104 Despeja la matriz X de la ecuación $AX=B$ y calcúlala siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

Se multiplican por la izquierda por la inversa de A los dos miembros de la ecuación, que existe por ser Rango $(A)=2$.

$A^{-1}AX=A^{-1}B \rightarrow X=A^{-1}B$

Por lo tanto: $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

105 Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, hállese razonadamente la matriz B sabiendo que $BP = A$.

(Castilla y León. Junio 2006. Prueba B. Cuestión 1)

$$BP = A \to B = AP^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3+F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1=F_1-F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1=F_1+F_3 \\ F_2=F_2-F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$B = AP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

106 Calcula la matriz A que haga que: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

(La Rioja. Septiembre 2006. Propuesta A. Ejercicio 3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-\frac{5}{2}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1=F_1-2F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1=\frac{1}{2}F_1 \\ F_2=2F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

107 Calcula la matriz X tal que $A^2X = A$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(Extremadura. Septiembre 2007. Opción B. Ejercicio 3)

$$A^2X = A \to AX = I \to X = A^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1=F_1+2F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2=-F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

108 Hallar una matriz X tal que $A^{-1}XA = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(Madrid. Junio 2005. Opción B. Ejercicio 2)

$$A^{-1}XA = B \rightarrow XA = AB \rightarrow X = ABA^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 + \frac{2}{3}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 + 3F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 = F_1 + 3F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1 = \frac{1}{3}F_1 \\ F_2 = -3F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$X = ABA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

109 Determina, si existe, una matriz A que verifique: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 - \frac{1}{3}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1 = -F_1 \\ F_2 = \frac{1}{3}F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 + 2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 - \frac{1}{2}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2 = \frac{1}{4}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & -2 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5/6 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

110 Encuentra una matriz X que verifique $AX + B = I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad.

$$AX + B = I \rightarrow AX = I - B \rightarrow X = A^{-1}(I - B)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = -F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$X = A^{-1}(I - B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

111 Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

Calcula la matriz X que verifica $AX+B=I$, donde I representa la matriz identidad.

(Baleares. Septiembre 2007. Opción A. Cuestión 1)

$$AX+B=I\rightarrow AX=I-B\rightarrow X=A^{-1}(I-B)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2=F_2-2F_1]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&3&0&-2&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1=F_1+\frac{1}{3}F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1/3&1/3&0\\0&3&0&-2&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=F_1-F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/3&1/3&-1\\0&3&0&-2&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2=\frac{1}{3}F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/3&1/3&-1\\0&1&0&-2/3&1/3&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$X=A^{-1}(I-B)=\begin{pmatrix}1/3&1/3&-1\\-2/3&1/3&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}1/3&1/3&-1\\-2/3&1/3&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/3&1&-2/3\\-2/3&0&1/3\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

112 Resuelve la ecuación matricial $XA+B=C$, donde $A=\begin{pmatrix}0&3&0\\2&0&1\\0&-3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&-2&1\\5&1&-3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&0&5\\-1&4&-6\end{pmatrix}$.

$$XA+B=C\rightarrow XA=C-B\rightarrow X=(C-B)A^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&3&0&1&0&0\\2&0&1&0&1&0\\0&-3&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\leftrightarrow F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&1&0&1&0\\0&3&0&1&0&0\\0&-3&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3=F_3+F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&1&0&1&0\\0&3&0&1&0&0\\0&0&2&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1=F_1-\frac{1}{2}F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&-1/2&1&-1/2\\0&3&0&1&0&0\\0&0&2&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1=\frac{1}{2}F_1\\F_2=\frac{1}{3}F_2\\F_3=\frac{1}{2}F_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/4&1/2&-1/4\\0&1&0&1/3&0&0\\0&0&1&1/2&0&1/2\end{array}\right)$$

$$X=(C-B)A^{-1}=\left[\begin{pmatrix}1&0&5\\-1&4&-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&-2&1\\5&1&-3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-1/4&1/2&-1/4\\1/3&0&0\\1/2&0&1/2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3&2&4\\-6&3&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1/4&1/2&-1/4\\1/3&0&0\\1/2&0&1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}41/12&-3/2&11/4\\1&-3&0\end{pmatrix}$$

113 Resuelve la ecuación matricial $AX + C = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(Galicia. Septiembre 2005. Bloque 1. Pregunta 1)

$$AX + C = B \to AX = B - C \to X = A^{-1}(B - C)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 + 4F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 = -F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$X = A^{-1}(B - C) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$

114 Razona si existe la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y, en caso afirmativo, calcúlala.

Resuelve la ecuación matricial $AX + 2A = I$, donde X es una matriz de orden 3 e I es la matriz identidad de orden 3.

(Castilla-La Mancha. Año 2007. Supuesto 3. Bloque 3. Pregunta A)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_1 = C_1 + 2C_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \text{Rango } (A) = 3 \to \text{La matriz } A \text{ tiene inversa.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 - 2F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1 = F_1 - F_2 \\ F_3 = F_3 + 2F_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = -F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AX + 2A = I \to AX = I - 2A \to X = A^{-1}(I - 2A)$$

$$X = A^{-1}(I - 2A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

115 Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7\\2\\-2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y $E=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$. Calcular $M=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ para que verifique la ecuación $(AB^t+C)M=E$.

(Castilla y León. Junio 2007. Prueba B. Problema 1)

$$(AB^t+C)M=E$$

$$\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot(7\quad 2\quad -2)+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\cdot M=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}\rightarrow\left[\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&4&-4\\21&6&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\cdot M=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&5&-4\\21&6&-5\end{pmatrix}\cdot M=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}\rightarrow M=\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&5&-4\\21&6&-5\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}7&2&-2&1&0&0\\14&5&-4&0&1&0\\21&6&-5&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_2=F_2-2F_1\\F_3=F_3-3F_1}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}7&2&-2&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1=F_1-2F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}7&0&-2&5&-2&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=F_1+2F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}7&0&0&-1&-2&2\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1=\frac{1}{7}F_1]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/7&-2/7&2/7\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$M=\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&5&-4\\21&6&-5\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/7&-2/7&2/7\\-2&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12/7\\1\\-3\end{pmatrix}$$

116 Sean X una matriz 2×2, I la matriz identidad 2×2 y $B=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$. Hallar X sabiendo que $BX+B=B^2+I$.

(Castilla y León. Septiembre 2007. Prueba A. Cuestión 1)

$$BX+B=B^2+I\rightarrow B(X+I)=B^2+I\rightarrow X+I=B^{-1}(B^2+I)\rightarrow X=B^{-1}(B^2+I)-I$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\0&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=F_1-F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&1&-1\\0&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=\frac{1}{2}F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1/2&-1/2\\0&1&0&1\end{array}\right)$$

$$X=B^{-1}(B^2+I)-I=\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}4&3\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&3\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5/2&1/2\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2&1/2\\0&1\end{pmatrix}$$

117 Resolver la ecuación matricial $B(2A+I) = AXA + B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Canarias. Septiembre 2007. Opción A. Cuestión 3)

$$B(2A+I) = AXA + B \rightarrow 2BA + B - B = AXA \rightarrow 2B = AX \rightarrow 2A^{-1}B = X$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 + F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$X = 2A^{-1}B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

118 Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica $XA^2 + BA = A^2$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Madrid. Septiembre 2007. Opción B. Ejercicio 1)

$$XA^2 + BA = A^2 \rightarrow XA^2 = A^2 - BA \rightarrow XA = A - B \rightarrow X = I - BA^{-1}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2A$$

$$X = I - BA^{-1} \rightarrow I - 2AA^{-1} = I - 2I = -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

119 Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Halla x para que se cumpla $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$.

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1+2x & 2x \\ 4 & 1+2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2x+2 & 2x+2 \\ 6 & 2x+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+2 = 8 \\ 2x+6 = 12 \end{array}\right\} \rightarrow x = 3$$

120 Resolver los sistemas matriciales.

a) $\left.\begin{array}{r} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \\ 3Y - X = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

a)
$$\begin{array}{r} 2X+Y=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\\ +\quad X-Y=\begin{pmatrix}1&3\\5&-4\end{pmatrix}\\ \hline 3X=\begin{pmatrix}2&3\\4&-3\end{pmatrix}\end{array} \to X=\begin{pmatrix}2/3&1\\4/3&-1\end{pmatrix}$$

$$Y=\begin{pmatrix}2/3&1\\4/3&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&3\\5&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3&-2\\-11/3&3\end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{array}{r} X+Y=\begin{pmatrix}2&4\\-4&2\end{pmatrix}\\ +\quad -X+3Y=\begin{pmatrix}-2&8\\12&2\end{pmatrix}\\ \hline 4Y=\begin{pmatrix}0&12\\-16&4\end{pmatrix}\end{array} \to Y=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}0&12\\-16&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\\-4&1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}2&4\\-4&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&3\\-4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$$

121 Resolver el siguiente sistema matricial:

$$\left.\begin{array}{r} 2A+3B=\begin{pmatrix}4&8\\7&11\end{pmatrix}\\ 5A-2B=\begin{pmatrix}10&1\\8&18\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

(Canarias. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 3)

$$\left.\begin{array}{r} 2A+3B=\begin{pmatrix}4&8\\7&11\end{pmatrix}\\ 5A-2B=\begin{pmatrix}10&1\\8&18\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{r} 4A+6B=2\cdot\begin{pmatrix}4&8\\7&11\end{pmatrix}\\ +\quad 15A-6B=3\cdot\begin{pmatrix}10&1\\8&18\end{pmatrix}\\ \hline 19A=2\cdot\begin{pmatrix}4&8\\7&11\end{pmatrix}\end{array}+3\cdot\begin{pmatrix}10&1\\8&18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}38&19\\38&76\end{pmatrix}\to A=\begin{pmatrix}2&1\\2&4\end{pmatrix}$$

$$2B=5A-\begin{pmatrix}10&1\\8&18\end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix}2&1\\2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10&1\\8&18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4\\2&2\end{pmatrix}\to B=\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}$$

122 Razona si las soluciones de las siguientes ecuaciones matriciales son correctas. Consideramos 0 como la matriz nula.

a) $X^2=0 \longrightarrow$ Solución $X=0$

b) $XA=0 \longrightarrow$ Solución $X=0$

c) $X^2=AX \rightarrow$ Solución $X=A$

a) No es correcta porque hay matrices no nulas que multiplicadas por sí mismas dan la matriz cero; por ejemplo, las matrices de orden 2 del tipo $\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Si la matriz A tiene inversa, la única solución es $X = 0$. Si no existe A^{-1} puede haber otras soluciones, tal como sucede en el caso anterior.

c) Escribiendo la ecuación en la forma:

$$X^2 - AX = 0 \rightarrow X(X - A) = 0$$

se ve que puede haber otras soluciones.

123 **Si una matriz cuadrada A verifica $A^2 + 7A = I$, siendo I la matriz unidad, calcula A^{-1} en función de A.**

$$A^2 + 7A = I \rightarrow A(A + 7I) = I \rightarrow A^{-1} = A + 7I$$

124 **Sean A una matriz cuadrada de orden n tal que $A^2 = A$, I la matriz unidad de orden n y $B = 2A - I$. Calcula B^2.**

$$B = 2A - I \rightarrow B^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I = 4A - 4A + I = I$$

125 **Si A y B son dos matrices cuadradas de orden 3 y A es diagonal, ¿se verifica $AB = BA$ para cualquier matriz B? ¿Cómo debería ser A para que se cumpliera esta igualdad?**

No siempre se verifica $AB = BA$; por ejemplo:

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos cómo debe ser A para que se verifique siempre la igualdad:

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab_{11} & ab_{12} & ab_{13} \\ bb_{21} & bb_{22} & bb_{23} \\ cb_{31} & cb_{32} & cb_{33} \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab_{11} & bb_{12} & cb_{13} \\ ab_{21} & bb_{22} & cb_{23} \\ ab_{31} & bb_{32} & cb_{33} \end{pmatrix}$$

La igualdad de estas matrices implica $a = b = c$. Luego la matriz A debe ser de la forma $A = aI$.

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar A^{10}.

b) Calcular la matriz inversa de B.

c) En el caso particular $k = 0$, hallar B^{10}.

(Madrid. Septiembre 2005. Opción B. Ejercicio 4)

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ para $n \geq 3 \rightarrow A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 - kF_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & t-k^2 & 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{F_1 = F_1 - (t-k^2)F_3 \\ F_2 = F_2 - kF_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -k & k^2-t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2-t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En general: $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nt \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 Sea A la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Para cada número natural n, hallar A^n.

Calcular $A^{22} - 12A^2 + 2A$.

(País Vasco. Junio 2006. Bloque A. Cuestión A)

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^{22} - 12A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 22a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 12 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} = -9I$$

3 Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, hállense las matrices X que satisfacen $XC + A = C + A^2$.

(Castilla y León. Junio 2005. Prueba B. Cuestión 1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

La matriz C tiene inversa por ser de rango 3.

$$XC + A = C + A^2 \rightarrow XC = C + A^2 - A \rightarrow X = (C + A^2 - A)C^{-1}$$

$$\rightarrow X = CC^{-1} = I \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 Encuentra las matrices A y B, sabiendo que verifican las ecuaciones matriciales:

$$\left.\begin{aligned} 2A + 3B &= M \\ -A + B &= N \end{aligned}\right\}, \text{ siendo } M = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

(Castilla-La Mancha. Año 2005. Supuesto 3. Bloque 3. Cuestión B)

$$\left.\begin{aligned} 2A + 3B &= \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ -A + B &= \begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$$+ \left.\begin{aligned} 2A + 3B &= \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ -2A + 2B &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$$5B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 0 & 19 \\ 52 & 13 & -26 \\ 26 & 11 & 39 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 26/5 & 0 & 19/5 \\ 52/5 & 13/5 & -26/5 \\ 26/5 & 11/5 & 39/5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2A+3B=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ -3A+3B=3\cdot\begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix} \end{array}\right\} -$$

$$5A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -19 & 10 & -11 \\ -33 & 8 & 24 \\ -19 & -9 & -26 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} -19/5 & 10/5 & -11/5 \\ -33/5 & 8/5 & 24/5 \\ -19/5 & -9/5 & -26/5 \end{pmatrix}$$

5 Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que verifica que $A^3 - I = 0$, con I matriz identidad y 0 matriz nula.

b) Calcula A^{13}.

c) Basándote en los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas, halla la matriz X que verifica la igualdad $A^2X + I = A$.

(Asturias. Septiembre 2007. Bloque 1)

a) $$A^2=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego se verifica que $A^3 - I = 0$.

b) $A^3 = I \rightarrow A^{12} = I \rightarrow A^{13} = A^{12}A = A$

c) $A^2X + I = A \rightarrow A^2X = A - I \rightarrow A^3X = A(A - I)$

$$X=A^2-A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6 Sean A, B e I las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\qquad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiar si existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para el cual se satisfaga $(A - \lambda I)^2 = B$.

(Aragón. Junio 2008. Bloque 1. Opción A)

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & 1-2\lambda & -2\lambda \\ 1-2\lambda & 2-2\lambda+\lambda^2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & \lambda^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Igualamos elemento a elemento y resolvemos las ecuaciones que resultan.

$$\left.\begin{array}{r} \lambda^2+2=6 \\ 1-2\lambda=-3 \\ -2\lambda=-4 \\ 2-2\lambda+\lambda^2=2 \\ \lambda^2+1=5 \end{array}\right\} \rightarrow \lambda = 2$$

7 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$:

a) Estudia, según los valores de m, el rango de A.

b) Para $m = -1$, calcula la matriz X que verifica $XA + A = 2I$, siendo I la matriz unidad de orden 3.

(Galicia. Septiembre 2007. Bloque 1. Opción 1)

a) $\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & -1 & m+1 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$

Si $m = 0 \rightarrow$ Rango $A = 1$, solo hay una fila con elementos distintos de 0.

Si $m \neq 0 \rightarrow$ Rango $A = 3$.

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Existe A^{-1} por ser Rango $(A) = 3$.

$XA + A = 2I \rightarrow XA = 2I - A \rightarrow X = (2I - A)A^{-1}$

$$\rightarrow X = 2A^{-1} - I = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

2 Determinantes

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El tío Petros y la conjetura de Goldbach

En nuestra primera noche juntos, mientras cenábamos en el comedor de la universidad para conocernos mejor, le dije con naturalidad [a mi compañero de habitación]:

–Puesto que eres un genio de las matemáticas, Sammy, estoy seguro de que podrás probar con facilidad que todo número par mayor que 2 es la suma de dos primos.

Se echó a reír.

–Si pudiera probar eso, tío, no estaría aquí cenando contigo; ya sería catedrático, quizás incluso tendría la medalla Fields, el Nobel de las matemáticas.

Antes de que terminara de hablar, en un instante de revelación, adiviné la horrible verdad. Sammy la confirmó con sus siguientes palabras:

–La afirmación que acabas de hacer es la conjetura de Goldbach, ¡uno de los problemas irresueltos más difíciles de todos los campos de las matemáticas!

Mis reacciones pasaron por las fases denominadas (si no recuerdo mal lo que aprendí en Psicología Elemental en la universidad) «las cuatro etapas del duelo»: negación, ira, depresión y aceptación.

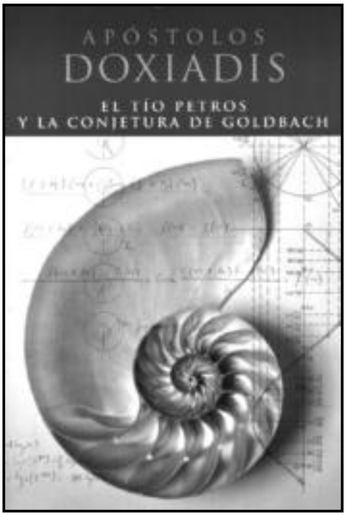
De ellas, la primera fue la que duró menos.

–No… ¡no es posible! […]

–¿Qué quieres decir con que no es posible? –preguntó–. ¡Lo es! La conjetura de Goldbach, que así se llama la hipótesis, pues nunca ha sido demostrada, es que todos los números pares son la suma de dos primos. Lo afirmó por primera vez un matemático llamado Goldbach en una carta dirigida a Euler. Aunque se ha demostrado que es verdad incluso en números primos altísimos, nadie ha conseguido formular una prueba general. […]

Mi nuevo compañero de cuarto, totalmente estupefacto ante el hecho de que una hipótesis de teoría de números pudiera provocar semejante arrebato de pasión mediterránea, me rogó que le contara qué me pasaba; pero yo no estaba en condiciones de dar explicaciones..

APÓSTOLOS DOXIADIS



El tío Petros y la conjetura de Goldbach

Apóstolos Doxiadis

Petros Papachristos vivía en una casa a las afueras de Atenas, retirado del mundo, sin mujer ni hijos, ocupado sólo en cuidar el jardín y jugar al ajedrez. Había sido un matemático notable, aunque para sus dos hermanos menores, que mantenían con su esfuerzo la empresa heredada del padre, era el «fiasco de la familia». En cambio, uno de sus sobrinos, el narrador de la historia contenida en esta novela, lo admiraba por su pasada reputación. Cuando acabó el penúltimo curso del bachillerato, un día le preguntó si también él podría llegar a ser un buen matemático. El tío Petros le contestó:

–No quiero verte haciendo unos estudios que te conducirán al fracaso y la desdicha. En consecuencia, te pido que me hagas la firme promesa de que no te convertirás en matemático a menos que descubras que tienes un talento extraordinario. ¿Aceptas?

El joven acepta el desafío que consiste en resolver a lo largo del verano sin consultar los libros el siguiente problema: demostrar que todo entero par mayor que 2 es igual a la suma de dos primos.

Después de llenar durante los meses estivales cientos de cuartillas que acabaron en la papelera, el joven no logró demostrar esa sencilla conjetura. Admitió su incapacidad y, cumpliendo su promesa, se matriculó en la licenciatura de Económicas, en una de las mejores universidades norteamericanas. En su tercer año, le tocó compartir habitación con Sammy Epstein, un muchacho famoso entre los estudiantes del primer ciclo porque era un prodigio de las matemáticas. Su primer encuentro con él es el que se describe en el texto extraído de la novela.

Cuando el joven descubre la «broma» que le ha gastado su tío, decide vengarse y ésa es la trama de la segunda parte de esta maravillosa novela, en la que se narra muy bien la lucha de una persona por construir matemáticas: sus tanteos, sus desánimos, sus éxitos y sus fracasos.

Halla los números primos que cumplen la conjetura de Goldbach para los números pares 4 y 8 y forma una matriz de orden 2 con ellos. A continuación, calcula el valor de la expresión $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ para esa matriz, para su traspuesta y para la que resulta de sumarle a la primera columna la segunda. ¿Qué observas? ¿Por qué crees que ocurre esto?

Respuesta abierta. Por ejemplo: $4 = 1 + 3 \qquad 8 = 1 + 7$

La matriz que forman estos números primos es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

Así: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 7 - 3 = 4$

La matriz traspuesta es: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

Entonces: $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 7 - 3 = 4$

La matriz que resulta de sumarle a la primera columna la segunda es: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$

Así: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 28 - 24 = 4$

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 **Comprueba si existen combinaciones lineales entre las filas de estas matrices.**

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Para comprobarlo estudiamos si: $F_1 = k_1F_2 + k_2F_3$

Consideramos los elementos de las columnas 1 y 3 ya que los de la segunda son todos nulos, y por tanto, verifican cualquier combinación.

$$\left.\begin{array}{r} -1 = 5k_1 + 3k_2 \\ 2 = -2k_1 - 2k_2 \end{array}\right\} \rightarrow k_1 = 1 \quad k_2 = -2$$

Entonces: $F_1 = F_2 - 2F_3 \rightarrow$ existe una combinación lineal entre las filas de esta matriz.

b) Para comprobarlo estudiamos si: $F_1 = k_1F_2 + k_2F_3 + k_3F_4$

Tomamos los elementos de las tres primeras columnas:

$$\left.\begin{array}{r} -2 = -3k_1 - k_2 - 4k_3 \\ 0 = 2k_1 + 2k_2 \\ 1 = k_1 + 2k_3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2 = -3k_1 - k_2 - 4k_3 \\ 0 = 2k_1 + 2k_2 \\ 0 = -k_1 - k_2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} k_1 = -k_2 \\ k_3 = -\dfrac{1}{2}k_1 + \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Si $k_1 = 1 \rightarrow k_2 = -1 \rightarrow k_3 = 0 \rightarrow F_1 = F_2 - F_3$

Esta combinación lineal entre las filas también se verifica con los elementos de la última columna, por tanto, existe una combinación entre las filas de esta matriz.

002 **Calcula la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, y comprueba que se cumple que $AA^{-1} = I$ y que $A^{-1}A = I$.**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES

001 Calcula el valor de los determinantes de estas matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

a) $|A| = -24 - 7 = -31$

b) $|A| = 30 - 6 - 20 - 4 = 0$

002 Calcula x para que estos determinantes valgan cero.

a) $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 8 & x^2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & x & 2 \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix}$

a) $-2x^2 + 8 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

b) $3x^2 - 2 - 2x - 6 = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

003 Halla el determinante de la matriz traspuesta de estas matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) $|A^t| = |A| = -10 + 4 = -6$

b) $|A^t| = |A| = 8 + 24 - 4 = 16$

004 Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -1$, calcula:

a) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$

b) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -1$

c) $\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$

005 Calcula el determinante de A y, a partir de él, halla $|B|$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 8 & 10 & 14 \\ -8 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -60 - 56 + 42 - 24 = -98$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 8 & 10 & 14 \\ -8 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -8 & 10 & 14 \\ 8 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-98) = 196$$

006 Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -2$, calcula:

a) $\begin{vmatrix} a & -2b \\ c & -2d \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -b & a \\ -d & c \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 3b \\ 0 & 3d \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} a & -2b \\ c & -2d \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 3b \\ 0 & 3d \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} -b & a \\ -d & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -2$

007 Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$, calcula $\begin{vmatrix} a & b+2a-c & c \\ d & e+2d-f & f \\ g & h+2g-i & i \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} a & b+2a-c & c \\ d & e+2d-f & f \\ g & h+2g-i & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+2a & c \\ d & e+2d & f \\ g & h+2g & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$$

008 Halla estos determinantes.

a) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & -2a \\ b & -2b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -a & 3a \\ -b & 3b \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} a & -2a \\ b & -2b \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} -a & 3a \\ -b & 3b \end{vmatrix} = 0$

009 Calcula estos determinantes.

a) $\begin{vmatrix} a & d & a+d \\ b & e & b+e \\ c & f & c+f \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & 7 & -a \\ b & 5 & -b \\ c & 1 & -c \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} a & d & a+d \\ b & e & b+e \\ c & f & c+f \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} a & 7 & -a \\ b & 5 & -b \\ c & 1 & -c \end{vmatrix} = 0$

010 Comprueba que las dos matrices cumplen que $|AB| = |A| \cdot |B|$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |AB| = 36$$

$$\left.\begin{array}{l} |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \\ |B| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -12 \end{array}\right\} \rightarrow |A| \cdot |B| = 36$$

011 Determina el menor complementario de a_{21}.

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

a) $\alpha_{21} = 1$

b) $\alpha_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10$

012 Halla los elementos cuyo adjunto es negativo.

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A_{12} = -1, A_{21} = -3$ y $A_{22} = -1$

b) $A_{11} = -1, A_{21} = -1, A_{23} = -2, A_{32} = -2$ y $A_{33} = -2$

013 Resuelve estos determinantes, aplicando la definición y desarrollando por alguna de sus columnas.

a) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 12 \end{vmatrix}$

a) Utilizando la definición: $|A| = -21 - 4 = -25$

Desarrollando por la primera columna: $|A| = (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 21 = -25$

b) Utilizando la definición: $|A| = 15 + 7 - 6 + 10 = 26$

Desarrollando por la segunda columna:

$$|A| = 5(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 25 + 1 = 26$$

c) Utilizando la definición: $|A| = -24 - 7 = -31$

Desarrollando por la primera columna: $|A| = -2 \cdot 12 + 7 \cdot (-1)^{2+1} \cdot 1 = -31$

014 Resuelve estos determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-13) = 41$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 = -8$

015 Resuelve los siguientes determinantes de orden 4.

a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 9 & -2 \\ -1 & -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 9 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -55$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$

016 Calcula x para que se cumpla que el resultado de este determinante sea -20.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & x & x \end{vmatrix} = -20$$

$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & -2 \\ x-1 & x+3 & -x & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ x-1 & x+3 & -x \end{vmatrix} = 16x + 44$

$16x + 44 = -20 \rightarrow x = -4$

017 Halla todos los menores de esta matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Menores de orden 1: 0, 2, −3, −1, −3, −3, 2, 0, −2, 0, 3, −2, −1, −2, 0 y −1

Menores de orden 2: $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 6, \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -9, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -3,$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -3, \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -6, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -5,$

$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -9, \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4, \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4,$

$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6, \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -4, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3,$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4, \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -6, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4,$

$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 9, \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4,$

$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2, \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -6, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -4$ y $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$

Menores de orden 3: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 28, \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6,$

$\begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -5, \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -13,$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -9, \begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 7, \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3,$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -18, \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -4, \begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -9,$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -24, \begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -1, \begin{vmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 12,$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 9 \text{ y } \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 17$$

Menor de orden 4:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 15$$

018 **Calcula el rango de estas matrices.**

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

019 **Calcula el rango de estas matrices.**

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 3.

b) $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 3.

020 **Calcula x para que el rango de estas matrices sea 3.**

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & x & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & x & 2 & -3 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Para que el rango de la matriz sea 3, el otro menor de orden 3 tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & x \end{vmatrix} = 6x - 36 \neq 0 \rightarrow x \neq 6$$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 32 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 3 para cualquier valor de x.

021 **Determina la matriz de los adjuntos de las siguientes matrices.**

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\text{Adj}\,(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\text{Adj}\,(B) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\text{Adj}\,(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

022 **Comprueba que se cumple que $A \cdot \text{Adj}\,(A)^t = |A| \cdot I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.**

$|A| = -4$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \\ 12 & 9 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

023 **Calcula la matriz inversa de estas matrices.**

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{Adj}\,(A)^t = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \\ 12 & 9 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ -3 & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

b) $$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\,\text{Adj}\,(B)^t = \frac{1}{22} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 & 2 \\ 12 & -2 & -4 & -8 \\ 11 & -11 & -11 & 0 \\ -21 & 9 & 7 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{22} & -\frac{5}{22} & \frac{1}{22} & \frac{1}{11} \\ \frac{6}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{4}{11} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{21}{22} & \frac{9}{22} & \frac{7}{22} & -\frac{4}{11} \end{pmatrix}$$

024 **Calcula x para que estas matrices tengan inversa. Determina la inversa cuando exista.**

a) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 3 & x+1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ 2 & 0 & 1\\ 5 & x & x\end{pmatrix}$

a) $|A|=\begin{vmatrix}2 & 0 & -2\\ 3 & x+1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=4x+8$

La matriz A tiene inversa si $|A|\neq 0 \to x\neq -2$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\,\text{Adj}\,(A)^t=\frac{1}{4x+8}\cdot\begin{pmatrix}x & 2 & 2x+2\\ -4 & 4 & -4\\ -x-4 & 2 & 2x+2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{4x+8} & \dfrac{1}{2x+4} & \dfrac{x+1}{2x+4}\\ -\dfrac{1}{x+2} & \dfrac{1}{x+2} & -\dfrac{1}{x+2}\\ -\dfrac{x+4}{4x+8} & \dfrac{1}{2x+4} & \dfrac{x+1}{2x+4}\end{pmatrix}\text{ si } x\neq -2$$

b) $|B|=\begin{vmatrix}3 & -1 & -2\\ 2 & 0 & 1\\ 5 & x & x\end{vmatrix}=-5x-5$

La matriz B tiene inversa si $|B|\neq 0 \to x\neq -1$

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\,\text{Adj}\,(B)^t=\frac{1}{-5x-5}\cdot\begin{pmatrix}-x & -x & -1\\ -2x+5 & 3x+10 & -7\\ 2x & -3x-5 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{5x+5} & \dfrac{x}{5x+5} & \dfrac{1}{5x+5}\\ \dfrac{2x-5}{5x+5} & -\dfrac{3x+10}{5x+5} & \dfrac{7}{5x+5}\\ -\dfrac{2x}{5x+5} & \dfrac{3x+5}{5x+5} & -\dfrac{2}{5x+5}\end{pmatrix}\text{ si } x\neq -1$$

025 **Calcula los siguientes determinantes.**

a) $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}a & 2\\ b & -3\end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}a-4 & 2\\ 6 & a-3\end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix}12 & -4\\ -9 & 3\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}x & x^2\\ 1 & x\end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix}a+1 & a-1\\ 1-a & a+1\end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=1$ c) $\begin{vmatrix}a & 2\\ b & -3\end{vmatrix}=-3a-2b$ e) $\begin{vmatrix}a-4 & 2\\ 6 & a-3\end{vmatrix}=a^2-7a$

b) $\begin{vmatrix}12 & -4\\ -9 & 3\end{vmatrix}=0$ d) $\begin{vmatrix}x & x^2\\ 1 & x\end{vmatrix}=0$ f) $\begin{vmatrix}a+1 & a-1\\ 1-a & a+1\end{vmatrix}=2a^2+2$

026 Calcula *a*, *b*, *c*, *d*… para que se cumplan las igualdades.

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & a \end{vmatrix} = 26$ c) $\begin{vmatrix} c & 3c-1 \\ 4 & c \end{vmatrix} = 32$ e) $\begin{vmatrix} \sqrt{e} & 2 \\ 2 & \sqrt{e-6} \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} b & 4 \\ 3b & -3 \end{vmatrix} = 45$ d) $\begin{vmatrix} \frac{1}{d} & -\frac{2}{d} \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 7$ f) $\begin{vmatrix} sen\ f & cos\ f \\ cos\ f & -sen\ f \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & a \end{vmatrix} = 4a + 6 = 26 \rightarrow a = 5$

b) $\begin{vmatrix} b & 4 \\ 3b & -3 \end{vmatrix} = -15b = 45 \rightarrow b = -3$

c) $\begin{vmatrix} c & 3c-1 \\ 4 & c \end{vmatrix} = c^2 - 12c + 4 = 32 \rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ c = 14 \end{cases}$

d) $\begin{vmatrix} \frac{1}{d} & -\frac{2}{d} \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = \frac{14}{d} = 7 \rightarrow d = 2$

e) $\begin{vmatrix} \sqrt{e} & 2 \\ 2 & \sqrt{e-6} \end{vmatrix} = \sqrt{e^2 - 6e} - 4 = 0 \rightarrow e = 8$

f) $\begin{vmatrix} sen\ f & cos\ f \\ cos\ f & -sen\ f \end{vmatrix} = -sen^2\ f - cos^2\ f = -1 \neq 0 \rightarrow$ No tiene solución.

027 Obtén el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 17 & 9 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ x+1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & 2 & 4 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ -b & c & a \\ -c & a & b \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 11$ d) $\begin{vmatrix} a & 2 & 4 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 11$ e) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ x+1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4x$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 17 & 9 \end{vmatrix} = 0$ f) $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ -b & c & a \\ -c & a & b \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

028 Halla los valores reales de a, b, c y d para que se cumplan las igualdades.

a) $\begin{vmatrix} 3 & a & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} = 2$

b) $\begin{vmatrix} -2 & b & -1 \\ b & 1 & b \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -5$

c) $\begin{vmatrix} c-1 & c+2 & 0 \\ c & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -197$

d) $\begin{vmatrix} d & d^2 & d-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ d & 0 & d \end{vmatrix} = -18$

a) $\begin{vmatrix} 3 & a & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3a = 2 \rightarrow a = 2$

b) $\begin{vmatrix} -2 & b & -1 \\ b & 1 & b \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = b^2 + 5b - 1 = -5 \rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ b = -4 \end{cases}$

c) $\begin{vmatrix} c-1 & c+2 & 0 \\ c & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = c^2 + 23c + 3 = -197 \rightarrow$ No tiene solución.

d) $\begin{vmatrix} d & d^2 & d-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ d & 0 & d \end{vmatrix} = -d - 2d^3 = -18 \rightarrow d = 2$

029 Calcula el valor del determinante de la matriz $A + B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(Navarra. Septiembre 2005. Grupo 1. Opción B)

$$A + B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow |A + B| = 1$$

030 Calcula el valor del determinante de la matriz AB, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 13 & -1 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 17 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Navarra. Septiembre 2004. Grupo 1. Opción B)

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 34 \\ 11 & -16 & 231 \\ 9 & -4 & 108 \end{pmatrix} \rightarrow |AB| = 10$$

031 ¿Qué relación deben guardar m y n para que el determinante $\begin{vmatrix} m & -1 & 4 \\ n & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ sea nulo?

$$\begin{vmatrix} m & -1 & 4 \\ n & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 20n - 45 - 15m = 0 \rightarrow 4n = 9 + 3m$$

032 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprueba si se verifican las siguientes igualdades. Si alguna se verifica, decide si se trata de alguna propiedad general de los determinantes.

a) $|2A| = 2|A|$

b) $|A + B| = |A| + |B|$

c) $|C - 2B| = |C| - 2|B|$

d) $|AB| = |A| \cdot |B|$

a) $|2A| = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 44 \qquad 2|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 11 = 22$

La igualdad no se cumple.

b) $|A + B| = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -15 \qquad |A| + |B| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 - 14 = -3$

La igualdad no se cumple.

c) $|C - 2B| = \begin{vmatrix} 10 & -11 \\ -10 & 1 \end{vmatrix} = -100 \qquad |C| - 2|B| = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 6 - 2(-14) = 34$

La igualdad no se cumple.

d) $|AB| = \begin{vmatrix} 9 & 17 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -154 \qquad |A| \cdot |B| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 \cdot (-14) = -154$

La igualdad se cumple porque es una de las propiedades de los determinantes.

033 Observa que si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$, se cumple que $|A + B| = |A| + |B|$.

¿Es siempre cierto para cualesquiera dos matrices cuadradas de la misma dimensión? En caso afirmativo, justifícalo y, en caso negativo, facilita un contraejemplo.

$$|A + B| = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$|A| + |B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$$

La igualdad se cumple en este caso pero no siempre, el apartado b) del ejercicio anterior es un contraejemplo.

034 Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

Comprueba que si realizamos las siguientes operaciones, su valor no varía.

a) $F_2 + 2F_3$ b) $C_1 - 3C_3$ c) $F_3 - F_2 + F_1$ d) $C_2 - 3C_1 + 2C_3$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 34$$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 8 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 34$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 10 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 34$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 34$ d) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 14 & 0 \\ 5 & -14 & 2 \end{vmatrix} = 34$

035 Calcula cada uno de estos determinantes para comprobar que:

$$\begin{vmatrix} a+1 & 3 & 0 \\ b+2 & 1 & 4 \\ 3+c & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ b & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ c & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+1 & 3 & 0 \\ b+2 & 1 & 4 \\ 3+c & 2 & -1 \end{vmatrix} = -a - 1 + 36 + 12c - 8a - 8 + 3b + 6 = 33 - 9a + 3b + 12c$$

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ b & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ c & 2 & -1 \end{vmatrix} = (36 - 9a + 3b) + (12c - 3) = 33 - 9a + 3b + 12c$$

036 Si M es una matriz cuadrada y $|M| = 6$, ¿qué puedes decir del determinante de M^3? ¿Y del determinante de $2M$?

$|M^3| = |M| \cdot |M| \cdot |M| = |M|^3 = 6^3 = 216$

Si n es el orden de la matriz cuadrada M entonces: $|2M| = 2^n|M| = 2^n \cdot 6 = 2^{n+1} \cdot 3$

037 ¿Qué propiedades de los determinantes se han empleado en cada una de las igualdades siguientes?

a) $\begin{vmatrix} a+b & 3a \\ c+d & 3c \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a+b & a \\ c+d & c \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 31 & 23 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 342 & 513 & 214 \\ 34 & 51 & 21 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

a) Propiedad 3 — Propiedad 5 — Propiedad 2
b) Propiedad 5 ($F_1 - 10F_2$)
c) Propiedad 5 ($F_1 - 10F_2$; $F_2 - 10F_3$)
d) Propiedad 9 — Propiedad 6

038 **Demuestra, sin calcular el valor de los determinantes, que el primero es múltiplo de 6 y el segundo de 5.**

a) $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 21 \\ 5 & 2 & -3 \\ 6 & 8 & -12 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 4 & 21 & 2 \\ 11 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 21 \\ 5 & 2 & -3 \\ 6 & 8 & -12 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & -1 \\ 6 & 8 & -4 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 4 & 21 & 2 \\ 11 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 7 & -1 \\ 25 & 21 & 2 \\ 15 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 5 & 21 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

039 **Sabiendo que** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$**, determina sin desarrollarlos el valor de los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -5 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 = 30$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$

c) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -5 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$

d) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = -10$

040 Siendo $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 8$, determina sin desarrollar:

a) $\begin{vmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a-3b & b \\ c-3d & d \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} c & d \\ a+2c & b+2d \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6 \cdot 8 = 48$

c) $\begin{vmatrix} a-3b & b \\ c-3d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 8$

b) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -8$

d) $\begin{vmatrix} c & d \\ a+2c & b+2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -8$

041 Conocido que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcula el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(Canarias. Junio 2007. Opción A. Cuestión 3)

$$\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} a & -b & c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

042 Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$, determina sin desarrollar el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d/3 & e/3 & f/3 \\ g & h & i \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2b & c+3a & a/5 \\ 2e & f+3d & d/5 \\ 2h & i+3g & g/5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ \frac{d}{3} & \frac{e}{3} & \frac{f}{3} \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{d}{3} & \frac{e}{3} & \frac{f}{3} \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

b) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$$

c) $\begin{vmatrix} 2b & c+3a & \frac{a}{5} \\ 2e & f+3d & \frac{d}{5} \\ 2h & i+3g & \frac{g}{5} \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} b & c+3a & \frac{a}{5} \\ e & f+3d & \frac{d}{5} \\ h & i+3g & \frac{g}{5} \end{vmatrix} = \frac{2}{5} \cdot \begin{vmatrix} b & c+3a & a \\ e & f+3d & d \\ h & i+3g & g \end{vmatrix} = \frac{2}{5} \cdot \begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix} =$

$$= -\frac{2}{5} \cdot \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = \frac{2}{5} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{5} \cdot 6 = \frac{12}{5}$$

043 **Justifica sin desarrollar que los siguientes determinantes son nulos.**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 5 & 4 & -10 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 9 & 14 & 3 \end{vmatrix}$

a) El determinante es nulo porque: $C_3 = -2C_1$

b) El determinante es nulo porque: $F_3 = F_1 + F_2$

c) El determinante es nulo porque:

$$C_3 = \frac{1}{2}C_1 + C_2 \rightarrow \begin{vmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

d) El determinante es nulo porque:

$$F_3 = 3F_2 - 2F_1 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 9 & 14 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

044 **Demuestra sin desarrollar que los siguientes determinantes son nulos.**

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2d & b+2e & c+2f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2d & b+2e & c+2f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} =$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

b) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x+y & x-z & y-z \\ z & z-x & z-y \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$$= 2(x-z)(y-z) \cdot \begin{vmatrix} x+y & 1 & 1 \\ z & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

045 Aplicando propiedades de los determinantes, comprueba que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

046 Trata de convertir el siguiente determinante en el determinante de una matriz triangular, y así demostrar la igualdad:

$$\begin{vmatrix} a & a+b & b \\ b & a & b \\ 2a & 3a & a+b \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

$$\begin{vmatrix} a & a+b & b \\ b & a & b \\ 2a & 3a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+b & b \\ b & a & b \\ a & 2a-b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & a+b & b \\ 0 & a & b \\ 0 & 2a-b & a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & a & b \\ 0 & a-b & b \\ 0 & a-b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & a & b \\ 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

047 Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene determinante n, averigua el valor del determinante de las siguientes matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}$$

(Cantabria. Junio 2000. Bloque 2. Opción A)

$$|B| = \begin{vmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9a & 6b & 3c \\ 3g & 2h & i \\ 6d & 4e & 2f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9a & 6b & 3c \\ 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3a & 2b & c \\ 3d & 2e & f \\ 3g & 2h & i \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 36n$$

048 Sea A la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$.

Sea B la matriz que resulta al realizar en A las siguientes transformaciones: primero se multiplica A por sí misma; después, se cambian de lugar la fila segunda y la tercera, y finalmente, se multiplican todos los elementos de la segunda columna por -2.

Calcular el determinante de la matriz B, usando para ello las propiedades de los determinantes.

(País Vasco. Junio 2007. Bloque A. Cuestión A)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 34 & 102 \\ 14 & 90 & 282 \\ 36 & 250 & 804 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 6 & -68 & 102 \\ 36 & -500 & 804 \\ 14 & -180 & 282 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 6 & -68 & 102 \\ 36 & -500 & 804 \\ 14 & -180 & 282 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 34 & 102 \\ 36 & 250 & 804 \\ 14 & 90 & 282 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 34 & 102 \\ 14 & 90 & 282 \\ 36 & 250 & 804 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= 2 \cdot \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 24 \end{vmatrix} \right)^2 = 2 \cdot \left(\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 24 \end{vmatrix} \right)^2 = 2 \cdot \left(2 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right)^2 = 2 \cdot 12^2 = 288$$

049 Sea A una matriz cuadrada de orden 3.

a) Si sabemos que el determinante de la matriz $2A$ es $|2A| = 8$. ¿Cuánto vale el determinante de A? Escribe la propiedad de los determinantes que hayas usado para obtener este valor.

b) Calcula para qué valores de x se cumple que $|2A| = 8$, siendo A la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{pmatrix}$.

(Extremadura. Septiembre 2007. Opción A. Ejercicio 3)

a) $|2A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \rightarrow |A| = 1$

Si en una matriz cuadrada multiplicamos por un mismo número todos los elementos de una misma fila (o columna), su determinante queda multiplicado por ese número.

b) $|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 2x + 1$

$|2A| = 8 \rightarrow |A| = 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

050 Halla el valor de los siguientes determinantes, desarrollando por la fila o columna que más te interese.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -5 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -5 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & -5 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & -5 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 34$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -2(48 + 4 - 6) = -92$$

051 Dado el determinante $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}$, calcúlalo:

a) Usando la regla de Sarrus.

b) Desarrollando por los elementos de la primera columna.

a) $$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 7 + 6 - 9 - 84 = -80$$

b) $$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -9 + 2(-39) + 7 = -80$$

052 Obtén el valor del determinante $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$:

a) Mediante la regla de Sarrus.

b) *Haciendo ceros* en la tercera fila y desarrollando por ella.

a) $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 60 - 3 + 24 - 8 - 10 + 54 = 117$$

b) $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -17 & -13 \\ 2 & -8 & -13 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & -13 \\ -8 & -13 \end{vmatrix} = 221 - 104 = 117$$

053 Calcula el valor del determinante de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -1\\ -2 & 2 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

(Navarra. Septiembre 2006. Grupo 1. Opción B)

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 1 & -1\\ -2 & 2 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-1+2=1$$

054 Averigua, sin realizar ninguna operación, el valor que debe tener a para que $\begin{vmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ -3 & 0 & a & 2\\ 2 & 3 & -4 & 6\\ 5 & 3 & -10 & 4\end{vmatrix}$ se anule.

$$F_2=F_2+F_4-F_3\rightarrow\begin{vmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & 0 & a-6 & 0\\ 2 & 3 & -4 & 6\\ 5 & 3 & -10 & 4\end{vmatrix}=0\rightarrow a=6$$

055 Halla el valor de a que hace que la matriz: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & -1 & a\end{pmatrix}$ no sea regular.

(Navarra. Junio 2006. Grupo 1. Opción B)

Una matriz A no es regular si $|A|=0$.

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & -1 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & a+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & a+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & a+2\\ 0 & 2 & -a\\ 1 & -1 & a+2\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}0 & a+2\\ 2 & -a\end{vmatrix}=0\rightarrow a=-2$$

056 Comprueba que $\begin{vmatrix}x+2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & x+2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & x+2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(x+1)^3$.

$$\begin{vmatrix}x+2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & x+2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & x+2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & x+1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x+1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+1 & 0 & 0\\ 0 & x+1 & 0\\ 0 & 0 & x+1\end{vmatrix}=(x+1)^3$$

057 Comprueba que la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -3 & 4 \\ x^2 & 4 & 9 & 16 \\ x^3 & 8 & -27 & 64 \end{vmatrix} = 0$ tiene solo tres soluciones sin necesidad de calcular el determinante. ¿Cuáles son?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -3 & 4 \\ x^2 & 4 & 9 & 16 \\ x^3 & 8 & -27 & 64 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 2-x & -3-x & 4-x \\ x^2 & 4-x^2 & 9-x^2 & 16-x^2 \\ x^3 & 8-x^3 & -27-x^3 & 64-x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & -3-x & 4-x \\ 4-x^2 & 9-x^2 & 16-x^2 \\ 8-x^3 & -27-x^3 & 64-x^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x)(3+x)(4-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2+x & 3-x & 4+x \\ x^2+2x+4 & -x^2+3x-9 & x^2+4x+16 \end{vmatrix}$$

Las tres soluciones son: $x = 2$, $x = -3$, $x = 4$.

058 Desarrolla el determinante y comprueba que es nulo.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

059 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{pmatrix}$. Calcular el valor de su determinante en función de a.

(Asturias. Septiembre 2002. Bloque 1)

$$\begin{vmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{vmatrix} = a^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= a^4 \cdot \left(-\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = a^4 \cdot (1+4) = 5a^4$$

060 Obtener, en función de a, b y c, el determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{pmatrix}$$

(La Rioja. Septiembre 2007. Propuesta A. Ejercicio 1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1+a & -a & -a & -a \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & -a & -a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -abc \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -abc$$

061 En este ejercicio los números x, y, z y u son todos distintos de cero. Justificar, sin efectuar su desarrollo, que el siguiente determinante vale 0.

$$P(x) = \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ u & u & u \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix}$$

(Canarias. Junio 2003. Opción A. Cuestión 3)

$$\begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ u & u & u \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = u \cdot \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = \frac{u}{x} \cdot \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{x}{y} & \frac{x}{z} \end{vmatrix} = \frac{u}{xy} \cdot \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ y & x & \frac{xy}{z} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{u}{xyz} \cdot \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = 0$$

062 Averiguar según el valor de a el número de raíces reales que tiene la ecuación.

$$\begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

(Cantabria. Septiembre 2000. Bloque 2. Opción B)

$$\begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a-x^2 & x^2-a & 0 & 0 \\ a-x^2 & 0 & x^2-a & 0 \\ a-x^2 & 0 & 0 & x^2-a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x^2+3a & a & a & a \\ 0 & x^2-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-a \end{vmatrix} = (x^2+3a)(x^2-a)^3 = 0$$

- Si $a = 0 \rightarrow x^8 = 0 \rightarrow$ La ecuación tiene una única solución real ($x = 0$).
- Si $a > 0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones reales ($x = \pm\sqrt{a}$)
- Si $a < 0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones reales ($x = \pm\sqrt{-3a}$)

063 Se considera la función:

$$f(x) = \begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Sabiendo que $f(0) = -3$ y $f(1) = f(-1)$, determinar a y b.

(Cantabria. Junio 2000. Bloque 2. Opción B)

$$\text{Si } f(0) = -3 \rightarrow \begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3b \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3b = -3 \rightarrow b = -1$$

$$\text{Así: } f(x) = \begin{vmatrix} a & -1 & -2a & -3 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$f(1) = \begin{vmatrix} a & -1 & -2a & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2a & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= a + (-4 - 2a) = -4 - a$$

$$f(-1) = \begin{vmatrix} a & -1 & -2a & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2a & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= a(-1) + (-4 + 2a) = a - 4$$

$$-4 - a = a - 4 \rightarrow a = 0$$

064 Sea A una matriz cuadrada de orden 2 verificando que $2A^2 = A$. Calcular razonadamente los posibles valores del determinante de A.

(Castilla y León. Junio 2001. Prueba A. Cuestión 1)

$$|A| = |2 \cdot A^2| = 2^2|A^2| = 4|A|^2$$

$$|A| = 4|A|^2 \rightarrow 4|A|^2 - |A| = 0 \rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ 4|A| - 1 = 0 \rightarrow |A| = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

065 Estudia el rango de estas matrices.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 8 & 11 & -11 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 24 & 3 & 19 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -8 & 12 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 & 3 \\ 4 & -8 & -24 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

b) $\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ -8 & 12 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 12 & -18 \end{vmatrix} = 0 \qquad 6 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 1.

c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 8 & 11 & -11 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

d) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -39 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 3.

e) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 24 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

f) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

066 **Calcular el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.**

(Castilla y León. Junio 2008. Prueba B. Cuestión 2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -4 & -8 & 0 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 7 & 14 & 0 & -21 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

067 **Los rangos de estas matrices son 2, 3 y 4. Averigua, sin realizar operaciones, cuál corresponde a cada una.**

a) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) 3 b) 2 c) 4

068 Comprueba que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ tiene rango 2. Añade dos filas que no sean nulas ni iguales a las anteriores de modo que el rango siga siendo 2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz es 2.}$$

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

069 Dada la matriz $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, añade una columna de modo que el rango sea 3. Demuéstralo.

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -6 & 9 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -6 & 9 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz es 3.}$$

070 Comprueba que la siguiente matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -6 & -2 & 3 & -1 \\ 12 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ es de rango 2.

Encuentra dos columnas linealmente independientes, y expresa las otras dos como combinación lineal de las primeras.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 3 \\ 12 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -6 & -2 & -1 \\ 12 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & -1 \\ 12 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz es 2.}$$

Respuesta abierta. Por ejemplo: Las columnas C_2 y C_3 son linealmente independientes.

$C_1 = 3C_2$ $\qquad$ $C_4 = 2C_2 + C_3$

071 ¿Para qué valor de m el rango de esta matriz es 2? $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & m & 6 \\ -5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

Para que el rango de la matriz sea 2, el menor de orden 3 tiene que ser igual a 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & m & 6 \\ -5 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -7m - 120 + 72 + 30m - 18 + 112 = 0$$
$$\rightarrow 23m + 46 = 0 \rightarrow m = -2$$

Si $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

072 **Obtener el valor de *a* para que el rango de la matriz *A* sea igual a 2.**

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 0 & -1\\ 4 & -1 & 6 & a\end{pmatrix}$$

(La Rioja. Junio 2003. Propuesta A. Ejercicio 1)

Para que el rango de la matriz sea 2, los menores de orden 3 tienen que ser iguales a 0.

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 0\\ 4 & -1 & 6\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 4 & 6 & a\end{vmatrix}=0 \rightarrow -12+6-6a=0 \rightarrow -6-6a=0 \rightarrow a=-1$$

$$\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=7\neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz es 2.}$$

073 **Calcula el rango de cada matriz en función de cada uno de los parámetros.**

a) $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & a\\ -5 & -6 & 2\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}b & 2 & -1\\ 3 & 2 & b+1\\ 7 & 6 & 1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2 & 1\\ 3 & c & 0 & -3\\ 1 & 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1 & -d & 3 & -2\\ -3 & 6 & -9 & 6\\ d & -4 & 6 & -4\end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-8\neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A)\geq 2$

$$\begin{vmatrix}-1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & a\\ -5 & -6 & 2\end{vmatrix}=-48-16a$$

- Si $a\neq -3 \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $a=-3 \rightarrow$ El menor de orden 3 es nulo. El rango de la matriz es 2.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A) \geq 2$

$\begin{vmatrix} b & 2 & -1 \\ 3 & 2 & b+1 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 10b - 6b^2 \qquad -6b^2 + 10b + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

- Si $b \in \mathbb{R} - \left\{2, -\dfrac{1}{3}\right\} \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $b = 2$ o $b = -\dfrac{1}{3} \rightarrow$ El menor de orden 3 es nulo. El rango de la matriz es 2.

c) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A) \geq 2$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & c & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 3c$

- Si $c \neq 2 \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $c = 2 \rightarrow$ El menor de orden 3 es nulo. El rango de la matriz es 2.

d) $\begin{vmatrix} 1 & d & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ d & -4 & 6 \end{vmatrix} = 9d^2 - 36d + 36 = 9(d-2)^2$

$\begin{vmatrix} 1 & -d \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 3d = 0 \qquad \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ d & -4 \end{vmatrix} = 12 - 6d = 0$

- Si $d \neq 2 \rightarrow$ Hay menores de orden 3 distintos de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $d = 2 \rightarrow$ Todos los menores de orden 2 y 3 son nulos. El rango de la matriz es 1.

074 **Estudia el rango de las matrices según los valores de los parámetros.**

a) $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & a \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & b \\ b+1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4a - 12 \qquad \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a - 23$

Para cualquier valor de a al menos uno de los menores de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = b^2 - 2b \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ b+1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2b^2 + 2b - 4 = 2(b-1)(b+2)$$

Para cualquier valor de b al menos uno de los menores de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.

075 Estudia el rango de la matriz para los distintos valores del parámetro.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A) \geq 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 5+a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5+a \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & a \end{vmatrix} = 20 - 2a$$

- Si $a \neq 10 \rightarrow$ El menor de orden 4 es distinto de cero. El rango de la matriz es 4.
- Si $a = 10 \rightarrow$ El menor de orden 4 es nulo. El rango de la matriz es 3.

076 Si el rango de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ es 2, ¿cuál será el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d-a & e-b & f-c \\ 2a-d & 2b-e & 2c-f \end{pmatrix}?$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-a & e-b & f-c \\ 2a-d & 2b-e & 2c-f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a-d & 2b-e & 2c-f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} = 0$$

$\rightarrow$ El rango de la matriz es menor que 3.

Como el rango de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ es 2, las dos primeras filas de la matriz cuadrada son linealmente independientes, por tanto, esta matriz tiene rango 2.

077 Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene rango 1 y la matriz $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ tiene rango 2, explicar qué valores puede tener el rango de las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & z & w \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ z & w & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & 0 & y & 0 \\ z & 0 & w & 0 \end{pmatrix}$$

(Cantabria. Septiembre 2000. Bloque 2. Opción A

Por ser la matriz A de rango 1, las dos primeras filas de las matrices C, D y E son linealmente dependientes y al menos uno de los valores de la matriz A es distinto de cero.

Al tener la matriz B rango 2, las dos últimas filas de las matrices C, D y E son linealmente independientes, por tanto, las tres matrices tienen al menos rango 2.

Si en la matriz C elegimos un menor de orden 3 que contenga las dos últimas filas será de la forma:

$$\begin{vmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & w \end{vmatrix} = n \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} \neq 0$$

Siendo n uno de los elementos de la matriz A. Como las dos primeras filas son linealmente dependientes el menor de orden 4 es nulo, por tanto, el rango de la matriz C es 3.

Si elegimos en la matriz D un menor de orden 3 que contenga las dos últimas filas serán de la forma:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ x & y & 0 \\ z & w & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} c & d & 0 \\ x & y & 0 \\ z & w & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Como las dos primeras filas son linealmente dependientes, el menor de orden 4 es nulo, por tanto, el rango de la matriz D es 2.

Si elegimos en la matriz E un menor de orden 3 que contenga las dos últimas filas será de la forma:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ x & 0 & y \\ z & 0 & w \end{vmatrix} = -b \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} \text{ o } \begin{vmatrix} c & d & 0 \\ x & 0 & y \\ z & 0 & w \end{vmatrix} = -d \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$$

Por tanto, dependiendo de si los valores de b o d son nulos o no, los menores de orden 3 serán distintos de cero o no. Luego, la matriz E puede tener rango 3.

Como las dos primeras filas son linealmente dependientes, el menor de orden 4 es nulo, por tanto, el rango de la matriz E puede ser 2 o 3.

078 Encuentra los valores de m y n que hacen que estas matrices tengan:

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & n \\ m & m & 4 \\ 0 & m & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} m & 0 & n & 2 \\ m & m & 4 & 4 \\ 0 & m & 2 & n \end{pmatrix}$$

a) Rango $(A) = 2$ y Rango $(B) = 3$

b) Rango $(A) =$ Rango $(B) = 2$

c) Rango $(A) =$ Rango $(B) = 3$

$$\begin{vmatrix} m & 0 & n \\ m & m & 4 \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = m^2 \cdot (n-2) \qquad \begin{vmatrix} 0 & n & 2 \\ m & 4 & 4 \\ m & 2 & n \end{vmatrix} = -m \cdot (n-2)^2$$

a) No podemos encontrar valores de m y n que verifiquen las dos condiciones, por tanto, el rango de A no puede ser 2 si el de B es 3.

b) Si $m \neq 0$ y $n = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} m & 0 \\ m & m \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) \geq 2$

$n = 2 \rightarrow$ Los menores de orden 3 son nulos y los rangos de las matrices son 2.

c) Si $m \neq 0$ y $n \neq 2 \rightarrow$ Los menores de orden 3 son distintos de cero y los rangos de las matrices son 3.

079 **Halla el rango de la matriz M en función de los valores del parámetro x.**

$$M = \begin{pmatrix} 2x-6 & x & -1 \\ x & x & -1 \\ 4 & 4 & x-4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2x-6 & x & -1 \\ x & x & -1 \\ 4 & 4 & x-4 \end{vmatrix} = x^3 - 10x^2 + 28x - 24 = (x-2)^2(x-6)$$

- Si $x \in \mathbb{R} - \{2, 6\} \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $x = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \rightarrow$ El menor de orden 3 es nulo y hay un menor de orden 2 distinto de cero. El rango de la matriz es 2.
- Si $x = 6 \rightarrow \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \rightarrow$ El menor de orden 3 es nulo y hay un menor de orden 2 distinto de cero. El rango de la matriz es 2.

080 **Calcula el rango de la matriz A según los valores del parámetro k.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -k & 2 \\ 1 & -1 & -1 & k-1 \end{pmatrix}$$

(Baleares. Septiembre 2003. Opción A. Cuestión 2)

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & 1 & -k \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -k^2 + k + 2 = -(k-2)(k+1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & k-1 \end{vmatrix} = -2k^2 + 5k - 2 = (k-2)(1-2k)$$

- Si $k \neq 2 \rightarrow$ Hay un menor de orden 3 distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $k = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow$ Los menores de orden 3 son nulos y al menos hay un menor de orden 2 distinto de cero. El rango de la matriz es 2.

081 **Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de sus parámetros.**

$$\begin{pmatrix} a+1 & 1 & -a & b \\ 1 & a+1 & 0 & 2b \\ a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a(a+1)^2 \qquad \begin{vmatrix} a+1 & 1 & b \\ 1 & a+1 & 2b \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -b(a^2+a+1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & b \\ a+1 & 0 & 2b \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -b(a+1) \qquad \begin{vmatrix} a+1 & -a & b \\ 1 & 0 & 2b \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -b(2a^2+2a+1)$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$, para cualquier valor de b, hay un menor de orden 3 distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $a = 0$ y $b \neq 0 \rightarrow$ El segundo menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $a = 0$ y $b = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.
- Si $a = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ El rango es mayor o igual que 2: el rango es 2 si $b = 0$ y es 3 si $b \neq 0$.

082 **Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.**

(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 3. Pregunta A)

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\lambda^2 - 2\lambda = 2\lambda(2\lambda - 1)$$

- Si $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $\lambda = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.
- Si $\lambda = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

083 **Estudiar el rango de la matriz que sigue, mediante transformaciones de filas y columnas, indicando en cada caso las transformaciones realizadas.**

$$A = \begin{pmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix}$$

(País Vasco. Junio 2000. Bloque E. Cuestión E)

Si restamos la primera columna a las dos últimas:

$$\begin{pmatrix} b & a-b & a-b \\ a & b-a & 0 \\ a & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

Si sumamos las dos últimas filas a la primera:

$$\begin{pmatrix} 2a+b & 0 & 0 \\ a & b-a & 0 \\ a & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

- Si $a = b = 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 0.
- Si $a = b \neq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 3a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ El rango de la matriz es 1.
- Si $b = -2a \neq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & -3a & 0 \\ a & 0 & -3a \end{pmatrix} \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.
- Si $a \neq b$ y $b \neq -2a \rightarrow$ Las tres filas son linealmente independientes. El rango de la matriz es 3.

084 **Si** $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ b+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}$**:**

a) Prueba que para cualquier valor de a y b, Rango $(A) \geq 2$.

b) Determina un par de valores reales para los cuales sea Rango $(A) = 3$ y otro par de valores de a y b de forma que Rango $(A) = 4$.

(Cantabria. Junio 2001. Bloque 2. Opción A)

a) Si $a = b = 0 \rightarrow b + 1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) \geq 1$

$$\begin{vmatrix} b+1 & a \\ 0 & b+1 \end{vmatrix} = (b+1)^2$$

$$\begin{vmatrix} b & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = b^2$$

Como ambos menores no pueden ser nulos para cualquier valor de a y $b \rightarrow$ Rango $(A) \geq 3$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ b+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b+1 & 0 & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} b+1 & a & 0 \\ 0 & b+1 & a \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = -a^4 + b^2(b+1)^2$$

- Para que Rango $(A) < 4$ el determinante tiene que valer cero:
  $a^4 = b^2(b+1)^2 \rightarrow a^2 = b(b+1)$

  Como $\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ b+1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3$, para que el Rango $(A) = 3$ basta con tomar un valor de a que sea distinto de cero: si $b = 1$ y $a = \sqrt{2}$ el rango de la matriz es 3.
- Para que Rango $(A) = 4$ basta con que $-a^4 + b^2(b+1)^2 \neq 0$, por ejemplo, para $a = 1$ y $b = 1$ la matriz tiene rango 4.

085 **Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.**

Vemos que ambas tienen rango máximo, o sea, 2. Determina los valores de c tales que la matriz $A + cB$ ya no tenga rango 2. ¿Cuál es el rango que tienen las respectivas matrices suma?

(Aragón. Septiembre 2003. Opción B. Cuestión 1)

$$A + cB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{vmatrix} = (1+c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2-c \end{vmatrix} = (1+c)(6-c)$$

Si $c = 6$ o $c = -1 \rightarrow$ El menor de orden 2 es nulo y la matriz $A + cB$ no tiene rango 2.

Como $-1 \neq 0 \rightarrow$ El rango de las matrices $A + 6B$ y $A - B$ es 1.

086 **a) Si A es una matriz y $a \in \mathbb{R}$, ¿cuándo se cumple que Rango (aA) = Rango (A)?**

b) Estudie, en función de los valores de a, el rango de la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -a \\ a & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

(Murcia. Junio 2001. Bloque 1. Cuestión 2)

a)
- Si A es la matriz nula, su rango es 0 y el rango de la matriz aA también es 0 para cualquier valor de a.
- Si $a \neq 0 \rightarrow$ El número de filas o columnas linealmente independientes de A y de aA coincide. Los rangos de ambas matrices son iguales.
- Si $a = 0 \rightarrow$ La matriz aA tiene rango 0 y solo coincide con el rango de A si esta matriz es nula.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2a$

- Si $a \neq -1 \rightarrow$ Hay un menor de orden 3 distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $a = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

087 **Toma una matriz cuadrada de orden 2 y calcula su matriz adjunta. Compara sus determinantes. Haz lo mismo con una matriz cuadrada de orden 3. Establece una hipótesis general y trata de demostrarla.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ una matriz cuadrada de orden 2.

$\text{Adj}\,(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = 7 \quad |\text{Adj}\,(A)| = 7$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ una matriz cuadrada de orden 3.

$\text{Adj}\,(A) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = 2 \quad |\text{Adj}\,(A)| = 4$

Si A es una matriz cuadrada de orden n:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\,(A)^t \rightarrow |A^{-1}| = \left(\frac{1}{|A|}\right)^n \cdot |\text{Adj}\,(A)^t|$$

Como $|\text{Adj}\,(A)^t| = |\text{Adj}\,(A)|$ tenemos que:

$$|A^{-1}| = \left(\frac{1}{|A|}\right)^n \cdot |\text{Adj}\,(A)| = \frac{1}{|A|^n} \cdot |\text{Adj}\,(A)|$$

Como $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \rightarrow \frac{1}{|A|} = \frac{1}{|A|^n} \cdot |\text{Adj}\,(A)| \rightarrow |\text{Adj}\,(A)| = |A|^{n-1}$

088 **Halla la matriz inversa de estas matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

a) $|A| = 2 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

b) $|B| = 1 \neq 0 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -2 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $|C| = -20 \neq 0 \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{20} & \frac{7}{20} \end{pmatrix}$

d) $|D| = 10 \neq 0 \rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} & -\frac{9}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{9}{10} & -\frac{11}{10} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{7}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

089 ¿Para qué valores del parámetro a la matriz no tiene inversa? Calcula la matriz inversa cuando $a = 2$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$|M| = a - a^2$

La matriz no tiene inversa si su determinante es nulo, es decir, si $a = 0$ o $a = 1$.

Si $a = 2 \rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |M| = -2 \rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

090 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{pmatrix}$.

Encuentra su inversa, si existe, cuando $a = 1$.

(Asturias. Septiembre 2002. Bloque 1)

$|A| = 5a^4$

Si $a = 1 \rightarrow |A| = 5 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

091 Para cada número real λ, $M(\lambda)$ es la matriz $M(\lambda) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Obtener el determinante de la matriz $M(\lambda)$, y justificar que para cualquier número real λ existe la matriz $M(\lambda)^{-1}$ inversa de $M(\lambda)$.

b) Calcular la matriz $M(0)^{-1}$.

c) Si $A = M(8)$, $B = M(4)$ y $C = M(3)$, calcular el determinante de la matriz producto $A \cdot B^{-1} \cdot C^{-1}$.

(C. Valenciana. Junio 2002. Ejercicio B. Problema 1)

a) $|M(\lambda)| = \lambda^2 - 2\lambda + 2$

La ecuación $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ no tiene solución, por tanto, el determinante de la matriz es distinto de cero y siempre existe la matriz inversa.

b) $M(0) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |M(0)| = 2 \rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A = M(8) \rightarrow |A| = 50$

$B = M(4) \rightarrow |B| = 10$

$C = M(3) \rightarrow |C| = 5$

$|A \cdot B^{-1} \cdot C^{-1}| = |A| \cdot |B^{-1}| \cdot |C^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} \cdot \frac{1}{|C|} = 50 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = 1$

092 **A, B y C son tres matrices cuadradas tales que $|A| = 5$, $|B| = 4$ y $|C| = 2$. Decide razonadamente el valor de los siguientes determinantes.**

a) $|A^t|$ **c) $|AB^{-1}|$** **e) $|(BC)^{-1}|$**

b) $|B^{-1}|$ **d) $|AB^{-1}|$** **f) $|C^{-1}B^t|$**

a) $|A^t| = |A| = 5$

b) $|B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{4}$

c) $|AB^{-1}| = |A| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

d) $|A^{-1}B| = |A^{-1}| \cdot |B| = \frac{1}{|A|} \cdot |B| = \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{4}{5}$

e) $|(BC)^{-1}| = \frac{1}{|BC|} = \frac{1}{|B| \cdot |C|} = \frac{1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$

f) $|C^{-1}B^t| = |C^{-1}| \cdot |B^t| = \frac{1}{|C|} \cdot |B| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

093 **a) Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ cumple que $A^3 = -A - I$**

y calcula la matriz inversa de A.

b) Si A es cualquier matriz de n filas y n columnas tal que $A^3 = -A - I$ y se sabe que det $(A) = m$, calcula el valor del determinante de $A + I$ en función de m. (I representa la matriz unidad.)

(Cantabria. Junio 2002. Bloque 2. Opción B)

a) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$-A - I = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = -A - I \rightarrow -A^3 - A = I \rightarrow A(-A^2 - I) = I \rightarrow A^{-1} = -A^2 - I$$

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $|A + I| = |-A^3| = -|A|^3 = -m^3$

094 Calcula las matrices *X*, *Y*, *Z* y *T* que cumplen las ecuaciones.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix}$

c) $Z \cdot \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix}$

d) $T \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

b) $Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $Z = \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $T = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

095 Determina las matrices *X*, *Y*, *Z*… en las ecuaciones.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix}$

b) $Y \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 13 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -10 & -10 \\ -10 & 10 & -10 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot Z = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 28 & 111 \\ 54 & 52 & 194 \end{pmatrix}$

a) $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $Y = \left[\begin{pmatrix} 10 & -10 & -10 \\ -10 & 10 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 13 & -2 & -3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} =$

$= \begin{pmatrix} 3 & -6 & -8 \\ -23 & 12 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & \frac{3}{2} \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $Z = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 32 & 28 & 111 \\ 54 & 52 & 194 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 32 & 28 & 111 \\ 54 & 52 & 194 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 10 & 4 & 28 \\ -8 & 12 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

096 Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 12 \\ -1 & -4 & 17 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix}$, encuentra dos matrices C y D tales que:

$$CA = B \qquad DB = A$$

¿Qué relación hay entre C y D?

$$C = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 12 \\ -1 & -4 & 17 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 11 & 12 \\ -1 & -4 & 17 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{76} \begin{pmatrix} 35 & -23 & 9 \\ -2 & 10 & 6 \\ 15 & 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 11 & 12 \\ -1 & -4 & 17 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{76} \begin{pmatrix} 212 & -122 & -235 \\ -36 & 20 & 46 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -5 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$CD = BA^{-1}AB^{-1} = BIB^{-1} = BB^{-1} = I \rightarrow C$ y D son inversas.

097 Se consideran las matrices cuadradas reales de orden 2,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular:

a) La matriz P^{-1}.

b) La matriz real cuadrada X de orden 2, tal que $P^{-1}XP = Q$.

c) La matriz cuadrada $(PQP^{-1})^2$.

(C. Valenciana. Septiembre 2003. Ejercicio B. Problema 1)

a) $|P| = -1 \neq 0 \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $P^{-1}XP = Q \rightarrow X = PQP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $(PQP^{-1})^2 = X^2 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -10 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}$

098 Sea k un número natural y sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\qquad C=(1\quad 1\quad 2)$$

a) Calcular A^k.

b) Hallar la matriz X que verifica la ecuación: $A^kX=BC$

(Madrid. Junio 2001. Opción A. Ejercicio 2)

a) $$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Entonces: $A^k=\begin{pmatrix}1&k&k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

b) $$A^kX=BC\rightarrow X=(A^k)^{-1}BC=\begin{pmatrix}1&-k&-k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot(1\quad 1\quad 2)=$$

$$=\begin{pmatrix}1&-k&-k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&2\\-1&-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&2\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$$

099 Determina la matriz X que verifica la ecuación $AX=X-B$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\ \text{ y }\ B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$$

(Andalucía. Junio 2002. Opción B. Ejercicio 3)

$$AX=X-B\rightarrow AX-X=-B\rightarrow (A-I)X=-B\rightarrow X=(A-I)^{-1}(-B)$$

$$A-I=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\rightarrow(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&-1&0\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&-1&0\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&1&1\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-1\end{pmatrix}$$

100 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$:

a) Halla la inversa de $A - BC$.

b) Resuelve la ecuación matricial $AX - BCX = A$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2001. Bloque 1. Pregunta B)

a) $A - BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A - BC| = -1 \neq 0 \rightarrow (A - BC)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $AX - BCX = A \rightarrow (A - BC)X = A$

$$X = (A - BC)^{-1}A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -13 & 21 \\ 8 & -9 & 16 \\ -10 & 12 & -18 \end{pmatrix}$$

101 Responde razonadamente:

a) Si A tiene inversa, ¿cuál es el rango de A^{-1}?

b) ¿Es cierto que siempre Rango (A) = Rango (A^t)?

c) ¿Es siempre cierto que, si A y B son matrices de la misma dimensión, Rango $(A + B)$ = Rango (A) + Rango (B)?

d) ¿Y que Rango (A^2) = Rango (A)?

a) Si A tiene inversa, verifica que:

$$|A| \neq 0 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A^{-1}) = \text{Rango } (A)$$

b) Sí, ya que el rango corresponde al número de filas o columnas linealmente independientes y esta relación no cambia al trasponerlas.

c) No. Por ejemplo, si A y B son dos matrices de orden 2 con rango 2, la matriz suma $A + B$ también es una matriz de orden 2 que no puede tener rango $2 + 2 = 4$.

d) No. Por ejemplo: si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de modo que el rango de A es 1 y el de A^2 es 0. Solo es cierto cuando A es una matriz regular.

102 a) Calcula la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y + z &= -2 \\ x + z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

(Andalucía. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 3)

a) $|A| = 2 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

103 a) Sean F_1, F_2, F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada M de orden 3, con det $(M) = -2$. Calcula el valor del determinante de la matriz que tiene por filas $F_1 - F_2$, $2F_1$, $F_2 + F_3$.

b) Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla dos matrices X e Y que verifican:

$$\left.\begin{aligned} X + Y^{-1} &= C \\ X - Y^{-1} &= C^t \end{aligned}\right\}$$

siendo C^t la matriz traspuesta de C.

(Galicia. Junio 2007. Bloque 1. Opción 1)

a) Si escribimos:

det $(M) = \det(F_1, F_2, F_3) = -2$

Entonces:

$\det(F_1 - F_2, 2F_2, F_2 + F_3) = 2\det(F_1 - F_2, F_2, F_2 + F_3) = 2\det(F_1, F_2, F_2 + F_3) =$
$= 2\det(F_1, F_2, F_3) = 2(-2) = -4$

b) Si sumamos las ecuaciones tenemos:

$$2X = C + C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$X + Y^{-1} = C \to Y^{-1} = C - X \to Y = (C - X)^{-1}$$

$$C - X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \to Y = (C - X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

104 Sean F_1, F_2, F_3 y F_4 las filas de una matriz cuadrada P de orden 4×4, cuyo determinante vale 3. Calcula razonadamente el valor del determinante de la inversa de P, el valor del determinante de la matriz αP, donde α denota un número real no nulo, y el valor del determinante de la matriz cuyas filas son $2F_1 - F_4$, F_3, $7F_2$ y F_4.

(Galicia. Junio 2001. Bloque 1. Pregunta 2)

$$|P| = 3 \to |P^{-1}| = \frac{1}{|P|} = \frac{1}{3} \qquad |\alpha P| = \alpha^4 |P| = 3\alpha^4$$

$$\begin{aligned} \det(2F_1 - F_4, F_3, 7F_2, F_4) &= 7\det(2F_1 - F_4, F_3, F_2, F_4) = -7\det(2F_1 - F_4, F_2, F_3, F_4) = \\ &= -7\det(2F_1, F_2, F_3, F_4) = -14\det(F_1, F_2, F_3, F_4) = \\ &= -14 \cdot 3 = -42 \end{aligned}$$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Sea $P(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 3 & 3 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix}$.

Halla dos raíces de este polinomio de grado cuatro.

(La Rioja. Junio 2007. Propuesta A. Ejercicio 2)

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 3 & 3 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1-x & x-1 & 0 & 0 \\ 3-3x & 0 & x-3 & 0 \\ 3-3x & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 3-3x & x-3 & 0 \\ 3-3x & 0 & x-3 \end{vmatrix} + (x-1) \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 3-3x & x-3 & 0 \\ 3-3x & 0 & x-3 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)(x-3)^2 + (x-1)\left[x(x-3)^2 - 2(x-3)(3-3x)\right] =$$

$$= (x-1)(x-3)^2 + (x-1)(x-3)\left[x(x-3) - 2(3-3x)\right] =$$

$$= (x-1)(x-3)\left[(x-3) + (x^2 - 3x - 6 + 6x)\right] =$$

$$= (x-1)(x-3)(x^2 + 4x - 9)$$

por tanto, $x = 1$ y $x = 3$ son dos raíces del polinomio.

2 Utiliza las propiedades de los determinantes para desarrollar el siguiente:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix}$$

Enuncia las propiedades que has utilizado.

(Castilla-La Mancha. Junio 2003. Bloque 1. Pregunta B)

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2x+1 & 3x+2 \\ 1 & 2x+3 & 3x+4 \\ 1 & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2x+1 & 3x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

En primer lugar, utilizamos la siguiente propiedad: si todos los elementos de una columna de la matriz están multiplicados por un mismo número, su determinante queda multiplicado por ese número. A continuación, a las dos últimas filas le restamos la primera fila de la matriz por la propiedad que dice que el determinante no varía si a una fila le sumamos una combinación lineal de las demás. Por último, el determinante es nulo porque tiene dos filas iguales.

3 Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7$, calcular el valor del siguiente determinante sin desarrollarlo:

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$$

(Aragón. Septiembre 2006. Opción B. Cuestión 1)

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x & -y & -z \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -3 \cdot 7 = -21$$

4 Hallar los valores de k para que la matriz $\begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$:

a) No tenga inversa.

b) Tenga rango 3.

(Canarias. Septiembre 2006. Opción B. Cuestión 3)

a) $\begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -k-4 & -5 & -7 \\ 0 & -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} =$

$$= -k \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -k-4 & -5 & -7 \\ -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} = 3k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k+4 & 5 & 7 \\ k+4 & k+5 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 3k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k-3 & -2 & 0 \\ k-3 & k-2 & 0 \end{vmatrix} = 3k \cdot \begin{vmatrix} k-3 & -2 \\ k-3 & k-2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3k[(k-3)(k-2) + 2(k-3)] = 3k^2(k-3)$$

Si $k = 0$ o si $k = 3 \rightarrow$ El determinante es nulo. La matriz no tiene inversa.

b) Si $k = 0$ o si $k = 3 \rightarrow$ El menor de orden 4 es igual a cero.
Comprobamos si hay un menor de orden 3 no nulo.

- Si $k = 0$:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz es 3.}$$

- Si $k = 3$:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz es 3.}$$

5 **Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$:**

a) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.

b) Determinar para qué valores de a existe matriz inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

(Madrid. Junio 2006. Opción B. Ejercicio 3)

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2a - 2a^3 = 2a(1 - a^2)$

b) • Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.

- Si $a = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

- Si $a = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

- Si $a = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

6 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Probar que la matriz T tiene inversa, T^{-1}, y calcular dicha inversa T^{-1}.

b) Dada la ecuación con matriz incógnita B, $A = T^{-1}BT$, calcular el determinante de B.

c) Obtener los elementos de la matriz B considerada en el apartado b).

(C. Valenciana. Junio 2006. Ejercicio B. Problema 1)

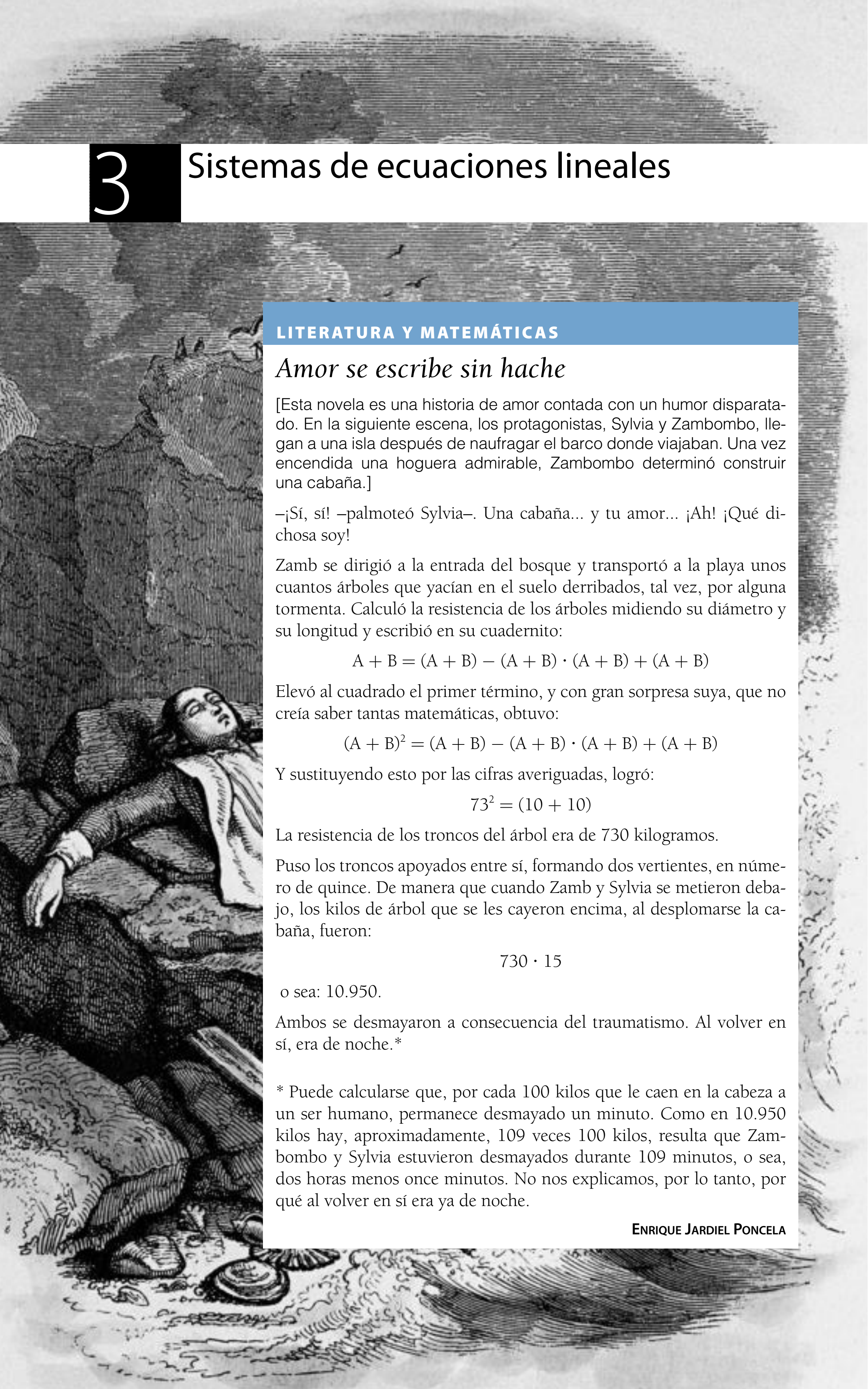
a) $|T| = -1 \neq 0 \rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = T^{-1}BT \rightarrow B = TAT^{-1} \rightarrow |B| = |T| \cdot |A| \cdot |T^{-1}| = |T| \cdot |A| \cdot \dfrac{1}{|T|} = |A| = 2$

c) $B = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3 Sistemas de ecuaciones lineales



LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Amor se escribe sin hache

[Esta novela es una historia de amor contada con un humor disparatado. En la siguiente escena, los protagonistas, Sylvia y Zambombo, llegan a una isla después de naufragar el barco donde viajaban. Una vez encendida una hoguera admirable, Zambombo determinó construir una cabaña.]

–¡Sí, sí! –palmoteó Sylvia–. Una cabaña... y tu amor... ¡Ah! ¡Qué dichosa soy!

Zamb se dirigió a la entrada del bosque y transportó a la playa unos cuantos árboles que yacían en el suelo derribados, tal vez, por alguna tormenta. Calculó la resistencia de los árboles midiendo su diámetro y su longitud y escribió en su cuadernito:

$$A + B = (A + B) - (A + B) \cdot (A + B) + (A + B)$$

Elevó al cuadrado el primer término, y con gran sorpresa suya, que no creía saber tantas matemáticas, obtuvo:

$$(A + B)^2 = (A + B) - (A + B) \cdot (A + B) + (A + B)$$

Y sustituyendo esto por las cifras averiguadas, logró:

$$73^2 = (10 + 10)$$

La resistencia de los troncos del árbol era de 730 kilogramos.

Puso los troncos apoyados entre sí, formando dos vertientes, en número de quince. De manera que cuando Zamb y Sylvia se metieron debajo, los kilos de árbol que se les cayeron encima, al desplomarse la cabaña, fueron:

$$730 \cdot 15$$

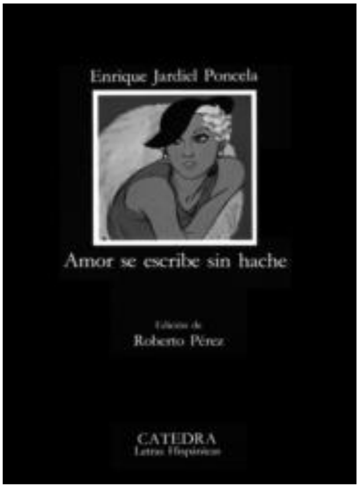
o sea: 10.950.

Ambos se desmayaron a consecuencia del traumatismo. Al volver en sí, era de noche.*

* Puede calcularse que, por cada 100 kilos que le caen en la cabeza a un ser humano, permanece desmayado un minuto. Como en 10.950 kilos hay, aproximadamente, 109 veces 100 kilos, resulta que Zambombo y Sylvia estuvieron desmayados durante 109 minutos, o sea, dos horas menos once minutos. No nos explicamos, por lo tanto, por qué al volver en sí era ya de noche.

ENRIQUE JARDIEL PONCELA

Amor se escribe sin hache
Enrique Jardiel Poncela



En esta obra, como en casi todas las de Jardiel Poncela, el humor es el recurso literario predominante y, a través de un manejo casi surrealista del mismo, logra que los lectores (cuando se trata de novelas) y los espectadores (cuando se trata de piezas teatrales) revisen su percepción de los problemas humanos más importantes. En esta novela aborda el tema del amor a través de la historia disparatada que viven los protagonistas, Sylvia y Zambombo.

El texto anterior forma parte de una escena donde los protagonistas han llegado a una isla después de naufragar el barco donde viajaban. Allí tienen que enfrentarse a cuatro problemas: localizar geográficamente el sitio donde se encuentran, hacer fuego, construir una choza y encontrar víveres.

Zambombo aborda el problema de la orientación con técnicas disparatadas, como la medida de la velocidad del viento mediante una regla de tres:

Para ello, por medio de dos rayas, señaló en el suelo su estatura, que era de un metro y setenta y cinco. Colocó en una de las rayas un papelito y midió, reloj en mano, lo que el viento tardaba en llevar el papel a la otra rayita. Tardó cuatro segundos. Y Zamb razonó por medio de la regla de tres:

1,75 metros los recorre en 4 segundos

1.000 metros (o sea un kilómetro) los recorrerá en *x*

De donde *x* era igual a 1.000 multiplicado por 4 y partido por 1,75.

Hizo las operaciones, contando por los dedos, y comprobó que el viento corría que se las pelaba.

Luego Zambombo, como si fuera un robinsón, se dedica a hacer fuego frotando dos trozos de madera. Cuando consigue una llamita tras seis horas de trabajo, su propio sudor se la apaga. Sylvia le dice: «¿Qué? ¿No puedes hacer fuego?». Y él le contesta: «Podré, porque traigo cerillas, pero si no las hubiera traído, no sé cómo nos las habríamos arreglado...».

Una vez encendida una hoguera admirable, Zambombo determinó construir una cabaña tal como se describe en el texto elegido.

Finalmente, el cuarto problema, el de los víveres, lo resuelven comiendo los productos vegetales anunciados en el cartel que vieron al llegar en la playa. Veinte días después, Sylvia había adelgazado dieciocho libras y Zambombo, diecinueve. Pero se recuperaron cuando aprendieron a pescar "piscis rodolphus valentinus".

La ingenuidad romántica de Zambombo desencadena el desenlace de esta aventura y le sirve a Jardiel para plantear la siguiente y llegar, finalmente, a la conclusión moral de la novela.

Jardiel Poncela utiliza aquí el lenguaje algebraico como un recurso humorístico, una aplicación *novedosa*, porque en Matemáticas y en las otras ciencias se emplea para expresar propiedades o resolver problemas como este: «Sylvia tiene 24 años; tiene el doble de la edad que tenía Zambombo cuando ella tenía la edad que él tiene ahora. ¿Qué edad tiene Zambombo?».

Sea x la edad que tiene Zambombo.

Entonces: $24 = 2(x - (24 - x)) \rightarrow 24 = 2(2x - 24) \rightarrow 12 = 2x - 24 \rightarrow 2x = 36 \rightarrow x = 18$ años

Sistemas de ecuaciones lineales

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Resuelve estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ 2x - 2y = 4 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = -1 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ 2x - 2y = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \end{array}\right.$ b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = -1 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

002 Escribe tres ecuaciones equivalentes a estas.

a) $x - 2 = 7$ b) $2x = -3$ c) $\dfrac{x}{2} - 4 = 6$

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:
$x - 9 = 0$ $2x - 4 = 14$ $2 - x = -7$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:
$4x + 6 = 0$ $1 - 6x = 10$ $10x + 15 = 0$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:
$x - 8 = 12$ $16 - 2x = -24$ $3x = 60$

003 Escribe dos sistemas equivalentes a estos.

a) $\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 3 \end{array}\right\}$

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ 3x - y = 5 \end{array}\right\}$

b) Aunque el sistema es incompatible, podemos considerar sistemas equivalentes. Los siguientes sistemas se han obtenido multiplicando las ecuaciones por una constante:

$\left.\begin{array}{r} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 3 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ 4x - 4y = 6 \end{array}\right\}$

ACTIVIDADES

001 Escribe una ecuación con tres incógnitas de coeficientes 4, -1 y 1, respectivamente, y con término independiente -2.
Calcula tres soluciones de esta ecuación.

La ecuación es $4x - y + z = -2$, y tres soluciones son:

$x = 1$, $y = 6$ y $z = 0$

$x = -1$, $y = 0$ y $z = 2$

$x = 0$, $y = 2$ y $z = 0$

002 **Determina una solución de este sistema:**

$$\left.\begin{aligned} -x - y + z &= 0 \\ -2x &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Respuesta abierta. Por ejemplo: $x = 0,\ y = 2,\ z = 2$

003 **Clasifica estos sistemas según su número de soluciones.**

a) $\left.\begin{aligned} -2x + y &= 2 \\ 2x - y &= -2 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} -x + 2y &= 4 \\ 2x - 4y &= 1 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ 2x - y &= 3 \end{aligned}\right\}$

a) Tiene infinitas soluciones. El sistema es compatible indeterminado.

b) No tiene solución. El sistema es incompatible.

c) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ 2x - y &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

Tiene solución única. El sistema es compatible determinado.

004 **Convierte este sistema en un sistema escalonado y resuélvelo.**

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -y + 2z &= 1 \\ -x &= 5 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -y + 2z &= 1 \\ -x \qquad &= 5 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -y + 2z &= 1 \\ -y - z &= 6 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -y + 2z &= 1 \\ z &= 7 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 13 \\ z = 7 \end{cases}$$

005 **Resuelve estos sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss.**

a) $\left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1 \\ -x - y + z &= 0 \\ y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} y - z &= 1 \\ 2x - 2y + z &= 3 \\ 3x \qquad - 2z &= 7 \end{aligned}\right\}$

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1 \\ y - z &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 7 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 3 \\ y - z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

006 Resuelve aplicando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{aligned} y + z &= -5 \\ 2x - y &= 0 \\ x + z &= -4 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} -x - y + z + t &= 4 \\ 3x - 2y - t &= -2 \\ x + 2y - 2z - t &= 0 \\ y + z - 4t &= -4 \end{aligned}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$

$$\to \left.\begin{aligned} x \quad + z &= -4 \\ y + z &= -5 \\ -z &= 3 \end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= -2 \\ z &= -3 \end{aligned}\right.$$

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 14 & -30 & -34 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 14 & -30 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 22 \end{array}\right)$$

$$\to \left.\begin{aligned} x + 2y - 2z - t &= 0 \\ y + z - 4t &= -4 \\ 14z - 30t &= -34 \\ -2t &= 22 \end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x &= -19 \\ y &= -22 \\ z &= -26 \\ t &= -11 \end{aligned}\right.$$

007 Discute estos sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1 \\ -x - y + z &= 0 \\ y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} -2x + y - z &= 1 \\ 2x - 2y - z &= 3 \\ -y - 2z &= 7 \end{aligned}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

Sistema incompatible

008 **Discute utilizando el método de Gauss.**

$$\left.\begin{aligned} -x+y+z-2t&=-5\\ 2x-y-t&=0\\ x+z-3t&=-2\\ -x+y-2z+t&=0\end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 & -5\\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & -3 & -2\\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & -2\\ -1 & 1 & 1 & -2 & -5\\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & -5 & -7\\ 0 & -1 & -2 & 5 & 4\\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & -5 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 3 & -3 & -5\end{array}\right)$$

Sistema incompatible

009 **Discute y resuelve este sistema:**

$$\left.\begin{aligned} 2x+y-z&=1\\ -x-2y+z&=0\\ x-y+\lambda z&=2\end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1\\ -1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & \lambda & 2\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \lambda & 2\\ -1 & -2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \lambda & 2\\ 0 & -3 & \lambda+1 & 2\\ 0 & 3 & -1-2\lambda & -3\end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \lambda & 2\\ 0 & -3 & \lambda+1 & 2\\ 0 & 0 & -\lambda & -1\end{array}\right)$$

- Si $\lambda = 0 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & -3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right) \to$ Sistema incompatible

- Si $\lambda \neq 0 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \lambda & 2\\ 0 & -3 & \lambda+1 & 2\\ 0 & 0 & -\lambda & -1\end{array}\right) \to$ Sistema compatible determinado

$$\left.\begin{aligned} x-y+\lambda z&=2\\ -3y+(\lambda+1)z&=2\\ -\lambda z&=-1\end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x&=\frac{1+2\lambda}{3\lambda}\\ y&=\frac{1-\lambda}{3\lambda}\\ z&=\frac{1}{\lambda}\end{aligned}\right. \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$$

010 Discute y resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=-2 \\ 2x-2y=1 \\ x-\lambda z=3 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -\lambda-1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right)$$

- Si $\lambda \neq 1 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right) \to$ Sistema compatible $\to \begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{5}{2} \\ z=0 \end{cases}$

- Si $\lambda = 1 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$ Sistema compatible indeterminado

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=-2 \\ 2y-2z=5 \\ 0=0 \end{array}\right\} \to \begin{cases} x=3+a \\ y=\dfrac{5+2a}{2} \\ z=a \end{cases} \text{ con } a \in \mathbb{R}$$

011 Escribe mediante ecuaciones este sistema, y resuélvelo aplicando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-2z=1 \\ -2x+y-z=-2 \\ -2y+z=-1 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x+2y-2z=1 \\ 5y-5z=0 \\ -5z=-5 \end{array}\right\} \to \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

012 Determina la expresión matricial de este sistema, y resuélvelo como si fuera una ecuación matricial.

$$\left.\begin{array}{r} -3x+y+2z=0 \\ -x-2y+z=-2 \\ x-y+z=1 \end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to B=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$

$$|A| = 11 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

013 **Utiliza el teorema de Rouché-Fröbenius para determinar si estos sistemas son compatibles, y resuélvelos aplicando el método de Gauss.**

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = -2 \\ -x - y + 2z = 0 \\ x - 4y + 3z = -2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 3y - 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 0 \\ -x - z = 7 \end{array}\right\}$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & -2 \end{array}\right)$

$|A| = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango }(A^*) = 2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 4y + 3z = -2 \\ -5y + 5z = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2 + 5\lambda}{5} \\ y = \dfrac{2 + 5\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

$|A| = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3$$

Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

014 **Mediante el teorema de Rouché-Fröbenius, determina si el sistema es compatible.**

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - z + t &= 1 \\ x - 3y + z - t &= 0 \\ 3x - 2y &= 1 \\ y - 2z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -8 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3$$

Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

015 **Discute este sistema aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius.**

$$\left.\begin{aligned} x + y - z + t &= 1 \\ -x - 3y + z - 2t &= 0 \\ -2y - t &= 1 \\ y - 2z &= -3 \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\ (A) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}\ (A^*) = 3$$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

016 **Añade una ecuación al sistema de ecuaciones para que se convierta en:**

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y - z &= 1 \\ -x - y + z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

a) Un sistema compatible determinado.
b) Un sistema compatible indeterminado.
c) Un sistema incompatible.

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y - z &= 1 \\ -x - y + z &= 3 \\ 2x + y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y - z &= 1 \\ -x - y + z &= 3 \\ x + y &= 4 \end{aligned}\right\}$$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y - z &= 1 \\ -x - y + z &= 3 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

017 **Evalúa si se puede aplicar la regla de Cramer a estos sistemas de ecuaciones.**

a) $$\left.\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ x - y + z &= 4 \\ -2y + z &= -3 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} x + 2y + z + t &= 0 \\ x - 3y + z - 2t &= -2 \\ -2y + 3t &= 3 \end{aligned}\right\}$$

a) El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Se puede aplicar la regla de Cramer.}$$

b) El número de ecuaciones no es el mismo que el número de incógnitas, por tanto, no se puede aplicar la regla de Cramer.

018 **Escribe dos sistemas de ecuaciones lineales a los que se pueda aplicar la regla de Cramer y que cumplan cada una de estas condiciones.**

a) Tenga 3 ecuaciones. **b) Tenga 4 incógnitas.**

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1\\ x+y=0\\ y+z=0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2\\ x-y+z=0\\ y+z=0\end{array}\right\}$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=4\\ x+y-z-t=0\\ 2x+y-z=2\\ y+z+t=3\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z-t=4\\ x+y-z-t=-2\\ x+y-z=-1\\ y+z+2t=-1\end{array}\right\}$$

019 **Evalúa si se puede aplicar la regla de Cramer a este sistema, y si se puede, calcula $|A_x|$, $|A_y|$ y $|A_z|$ y resuelve el sistema.**

$$\left.\begin{array}{r} -x+2y-z=2\\ x-y+2z=1\\ -2x+z=-1\end{array}\right\}$$

El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix} = -7 \neq 0 \rightarrow \text{Se puede aplicar la regla de Cramer.}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix} = -7 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix} = -14 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = 2$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ -2 & 0 & -1\end{vmatrix} = -7 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = 1$$

020 **Resuelve este sistema de ecuaciones utilizando la regla de Cramer, si es posible.**

$$\left.\begin{aligned} -2x + y - z + t &= 4 \\ -x - 3y + z - 2t &= -8 \\ -2y - t &= -4 \\ y - 2z &= -1 \end{aligned}\right\}$$

El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

$\rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ -8 & -3 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -9 & 1 \\ 0 & -11 & 17 & -2 \\ 0 & -6 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -9 & 1 \\ -11 & 17 & -2 \\ -6 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & -8 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 20 & -3 & 5 \\ -1 & -8 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & -3 & 5 \\ -4 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & -11 & -2 \\ 0 & -2 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -1 & -11 & -2 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A_t| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & -8 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -3 & 20 \\ -1 & -3 & 1 & -8 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 20 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 42$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 0 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = -\frac{1}{3} \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{1}{3} \qquad t = \frac{|A_t|}{|A|} = \frac{14}{3}$$

021 **Resuelve estos sistemas de ecuaciones mediante la regla de Cramer.**

a) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y - 3z &= 0 \\ x - y + 4z &= 1 \\ 2x + 3y - 7z &= -1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - y + z &= 1 \\ 2x + 4y - 4z &= -1 \end{aligned}\right\}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango }(A) = \text{Rango }(A^*) = 2 < \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible indeterminado

Consideremos el sistema: $\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 3z \\ x - \quad y &= 1 - 4z \end{aligned}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3z & 2 \\ 1-4z & -1 \end{vmatrix} = 5z - 2 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 3z \\ 1 & 1-4z \end{vmatrix} = 3 - 15z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{5z-2}{-5} = \frac{2-5z}{5} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{3-15z}{-5} = \frac{15z-3}{5}$$

La solución es: $x = \dfrac{2-5\lambda}{5}$, $y = \dfrac{15\lambda - 3}{5}$, $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango }(A) = \text{Rango }(A^*) = 2 < \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{aligned} x + y &= z \\ x - y &= 1 - z \end{aligned}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} z & 1 \\ 1-z & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & 1-z \end{vmatrix} = 1 - 2z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{1-2z}{-2} = \frac{2z-1}{2}$$

La solución es: $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{2\lambda - 1}{2}$, $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

022 **Resuelve el sistema utilizando la regla de Cramer.**

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - 3z + 2t &= 4 \\ -x - 3y + z - 2t &= 0 \\ x - 2y - 2z &= 4 \\ 3x + 4y - 4z + 4t &= 4 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango }(A) < 4$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -4 & 4 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 4 + 3z - 2t \\ -x - 3y = -z + 2t \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 + 3z - 2t & 1 \\ -z + 2t & -3 \end{vmatrix} = -12 - 8z + 4t \to x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{12 + 8z - 4t}{5}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 4 + 3z - 2t \\ -1 & -z + 2t \end{vmatrix} = 8 + z - 2t \to y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-8 - z + 2t}{5}$$

La solución es:

$$x = \frac{12 + 8\lambda - 4\mu}{5}, \quad y = \frac{-8 - \lambda + 2\mu}{5}, \quad z = \lambda, \quad t = \mu \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

023 Resuelve este sistema: $\left.\begin{array}{r} 5x - y + 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{array}\right\}$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \to \text{Rango } (A) = \text{Rango } (A^*) = 3 = \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible determinado

La solución es: $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$

024 Escribe un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de cuatro ecuaciones y que tenga:

a) Solución única.

b) Infinitas soluciones.

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z + t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \\ 2x + y - z \quad = 0 \\ y + z + t = 0 \end{array}\right\}$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z + t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \\ x + y \quad = 0 \\ y + z + t = 0 \end{array}\right\}$$

025 **Discute este sistema en función de los valores de *m*.**

$$\left.\begin{array}{r} -x + y - z = -1 \\ 4x - 2y + 2z = 2m \\ -3x - 2y + mz = -4 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & m \end{vmatrix} = 4 - 2m$$

- Si $m \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado

- Si $m = 2 \rightarrow |A| = 0$

  $$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$$

  $$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3$$

  Rango $(A) \neq$ Rango $(A^*) \rightarrow$ Sistema incompatible

026 **Discute el sistema según los valores de *a*.**

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ay - 3z = 0 \\ 5x + 3y - z = 0 \end{array}\right\}$$

El sistema es homogéneo $\rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) \rightarrow$ Sistema compatible

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 7a + 63$$

- Si $a \neq -9 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado

- Si $a = -9 \rightarrow |A| = 0$

  $$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2 < \text{n.º de incógnitas}$$

  Sistema compatible indeterminado

027 **Resuelve este sistema en función de los valores de *m*.**

$$\left.\begin{array}{r} -x + y - z = -1 \\ 4x - 2y + 2z = 2m \\ -3x - 2y + mz = -4 \end{array}\right\}$$

Si $m \neq 2 \rightarrow |A| = 4 - 2m \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2m & -2 & 2 \\ -4 & -2 & m \end{vmatrix} = -2m^2 + 6m - 4 = -2(1-m)(2-m)$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2m & 2 \\ -3 & -4 & m \end{vmatrix} = -2(m^2 + m - 7) \quad |A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2m \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 22 - 10m$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-2(1-m)(2-m)}{4-2m} = -1 + m$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2(m^2+m-7)}{4-2m} = \frac{m^2+m-7}{m-2}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{22-10m}{4-2m} = \frac{5m-11}{m-2}$$

028 **Resuelve el sistema según los valores de *a*.**

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x - ay - 3z &= 0 \\ 5x + 3y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

- Si $a \neq -9 \rightarrow |A| = 7a + 63 \neq 0$
  Como el sistema es homogéneo la solución es: $x = 0$, $y = 0$, y $z = 0$
- Si $a = -9 \rightarrow |A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \rightarrow \text{Consideramos el sistema: } \left.\begin{aligned} 2x - 3y &= -z \\ x + 9y &= 3z \end{aligned}\right\}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -z & -3 \\ 3z & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -z \\ 1 & 3z \end{vmatrix} = 7z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 0 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{7z}{21} = \frac{z}{3}$$

La solución es: $x = 0$, $y = \frac{\lambda}{3}$, $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

029 **Resuelve por los métodos clásicos: reducción, igualación o sustitución, los sistemas de ecuaciones y clasifícalos atendiendo a su número de soluciones.**

a) $\left.\begin{aligned} 2x + 5y &= 1 \\ -3x + 2y &= -11 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2x + 6y &= 5 \\ -3x - 9y &= 1 \end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} 3y + z &= 3 \\ 3x + 4y &= 11 \\ -2x + 2z &= -8 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 4x - 6y &= 10 \\ -6x + 9y &= -15 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 2x + 5y &= 4 \\ -x - y &= 1 \\ 3x + 2y &= -5 \end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned} 3a - 2b &= -1 \\ -2a - b &= -4 \\ a + 4b &= 3 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+5y=1 \\ -3x+2y=-11 \end{array}\right\} \to \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

Sistema compatible determinado

b) $\left.\begin{array}{r} 4x-6y=\ \ 10 \\ -6x+9y=-15 \end{array}\right\} \to 2x-3y=5 \to x=\dfrac{5+3\lambda}{2},\quad y=\lambda \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$

Sistema compatible indeterminado

c) $\left.\begin{array}{r} 2x+6y=5 \\ -3x-9y=1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 6x+18y=15 \\ -6x-18y=2\ \ \end{array}\right\}$

Sistema incompatible

d) $\left.\begin{array}{l} 2x\ +5y=4 \\ -x-\ \ \ y=1 \\ 3x\ +2y=-5 \end{array}\right\} \to \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$

Sistema compatible determinado

e) $\left.\begin{array}{r} 3y+\ \ z=3 \\ 3x+4y\qquad=11 \\ -2x\qquad+2z=-8 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3y+z=3 \\ 3x+4y\qquad=11 \\ x+3y\qquad=7\ \ \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3y+z=3 \\ 3x+4y\qquad=11 \\ -5y\qquad=-10 \end{array}\right\} \to \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-3 \end{cases}$

Sistema compatible determinado

f) $\left.\begin{array}{r} 3a-2b=-1 \\ -2a-\ \ b=-4 \\ a+4b=3\ \ \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 6a-4b=-2 \\ -6a-3b=-12 \\ a+4b=3\ \ \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} a=1 \\ b=2 \\ 1+8\neq 3 \end{array}\right\}$

Sistema incompatible

030 Dado el sistema $\left.\begin{array}{r} x+2y=1 \\ 3x-\ \ y=2 \end{array}\right\}$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax+by=c$ (distinta que las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.

(Madrid. Junio 2004. Opción B. Ejercicio 2)

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=1 \\ 3x-\ \ y=2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x+6y=3 \\ -3x+\ \ y=-2 \end{array}\right\} \to \begin{cases} x=\dfrac{5}{7} \\[2mm] y=\dfrac{1}{7} \end{cases}$$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=1 \\ 3x-\ \ y=2 \\ 7x+7y=6 \end{array}\right\}$$

031 Resuelve aplicando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{aligned} 2x+3y+5z&=1\\ 4x+7y+13z&=-1\\ 2x+3y+7z&=-3\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x+2y+z&=1\\ x+y-z&=1\\ 2x+3y+z&=1\end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 5x+2y+3z&=5\\ -x+3y-2z&=12\\ x+y+z&=2\end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 3y+z&=3\\ 3x+4y&=11\\ -2x+2z&=-8\end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} x-2y-z&=-1\\ x-y+2z&=2\\ x+2y+z&=3\end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned} -p+3q-r&=12\\ 3p+2r&=7\\ 5p-6q+4r&=5\end{aligned}\right\}$

g) $\left.\begin{aligned} 3x-y+2z&=7\\ -x+2y+5z&=-2\\ 3x+4y+19z&=8\end{aligned}\right\}$

h) $\left.\begin{aligned} 2a-4b-c&=-7\\ -3a+2b-3c&=-4\\ -a-3b-8c&=-12\end{aligned}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2&3&5&1\\ 4&7&13&-1\\ 2&3&7&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 2&3&5&1\\ 0&1&3&-3\\ 0&0&2&-4\end{array}\right)\to\left.\begin{aligned} 2x+3y+5z&=1\\ y+3z&=-3\\ 2z&=-4\end{aligned}\right\}\to\left\{\begin{aligned} x&=1\\ y&=3\\ z&=-2\end{aligned}\right.$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&1&1\\ 1&1&-1&1\\ 2&3&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&1&1\\ 0&-1&-2&0\\ 0&-1&-1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&1&1\\ 0&-1&-2&0\\ 0&0&1&-1\end{array}\right)$

$\to\left.\begin{aligned} x+2y+\ \ z&=1\\ -\ \ y-2z&=0\\ z&=-1\end{aligned}\right\}\to\left\{\begin{aligned} x&=-2\\ y&=2\\ z&=-1\end{aligned}\right.$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 5&2&3&5\\ -1&3&-2&12\\ 1&1&1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&2\\ -1&3&-2&12\\ 5&2&3&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&2\\ 0&4&-1&14\\ 0&-3&-2&-5\end{array}\right)$

$\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&2\\ 0&4&-1&14\\ 0&0&-11&22\end{array}\right)\to\left.\begin{aligned} x+\ \ y+\ \ z&=2\\ 4y-\ \ z&=14\\ -11z&=22\end{aligned}\right\}\to\left\{\begin{aligned} x&=1\\ y&=3\\ z&=-2\end{aligned}\right.$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0&3&1&3\\ 3&4&0&11\\ -2&0&2&-8\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 3&4&0&11\\ 0&3&1&3\\ -2&0&2&-8\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 3&4&0&11\\ 0&3&1&3\\ 0&8&6&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 3&4&0&11\\ 0&3&1&3\\ 0&0&10&-30\end{array}\right)$

$\to\left.\begin{aligned} 3x+4y\qquad&=11\\ 3y+\ \ z&=3\\ 10z&=-30\end{aligned}\right\}\to\left\{\begin{aligned} x&=1\\ y&=2\\ z&=-3\end{aligned}\right.$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&-1&-1\\ 1&-1&2&2\\ 1&2&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&-1&-1\\ 0&1&3&3\\ 0&4&2&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&-1&-1\\ 0&1&3&3\\ 0&0&-10&-8\end{array}\right)$

$\to\left.\begin{aligned} x-2y-\ \ z&=-1\\ y+\ 3z&=3\\ -10z&=-8\end{aligned}\right\}\to\left\{\begin{aligned} x&=1\\ y&=\frac{3}{5}\\ z&=\frac{4}{5}\end{aligned}\right.$

f) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & | & 12 \\ 3 & 0 & 2 & | & 7 \\ 5 & -6 & 4 & | & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & | & 12 \\ 0 & 9 & -1 & | & 43 \\ 0 & 9 & -1 & | & 65 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & | & 12 \\ 0 & 9 & -1 & | & 43 \\ 0 & 0 & 0 & | & 22 \end{pmatrix}$

Sistema incompatible

g) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & | & 7 \\ -1 & 2 & 5 & | & -2 \\ 3 & 4 & 19 & | & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & | & -2 \\ 3 & -1 & 2 & | & 7 \\ 3 & 4 & 19 & | & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & | & -2 \\ 0 & 5 & 17 & | & 1 \\ 0 & 10 & 34 & | & 2 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & | & -2 \\ 0 & 5 & 17 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{r} x + 2y + 5z = -2 \\ 5y + 17z = 1 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{12 - 9\lambda}{5} \\ y = \dfrac{1 - 17\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{array}\right. \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

h) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & | & -7 \\ -3 & 2 & -3 & | & -4 \\ -1 & -3 & -8 & | & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & | & 12 \\ -3 & 2 & -3 & | & -4 \\ 2 & -4 & -1 & | & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & | & 12 \\ 0 & 11 & 21 & | & 32 \\ 0 & -10 & -17 & | & -31 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & | & 12 \\ 0 & 11 & 21 & | & 32 \\ 0 & 0 & 23 & | & -21 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{r} x + 3y + 8z = 12 \\ 11y + 21z = 32 \\ 23z = -21 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{123}{23} \\ y = \dfrac{107}{23} \\ z = -\dfrac{21}{23} \end{array}\right.$$

032 **Utiliza el método de Gauss para discutir los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.**

a) $\left.\begin{array}{r} 6x - 3y = 9 \\ -4x + 2y = -6 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -x - 3y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x - y + 2z = 4 \\ 2x - 2y + z = 6 \\ 5x - 5y + 4z = 16 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3a + 2b + 2c = 1 \\ 2a + b + c = 0 \\ 3b + 2c = -1 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} -4p + 2q = -8 \\ 6p - 3q = 5 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 3x - 3y = 3 \\ 2x \quad\quad = 0 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 3 \\ 3x + 4y + 2z = 5 \\ 5x + 7y + z = 1 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} 3a + b - c = 2 \\ -2a + 3b + 2c = 5 \\ 11b + 4c = 19 \end{array}\right\}$

a) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & | & 9 \\ -4 & 2 & | & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -3 & | & 9 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \to$ Sistema compatible indeterminado

b) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & | & 2 \\ 2 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -3 & | & 2 \\ 0 & -5 & | & 3 \end{pmatrix} \to$ Sistema compatible determinado

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 5 & -5 & 4 & 16 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado

e) $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & -8 \\ 6 & -3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible

f) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible determinado

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -13 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right)$

Sistema incompatible

h) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 11 & 4 & 19 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 4 & 19 \\ 0 & 11 & 4 & 19 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado

033 Resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} y - x = z \\ x - z = y \\ y + z = x \end{array}\right\}$$

(Extremadura. Septiembre 2005. Repertorio A. Ejercicio 2)

$$\left.\begin{array}{r} -x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} -x + y - z = 0 \\ -2z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right. \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

034 En un sistema hay, entre otras, estas dos ecuaciones:

$$x + 2y - 3z = 5 \quad \text{y} \quad 2x + 4y - 6z = -2.$$

¿Qué puede decirse de las soluciones del sistema?

(Cataluña. Septiembre 2005. Cuestión 1)

Como los coeficientes de las incógnitas son proporcionales y los términos independientes no lo son, el sistema es incompatible.

035 Dar un ejemplo de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas que sea incompatible.

(Extremadura. Junio 2005. Repertorio B. Ejercicio 1)

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ x-y-z=-1 \\ 2x+y+z=0 \end{array}\right\}$$

036 Dado el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x+2y-\ \ z=1 \\ x+\ \ y+2z=1 \end{array}\right\}$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x+\beta y+\gamma z=1$ (distinta que las anteriores) de manera que el sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas resultante sea compatible indeterminado.

(Madrid. Junio 2004. Opción B. Ejercicio 2)

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y-\ \ z=1 \\ x+\ \ y+2z=1 \\ 5z=1 \end{array}\right\}$$

037 Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=5 \\ 2x-3y+z=4 \end{array}\right\}$:

a) Añade una ecuación lineal de manera que el sistema resultante sea incompatible.

b) Añade una ecuación lineal de manera que el sistema resultante sea compatible indeterminado. Resuelve el sistema.

(Cataluña. Junio 2000. Cuestión 3)

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=5 \\ 2x-3y+z=4 \\ 3x-2y+z=1 \end{array}\right\}$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=5 \\ 2x-3y+z=4 \\ x+\ \ y\qquad =1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=5 \\ x+\ \ y\qquad =1 \\ x+\ \ y\qquad =1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=5 \\ x+\ \ y\qquad =1 \\ 0=0 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=2+5\lambda \end{array}\right. \quad \text{con } \lambda\in\mathbb{R}$$

038 Discute por el método de Gauss el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=2 \\ -x+3y+z=0 \\ -x+y+az=1 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1+a & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1-5a & -9 \end{array}\right)$$

- Si $a \neq \frac{1}{5} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1-5a & -9 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible determinado

- Si $a = \frac{1}{5} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible

039 Resolver el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ 2x+y-z=2 \end{array}\right\}$. Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación: $5x+y+\alpha z=\beta$, el sistema resultante sea compatible indeterminado.

(Madrid. Junio 2005. Opción B. Ejercicio 1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & -9 & \alpha-15 & \beta-5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+6 & \beta-5 \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea compatible indeterminado debe ocurrir que:

$\alpha+6=0 \rightarrow \alpha=-6$

$\beta-5=0 \rightarrow \beta=5$

040 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde a y b son números reales, halle los valores de a y b que hacen que las dos matrices conmuten, es decir, que hacen que se cumpla $AB=BA$.

(Cataluña. Año 2005. Serie 4. Cuestión 1)

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB=BA \rightarrow \left.\begin{array}{c} 1=1 \\ a+b=a+b \\ 0=0 \\ 1=1 \end{array}\right\}$$

Los productos son iguales para cualquier valor de a y de b.

041 Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$.

¿Qué condiciones han de cumplir x, y y z para que las matrices A y B conmuten, es decir, para que $AB=BA$?

(Cantabria. Septiembre 2005. Bloque 2. Opción B)

$$AB=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&y\\z&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2z&y\\3x+4z&3y\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}x&y\\z&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y&2x+4y\\z&2z\end{pmatrix}$$

$$AB=BA\rightarrow\left.\begin{aligned}x+2z&=x+3y\\y&=2x+4y\\3x+4z&=z\\3y&=2z\end{aligned}\right\}\rightarrow\left.\begin{aligned}3y-2z&=0\\2x+3y\qquad&=0\\3x\qquad+3z&=0\\3y-2z&=0\end{aligned}\right\}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&0&0\\3&0&3&0\\0&3&-2&0\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&0&0\\0&-9&6&0\\0&3&-2&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&0&0\\0&-9&6&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left.\begin{aligned}2x+3y\qquad&=0\\-9y+6z&=0\end{aligned}\right\}\rightarrow\left\{\begin{aligned}x&=-3\lambda\\y&=2\lambda\\z&=3\lambda\end{aligned}\right.\quad\text{con }\lambda\in\mathbb{R}$$

042 Escribe mediante ecuaciones estos sistemas.

a) $\begin{pmatrix}2&3&5\\1&2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1&4\\2&3\\1&5\\-6&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\\2\\5\end{pmatrix}$

a) $\left.\begin{aligned}2x+3y+5z&=3\\x+2y-\ z&=-1\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned}a+4b&=-1\\2a+3b&=4\\a+5b&=2\\-6a+7b&=5\end{aligned}\right\}$

043 Escribe en forma matricial estos sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{aligned}x+2y-3z&=-2\\-x-\ y+2z&=3\\3y-5z&=0\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned}p+q+r-s&=3\\2p-q+2s&=5\\q+3r-5s&=-1\end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned}x+y-\ z+t-\ v&=-1\\2x-\quad 3z+\quad 6v&=8\end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned}x+y-z&=3\\-x+z&=-7\\2x+y+4z&=5\\3y-9z&=-1\end{aligned}\right\}$

a) $\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&-1&2\\0&3&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\2&-1&0&2\\0&1&3&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p\\q\\r\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

044 Escribe en forma matricial, y luego resuelve empleando la matriz inversa.

a) $\left.\begin{array}{r} 4x - y = 18 \\ 3x + 2y = 8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - z = -7 \\ 2x + y - 3z = -26 \\ 4y + 2z = 0 \end{array}\right\}$

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix}$

$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$

$|A| = 11 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -26 \\ 0 \end{pmatrix}$

$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$

$|A| = 6 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -26 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \\ z = 8 \end{cases}$

045 Discute los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando el teorema de Rouché-Fröbenius.

a) $\left.\begin{array}{r} x+3y-5z=-8 \\ 3x+6y-5z=0 \\ 4x+9y-10z=-8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 8x-6y+2z=-1 \\ 3x+y-z=10 \\ -x+3y-2z=5 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 3a+2b-6c+3d=7 \\ a-b+2c-d=6 \\ 6a-b=3 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} a+5b=7 \\ -2a+2b+3c=-2 \\ -a+3b+2c=1 \\ 4b+c=4 \end{array}\right\}$

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 6 & -5 \\ 4 & 9 & -10 \end{pmatrix}$ $\quad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & -8 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 4 & 9 & -10 & -8 \end{array}\right)$

$|A|=0$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}=-3\neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A)=2$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 9 & -8 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \text{Rango }(A^*)=2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

b) $A=\begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 10 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right)$

$|A|=-14\neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
Sistema compatible determinado

c) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^*=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -6 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 6 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0$ $\quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-5\neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A)=2$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 6 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix}=110\neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A^*)=3$

Rango $(A) \neq$ Rango $(A^*) \rightarrow$ Sistema incompatible

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 12 & 3 & 12 \\ 0 & 8 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Rango $(A^*) = 2$
Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

046 Resuelve, aplicando la regla de Cramer, estos sistemas compatibles determinados.

a) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ -3x - 2y &= -1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 3a + 2b + 2c &= 1 \\ 2a + b + c &= 0 \\ 3b + 2c &= -1 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2a - 3b &= 6 \\ -a + 5b &= -3 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 3x + 5y &= 33 + 2z \\ 3x &= 19 - y \\ 10 + 3z &= x + 2y \end{aligned}\right\}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 4$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = 3 \qquad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = -4$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_a| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \quad |A_b| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \quad |A_c| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 7$

$a = \dfrac{|A_a|}{|A|} = -1 \qquad b = \dfrac{|A_b|}{|A|} = -5 \qquad c = \dfrac{|A_c|}{|A|} = 7$

c) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_a| = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 21 \qquad |A_b| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$a = \dfrac{|A_a|}{|A|} = 3 \qquad b = \dfrac{|A_b|}{|A|} = 0$

d) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 26 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_x| = \begin{vmatrix} 33 & 5 & -2 \\ 19 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 130 \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 33 & -2 \\ 3 & 19 & 0 \\ 1 & 10 & -3 \end{vmatrix} = 104 \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 33 \\ 3 & 1 & 19 \\ 1 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 26$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = 5 \qquad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = 4 \qquad z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = 1$

047 **Resuelve, aplicando la regla de Cramer, estos sistemas compatibles indeterminados.**

a) $\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 6 \\ -3x + y - 2z &= -3 \\ 2x - 3y + z &= -3 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y + z + t &= 4 \\ x - y + z &= 1 \\ y - z + t &= 1 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2a - b &= 0 \\ 11a - b - 3c &= 0 \\ a - 2b + c &= 0 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 3p - 3q + 11r &= 0 \\ 4p + 7r &= 0 \\ 5p + 3q + 3r &= 0 \\ -6p - 6q + r &= 0 \end{aligned}\right\}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{aligned} x + 2y &= 6 - z \\ -3x + y &= -3 + 2z \end{aligned}\right\}$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 6 - z & 2 \\ -3 + 2z & 1 \end{vmatrix} = 12 - 5z \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 6 - z \\ -3 & -3 + 2z \end{vmatrix} = 15 - z$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{12 - 5z}{7} \qquad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{15 - z}{7}$

La solución es: $x = \dfrac{12 - 5\lambda}{7}, \quad y = \dfrac{15 - \lambda}{7}, \quad z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=4-t \\ x-y+z=1 \\ y-z=1-t \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4-t & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1-t & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4-2t \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 2-t$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4-t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-t & -1 \end{vmatrix} = 3-t \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{3-t}{2}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4-t \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{vmatrix} = 1+t \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{1+t}{2}$$

La solución es: $x = 2-\lambda,\ \ y = \dfrac{3-\lambda}{2},\ \ z = \dfrac{1+\lambda}{2},\ \ t = \lambda$ con $\lambda = \mathbb{R}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 11 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 11 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a-b=0 \\ 11a-b=3c \end{array}\right\}$$

$$|A_a| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3c & -1 \end{vmatrix} = 3c \qquad |A_b| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 11 & 3c \end{vmatrix} = 6c$$

$$a = \frac{|A_a|}{|A|} = \frac{c}{3} \qquad b = \frac{|A_b|}{|A|} = \frac{2c}{3}$$

La solución es: $a = \dfrac{\lambda}{3},\ \ b = \dfrac{2\lambda}{3},\ \ c = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ -6 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3p-3q=-11r \\ 4p=-7r \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} p = -\dfrac{7}{4}\lambda \\ q = \dfrac{23}{12}\lambda \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \\ r = \lambda \end{cases}$$

048 **Discute y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.**

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=3 \\ x+y-3z=3 \\ 2x+3y+z=3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y+2z=3 \\ 2y+3z=2 \\ 3x+y+3z=7 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} a+c=0 \\ b-c=1 \\ a+3b+c=5 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 5x+4y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 16x+17y+7z=0 \\ 4x-y+4z=1 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} a+c=0 \\ b-c=1 \\ a+3b-2c=5 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 2x-y+t=0 \\ x+2y-z+4t=-1 \\ 3x-4y+z-2t=1 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} 2x-4y+z=7 \\ -3x+6y-2z=4 \\ 11x-22y+6z=24 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} 2a-b+c=7 \\ 3a+2b-2c=1 \end{array}\right\}$

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-3\neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A)=\text{Rango }(A^*)=3=\text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible determinado

$$|A_x|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=12 \qquad |A_y|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-12 \qquad |A_z|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}=3$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=-4 \qquad y=\frac{|A_y|}{|A|}=4 \qquad z=\frac{|A_z|}{|A|}=-1$$

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right)$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A)=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \text{Rango }(A^*)=2$$

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x+y=3-2z \\ 2y=2-3z \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3-2z & 1 \\ 2-3z & 2 \end{vmatrix} = 4-z \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3-2z \\ 0 & 2-3z \end{vmatrix} = 2-3z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{4-z}{2} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{2-3z}{2}$$

La solución es: $x = \dfrac{4-\lambda}{2}$, $y = \dfrac{2-3\lambda}{2}$, $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = \text{n.° de incógnitas}$$

Sistema compatible determinado

$$|A_a| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad |A_b| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad |A_c| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$a = \frac{|A_a|}{|A|} = -\frac{2}{3} \qquad b = \frac{|A_b|}{|A|} = \frac{5}{3} \qquad c = \frac{|A_c|}{|A|} = \frac{2}{3}$$

d) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 16 & 17 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 16 & 17 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 16 & 17 & 7 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 21 \rightarrow \text{Rango}(A) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 16 & 17 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 3 = \text{n.° de incógnitas}$$

Sistema compatible determinado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & -13 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -21 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 3y + z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ -21y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{21} \\ y = -\dfrac{1}{21} \\ z = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3 \neq \text{Rango } (A) \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

f) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = \text{Rango } (A^*) = 2 < \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x - y = -t \\ x + 2y = -1 + z - 4t \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -t & -1 \\ -1 + z - 4t & 2 \end{vmatrix} = -1 + z - 6t$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-1 + \lambda - 6\mu}{5}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -t \\ 1 & -1 + z - 4t \end{vmatrix} = -2 + 2z - 7t$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2 + 2\lambda - 7\mu}{5}$$

La solución es: $x = \dfrac{-1 + \lambda - 6\mu}{5}$, $\quad y = \dfrac{-2 + 2\lambda - 7\mu}{5}$,

$z = \lambda$, $\quad t = \mu$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

g) $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \\ 11 & -22 & 6 \end{pmatrix}$

$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 7 \\ -3 & 6 & -2 & 4 \\ 11 & -22 & 6 & 24 \end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \\ 11 & -22 & 6 \end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A)=2$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -3 & -2 & 4 \\ 11 & 6 & 24 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \text{Rango }(A^*)=2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x+z=7+4y \\ -3x-2z=4-6y \end{array}\right\}$

$|A_x|=\begin{vmatrix} 7+4y & 1 \\ 4-6y & -2 \end{vmatrix}=-18-2y$ $\qquad$ $|A_z|=\begin{vmatrix} 2 & 7+4y \\ -3 & 4-6y \end{vmatrix}=29$

$x=\dfrac{|A_x|}{|A|}=18+2\lambda$ $\qquad$ $z=\dfrac{|A_z|}{|A|}=-29$

La solución es: $x=18+2\lambda,\quad y=\lambda,\quad z=-29$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

h) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7\neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2a-b=7-c \\ 3a+2b=1+2c \end{array}\right\}$

$|A_a|=\begin{vmatrix} 7-c & -1 \\ 1+2c & 2 \end{vmatrix}=15$ $\qquad$ $|A_b|=\begin{vmatrix} 2 & 7-c \\ 3 & 1+2c \end{vmatrix}=7c-19$

$a=\dfrac{|A_a|}{|A|}=\dfrac{15}{7}$ $\qquad$ $b=\dfrac{|A_b|}{|A|}=\dfrac{7c-19}{7}$

La solución es: $a=\dfrac{15}{7},\quad b=\dfrac{7\lambda-19}{7},\quad c=\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

049 **Discute el sistema de ecuaciones lineales según los distintos valores del parámetro m.**

$$\left.\begin{array}{r}(m-2)x+y=0\\ x+(m-2)y=0\end{array}\right\}$$

Al ser un sistema homogéneo sabemos que es compatible para cualquier valor de m.

$$A=\begin{pmatrix} m-2 & 1\\ 1 & m-2\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} m-2 & 1\\ 1 & m-2\end{vmatrix}=m^2-4m+3$$

$$m^2-4m+3=0 \rightarrow \begin{cases} m=1\\ m=3\end{cases}$$

- Si $m \in \mathbb{R}-\{1,3\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m=1$ o $m=3 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

050 **Discute, en función de a, el sistema.**

$$\left.\begin{array}{r}ax+ay=a\\ x-ay=1\end{array}\right\}$$

(Castilla y León. Junio 2007. Prueba B. Cuestión 3)

$$A=\begin{pmatrix} a & a\\ 1 & -a\end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{cc|c} a & a & a\\ 1 & -a & 1\end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & a\\ 1 & -a\end{vmatrix}=-a^2-a$$

$$-a^2-a=0 \rightarrow \begin{cases} a=0\\ a=-1\end{cases}$$

Al ser la última columna de la matriz A^* igual que la primera:

- Si $a \in \mathbb{R}-\{-1,0\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a=-1$ o $a=0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

051 **El siguiente sistema de ecuaciones depende de un parámetro p. Discútelo según los valores de p.**

$$\left.\begin{array}{r}x+2y+z=p\\ 2x+3y+z=p\\ x+y-pz=p\end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -p \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & p \\ 2 & 3 & 1 & p \\ 1 & 1 & -p & p \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -p \end{vmatrix} = p \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & p \\ 2 & 3 & p \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix} = -p$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Si $p \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $p = 0 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

052 **Discute el sistema según los valores de a.**

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 2 \\ 5x + 2y + 4z &= -1 \\ 3x + y + a^2z &= 3a \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & a^2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & a^2 & 3a \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = 1 - a^2 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3a \end{vmatrix} = -3a - 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = -1 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

053 **Discute este sistema para los distintos valores de k.**

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ 2x + y &= 5 \\ 4x - 3y &= k \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & k \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & k \end{vmatrix} = 5k - 65$$

- Si $k \neq 13 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $k = 13 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado

054 **Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los distintos valores del parámetro p.**

$$\left.\begin{aligned} px + (p+1)z &= p \\ py + z &= p \\ y + pz &= p \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & p+1 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 1 & p \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} p & 0 & p+1 & p \\ 0 & p & 1 & p \\ 0 & 1 & p & p \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} p & 0 & p+1 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 1 & p \end{vmatrix} = p(p^2-1) \qquad \begin{vmatrix} p & 0 & p \\ 0 & p & p \\ 0 & 1 & p \end{vmatrix} = p(p^2-p) = p^2(p-1)$$

- Si $p \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $p = -1$, como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible
- Si $p = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado
- Si $p = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

055 **¿Qué valores debe tomar a en el siguiente sistema de ecuaciones lineales para que sea incompatible?**

$$\left.\begin{aligned} x + (a-1)y + z &= 1 \\ 3x + ay + az &= 3 \end{aligned}\right\}$$

¿Y para que sea compatible?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 3 & a & a \end{pmatrix}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & 1 & 1 \\ 3 & a & a & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 3 - 2a \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a - 3$$

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < n.º de incógnitas para cualquier valor de a
Sistema compatible indeterminado para cualquier valor de a

056 **Clasifica el siguiente sistema para los distintos valores del parámetro p.**

$$\left.\begin{aligned} a + pb - 2c &= 0 \\ pb + c &= 0 \\ 3a + 2b - c &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Al ser un sistema homogéneo sabemos que es compatible para cualquier valor de p.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & -2 \\ 0 & p & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & p & -2 \\ 0 & p & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 8p - 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

- Si $p \neq \frac{1}{4} \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $p = \frac{1}{4} \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

057 **Halla para qué valores del parámetro a este sistema es incompatible.**

$$\left.\begin{aligned} (a+1)x + y + z &= a(a+3) \\ x + (a+1)y + z &= a^2(a+3) \\ x + y + (a+1)z &= a^3(a+3) \end{aligned}\right\}$$

¿Qué valor debe tomar a para que sea compatible indeterminado?

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & a(a+3) \\ 1 & a+1 & 1 & a^2(a+3) \\ 1 & 1 & a+1 & a^3(a+3) \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^3 + 2 - 3(a+1) = a^3 + 3a^2 = a^2(a+3)$$

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & a(a+3) \\ 1 & a+1 & a^2(a+3) \\ 1 & 1 & a^3(a+3) \end{vmatrix} = a(a+3)\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= a(a+3)(a^2(a+1)^2 - a^2 - a(a+1)) =$$

$$= a^2(a+3)(a^3 + 2a^2 - a - 1)$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-3, 0\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado
- Si $a = -3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$
  Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

Luego no hay ningún valor de a para el que el sistema sea incompatible.
Los valores para los que es compatible indeterminado son 0 y -3.

058 **Averigüe si el siguiente sistema puede ser compatible indeterminado para algún valor de m.**

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 0 \\ 2x + 4y + 3z &= 0 \\ x + y + mz &= 0 \end{aligned}\right\}$$

¿Es incompatible para algún valor de m?

(Cataluña. Junio 2006. Cuestión 2)

Al ser un sistema homogéneo sabemos que es compatible para cualquier valor de m.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 2 - 2m$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

- Si $m \neq 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

El sistema no es incompatible para ningún valor de m.

059 Discute el sistema de ecuaciones lineales según los valores de b.

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ x + (1+b)y - bz &= 2b \\ x + by + (1+b)z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

(Extremadura. Junio 2006. Repertorio B. Ejercicio 4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+b & -b & 2b \\ 1 & b & 1+b & 1 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{vmatrix} = 2b^2 - 2b = 2b(b-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1+b & 2b \\ 1 & b & b \end{vmatrix} = -b^2 + 3b - 2 = -(b-1)(b-2)$$

- Si $b \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $b = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible
- Si $b = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

060 Discutir la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a.

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= a \\ x + y - z &= 1 \\ 3x + 3y + az &= a \end{aligned}\right\}$$

(País Vasco. Julio 2006. Bloque A. Problema A)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & a \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & a & a \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & a \end{vmatrix} = 2a + 6 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & a \end{vmatrix} = 2a - 6$$

- Si $a \neq -3 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -3 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible

061 Estudie, según los valores del parámetro a, el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left.\begin{aligned} ax + ay &= a \\ x - y + az &= a \\ x + 2y + 3z &= a \end{aligned}\right\}$$

(Murcia. Junio 2006. Bloque 1. Cuestión A)

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a & a & 0 & a \\ 1 & -1 & a & a \\ 1 & 2 & 3 & a \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -a(a+6) \qquad \begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = -3a(a-1)$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-6, 0\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -6 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

062 a) El siguiente sistema es compatible y determinado.

$$\left.\begin{aligned} -x + y + z &= 1 \\ 4y + 3z &= 2 \\ x + 2y &= 1 \\ x + 3y + 2z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Calcula su solución.

b) Considera ahora el sistema:

$$\left.\begin{aligned} -x + y + z &= 1 \\ 4y + az &= 2 \\ x + 2y &= 1 \\ x + ay + 2z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

- ¿Es posible encontrar valores para a tales que el sistema sea incompatible? En caso afirmativo, indica cuáles. Justifica tu respuesta.
- ¿Es posible encontrar valores para a tales que el sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, indica cuáles. Justifica tu respuesta.

(Cantabria. Junio 2004. Bloque 1. Opción B)

a) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = -\frac{3}{5} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{4}{5} \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = -\frac{2}{5}$$

Comprobamos con la última ecuación: $-\frac{3}{5}+3\cdot\frac{4}{5}+2\left(-\frac{2}{5}\right)=1$

Por tanto, la solución es: $x=-\frac{3}{5},\quad y=\frac{4}{5},\quad z=-\frac{2}{5}$

b) $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & a\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & a & 2\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & a & 2\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & a & 2 & 1\end{array}\right)$

$\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & a\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=3a-4 \qquad \begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & a & 2\end{vmatrix}=a-8$

Rango $(A)=3$ para cualquier valor de a

$$\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & a & 2\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & a & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & a & 2\\ 0 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 1+a & 3 & 2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}4 & a & 2\\ 3 & 1 & 2\\ 1+a & 3 & 2\end{vmatrix}=6a-2a^2$$

- Si $a\in\mathbb{R}-\{0,3\}\rightarrow$ Rango $(A^*)=4\neq$ Rango $(A)=3\rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a=0$ o $a=3\rightarrow$ Rango $(A^*)=$ Rango $(A)=3$
  Sistema compatible determinado

Por tanto no hay valores para los que el sistema sea compatible indeterminado.

063 **Clasificar el siguiente sistema según los distintos valores de los parámetros *a* y *b*.**

$$\left.\begin{aligned}x-y-z&=b\\ -x+y&=2\\ x+ay+2z&=-2\end{aligned}\right\}$$

(Murcia. Junio 2008. Bloque 1. Cuestión B)

$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & a & 2\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & b\\ -1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & a & 2 & -2\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & a & 2\end{vmatrix}=a+1 \qquad \begin{vmatrix}1 & -1 & b\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=-2b-4$

- Si $a\neq -1$ y para cualquier valor de b:
  Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=3=$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a=-1$ y $b\neq -2\rightarrow\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0\rightarrow$ Rango $(A)=2\neq$ Rango $(A^*)=3$
  Sistema incompatible
- Si $a=-1$ y $b=-2\rightarrow\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=2$
  Sistema compatible indeterminado

064 Discute este sistema y resuélvelo cuando $m = 6$.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ x - 2y + mz = m \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & m \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & m & m \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix} = m - 7 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix} = m$$

- Si $m \neq 7 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = 7 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible
- Si $m = 6 \rightarrow |A| = -1$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -18 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 12 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 18 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = -12 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = -6$$

065 Se considera el sistema $\left.\begin{array}{r} x + y + az = 4 \\ ax + y - z = 0 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{array}\right\}$, donde a es un parámetro real.

a) Discutir el sistema en función del valor de a.

b) Resolver el sistema para $a = 1$.

(Castilla y León. Septiembre 2007. Prueba A. Problema 1)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 4 \\ a & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2a^2 - a - 1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6a - 6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$2a^2 - a - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}, 1\right\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado

- Si $a = -\frac{1}{2} \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 1 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

b) Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} y - z = -x \\ 2y - z = 2 - 2x \end{array}\right\}$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 2-2x & -1 \end{vmatrix} = 2 - x \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -x \\ 2 & 2-2x \end{vmatrix} = 2$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = 2 - x \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 2$$

La solución es: $x = \lambda, \quad y = 2 - \lambda, \quad z = 2$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

066 **Se considera el sistema de ecuaciones:**

$$\left.\begin{array}{r} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 0 \end{array}\right\}$$

a) Discútelo para los distintos valores de m.

b) Resuélvelo para $m = 1$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2004. Bloque 2. Pregunta B)

a) $A = \begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m+2 & m-1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 0 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - m \qquad \begin{vmatrix} m-1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ m & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3m + 1$$

- Si $m \in \mathbb{R} - \{-1, 0\} \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado
- Si $m = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible
- Si $m = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible

b) Si $m = 1 \rightarrow |A| = -2$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = -1 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 0$$

067 Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+\alpha y+z=9 \\ 3x+5y+z=9 \\ \alpha x+y+z=9 \end{array}\right\}$, se pide:

a) Prueba que siempre es compatible, obteniendo los valores de α para los que es indeterminado.

b) Resuelve el ejercicio anterior para $\alpha = 7$.

(C. Valenciana. Junio 2007. Bloque 1. Problema 2)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ \alpha & 1 & 1 & 9 \end{array}\right)$

Las dos últimas columnas de la matriz ampliada son proporcionales entonces Rango (A) = Rango (A^*) para cualquier α.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 8\alpha + 7 \qquad \alpha^2 - 8\alpha + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 7 \end{cases}$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{1, 7\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3
  Sistema compatible determinado
- Si $\alpha = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 2
  Sistema compatible indeterminado
- Si $\alpha = 7 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 2
  Sistema compatible indeterminado

b) Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x+7y=9-z \\ 3x+5y=9-z \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 9-z & 7 \\ 9-z & 5 \end{vmatrix} = 2z - 18 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 9-z \\ 3 & 9-z \end{vmatrix} = 2z - 18$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{2z-18}{-16} = \frac{9-z}{8} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{2z-18}{-16} = \frac{9-z}{8}$$

La solución es: $x = y = \dfrac{9-\lambda}{8}$, $\quad z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

068 Sea S el sistema de ecuaciones lineales:

$$S = \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x + 4y + 9z = 14 \\ x + 8y + Az = \dfrac{10}{7}A \end{cases}$$

Estudiar la compatibilidad del sistema en función de A. Resolver para $A = 0$.

(País Vasco. Julio 2007. Bloque A. Problema A)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & A \end{pmatrix} \qquad B^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 14 \\ 1 & 8 & A & \dfrac{10}{7}A \end{array}\right)$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & A \end{vmatrix} = 2A - 42 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 14 \\ 1 & 8 & \dfrac{10}{7}A \end{vmatrix} = \frac{10}{7}(2A - 42)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

- Si $A \neq 21 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado
- Si $A = 21 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Para $A = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 6 \\ x + 4y + 9z = 14 \\ x + 8y \qquad = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 2y \qquad = 4 \\ x + 8y \qquad = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 2y \qquad = 4 \\ -7x \qquad = -16 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{16}{7} \\ y = -\dfrac{2}{7} \\ z = \dfrac{10}{7} \end{array}\right.$$

069 Considere el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} px + 7y + 8z = 1.370 \\ x + y + z = 200 \\ 7x + py + 8z = 1.395 \end{array}\right\}$$

a) Discútalo en función del parámetro p.

b) Resuelva el sistema para $p = 6$.

(Cataluña. Septiembre 2006. Problema 6)

a) $A = \begin{pmatrix} p & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & p & 8 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} p & 7 & 8 & 1.370 \\ 1 & 1 & 1 & 200 \\ 7 & p & 8 & 1.395 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} p & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & p & 8 \end{vmatrix} = -p^2 + 16p - 63 \qquad \begin{vmatrix} p & 8 & 1.370 \\ 1 & 1 & 200 \\ 7 & 8 & 1.395 \end{vmatrix} = -205p + 1.410$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$-p^2 + 16p - 63 = 0 \rightarrow \begin{cases} p = 7 \\ p = 9 \end{cases}$$

- Si $p \in \mathbb{R} - \{7, 9\} \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado
- Si $p = 7$ o $p = 9 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

b) Para $p = 6 \to |A| = -3$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1.370 & 7 & 8 \\ 200 & 1 & 1 \\ 1.395 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -255 \to x = \frac{|A_x|}{|A|} = 85$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 & 1.370 & 8 \\ 1 & 200 & 1 \\ 7 & 1.395 & 8 \end{vmatrix} = -180 \to y = \frac{|A_y|}{|A|} = 60$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 1.370 \\ 1 & 1 & 200 \\ 7 & 6 & 1.395 \end{vmatrix} = -165 \to z = \frac{|A_z|}{|A|} = 55$$

070 Discute, según los valores del parámetro m, el sistema:

$$\left.\begin{aligned} y + mz &= 0 \\ x + z &= 0 \\ mx - y &= m \end{aligned}\right\}$$

Resuélvelo, si es posible, para $m = 0$ y $m = 2$.

(Galicia. Junio 2006. Bloque 1. Opción 2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ m & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & m & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ m & -1 & 0 & m \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ m & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ m & -1 & m \end{vmatrix} = -m$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Si $m \neq 0 \to$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \to$ Sistema incompatible
- Si $m = 0 \to$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 \to$ Sistema compatible indeterminado

Resolvemos para $m = 0$: $\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ x + z &= 0 \\ -y &= 0 \end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x &= -\lambda \\ y &= 0 \\ z &= \lambda \end{aligned}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Para $m = 2$ el sistema es incompatible.

071 Discute el siguiente sistema según el valor del parámetro k y resuélvelo cuando $k = -1$.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= k \\ (1 + k)x + y + z &= 2k \\ x + (1 + k)y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

(Baleares. Junio 2007. Opción A. Cuestión 1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+k & 1 & 1 \\ 1 & 1+k & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 1+k & 1 & 1 & 2k \\ 1 & 1+k & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+k & 1 & 1 \\ 1 & 1+k & 1 \end{vmatrix} = k^2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1+k & 1 & 2k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - k$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1+k & 1 \end{vmatrix} = -k$$

- Si $k \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado
- Si $k = 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 1 \neq$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema incompatible

Para $k = -1 \rightarrow |A| = 1$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = -2 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 0$$

072 **Clasifica en función del parámetro el sistema de ecuaciones:**

$$\left.\begin{aligned} ax - 3y - 2z &= 0 \\ -x + (5+a)z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

y resuélvelo, si es posible, para $a = -4$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2006. Bloque 3. Pregunta B)

Al ser un sistema homogéneo sabemos que es compatible para cualquier valor de a.

$$A = \begin{pmatrix} a & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 5+a \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 5+a \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -3a^2 - 21a - 36$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$$-3a^2 - 21a - 36 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a = -4 \end{cases}$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-4, -3\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -4$ o $a = -3 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2$
  Sistema compatible indeterminado

Para $a = -4$ consideramos el sistema: $\left.\begin{aligned} -x &= -z \\ 2x + 3y &= -4z \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

073 Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales y resuélvelo en el caso de que sea compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} ax - y - 4z = 1 \\ x + ay - 2z = -1 \\ y + z = -a \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & -4 \\ 1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -4 & 1 \\ 1 & a & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -a \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & -4 \\ 1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 2a - 3 \qquad \begin{vmatrix} a & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix} = 2a^2 - 3a + 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a = 1 \end{cases}$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-3, 1\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -3 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Para $a = 1$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} -y - 4z = 1 - x \\ y + z = -1 \end{array}\right\}$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 - x & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -x - 3 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 1 - x \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = x$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-x - 3}{3} \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{x}{3}$$

La solución es: $x = \lambda,\quad y = \dfrac{-\lambda - 3}{3},\quad z = \dfrac{\lambda}{3}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

074 Estudiar y resolver, cuando sea posible, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = 0 \\ x + y = a \end{array}\right\}$$

(Murcia. Septiembre 2007. BLoque 1. Cuestión A)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ 1 & 1 & a \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - b \qquad \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2$$

- Si $a \neq b \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = b = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1$
  Sistema compatible indeterminado
- Si $a = b \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 1 \neq$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema incompatible

Para $a \neq b \rightarrow \left.\begin{array}{r} ax + by = 0 \\ -ax - ay = -a^2 \end{array}\right\} \rightarrow (b-a)y = -a^2 \rightarrow y = -\dfrac{a^2}{b-a} \rightarrow x = \dfrac{ab}{b-a}$

Para $a = b = 0 \rightarrow x + y = 0 \rightarrow y = -x$

La solución es: $x = \lambda, \quad y = -\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

075 **Discute el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvelo en los casos en que sea posible.**

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z = a^2 \\ x - y = -a \\ x + ay + z = a \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 0 & -a \\ 1 & a & 1 & a \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ -1 & 0 & -a \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 + 2a = -2a(a-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 0$ o $a = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2$
  Sistema compatible indeterminado

Para $a = 0$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} y + z = 0 \\ -y = -x \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{array}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Para $a = 1$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} y + z = 1 - x \\ -y = -1 - x \end{array}\right\}$

La solución es: $x = \lambda, \quad y = 1 + \lambda, \quad z = -2\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

076 **Discute el sistema y resuélvelo para los valores del parámetro que lo hagan compatible determinado.**

$$\left.\begin{array}{l} mx + 2y + 3z = 0 \\ 2x + my + 2z = 2 \\ 2x + my + 3z = m - 2 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & 3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & 3 & 0 \\ 2 & m & 2 & 2 \\ 2 & m & 3 & m-2 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & 3 \end{vmatrix} = m^2 - 4 \qquad \begin{vmatrix} m & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = 2m^2 - 16m + 24$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

- Si $m = \pm 2 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = -2 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $m = 2 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Para $m = \pm 2 \rightarrow |A| = m^2 - 4$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ m-2 & m & 3 \end{vmatrix} = -3m^2 + 16m - 20$$

$$\rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-3m^2 + 16m - 20}{m^2 - 4} = \frac{-3m + 10}{m + 2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} m & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & 3 \end{vmatrix} = -2m^2 + 16m - 24$$

$$\rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2m^2 + 16m - 24}{m^2 - 4} = \frac{-2m + 12}{m + 2}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} m & 2 & 0 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & m-2 \end{vmatrix} = m^3 - 4m^2 - 4m + 16$$

$$\rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{m^3 - 4m^2 - 4m + 16}{m^2 - 4} = m - 4$$

Para $m = 2$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{l} 2x + 2z = 2 - 2y \\ 2x + 3z = -2y \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2-2y & 2 \\ -2y & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2y \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 2-2y \\ 2 & -2y \end{vmatrix} = -4$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 3 - y \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = -2$$

La solución es: $x = 3 - \lambda$, $y = \lambda$, $z = -2$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

077 **Resuelve para los valores del parámetro que lo hacen compatible determinado.**

$$\left.\begin{array}{r} ax - z = a \\ ay + 2z = 0 \\ 3x + y + z = 5 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + a$$

Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0\} \to$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
Sistema compatible determinado

$$|A_x| = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 3a \to x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{a^2 + 3a}{a^2 + a} = \frac{a+3}{a+1}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} a & a & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -4a \to y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-4a}{a^2 + a} = \frac{-4}{a+1}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2a^2 \to z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{2a^2}{a^2 + a} = \frac{2a}{a+1}$$

078 **Estudiar el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro α y resolverlo en los casos que sea posible.**

$$\left.\begin{aligned} 6x + 2y + 2z &= 6 \\ \alpha x + 2y + z &= \alpha \\ 5x + 3y + \alpha z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

(Canarias. Junio 2008. Bloque 3. Opción A)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 5 & 3 & \alpha \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 2 & 6 \\ \alpha & 2 & 1 & \alpha \\ 5 & 3 & \alpha & 5 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 5 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = -2\alpha^2 + 18\alpha - 28$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$-2\alpha^2 + 18\alpha - 28 = 0 \to \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = 7 \end{cases}$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{2, 7\} \to$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
Sistema compatible determinado
- Si $\alpha = 2$ o $\alpha = 7 \to$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2$
Sistema compatible indeterminado

Para $\alpha \in \mathbb{R} - \{2, 7\}$:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 5 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = -2\alpha^2 + 18\alpha - 28 \to x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 2 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ 5 & 5 & \alpha \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = 0$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 6 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = 0$$

Para $\alpha = 2$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2y + 2z = 6 - 6x \\ 2y + z = 2 - 2x \end{array}\right\}$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 - 6x & 2 \\ 2 - 2x & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2x \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 6 - 6x \\ 2 & 2 - 2x \end{vmatrix} = 8x - 8$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{2 - 2x}{-2} = x - 1 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{8x - 8}{-2} = 4 - 4x$$

La solución es: $x = \lambda$, $y = \lambda - 1$, $z = 4 - 4\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Para $\alpha = 7$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2y + 2z = 6 - 6x \\ 2y + z = 7 - 7x \end{array}\right\}$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 - 6x & 2 \\ 7 - 7x & 1 \end{vmatrix} = 8x - 8 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 6 - 6x \\ 2 & 7 - 7x \end{vmatrix} = 2 - 2x$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{8x - 8}{-2} = 4 - 4x \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{2 - 2x}{-2} = x - 1$$

La solución es: $x = \lambda$, $y = 4 - 4\lambda$, $z = \lambda - 1$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

079 Considerar el sistema lineal de ecuaciones en x, y y z.

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + z = 5 \\ mx + 2z = 0 \\ my - z = m \end{array}\right\}$$

a) Determinar los valores del parámetro m para los que el sistema tiene solución única. Calcular dicha solución para $m = 1$.

b) Determinar los valores del parámetro m para los que el sistema tiene infinitas soluciones. Calcular dichas soluciones.

c) Estudiar si existe algún valor de m para el cual el sistema no tiene solución.

(Aragón. Junio 2007. Opción A. Cuestión 1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 0 & 2 & 0 \\ 0 & m & -1 & m \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix} = m^2 + m \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & -1 & m \end{vmatrix} = -4m$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

a) Si $m \in \mathbb{R} - \{-1, 0\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
Sistema compatible determinado

Para $m = 1 \rightarrow |A| = 2$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = -2 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = 2 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 1$$

b) Si $m = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Para $m = 0$ consideramos: $\left.\begin{array}{r} 3y + z = 5 - x \\ 2z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

c) Si $m = -1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

080 **Discútase, en función del parámetro real k, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:**

$$\left.\begin{array}{r} kx + 3y = 0 \\ 3x + 2y = k \\ 3x + ky = 0 \end{array}\right\}$$

Resuélvase el sistema cuando sea posible.

(Castilla y León. Septiembre 2006. Prueba B. Problema 1)

$$A = \begin{pmatrix} k & 3 \\ 3 & 2 \\ 3 & k \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} k & 3 & 0 \\ 3 & 2 & k \\ 3 & k & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} k & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2k - 9 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & k \end{vmatrix} = 3k - 6 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2 \text{ para cualquier valor de } k$$

$$\begin{vmatrix} k & 3 & 0 \\ 3 & 2 & k \\ 3 & k & 0 \end{vmatrix} = -k(k^2 - 9)$$

- Si $k \in \mathbb{R} - \{-3, 0, 3\} \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $k = -3$, $k = 0$ o $k = 3 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2$ = n.º de incógnitas
Sistema compatible determinado

Para $k = -3$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = -3 \\ 3x - 3y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{5} \\ y = -\dfrac{3}{5} \end{array}\right.$

Para $k = 0$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 0 \\ 3x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$

Para $k = 3$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 3 \\ 3x + 3y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -3 \end{array}\right.$

081 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} x + (k+1)y + 2z &= -1 \\ kx + y + z &= k \\ (k-1)x - 2y - z &= k+1 \end{aligned}\right\}$$

a) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.

b) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

(Madrid. Septiembre 2007. Opción A. Ejercicio 3)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ k-1 & -2 & -1 & k+1 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2k^2 - 5k + 2$ $\quad \begin{vmatrix} k+1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & k \\ -2 & -1 & k+1 \end{vmatrix} = 2k^2 - 3k - 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$2k^2 - 5k + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

- Si $k \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}, 2\right\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $k = \dfrac{1}{2} \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $k = 2 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

b) Para $k = 2$ consideramos el sistema: $\left.\begin{aligned} y + z &= 2 - 2x \\ -2y - z &= 3 - x \end{aligned}\right\}$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 2-2x & 1 \\ 3-x & -1 \end{vmatrix} = 3x - 5$ $\quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 2-2x \\ -2 & 3-x \end{vmatrix} = 7 - 5x$

$y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = 3x - 5$ $\quad z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = 7 - 5x$

La solución es: $x = \lambda$, $\quad y = 3\lambda - 5$, $\quad z = 7 - 5\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

082 Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible.

$$\left.\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ x + (a^2 - a - 1)y &= -1 \\ x + (a^2 - a - 1)y + (a-2)z &= 1 - a^2 \end{aligned}\right\}$$

(Navarra. Junio 2008. Grupo 1. Opción A)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & a^2-a-1 & 0 \\ 1 & a^2-a-1 & a-2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & a^2-a-1 & 0 & -1 \\ 1 & a^2-a-1 & a-2 & 1-a^2 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & a^2-a-1 & 0 \\ 1 & a^2-a-1 & a-2 \end{vmatrix} = a(a-2)(a-1) \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & a-2 & 1-a^2 \end{vmatrix} = -a(a-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{1, 0, 2\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = 2 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 0$ o $a = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2$
  Sistema compatible indeterminado

Para $a \in \mathbb{R} - \{1, 0, 2\}$:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & a^2-a-1 & 0 \\ 1-a^2 & a^2-a-1 & a-2 \end{vmatrix} = a(a-1)(3-a^2) \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{(3-a^2)}{(a-2)}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1-a^2 & a-2 \end{vmatrix} = a(a-1) \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{a(a-1)}{a(a-2)(a-1)} = \frac{1}{(a-2)}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & a^2-a-1 & -1 \\ 1 & a^2-a-1 & 1-a^2 \end{vmatrix} = a(a-1)(2-a^2)$$

$$\rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{a(a-1)(2-a^2)}{a(a-2)(a-1)} = \frac{(2-a^2)}{(a-2)}$$

Para $a = 0$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x - z = y \\ x = y - 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda - 1 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Para $a = 1$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x - z = y \\ x = y - 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda - 1 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

083 **Dado el sistema** $\left.\begin{array}{r} x + 3y - az = 4 \\ -ax + y + az = 0 \\ -x + 2ay = a + 2 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{array}\right\}$ **discutirlo según los valores de** a**,**
y resolverlo cuando sea compatible.

(Aragón. Junio 2008. Bloque 1. Opción B)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -a \\ -a & 1 & a \\ -1 & 2a & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -a & 4 \\ -a & 1 & a & 0 \\ -1 & 2a & 0 & a+2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -a \\ -a & 1 & a \\ -1 & 2a & 0 \end{vmatrix} = 2a(a-2)(a+1) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -a \\ -a & 1 & a \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -(a-2)(a-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -a & 4 \\ -a & 1 & a & 0 \\ -1 & 2a & 0 & a+2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (a-2)^2(a+3) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & a+2 \end{vmatrix} = (a-2)(-5a-3)$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-3, 2\} \rightarrow$ Rango $(A) = 3 \neq$ Rango $(A^*) = 4 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = -3 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = 2 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Para $a = -3$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x + 3y + 3z = 4 \\ 3x + y - 3z = 0 \\ -x - 6y = -1 \end{array}\right\}$

$|A| = -60$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -60 \qquad x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = 0$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & -1 \end{vmatrix} = -60 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 1$$

Para $a = 2$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{l} x + 3y = 4 + 2z \\ 2x - y = 2z \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4+2z & 3 \\ 2z & -1 \end{vmatrix} = -4 - 8z \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4+2z \\ 2 & 2z \end{vmatrix} = -8 - 2z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{4+8z}{7} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{8+2z}{7}$$

La solución es: $x = \dfrac{4+8\lambda}{7}$, $y = \dfrac{8+2\lambda}{7}$, $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

084 **Discutir, según los valores que adopte el parámetro *t* (un número real), la compatibilidad o incompatibilidad del sistema:**

$$\left.\begin{array}{r} tx + 3y = 2 \\ 3x + 2y = t \\ 2x + ty = 3 \end{array}\right\}$$

Resuélvelo cuando sea posible.

(La Rioja. Junio 2006. Propuesta B. Ejercicio 5)

$$A = \begin{pmatrix} t & 3 \\ 3 & 2 \\ 2 & t \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} t & 3 & 2 \\ 3 & 2 & t \\ 2 & t & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} t & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2t - 9 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & t \end{vmatrix} = 3t - 4 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2 \text{ para cualquier valor de } t$$

$$\begin{vmatrix} t & 3 & 2 \\ 3 & 2 & t \\ 2 & t & 3 \end{vmatrix} = -(t+5)(t^2 - 5t + 7)$$

- Si $t \neq -5 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $t = -5 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado

Para $t = -5$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} -5x + 3y = 2 \\ 3x + 2y = -5 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

085 **Considera el sistema de ecuaciones lineales, donde $m \in \mathbb{R}$.**

$$\left.\begin{array}{r} x + y + mz = 1 \\ mx + (m-1)y + z = m \\ x + y + z = m + 1 \end{array}\right\}$$

a) Determina el carácter del sistema según los valores de m.

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible determinado.

c) Modifica solamente un coeficiente de la última ecuación para que el sistema resultante sea compatible para cualquier valor de m.

(Cantabria. Septiembre 2007. Bloque 2. Opción A)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ m & m-1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 & m+1 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m-1 & m \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -m$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & m-1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Si $m \neq 1 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

b) Si $m \neq 1$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^3 + m^2 + 2m - 1$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-m^3 + m^2 + 2m - 1}{m - 1}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m & 1 \\ 1 & m+1 & 1 \end{vmatrix} = m^3 - m \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{m^3 - m}{m-1} = m(m+1)$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m-1 & m \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -m \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-m}{m-1}$$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} x + y + mz &= 1 \\ mx + (m-1)y + z &= m \\ x + y + (m+1)z &= m+1 \end{aligned}\right\} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas

Sistema compatible determinado para cualquier valor de m

086 **Dado el sistema de ecuaciones lineales:**

$$\left.\begin{aligned} x - ay &= 2 \\ ax - y &= a+1 \end{aligned}\right\}$$

Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene una solución en la que $y = 2$.

(Madrid. Junio 2008. Opción A. Ejercicio 1)

$$\text{Si } y = 2 \rightarrow \left.\begin{aligned} x - 2a &= 2 \\ ax - 2 &= a+1 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 2 + 2a \rightarrow a(2+2a) - 2 = a + 1$$

$$\rightarrow 2a^2 + a - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

087 **Considera este sistema de ecuaciones:**

$$\left.\begin{aligned} mx - y &= 1 \\ x - my &= 2m - 1 \end{aligned}\right\}$$

a) Clasifica el sistema según los valores de m.

b) Calcula los valores de m para los que el sistema tiene una solución en la que $x = 3$.

(Andalucía. Junio 2004. Opción A. Ejercicio 3)

a) $A = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & 1 \\ 1 & -m & 2m-1 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 1$ $\qquad \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 2m-1 \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1$

- Si $m \neq \pm 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = -1 \rightarrow$ Rango $(A) = 1 \neq$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $m = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

b) Si $x = 3 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3m - y = 1 \\ 3 - my = 2m - 1 \end{array}\right\} \rightarrow y = 3m - 1 \rightarrow 3 - m(3m - 1) = 2m - 1$

$$\rightarrow -3m^2 - m + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

088 a) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{array}\right\}$$

b) Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

(Madrid. Septiembre 2006. Opción B. Ejercicio 1)

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 3z \\ 2x + 3y = 5 + z \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 3z \\ y = 5 - 5z \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = -5 + 8\lambda \\ y = 5 - 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

b) Si $x + y + z = 4 \rightarrow -5 + 8\lambda + 5 - 5\lambda + \lambda = 4 \rightarrow \lambda = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

089 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 6x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 6z = 3 \\ x + 3y + 2z = \alpha \end{array}\right\}$$

a) Justificar que, para cualquier valor del parámetro real α, el sistema tiene solución única.

b) Hallar la solución del sistema en función del parámetro α.

c) Determinar el valor de α para el que la solución (x, y, z) del sistema satisface $x + y + z = 1$.

(C. Valenciana. Septiembre 2007. Bloque 1. Problema 1)

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & \alpha \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -50 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = \text{Rango } (A^*) = 3 = \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible determinado para cualquier valor de α

b) $|A_x| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ \alpha & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10\alpha - 50 \rightarrow x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{10\alpha - 50}{-50} = \dfrac{5-\alpha}{5}$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = -30\alpha + 30 \rightarrow y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{-30\alpha + 30}{-50} = \dfrac{3\alpha - 3}{5}$

$|A_z| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = 15\alpha - 20 \rightarrow z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = \dfrac{15\alpha - 20}{-50} = \dfrac{4 - 3\alpha}{10}$

c) Si $x + y + z = 1 \rightarrow \dfrac{5-\alpha}{5} + \dfrac{3\alpha - 3}{5} + \dfrac{4 - 3\alpha}{10} = 1 \rightarrow \alpha = 2 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{3}{5} \\ z = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$

090 Demuestra que para que el sistema siguiente sea compatible tiene que suceder que: $c = a + b$.

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= a \\ 2x + z &= b \\ 4x - y + 2z &= c \end{aligned}\right\}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 & b \\ 4 & -1 & 2 & c \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ 2 & 0 & b \\ 4 & -1 & c \end{vmatrix} = -2a - 2b + 2c$

El rango de la matriz A es 2. Para que el sistema sea compatible el rango de la matriz A^* también tiene que ser igual a 2. Para ello:

$$-2a - 2b + 2c = 0 \rightarrow c = a + b$$

091 Los sistemas: $\left.\begin{aligned} ax + y + bz &= -4 \\ bx + ay + cz &= -9 \\ cx + by + az &= -11 \end{aligned}\right\}$ y $\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 1 \\ x + z &= -1 \\ x - z &= 3 \end{aligned}\right\}$ son equivalentes.

Hallar a, b y c.

(Murcia. Septiembre 2005. Bloque 1. Cuestión 1)

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 1 \\ x + z &= -1 \\ x - z &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 1 \\ x + z &= -1 \\ 2x &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = -2 \end{cases}$$

Si los sistemas son equivalentes entonces tienen la misma solución. Así:

$$\left.\begin{array}{r} a-3-2b=-4 \\ b-3a-2c=-9 \\ c-3b-2a=-11 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} a-2b=-1 \\ -3a+b-2c=-9 \\ -2a-3b+c=-11 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & -9 \\ -2 & -3 & 1 & -11 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -3 & 1 & -11 \\ -3 & 1 & -2 & -9 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -3 & 1 & -11 \\ -7 & -5 & 0 & -31 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -3 & 1 & -11 \\ -7 & -5 & 0 & -31 \\ 0 & -19 & 0 & -38 \end{array}\right)$$

$$\to \left.\begin{array}{r} -2a-3b+c=-11 \\ -7a-5b=-31 \\ -19b=-38 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} a=3 \\ b=2 \\ c=1 \end{array}\right.$$

092 **Se considera el sistema de ecuaciones:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) **Discutirlo según los valores del parámetro real λ.**

b) **Resolverlo para $\lambda = -3$.**

c) **Resolverlo para $\lambda = 1$.**

(Madrid. Junio 2001. Opción B. Ejercicio 3)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 2\lambda - 1 = -(\lambda-1)^2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+\lambda & 3+\lambda & 3+\lambda & 3+\lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3+\lambda)\begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(3+\lambda)(1-\lambda)(\lambda-1)^2 = (3+\lambda)(\lambda-1)^3$$

- Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{-3, 1\} \to$ Rango $(A^*) = 4 \neq$ Rango $(A) = 3 \to$ Sistema incompatible

- Si $\lambda = -3 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $\lambda = 1 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 1 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

b) Para $\lambda = -3$ consideramos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=-3 \\ x+y-3z=1 \\ x-3y+z=1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=-3 \\ 4z=-4 \\ 4y=-4 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$$

c) Para $\lambda = 1$ el sistema se reduce a:

$$x+y+z=1 \rightarrow \begin{cases} x = 1-a-b \\ y = a \\ z = b \end{cases} \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

093 **Dado el sistema de ecuaciones:**

$$S = \begin{cases} x+2y+z=A \\ x+\ \ y+z=B \\ x+\ \ y-z=C \end{cases}$$

Demostrar que es compatible determinado para cualquier valor de *A*, *B* y *C* y encontrar la solución en función de dichos valores.

(País Vasco. Septiembre 2003. Bloque A. Problema A)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & A \\ 1 & 1 & 1 & B \\ 1 & 1 & -1 & C \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = \text{Rango } (A^*) = 3 = \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible determinado para cualquier valor de A, B y C

$$|A_x| = \begin{vmatrix} A & 2 & 1 \\ B & 1 & 1 \\ C & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2A+3B+C \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-2A+3B+C}{2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & A & 1 \\ 1 & B & 1 \\ 1 & C & -1 \end{vmatrix} = 2A-2B \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = A-B$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & A \\ 1 & 1 & B \\ 1 & 1 & C \end{vmatrix} = B-C \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{B-C}{2}$$

094 En un supermercado se venden huevos de categorías *XL*, *L* y *M*. Averigua el precio de una docena de cada tipo de huevos sabiendo que:

- Carmen compró una docena de cada categoría y pagó 4,90 €.
- Jesús pagó 9,60 € por 2 docenas *XL* y 4 docenas *M*.
- Esther se llevó 3 docenas *L* y 3 *M* y pagó 9,30 €.

Sean x, y, z los precios de cada docena de huevos de categorías *XL*, *L* y *M*, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=4{,}9 \\ 2x+4z=9{,}6 \\ 3y+3z=9{,}3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=4{,}9 \\ -2y+2z=-0{,}2 \\ y+z=3{,}1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=4{,}9 \\ -2y+2z=-0{,}2 \\ 4z=6 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1{,}8 \\ y=1{,}6 \\ z=1{,}5 \end{array}\right.$$

Así, la docena de huevos *XL* cuesta 1,80 €, la de categoría *L* vale 1,60 € y la de *M* 1,50 €.

095 El bloque de pisos en el que vivo ha estado de obras. El administrador de la comunidad está tratando de descubrir cuánto cobran a la hora un electricista, un fontanero y un albañil. Sabe que:

- En el 4.º A el electricista estuvo 1 hora y el albañil 2 horas y tuvieron que pagar 78 € de mano de obra.
- En el 3.º D pagaron 85 € por las 2 horas que estuvo el fontanero y la hora que estuvo el albañil.
- En mi casa estuvieron 1 hora el fontanero, 1 hora el electricista y 3 horas el albañil y nos cobraron 133 €.

¿Cuánto cobra por hora cada profesional?

Sean x, y, z los precios por hora de trabajo del electricista, el fontanero y el albañil, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+2z=78 \\ 2y+z=85 \\ x+y+3z=133 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+3z=133 \\ 2y+z=85 \\ x+2z=78 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+3z=133 \\ 2y+z=85 \\ -y-z=-55 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+3z=133 \\ 2y+z=85 \\ y=30 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=28 \\ y=30 \\ z=25 \end{array}\right.$$

El electricista cobra 28 €, el fontanero 30 € y el albañil 25 €.

096 Tengo ahorradas 20 monedas por un valor total de 29,50 €. Hay cuatro veces más monedas de 2 € que de 1 €. También hay monedas de 50 céntimos. ¿Cuántas monedas hay en total?

Sean x, y, z las monedas de 2 €, 1 € y 50 céntimos que tengo ahorradas, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=20\\ 2x+y+0{,}5z&=29{,}5\\ x&=4y \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x+y+z&=20\\ 20x+10y+5z&=295\\ x-4y&=0 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x+y+z&=20\\ 15x+5y&=195\\ x-4y&=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\to \left.\begin{aligned} x+y+z&=20\\ 15x+5y&=195\\ 65y&=195 \end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x&=12\\ y&=3\\ z&=5 \end{aligned}\right.$$

Hay 12 monedas de 2 €, 3 de 1 € y 5 de 50 céntimos.

097 **Pilar compra 200 acciones de la empresa *A*, 150 de *B* y 100 de *C* y paga 3.300 € mientras que Juan gasta 3.750 € por la compra de 50 acciones de *A*, 120 de *B* y 240 de *C*. Con estos datos, ¿es posible saber el precio de cada acción? ¿Y si cada acción tiene un precio entero comprendido entre 1 € y 12 €, ambos incluidos?**

Sean x, y, z los precios de las acciones de las empresas A, B y C, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{aligned} 200x+150y+100z&=3.300\\ 50x+120y+240z&=3.750 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 200 & 150\\ 50 & 120 \end{vmatrix} = 16.500 \neq 0$$

Los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son iguales a 2, como el sistema tiene 3 incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. Es decir, el sistema tiene infinitas soluciones de la forma:

$$\left.\begin{aligned} 200x+150y+100z&=3.300\\ 50x+120y+240z&=3.750 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 4x+3y+2z&=66\\ 5x+12y+24z&=375 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y+2z&=66\\ 33y+86z&=1.170 \end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x&=\frac{16\lambda-111}{11}\\ y&=\frac{1.170-86\lambda}{33}\\ z&=\lambda \end{aligned}\right. \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Con los datos no es posible determinar los precios de las acciones.

Si las acciones tienen un precio entero, el valor de la acción de la empresa C solo puede ser de 9 €, así las acciones de la empresa A valen 3 € y las de B 12 €.

098 **El encargado de un almacén de electrodomésticos desea conocer lo que pesan un frigorífico y una lavadora. Como no tiene báscula requiere ciertas informaciones a otros empleados:**

- **Sr. Moreno: un frigorífico y una lavadora juntos pesan 120 kg.**
- **Sr. Arce: el otro día llevé en el camión 3 frigoríficos y 4 lavadoras. La camioneta vacía pesa 1.250 kg y con la carga pesaba 1.550 kg.**
- **Sr. Puente: yo llevé 4 frigoríficos y 5 lavadoras y todo pesaba 480 kg.**

Realiza los cálculos para determinar los pesos. ¿Qué sucede? Busca alguna explicación de esos resultados.

Sea x el peso de un frigorífico y sea y el de una lavadora.
Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 120 \\ 3x + 4y = 1.550 - 1.250 \\ 4x + 5y = 480 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 120 \\ 3x + 4y = 300 \\ 4x + 5y = 480 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 120 \\ 3 & 4 & 300 \\ 4 & 5 & 480 \end{vmatrix} = 60 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A^*) = 3 \neq \text{Rango }(A) = 2 \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

El sistema no tiene solución, por tanto los datos recogidos no pueden ser correctos.

099 **Cuando en el año 1800 Beethoven escribe su primera sinfonía, su edad es diez veces mayor que la del jovencito Franz Schubert. Pasa el tiempo y es Schubert el que compone su célebre *Sinfonía Incompleta*. Entonces la suma de las edades de ambos músicos es igual a 77 años. Cinco años después muere Beethoven y en ese momento Schubert tiene los mismos años que tenía Beethoven cuando compuso su primera sinfonía.**

Determinar el año de nacimiento de cada uno de estos dos compositores.

(Aragón. Junio 2004. Opción A. Cuestión 1)

Sean x e y los años de nacimiento de Beethoven y Schubert, respectivamente, y sea z el año en que se compuso la Sinfonía completa.
Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} 1.800 - x = 10(1.800 - y) \\ (z - y) + (z - x) = 77 \\ z + 5 - y = 1.800 - x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -x + 10y = 16.200 \\ -x - y + 2z = 77 \\ x - y + z = 1.795 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y + z = 1.795 \\ -x - y + 2z = 77 \\ -x + 10y = 16.200 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y + z = 1.795 \\ -3x + y = -3.513 \\ -x + 10y = 16.200 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y + z = 1.795 \\ -3x + y = -3.513 \\ 29x = 51.330 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1.770 \\ y = 1.797 \\ z = 1.822 \end{array}\right.$$

Así, Beethoven nació en el año 1770 y Schubert en el 1797.

100 La liga de fútbol de un cierto país la juegan 21 equipos a doble vuelta. Este año, los partidos ganados valían 3 puntos, los empatados 1 punto y los perdidos 0 puntos. En estas condiciones, el equipo campeón de liga obtuvo 70 puntos.

Hasta el año pasado los partidos ganados valían 2 puntos y el resto, igual. Con el sistema antiguo, el actual campeón hubiera obtenido 50 puntos.

¿Cuántos partidos ganó, empató y perdió el equipo campeón?

(Aragón. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 1)

Sean x, y, z los partidos ganados, empatados y perdidos por el equipo, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=40\\ 3x+y&=70\\ 2x+y&=50\end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z&=40\\ 3x+y&=70\\ -x&=-20\end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x&=20\\ y&=10\\ z&=10\end{aligned}\right.$$

El equipo ganó 20 partidos, empató 10 y perdió otros 10.

101 Las edades, en años, de un niño, su padre y su abuelo verifican las siguientes condiciones:

- La edad del padre es α veces la de su hijo.
- El doble de la edad del abuelo más la edad del niño y más la del padre es de 182 años.
- El doble de la edad del niño más la del abuelo es 100.

a) Establece las edades de los tres suponiendo que $\alpha = 2$.

b) Para $\alpha = 3$, ¿qué ocurre con el problema planteado?

c) Siguiendo con $\alpha = 3$, ¿qué ocurre si en la segunda condición la suma es de 200 en vez de 182?

(Asturias. Junio 2004. Bloque 2)

Sean x, y, z las edades del niño, del padre y del abuelo, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{aligned} y&=\alpha x\\ 2z+x+y&=182\\ 2x+z&=100\end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha x-y&=0\\ x+y+2z&=182\\ 2x+z&=100\end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+2z&=182\\ \alpha x-y&=0\\ 2x+z&=100\end{aligned}\right\}$$

a) Si $\alpha = 2 \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 182 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 100 & 0 & 1\end{vmatrix} = 18 \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 182 & 2\\ 2 & 0 & 0\\ 2 & 100 & 1\end{vmatrix} = 36 \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 182\\ 2 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 100\end{vmatrix} = 64$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 18 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = 36 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 64$$

El hijo tiene 18 años, el padre 36 y el abuelo 64.

b) Si $\alpha = 3 \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 182 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 100 \end{vmatrix} = -36 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3 \neq \text{Rango } (A) = 2$

Sistema incompatible

c) $\left.\begin{aligned} y &= 3x \\ 2z + x + y &= 200 \\ 2x + z &= 100 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 3x - y &= 0 \\ x + y + 2z &= 200 \\ 2x + z &= 100 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 200 \\ 3x - y &= 0 \\ 2x + z &= 100 \end{aligned}\right\}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 100 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 2 = \text{Rango } (A) < \text{n.º de incógnitas}$

Sistema compatible indeterminado

102 **En una caja hay monedas de tres tipos: de 2 €, de 1 € y de 50 céntimos.**

Se sabe que, en total, hay 33 monedas y el valor conjunto de todas ellas es de 40 €. ¿Se puede determinar el número de cada tipo de monedas?

Si la respuesta es afirmativa, encuentra el número de cada uno de los tipos de moneda.

Si la respuesta es negativa, encuentra, al menos, dos conjuntos diferentes de 33 monedas de los tipos descritos y de manera que el valor total sea de 40.

(País Vasco. Junio 2002. Bloque E. Cuestión E)

Sean x, y, z el número de monedas de 2 €, 1 € y 50 céntimos que hay en la caja, respectivamente.

Entonces:

$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 33 \\ 2x + y + 0,5z &= 40 \end{aligned}\right\}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son iguales a 2, como el sistema tiene 3 incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. Es decir, el sistema tiene infinitas soluciones de la forma:

$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 33 \\ 2x + y + 0,5z &= 40 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 33 \\ -x + 0,5z &= -7 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 7 + 0,5\lambda \\ y = 26 - 1,5\lambda \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$

Respuesta abierta: dos soluciones posibles son 8 monedas de 2 €, 23 de 1 € y 2 de 50 céntimos, o bien, 9 monedas de 2 €, 20 de 1 € y 4 de 50 céntimos.

103 De tres números, x, y, z, sabemos lo siguiente: que el primero más el segundo suman 0; que el primero más el tercero suman 1; que la suma de los tres es 0 y, para terminar, que el primero multiplicado por un número k más el doble de la suma del segundo y el tercero da 1.

a) ¿Qué puede decirse del valor de k?

b) ¿Cuánto valen esos tres números?

(Cataluña. Año 2005. Serie 4. Problema 5)

$$\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ x+z=1 \\ x+y+z=0 \\ kx+2(y+z)=1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ x+z=1 \\ x+y+z=0 \\ kx+2y+2z=1 \end{array}\right\}$$

Considerando las tres primeras ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ x+z=1 \\ z=0 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \\ z=0 \end{array}\right.$$

Si sustituimos en la última ecuación: $k-2=1 \to k=3$

Por tanto, si $k=3$ el sistema es compatible determinado y los números son: $1, -1$ y 0

Si $k \neq 3$ el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

104 En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:

- Alimento Migato: 600 g de carne, 300 g de pescado y 100 g de verdura.
- Alimento Catomeal: 300 g de carne, 400 g de pescado y 300 g de verdura.
- Alimento Comecat: 200 g de carne, 600 g de pescado y 200 g de verdura.

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 g de carne, 370 g de pescado y 160 g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada?

(C. Valenciana. Septiembre 2005. Ejercicio B. Problema 1)

Sean x, y, z los porcentajes de carne, pescado y verdura que se encuentran en los alimentos, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} 600x+300y+200z=470 \\ 300x+400y+600z=370 \\ 100x+300y+200z=160 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 60x+30y+20z=47 \\ 30x+40y+60z=37 \\ 5x+15y+10z=8 \end{array}\right\}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 40 & 60 \\ 5 & 15 & 10 \end{vmatrix} = -25.000 \neq 0$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 47 & 30 & 20 \\ 37 & 40 & 60 \\ 8 & 15 & 10 \end{vmatrix} = -15.500 \to x = \frac{|A_x|}{|A|} = 0{,}62$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 60 & 47 & 20 \\ 30 & 37 & 60 \\ 5 & 8 & 10 \end{vmatrix} = -5.500 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = 0{,}22$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 60 & 30 & 47 \\ 30 & 40 & 37 \\ 5 & 15 & 8 \end{vmatrix} = -4.000 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = 0{,}16$$

Los porcentajes son: 62 %, 22 % y 16 %.

105 Luis, Juan y Óscar son tres amigos. Luis le dice a Juan: Si te doy la tercera parte del dinero que tengo, los tres tendremos la misma cantidad. Calcular lo que tiene cada uno ellos sabiendo que entre los tres reúnen 60 €.

(Aragón. Junio 2003. Opción A. Cuestión 1)

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ \dfrac{x}{3} + y = x - \dfrac{x}{3} \\ \dfrac{x}{3} + y - z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 30 \\ y = 10 \\ z = 20 \end{array}\right.$$

106 Un coleccionista decide regalar un montón de sellos. A cada persona con la que se encuentra le da la mitad de los sellos que llevaba más uno, y se encuentra exactamente con 6 personas. Si al final regala todos los sellos, ¿cuántos sellos tenía el coleccionista?

(País Vasco. Julio 2007. Bloque E. Cuestión E)

Sea x el número de sellos que tenía el coleccionista.

A la primera persona le da: $\dfrac{x}{2} + 1$

A la segunda:

$$\left(x - \left(\frac{x}{2} + 1\right)\right) : 2 + 1 = \left(\frac{x}{2} - 1\right) : 2 + 1 = \frac{x}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$$

A la tercera:

$$\left(x - \left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)\right) : 2 + 1 = \left(x - \frac{3x}{4} - \frac{3}{2}\right) : 2 + 1 = \frac{x}{8} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{x}{8} + \frac{1}{4}$$

A la cuarta:

$$\left(x - \left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} + \frac{x}{8} + \frac{1}{4}\right)\right) : 2 + 1 = \left(x - \frac{7x}{8} - \frac{7}{4}\right) : 2 + 1 =$$
$$= \frac{x}{16} - \frac{7}{8} + 1 = \frac{x}{16} + \frac{1}{8}$$

A la quinta:

$$\left(x-\left(\frac{x}{2}+1+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}+\frac{x}{8}+\frac{1}{4}+\frac{x}{16}+\frac{1}{8}\right)\right):2+1=\left(x-\frac{15x}{16}-\frac{15}{8}\right):2+1=$$
$$=\frac{x}{32}-\frac{15}{16}+1=\frac{x}{32}+\frac{1}{16}$$

A la sexta:

$$\left(x-\left(\frac{x}{2}+1+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}+\frac{x}{8}+\frac{1}{4}+\frac{x}{16}+\frac{1}{8}+\frac{x}{32}+\frac{1}{16}\right)\right):2+1=$$
$$=\left(x-\frac{31x}{32}-\frac{31}{16}\right):2+1=\frac{x}{64}-\frac{31}{32}+1=\frac{x}{64}+\frac{1}{32}$$

Entonces:

$$\frac{x}{2}+1+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}+\frac{x}{8}+\frac{1}{4}+\frac{x}{16}+\frac{1}{8}+\frac{x}{32}+\frac{1}{16}+\frac{x}{64}+\frac{1}{32}=x$$
$$\rightarrow \frac{63x}{64}+\frac{63}{32}=x \rightarrow 63x+126=64x \rightarrow x=126$$

107 **Julia y Pedro están hablando por teléfono para comprobar que los sistemas que han resuelto les dan los resultados. Solo hay uno donde los resultados son diferentes.**

Para Julia las soluciones de ese sistema son $x=\frac{\lambda+8}{7}$, $y=\frac{11\lambda+18}{7}$, $z=\lambda$, mientras que para Pedro son $x=\frac{\mu+10}{11}$, $y=\mu$, $z=\frac{7\mu-18}{11}$. Después de cerciorarse de que ambos han escrito el enunciado del problema de la misma manera, empiezan a pensar que quizás sean dos maneras diferentes de resolver el mismo sistema de ecuaciones. Decídelo tú.

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{\lambda+8}{7}\\ y&=\frac{11\lambda+18}{7}\\ z&=\lambda \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 7x&=z+8\\ 7y&=11z+18 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 7x-z&=8\\ 7y-11z&=18 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{\mu+10}{11}\\ y&=\mu\\ z&=\frac{7\mu-18}{11} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 11x&=y+10\\ 11z&=7y-18 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 11x-y&=10\\ 7y-11z&=18 \end{aligned}\right\}$$

Si formamos un sistema con las tres ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 7x-z&=8\\ 7y-11z&=18\\ 11x-y&=10 \end{aligned}\right\}$$

comprobamos que ambas soluciones son correctas.

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $AP = PA$.

(Madrid. Junio 2006. Opción A. Ejercicio 2)

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$PA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$$

$$AP = PA \rightarrow \left.\begin{array}{r} a+2c = a \\ b+2d = 2a+b \\ c = c \\ d = 2c+d \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} c = 0 \\ d = a \\ c = c \\ 0 = c \end{array}\right.$$

Las matrices P son de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ con $a,b \in \mathbb{R}$.

2 Resuelve: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(Andalucía. Junio 2006. Opción B. Ejercicio 3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{5}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{5}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$, $B = (a \quad 2 \quad 3)$ y $C = (4 \quad 0 \quad 2)$.

a) Halle los valores x, y y z para los que A no tiene inversa.

b) Determine los valores de a para los que el sistema $BA = C$ tiene solución.

c) Resuelva el sistema anterior cuando sea posible.

(Asturias. Junio 2008. Bloque 1)

a) A no tiene inversa si $|A| = 0$.

$$\begin{vmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{vmatrix} = y \begin{vmatrix} x & y & x \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & z & z \end{vmatrix} = y(y - yz) = y^2(1 - z)$$

La inversa no existe si $y = 0$ o $z = 1$.

b) $BA = C \rightarrow (a \quad 2 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix} = (4 \quad 0 \quad 2) \rightarrow \left.\begin{array}{r} ax + 2y + 3 = 4 \\ ay + 3z = 0 \\ ax + 2y + 3z = 2 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} ax + 2y = 1 \\ ay + 3z = 0 \\ ax + 2y + 3z = 2 \end{array}\right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 3 & 0 \\ a & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ a & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ a & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a^2 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3a + 6$$

- Si $a \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

c) Si $a \neq 0$:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a + 6 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{3a+6}{3a^2} = \frac{a+2}{a^2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ a & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3a \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = -\frac{3a}{3a^2} = -\frac{1}{a}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 2 & 2 \end{vmatrix} = a^2 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$$

4 Se considera el sistema $\left.\begin{array}{r} x - y + z = -1 \\ y + z = 2a \\ x + 2z = a^2 \end{array}\right\}$ donde a es un parámetro real.

a) Discutir el sistema en función del valor de a.

b) Resolver el sistema para $a = 0$.

c) Resolver el sistema para $a = 1$.

(Castilla y León. Junio 2008. Prueba B. Problema 1)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & 2 & a^2 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$

- Si $a \neq 1 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 3 \neq$ Rango $(A) = 2 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 1 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

b) Para $a = 0 \rightarrow$ El sistema es incompatible, no tiene solución.

c) Para $a = 1$ consideramos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = -1 - z \\ y = 2 - z \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 1 - 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

5 Dado el sistema dependiente del parámetro α: $\left.\begin{array}{r} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{array}\right\}$

Se pide:

a) Determinar, razonadamente, los valores de α para los que el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

b) Resolver el sistema cuando es compatible determinado.

c) Obtener, razonadamente, la solución del sistema cuando $\alpha = 0$.

(C. Valenciana. Junio 2008. Bloque 1. Problema 1)

a) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 & 1 \\ \alpha+2 & \alpha & 1 \\ \alpha+2 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha+2)(\alpha-1)^2$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $\alpha = -2 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $\alpha = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

b) Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \rightarrow |A| = (\alpha+2)(\alpha-1)^2$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{1}{\alpha+2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{1}{\alpha+2}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{1}{\alpha+2}$$

c) Si $\alpha = 0 \rightarrow x = y = z = \dfrac{1}{2}$

6 **Cierto país importa 21.000 vehículos de tres marcas *A*, *B* y *C* al precio de 10.000, 15.000 y 20.000 € respectivamente. El total de la importación asciende a 332 millones de euros. Se ha observado que también hay 21.000 vehículos contando solamente los de la marca *B* y α veces los de la *A*.**

a) Plantea un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema en función del número de vehículos de cada marca.

b) Establece el número de vehículos de cada marca suponiendo $\alpha = 3$.

c) Estudia si existe algún valor α para el cual la situación no pueda darse en el campo de los números reales.

(Asturias. Junio 2007. Bloque 2)

a) Sean x, y, z los vehículos de cada marca. Entonces:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 21.000 \\ 10.000x + 15.000y + 20.000z &= 332.000.000 \\ \alpha x + y &= 21.000 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 21.000 \\ 10x + 15y + 20z &= 332.000 \\ \alpha x + y &= 21.000 \end{aligned}\right\}$$

b) Si $\alpha = 3 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 21.000 \\ 10x + 15y + 20z = 332.000 \\ 3x + y = 21.000 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 21.000 \\ 10x + 5y = 88.000 \\ 3x + y = 21.000 \end{array}\right\}$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 21.000 \\ 10x + 5y = 88.000 \\ 5x = 17.000 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 3.400 \\ y = 10.800 \\ z = 6.800 \end{cases}$$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 15 & 20 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21.000 \\ 10 & 15 & 20 & 332.000 \\ \alpha & 1 & 0 & 21.000 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 15 & 20 \\ \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5\alpha - 10$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 15 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 21.000 \\ 10 & 15 & 332.000 \\ \alpha & 1 & 21.000 \end{vmatrix} = 17.000\alpha - 17.000$

Si $\alpha = 2 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

4 Geometría en el espacio

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Nocilla Experience

Marc estudia con detenimiento el libro que tiene delante, *Guía agrícola Philips 1968*; la encontró entre los trastos viejos de su padre y se la quedó. Observa de reojo la azotea a través de la puerta de su caseta. Vive ahí. Un tinglado, situado en lo alto de un edificio de 8 plantas, que ha ido construyendo con diferentes hojas de latas, bidones, trozos de cartones petroleados y fragmentos de uralitas. Todo ensamblado de tal modo que las 4 paredes configuran un mosaico de palabras e iconos cuarteados de aceite La Giralda, lubricantes Repsol, Beba Pepsi o sanitarios Roca. A veces los mira, y entre todo ese hermanamiento de marcas comerciales intenta descubrir mapas, recorridos, señales latentes de otros territorios artificiales. En la azotea, que ningún vecino ya frecuenta, hay una serie de alambres que van de lado a lado en los que en vez de ropa colgada hay hojas escritas, a mano y por una sola cara, con fórmulas matemáticas; cada una sujeta de una pinza. Cuando sopla el viento [siempre sopla] y se mira de frente el conjunto de hojas, éstas forman una especie de mar de tinta teórico y convulso. Si se ven desde atrás, las caras en blanco de las DIN-A4 parecen la más exacta simbología de un desierto. Las ve aletear y piensa, Es fascinante mi teoría. Cierra la *Guía agrícola Philips 1968*, la deja sobre la mesa, sale y descuelga unas cuantas hojas de los cables número 1, 4 y 7. Antes de volver a entrar se acoda en la barandilla y piensa en el Mundial que nunca hemos ganado, en que lo más plano que existe sobre la Tierra son las vías de los trenes, en que la música de *El acorazado Potemkin*, si te fijas, es el «Purple Haze» de Jimi Hendrix versioneado. Después entra en la caseta, que tiembla cuando cierra la puerta de un golpe. […]

Domingo, son más de las 4 de la tarde, la gente está en la playa; él aún no ha comido. Por entre las uralitas de la caseta entra un pincel de luz que incide sobre la tecla 0 del PC. Tiene sonando el CD de Sufjan Stevens, *The Avalanche,* […] mientras termina de dar los últimos retoques a una demostración de la cual se siente muy satisfecho. Sale a la azotea con el folio en la mano, y en los tendales que conforman la retícula lo cuelga en la posición, $x = 10$, $y = 15$. No hay nada mejor para comprobar la firmeza de una teoría que airearla antes de propagarla, piensa.

AGUSTÍN FERNÁNDEZ MALLO

Nocilla Experience
Agustín Fernández Mallo

El protagonista de esta novela, cuyo autor es licenciado en ciencias Físicas, es una especie de ermitaño moderno que vive en una especie de chabola que ha construido en la azotea de una casa.

El asunto que lo distrae es una teoría que hace años que tiene en marcha, enmarcada en algo más amplio que él denomina socio-física teórica. El radio de acción, el banco de pruebas para su constatación, no pasa de 2 o 3 manzanas en torno a su azotea. En el barrio encuentra todo cuanto necesita: comestibles, conversaciones banales y ropa de temporada en tergal. La pretensión de su teoría consiste en demostrar con términos matemáticos que la soledad es una propiedad, un estado, connatural a los seres humanos superiores, y para ello se fundamenta en una evidencia física bien conocida por los científicos: sólo existen en la naturaleza dos clases de partículas, los fermiones [electrones y protones, por ejemplo] y los bosones [fotones, gluones, gravitones, etcétera]. Los fermiones se caracterizan por el hecho, ampliamente demostrado, de que no puede haber 2 o más en un mismo estado, o lo que es lo mismo, que no pueden estar juntos. La virtud de los bosones es justamente la contraria: no sólo pueden estar varios en un mismo estado y juntos, sino que buscan ese apilamiento, lo necesitan. Así, Marc toma como reflejo y patrón esa clasificación para postular la existencia de personas solitarias que, como los fermiones, no soportan la presencia de nadie. Son éstas las únicas que le merecen respeto alguno. Aparte, están las otras, las que como los bosones se arraciman en cuanto pueden bajo asociaciones, grupos y demás apiñamientos a fin de enmascarar en la masa su genética mediocridad. A estos últimos Marc los desprecia, por eso no es extraño que a él no le importe cómo marcha el mundo, ni si hay pobreza o riqueza, ni si sube o baja el precio de la fruta o el pescado, ni las manifestaciones, colectividades, partidos políticos, religiones u ONGs. Por supuesto, tiene por auténticos modelos de vida elevada, de vida esencialmente fermiónica, a Nietzsche, Wittgenstein, Unabomber, Cioran y sobre todo a Henry J. Darger, aquel hombre que jamás salió de su habitación de Chicago. Además, Marc, como todo fermión, hace tiempo que dejó de frecuentar mujeres y amigos. Su única conexión estable con el mundo es la red internauta.

Pese a su aislamiento, a Marc le suceden algunas cosas interesantes, como la visita del gran escritor Julio Cortázar, convertido por el autor de la novela en un personaje de ficción.

¿Cómo ha logrado Marc *convertir* el conjunto de tendales de la azotea en un sistema de coordenadas cartesianas?
Ahora imagina que Marc ya los llenó todos y, para tener más espacio, decide poner otro cable debajo de cada uno de los que ya había, a media altura. Explica cómo asignarías las coordenadas para determinar la posición de los folios que cuelgue.

Ha numerado los cables por orden y ha asignado una numeración, también ordenada, a las pinzas que utiliza para colgar las hojas.

Se podrían mantener las dos coordenadas que ya tenía cada folio y añadir una tercera coordenada que fuese 1 si este se encontrara en los cables que ya había ó 2 si se coloca en la nueva serie de alambres.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Dados los puntos $A(0, 3)$, $B(2, 1)$, $C(-2, 2)$ y $D(-3, 4)$, halla los vectores.

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (2, -2) - (-1, 2) = (3, -4)$

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} = (-2, -1) + (1, -2) = (-1, -3)$

c) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} = (-5, 3) + (2, 1) = (-3, 4)$

002 Dados $\vec{u} = (2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 3)$, realiza estas operaciones de vectores.

a) $\vec{u} - 3\vec{v}$ b) $5\vec{u} + \vec{v}$ c) $-\vec{u} + 2\vec{v}$

a) $\vec{u} - 3\vec{v} = (2, -1) - 3(0, 3) = (2, -10)$

b) $5\vec{u} + \vec{v} = 5(2, -1) + (0, 3) = (10, -2)$

c) $-\vec{u} + 2\vec{v} = -(2, -1) + 2(0, 3) = (-2, 7)$

003 Calcula estos determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$

c) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -4$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$

004 Halla el rango de estas matrices.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

a) Rango $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$

c) Rango $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} = 3$

b) Rango $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} = 1$

d) Rango $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = 2$

ACTIVIDADES

001 Dados los siguientes vectores, calcula.

a) $\vec{u}+\vec{v}$

b) $\vec{v}-\vec{w}$

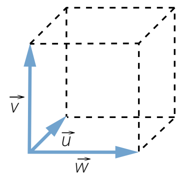
c) $\vec{u}+\vec{w}$

d) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

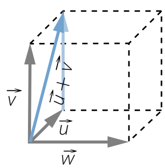
e) $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$

f) $\vec{u}+2\vec{v}-\vec{w}$

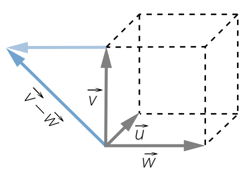
g) $(\vec{u}+\vec{v})+(\vec{v}-\vec{w})$



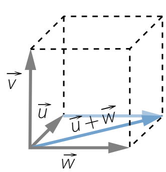
a)



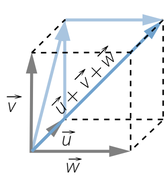
b)



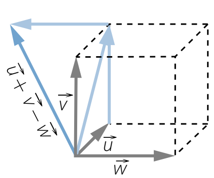
c)



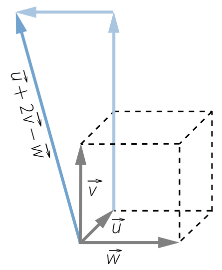
d)



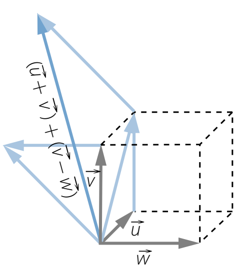
e)



f)



g)



002 **Demuestra que el opuesto de cualquier vector coincide con el vector multiplicado por -1.**

$$\text{Op}\,(\vec{v}) = -1 \cdot \vec{v}$$

Deduce que el opuesto del opuesto de un vector es el mismo vector: $\text{Op}\,(\text{Op}\,(\vec{u})) = \vec{u}$

$-1 \cdot \vec{v} = -\vec{v} = \text{Op}(\vec{v})$ $\qquad$ $\text{Op}(\text{Op}(\vec{u})) = \text{Op}(-\vec{u}) = -(-\vec{u}) = \vec{u}$

003 **Comprueba las siguientes igualdades.**

a) $\text{Op}\,(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}$

b) $\text{Op}\,(\vec{u} + \text{Op}\,(\vec{u} + \text{Op}\,(\vec{u} + \text{Op}\,(\vec{u} - \vec{v})))) = -\vec{v}$

a) $\text{Op}(\vec{u} - \vec{v}) = -(\vec{u} - \vec{v}) = -\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} - \vec{u}$

b) $\text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} - \vec{v})))) = \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} + \vec{v} - \vec{u}))) =$

$= \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{v}))) = \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} - \vec{v})) =$

$= \text{Op}(\vec{u} + \vec{v} - \vec{u}) = \text{Op}(\vec{v}) = -\vec{v}$

004 **¿Es cierto que si tres vectores son linealmente independientes, dos a dos, entonces son linealmente independientes considerando los tres a la vez?**

No necesariamente, ya que si son linealmente independientes dos a dos tienen distintas direcciones, pero la combinación lineal de un par de ellos puede dar como resultado el tercero de modo que sean linealmente dependientes.

005 **Comprueba si los vectores cuya expresión respecto de la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es (1, 0, 2), (2, 0, 1) y (1, 0, 5), son base del espacio.**

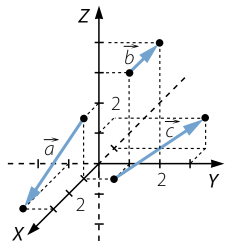
Los vectores forman una base si existen tres valores λ_1, λ_2 y λ_3 tales que:

$\lambda_1(1, 0, 2) + \lambda_2(2, 0, 1) + \lambda_3(1, 0, 5) = (0, 0, 0)$

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Los vectores no son linealmente independientes y no forman una base.

006 Calcula las coordenadas y el módulo de estos vectores:



$\vec{a} = (3, -1, 0) - (1, 0, 2) = (2, -1, -2)$

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$

$\vec{b} = (0, 2, 4) - (0, 1, 3) = (0, 1, 1)$

$|\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\vec{c} = (-1, 3, 1) - (1, 1, 0) = (-2, 2, 1)$

$|\vec{c}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3$

007 Dada la siguiente igualdad de vectores:

$$(1, 2, 3) + (3, 2, 1) = (4, 4, 4)$$

comprueba esta desigualdad de sus módulos:

$$|(1, 2, 3)| + |(3, 2, 0)| \geq |(4, 4, 4)|$$

$|(1, 2, 3)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$|(3, 2, 0)| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{13}$

$|(4, 4, 4)| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{3}$

$|(1, 2, 3)| + |(3, 2, 0)| = \sqrt{14} + \sqrt{13} \geq 4\sqrt{3} = |(4, 4, 4)|$

008 Demuestra que para todo número real λ:

$$|(\lambda \cdot a, \lambda \cdot b, \lambda \cdot c)| = |\lambda| \cdot |(a, b, c)|$$

$$|(\lambda \cdot a, \lambda \cdot b, \lambda \cdot c)| = \sqrt{(\lambda \cdot a)^2 + (\lambda \cdot b)^2 + (\lambda \cdot c)^2} =$$
$$= \sqrt{\lambda^2 (a^2 + b^2 + c^2)} = |\lambda| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} =$$
$$= |\lambda| \cdot |(a, b, c)|$$

009 Realiza las siguientes operaciones de vectores.

$\vec{u}_1 = (0, 1, 1)$ $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$ $\vec{u}_3 = (1, 1, 0)$

a) $\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$

b) $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3$

a) $\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3 = (0, 1, 1) + 2(1, 0, 1) + 3(1, 1, 0) = (5, 4, 3)$

b) $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (0, 1, 1) - (1, 0, 1) + (1, 1, 0) = (0, 2, 0)$

010 **Halla dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que:**

$$\vec{u} - \vec{v} = (0, 0, 1) \qquad \vec{u} + \vec{v} = (1, 0, 0)$$

¿Cuántos vectores en el espacio verifican estas dos condiciones?

$$2\vec{u} = (\vec{u} - \vec{v}) + (\vec{u} + \vec{v}) = (0, 0, 1) + (1, 0, 0) = (1, 0, 1)$$

$$2\vec{u} = (1, 0, 1) \rightarrow \vec{u} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$2\vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{u} - \vec{v}) = (1, 0, 0) - (0, 0, 1) = (1, 0, -1)$$

$$2\vec{v} = (1, 0, -1) \rightarrow \vec{v} = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son únicos.

011 **Determina el número máximo de vectores independientes, y elige vectores que lo sean.**

$$\vec{v}_1 = (1, -1, 0) \qquad \vec{v}_2 = (0, 1, -1) \qquad \vec{v}_3 = (3, 0, -3) \qquad \vec{v}_4 = (1, 1, 1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Hay tres vectores linealmente independientes.

$\vec{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$ y $\vec{v}_4 = (1, 1, 1)$ son vectores linealmente independientes.

012 **Comprueba si estas colecciones de vectores son base del espacio o no.**

a) $\vec{v}_1 = (2, -1, 0)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, 0)$ y $\vec{v}_3 = (2, 0, 1)$

b) $\vec{v}_1 = (3, -7, 1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 4, 0)$ y $\vec{v}_3 = (5, -10, 2)$

a) $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Los vectores forman una base.

b) $$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & -10 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

Los vectores no forman una base.

013 **Halla un punto C en el segmento AB, determinado por los puntos $A(-3, 0, 1)$ y $B(0, 6, 5)$, de modo que $\overline{AC}$ sea la mitad que $\overline{CB}$.**

Sea $C(c_1, c_2, c_3)$ entonces: $\overrightarrow{AC} = (c_1 + 3, c_2, c_3 - 1)$ y $\overrightarrow{CB} = (-c_1, 6 - c_2, 5 - c_3)$

Si $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CB} \rightarrow (c_1 + 3, c_2, c_3 - 1) = \frac{1}{2} \cdot (-c_1, 6 - c_2, 5 - c_3)$

$$\left.\begin{array}{r} c_1 + 3 = -\dfrac{1}{2}c_1 \\ c_2 = \dfrac{1}{2}(6 - c_2) \\ c_3 - 1 = \dfrac{1}{2}(5 - c_3) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = -2 \\ c_2 = 2 \\ c_3 = \dfrac{7}{3} \end{array}\right. \rightarrow C\left(-2, 2, \frac{7}{3}\right)$$

014 **Encuentra un punto D, para que el polígono $ABCD$ sea un paralelogramo.**

$A(0, 0, 0)$ $\quad$ $B(2, -1, 3)$ $\quad$ $C(-1, 2, 1)$

Respuesta abierta.

Por ejemplo:

Considerando los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, el punto D que buscamos es:

$D = B + \overrightarrow{AC} = C + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = (2, -1, 3)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (-1, 2, 1)$

$D = B + \overrightarrow{AC} = (2, -1, 3) + (-1, 2, 1) = (1, 1, 4)$

015 **Calcula la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto y tiene el vector director indicado.**

a) $A(2, -1, -1)$ y $\vec{v} = (-2, -4, 4)$ $\qquad$ b) $A(1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (-2, -2, -2)$

a) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v} \rightarrow (x, y, z) = (2, -1, -1) + t(-2, -4, 4)$

b) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v} \rightarrow (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(-2, -2, -2)$

016 **Halla las ecuaciones paramétricas de la recta, sabiendo que un punto y un vector director son:**

a) $A(3, 0, -7)$ y $\vec{v} = (-10, 2, 6)$ $\qquad$ b) $A(0, 0, 0)$ y $\vec{v} = (1, 0, 0)$

a) $\left.\begin{array}{l} x = 3 - 10t \\ y = 2t \\ z = -7 + 6t \end{array}\right\}$ $\qquad$ b) $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$

017 **Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por cada par de puntos.**

a) $A(2, -1, -1)$ y $B(0, -5, 3)$ $\qquad$ b) $A(1, 1, 1)$ y $B(-1, -1, -1)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-2, -4, 4) \rightarrow \dfrac{x - 2}{-2} = \dfrac{y + 1}{-4} = \dfrac{z + 1}{4}$

b) $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, -2) \rightarrow \dfrac{x - 1}{-2} = \dfrac{y - 1}{-2} = \dfrac{z - 1}{-2}$

018 Halla las ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por cada par de puntos.

a) $A(3, 0, -7)$ y $B(-7, 2, -1)$ b) $A(0, 0, 0)$ y $B(1, 0, 0)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-10, 2, 6) \rightarrow \dfrac{x-3}{-10} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+7}{6}$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} 2x - 6 &= -10y \\ 6x - 18 &= -10z - 70 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + 5y - 3 &= 0 \\ 6x + 10z + 52 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

b) $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0) \rightarrow \left.\begin{aligned} y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$

019 Obtén la ecuación vectorial del plano en cada caso.

a) $A(2, -1, -1)$, $B(0, -5, 3)$ y $C(1, 1, 1)$ b) $A(1, 1, 1)$, $B(-1, -1, -1)$ y $C(1, 2, 2)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-2, -4, 4)$ $\overrightarrow{AC} = (-1, 2, 2)$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \rightarrow (x, y, z) = (2, -1, -1) + \lambda(-2, -4, 4) + \mu(-1, 2, 2)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, -2)$ $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \rightarrow (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(-2, -2, -2) + \mu(0, 1, 1)$

020 Halla las ecuaciones paramétricas del plano correspondiente.

a) $A(3, 0, -7)$, $\vec{u} = (-10, 2, 6)$ y $\vec{v} = (0, 3, 10)$

b) $A(0, 0, 0)$, $\vec{u} = (1, 0, 0)$ y $\vec{v} = (4, 4, 4)$

a) $\pi\colon \left.\begin{aligned} x &= 3 - 10\lambda \\ y &= 2\lambda + 3\mu \\ z &= -7 + 6\lambda + 10\mu \end{aligned}\right\}$ b) $\pi\colon \left.\begin{aligned} x &= \lambda + 4\mu \\ y &= 4\mu \\ z &= 4\mu \end{aligned}\right\}$

021 Halla la ecuación general del plano que pasa por el punto $P(-1, 0, 2)$ y contiene a la recta de ecuación:

$$r\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+4}{3}$$

El plano está definido por $P(-1, 0, 2)$, el vector director de la recta $\vec{v}_2 = (1, -1, 3)$ y el vector $\overrightarrow{AP}$, con $A(1, 3, -4) \in r$.

$\overrightarrow{AP} = (-2, -3, 6)$

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi\colon 3x - 12y - 5z + 13 = 0$$

022 Obtén la ecuación general del plano que pasa por los puntos $A(1, 1, -7)$, $B(5, -2, 9)$ y $C(5, -4, 0)$.

$\overrightarrow{AB} = (4, -3, 16)$ $\overrightarrow{AC} = (4, -5, 7)$

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+7 \\ 4 & -3 & 16 \\ 4 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi\colon 59x + 36y - 8z - 151 = 0$$

023 **Calcula la ecuación general de los planos que contienen a dos de los ejes coordenados.**

Eje X y eje Y: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z = 0$

Eje X y eje Z: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y = 0$

Eje Y y eje Z: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x = 0$

024 **Determina la posición de estas rectas:**

$$r\colon (x, y, z) = (0, -5, 3) + t(1, 1, 1)$$
$$s\colon \frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$$

$r\colon \begin{cases} P(0, -5, 3) \\ \vec{u} = (1, 1, 1) \end{cases}$

$s\colon \begin{cases} Q(3, 0, -2) \\ \vec{v} = (2, 2, 2) \end{cases}$

$\overrightarrow{PQ} = (3, 5, -5)$

Rango $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 1$ Rango $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix} = 2$

Las rectas son paralelas.

025 **Determina las posiciones relativas de las siguientes rectas:**

$$r\colon (x, y, z) = (2, 2, 2) + t(1, 1, 1)$$
$$s\colon (x, y, z) = (0, 0, 0) + t(1, 0, 0)$$

$r\colon \begin{cases} P(2, 2, 2) \\ \vec{u} = (1, 1, 1) \end{cases}$

$s\colon \begin{cases} Q(0, 0, 0) \\ \vec{v} = (1, 0, 0) \end{cases}$

$\overrightarrow{PQ} = (-2, -2, -2)$

Rango $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ Rango $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2$

Las rectas son secantes.

026 Estudia la posición relativa de estas rectas:

$$r: \left.\begin{array}{r} -x+2y-z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{r} x+y-z+2=0 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Las rectas son secantes.

027 Estudia la posición relativa de las rectas:

$$r: \left.\begin{array}{r} y-z-3=0 \\ 2x-z+1=0 \end{array}\right\}$$

$$s: \left.\begin{array}{r} -y+z=0 \\ x-3y+z-1=0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

Las rectas se cruzan.

028 Calcula la posición relativa de la recta y el plano:

$$r: \left.\begin{array}{r} x+y-z+2=0 \\ -x+3y-z+1=0 \end{array}\right\} \qquad \pi: x+z+1=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

La recta y el plano se cortan en un punto.

029 Halla la posición relativa de la recta y el plano:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1} \qquad \pi: 2x - 5y + 3z + 3 = 0$$

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1} \rightarrow r: \left.\begin{matrix} 2x = y+2 \\ -x = z-1 \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{matrix} 2x - y - 2 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

La recta y el plano se cortan en un punto.

030 Halla la posición relativa de estas parejas de planos.

a) $\pi_1: -x + 2y - z = 0$
$\pi_2: x - 2y + z + 1 = 0$

b) $\pi_1: x - z + 11 = 0$
$\pi_2: -2y - z + 11 = 0$

a) $\text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 1$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Los planos son paralelos.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & -2 & -1 & 11 \end{pmatrix} = 2$

Los planos son secantes.

031 Estudia la posición relativa de los planos.

a) $\pi_1: -6x + 5y - 3z + 2 = 0$
$\pi_2: x - y + z = 0$

b) $\pi_1: x - 2y - z + 1 = 0$
$\pi_2: -2x + 4y - 2z + 3 = 0$

a) $\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} -6 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$

Los planos son secantes.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 2$

Los planos son secantes.

032 **Escribe la ecuación vectorial de un plano que sea paralelo al plano que pasa por los puntos $A(0, 1, 2)$, $B(-1, 2, 3)$ y $C(2, -1, 4)$.**

¿Cuántos planos hay que verifiquen esta condición?

El plano que buscamos tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, -2, 2)$, y puede pasar por cualquier punto que no pertenezca al plano que pasa por A, B y C.

El punto $D(0, 0, 0)$ no pertenece a ese plano.

$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(-1, 1, 1) + \mu(2, -2, 2)$

Hay infinitos planos paralelos al plano que pasa por A, B y C.

033 **Halla la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas:**

$$r\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+4}{3} \qquad s\colon \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$$

$$r\colon \begin{cases} A(1, 3, -4) \\ \vec{u} = (1, -1, 3) \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} B(0, -1, 0) \\ \vec{v} = (1, -1, 3) \end{cases} \qquad \overrightarrow{AB} = (-1, -4, 4)$$

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \to \pi\colon 8x - 7y - 5z = 0$$

034 **Escribe la ecuación de tres planos en el espacio que se cortan en el origen de coordenadas. Comprueba que verifican la condición de planos que se cortan en un punto.**

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\left.\begin{array}{l} \pi_1\colon x - y + z = 0 \\ \pi_2\colon x + y - z = 0 \\ \pi_3\colon x + y + z = 0 \end{array}\right\}$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \to \text{Secantes en un punto.}$$

035 **Da la ecuación vectorial de tres planos distintos que contengan al eje X, y comprueba que verifican la condición de ser planos concurrentes en una recta.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1\colon (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(1, 1, 1) \\ \pi_2\colon (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(2, -1, 1) \\ \pi_3\colon (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(1, -1, 2) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} \pi_1\colon y - z = 0 \\ \pi_2\colon y + z = 0 \\ \pi_3\colon 2y + z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Los planos verifican la condición de ser secantes en una recta.

036 Determina la posición relativa de estos planos:

$$\pi_1: 6x + 3y - z = 0$$
$$\pi_2: 3x - 2y + z - 3 = 0$$
$$\pi_3: 2y - z + 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \text{Rango} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Los planos se cortan en un punto.

037 Estudia la posición relativa de los planos:

$$\pi_1: x - z + 2 = 0$$
$$\pi_2: 2x + 2y + 3z + 3 = 0$$
$$\pi_3: 3x + 8y + 7z + 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Los planos se cortan en un punto.

038 Dados los vectores $\vec{u} = (3, 5, 1)$ y $\vec{v} = (6, -4, -2)$, realiza las siguientes operaciones.

a) $2\vec{u} + 3\vec{v}$

b) $5\vec{u} - 4\vec{v}$

c) $-\vec{u} + 2\vec{v}$

d) $-2\vec{u} - \vec{v}$

a) $2\vec{u} + 3\vec{v} = (6, 10, 2) + (18, -12, -6) = (24, -2, -4)$

b) $5\vec{u} - 4\vec{v} = (15, 25, 5) - (24, -16, -8) = (-9, 41, 13)$

c) $-\vec{u} + 2\vec{v} = (-3, -5, -1) + (12, -8, -4) = (9, -13, -5)$

d) $-2\vec{u} - \vec{v} = (-6, -10, -2) - (6, -4, -2) = (-12, -6, 0)$

039 Halla dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que verifiquen las siguientes condiciones simultáneamente:

$$2\vec{u} + \vec{v} = (-3, 4, -1)$$
$$3\vec{u} - 2\vec{v} = (-8, 13, -19)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\vec{u} + \vec{v} = (-3, 4, -1) \\ 3\vec{u} - 2\vec{v} = (-8, 13, -19) \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 2} + \left.\begin{array}{l} 4\vec{u} + 2\vec{v} = (-6, 8, -2) \\ 3\vec{u} - 2\vec{v} = (-8, 13, -19) \end{array}\right\}$$
$$7\vec{u} = (-14, 21, -21) \rightarrow \vec{u} = (-2, 3, -3)$$

$$2\vec{u} + \vec{v} = (-3, 4, -1) \rightarrow \vec{v} = (-3, 4, -1) - 2\vec{u}$$
$$\vec{v} = (-3, 4, -1) - 2(-2, 3, -3) = (1, -2, 5)$$

040 **Calcula m y n para que se verifique que $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c}$, siendo $\vec{a} = (2, 10, -4)$, $\vec{b} = (-1, 3, -2)$ y $\vec{c} = (11, 15, -2)$.**

$$m(2, 10, -4) + n(-1, 3, -2) = (11, 15, -2) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2m - n = 11 \\ 10m + 3n = 15 \\ -4m - 2n = -2 \end{array}\right\}$$

Resolvemos las dos primeras ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 6m - 3n = 33 \\ 10m + 3n = 15 \end{array}\right\} \rightarrow 16m = 48 \rightarrow m = 3 \rightarrow n = -5$$

Comprobamos que se verifica la última ecuación:

$-4 \cdot 3 - 2 \cdot (-5) = -2$

La solución es válida: $m = 3$ y $n = -5$

041 **Encuentra un vector $\vec{t}$ que verifique que $2\vec{u} - 3\vec{v} = 2\vec{t} - \vec{w}$, siendo $\vec{u} = (8, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 0, -6)$ y $\vec{w} = (-6, 2, 4)$.**

$$2\vec{t} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = (16, -2, 6) - (6, 0, -18) + (-6, 2, 4) = (4, 0, 28)$$

$$\vec{t} = (2, 0, 14)$$

042 **Las componentes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en una cierta base de V_3 son:**

$$\vec{u} = (2, 0, -1) \qquad \vec{v} = (-3, 1, 2) \qquad \vec{w} = (4, -2, 7)$$

Hallar en esa misma base las componentes del vector:

$$2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$$

(Aragón. Junio 2007. Opción B. Cuestión 4)

$$2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} = (4, 0, -2) - (-3, 1, 2) + \frac{1}{3}(4, -2, 7) = \left(\frac{25}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

043 **Expresa, en cada caso, el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u} = (-2, 3, -3)$ y $\vec{v} = (1, -2, 5)$.**

a) $\vec{w} = (-9, 14, -17)$

b) $\vec{w} = (10, -16, 22)$

c) $\vec{w} = (-1, 1, -1)$

a) $(-9, 14, -17) = a(-2, 3, -3) + b(1, -2, 5)$

$$\left.\begin{array}{r} -2a + b = -9 \\ 3a - 2b = 14 \\ -3a + 5b = -17 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -4a + 2b = -18 \\ 3a - 2b = 14 \end{array}\right\} \rightarrow -a = -4 \rightarrow a = 4 \rightarrow b = -1$$

Comprobamos en la última ecuación: $-3 \cdot 4 + 5 \cdot (-1) = -17$

Entonces: $\vec{w} = 4\vec{u} - \vec{v}$

b) $(10, -16, 22) = a(-2, 3, -3) + b(1, -2, 5)$

$$\left.\begin{array}{r} -2a + b = 10 \\ 3a - 2b = -16 \\ -3a + 5b = 22 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -4a + 2b = 20 \\ 3a - 2b = -16 \end{array}\right\} \rightarrow -a = 4 \rightarrow a = -4 \rightarrow b = 2$$

Comprobamos en la última ecuación: $-3 \cdot (-4) + 5 \cdot 2 = 22$

Entonces: $\vec{w} = -4\vec{u} + 2\vec{v}$

c) $(-1, 1, -1) = a(-2, 3, -3) + b(1, -2, 5)$

$$\left.\begin{array}{r} -2a + b = -1 \\ 3a - 2b = 1 \\ -3a + 5b = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -4a + 2b = -2 \\ 3a - 2b = 1 \end{array}\right\} \rightarrow -a = -1 \rightarrow a = 1 \rightarrow b = 1$$

Comprobamos en la última ecuación: $-3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 2 \neq -1$

Entonces $\vec{w}$ no se puede expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

044 **Determina k para que los tres vectores sean linealmente dependientes.**

$$\vec{u} = (3, -2, 0) \qquad \vec{v} = (1, 3, 11) \qquad \vec{w} = (2, 4, k)$$

Si los tres vectores son linealmente dependientes:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 11 \\ 2 & 4 & k \end{pmatrix} < 3 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 11 \\ 2 & 4 & k \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 11k - 176 = 0 \rightarrow k = 16$$

045 **Demuestra que no se pueden encontrar a, b y c, distintos de cero, tales que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0$, siendo $\vec{u} = (-2, 0, 4)$, $\vec{v} = (-1, -3, 9)$ y $\vec{w} = (3, 1, 7)$.**

$a(-2, 0, 4) + b(-1, -3, 9) + c(3, 1, 7) = (0, 0, 0)$

$$\left.\begin{array}{r} -2a - b + 3c = 0 \\ -3b + c = 0 \\ 4a + 9b + 7c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 92 \neq 0$$

El sistema es compatible determinado. Al ser un sistema homogéneo, la única solución es: $a = b = c = 0$

046 **Demuestra que los tres vectores son coplanarios.**

$$\vec{u} = (9, 4, 1) \qquad \vec{v} = (-3, 3, -7) \qquad \vec{w} = (2, -2, 6)$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & -7 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 52 \neq 0$$

Los vectores son coplanarios porque son linealmente dependientes.

047 Decide si son bases del espacio los tríos de vectores siguientes.

a) $\vec{u} = (5, 2, -1)$ $\vec{v} = (4, 0, -2)$ $\vec{w} = (3, 4, 2)$

b) $\vec{u} = (5, -2, 3)$ $\vec{v} = (-2, 4, 2)$ $\vec{w} = (-1, 10, 9)$

c) $\vec{u} = (2, 3, 0)$ $\vec{v} = (0, -1, 3)$ $\vec{w} = (-1, -1, -1)$

d) $\vec{u} = (-2, 1, 0)$ $\vec{v} = (2, 2, 3)$ $\vec{w} = (4, 3, 3)$

a) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

Forman una base porque son linealmente independientes.

b) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 10 & 9 \end{vmatrix} = 0$

No forman una base porque son linealmente dependientes.

c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Forman una base porque son linealmente independientes.

d) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$

Forman una base porque son linealmente independientes.

048 ¿Qué valor debe tener p para que el vector $\vec{u} = (4, p, 6)$ esté en el mismo plano que $\vec{v} = (2, -1, 5)$ y $\vec{w} = (-5, 3, -13)$?

Para que el vector $\vec{u}$ esté en el mismo plano que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ los tres vectores tienen que ser coplanarios, por tanto, deben ser linealmente dependientes.

$$\begin{vmatrix} 4 & p & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ -5 & 3 & -13 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow p - 2 = 0 \rightarrow p = 2$$

049 ¿Qué relación deben cumplir a y b para que los tres vectores sean coplanarios?

$\vec{u} = (a, 2, b)$ $\vec{v} = (3, a, 5)$ $\vec{w} = (1, -b, -1)$

Los vectores son coplanarios si son linealmente dependientes.

$$\begin{vmatrix} a & 2 & b \\ 3 & a & 5 \\ 1 & -b & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -a^2 + 4ab - 3b^2 + 16 = 0$$

050 Di si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, y justifica tu respuesta con un ejemplo ilustrativo:

Si tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, entonces también lo son los vectores: $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$.

(Cantabria. Septiembre 2007. Bloque 3. Opción A)

La afirmación es verdadera. Si tres vectores son linealmente independientes, el determinante que forman sus coordenadas es distinto de cero.
Por las propiedades de los determinantes, al hacer combinaciones lineales de sus filas, el valor del determinante no varía, es decir, también es distinto de cero.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r}\vec{u}=(2,1,3)\\ \vec{v}=(1,2,1)\\ \vec{w}=(1,0,1)\end{array}\right\}\rightarrow\begin{vmatrix}2&1&3\\1&2&1\\1&0&1\end{vmatrix}=-2\neq 0\rightarrow \text{Son linealmente independientes.}$$

$$\left.\begin{array}{r}\vec{u}+\vec{v}=(3,3,4)\\ \vec{u}-\vec{v}=(1,-1,2)\\ \vec{u}-\vec{v}+\vec{w}=(2,-1,3)\end{array}\right\}\rightarrow\begin{vmatrix}3&3&4\\1&-1&2\\2&-1&3\end{vmatrix}=4\neq 0\rightarrow \text{Son linealmente independientes.}$$

051 Considera los vectores: $\vec{u}=(1,1,m)$ $\vec{v}=(0,m,-1)$ $\vec{w}=(1,2m,0)$

a) Determina el valor de m para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.

b) Para el valor de m obtenido en el apartado anterior expresa el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

(Andalucía. Septiembre 2007. Opción B. Ejercicio 4)

a) $\begin{vmatrix}1&1&m\\0&m&-1\\1&2m&0\end{vmatrix}=0\rightarrow -m^2+2m-1=0\rightarrow m=1$

b) $(1,2,0)=a(1,1,1)+b(0,1,-1)\rightarrow \left.\begin{array}{r}a=1\\a+b=2\\a-b=0\end{array}\right\}\rightarrow b=1\rightarrow \vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$

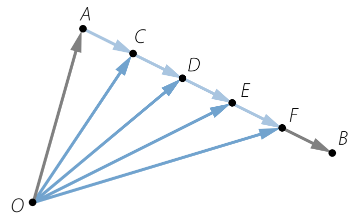
052 Halla un punto C en el segmento AB, sabiendo que $A(-1,4,3)$ y $B(2,10,-6)$, de modo que $\overline{AC}$ sea la mitad que $\overline{CB}$.

Sea $C(c_1, c_2, c_3)$, entonces:

$$\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{CB}\rightarrow(c_1+1,c_2-4,c_3-3)=\frac{1}{2}\cdot(2-c_1,10-c_2,-6-c_3)$$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{r}c_1+1=1-\frac{1}{2}c_1\\ c_2-4=5-\frac{1}{2}c_2\\ c_3-3=-3-\frac{1}{2}c_3\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}c_1=0\\c_2=6\rightarrow C(0,6,0)\\c_3=0\end{cases}$$

053 **Determina los cuatro puntos que dividen el segmento de extremos $A(2, -6, 3)$ y $B(12, -1, 8)$ en cinco partes iguales.**



$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = (2, -6, 3) + \frac{1}{5}(10, 5, 5) = (4, -5, 4) \rightarrow C(4, -5, 4)$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = (2, -6, 3) + \frac{2}{5}(10, 5, 5) = (6, -4, 5) \rightarrow D(6, -4, 5)$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} = (2, -6, 3) + \frac{3}{5}(10, 5, 5) = (8, -3, 6) \rightarrow E(8, -3, 6)$$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{OA} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} = (2, -6, 3) + \frac{4}{5}(10, 5, 5) = (10, -2, 7) \rightarrow F(10, -2, 7)$$

054 **Comprueba si están alineados los siguientes puntos en el espacio.**

a) $A(3, 3, -5)$, $B(4, -6, 1)$ y $C(2, -4, 5)$ **b) $A(-4, 1, 2)$, $B(0, 6, 1)$ y $C(-12, -9, 4)$**

a) $\overrightarrow{AB} = (1, -9, 6)$ $\overrightarrow{AC} = (-1, -7, 10)$

Los vectores no son proporcionales, por tanto, los puntos no están alineados.

b) $\overrightarrow{AB} = (4, 5, -1)$ $\overrightarrow{AC} = (-8, -10, 2)$

Los vectores son proporcionales, luego los puntos están alineados.

055 **Encuentra los valores de a y b que hacen que los tres puntos estén alineados: $P(2, -1, a)$, $Q(5, 1, 6)$ y $R(b, -5, 9)$.**

Los puntos están alineados si los vectores son proporcionales:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ} = (3, 2, 6 - a)\\ \overrightarrow{PR} = (b - 2, -4, 9 - a)\end{array}\right\} \rightarrow \frac{3}{b-2} = \frac{2}{-4} = \frac{6-a}{9-a} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}a = 7\\ b = -4\end{array}\right.$$

056 **Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(3, 1, 0)$, $B(4, 5, 2)$ y $C(4, 7, -2)$.**

a) Halla el cuarto vértice del paralelogramo. **b) Calcula su perímetro.**

a) Sea $D(d_1, d_2, d_3)$ el vértice que buscamos.

$\overrightarrow{AB} = (1, 4, 2)$

Entonces: $\overrightarrow{CD} = (d_1 - 4, d_2 - 7, d_3 + 2) = (1, 4, 2) \rightarrow D(5, 11, 0)$

b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21}$

$\overrightarrow{AC} = (1, 6, -2)$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{41}$

El perímetro del paralelogramo es: $2\sqrt{21} + 2\sqrt{41}$

057 **Decide si los siguientes cuartetos de puntos están en el mismo plano o no.**

a) $A(0, 1, 2)$, $B(2, 2, 1)$, $C(1, 0, 5)$ y $D(1, 3, -2)$

b) $A(0, 0, -1)$, $B(1, 0, -2)$, $C(0, 1, -2)$ y $D(4, 1, 5)$

a) $\overrightarrow{AB} = (2, 1, -1)$ $\qquad \overrightarrow{AC} = (1, -1, 3)$ $\qquad \overrightarrow{AD} = (1, 2, -4)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 11 \rightarrow \text{Los puntos son coplanarios.}$$

b) $\overrightarrow{AB} = (1, 0, -1)$ $\qquad \overrightarrow{AC} = (0, 1, -1)$ $\qquad \overrightarrow{AD} = (4, 1, 6)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 11 \rightarrow \text{Los puntos no son coplanarios.}$$

058 **¿Qué condiciones deben cumplir a, b y c para que los puntos $P(3, 5, -7)$, $Q(4, a, -3)$ y $R(b, -7, c)$ estén alineados?**

Si P, Q y R están alineados, entonces $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son linealmente dependientes, es decir, son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (1, a-5, 4) \\ \overrightarrow{PR} = (b-3, -12, c+7) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{b-3} = \frac{a-5}{-12} = \frac{4}{c+7} \rightarrow \left.\begin{array}{l} (a-5)(b-3) = -12 \\ (a-5)(c+7) = -48 \end{array}\right\}$$

059 **Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3, -1, 4)$ y $B(-4, 3, 2)$.**

$$\overrightarrow{AB} = (-7, 4, -2) \qquad r\colon \left.\begin{array}{l} x = 3 - 7t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 - 2t \end{array}\right\}$$

060 **Determina una recta paralela al eje Y que pase por el punto $(4, -2, 3)$.**

Por ser paralelo al eje Y, un vector director de la recta es $(0, 1, 0)$.

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x = 4 \\ y = -2 + t \\ z = 3 \end{array}\right\}$$

061 **¿Pertenece el punto $(-1, 2, 7)$ a la recta $r\colon \left.\begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{array}\right\}$? En caso negativo, obtén la ecuación en forma paramétrica de la recta paralela a r que pasa por dicho punto.**

$-1 = -2 + \lambda \rightarrow \lambda = 1$

$2 = 3 - \lambda \rightarrow \lambda = 1$

$7 = 2 + 3\lambda \rightarrow \lambda \neq 1 \rightarrow$ El punto no pertenece a la recta.

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 7 + 3\lambda \end{array}\right\}$$

062 Expresa en forma continua la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-5, -4, 0)$ y es paralela a la recta r, cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{array}\right\}$$

a) ¿Está el punto $(1, -13, -3)$ en dicha recta?

b) ¿Y $(-3, -7, -2)$?

$$r\colon \frac{x+5}{-2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{1}$$

a) $\dfrac{1+5}{-2} = \dfrac{-13+4}{3} = \dfrac{-3}{1} \rightarrow$ El punto pertenece a la recta.

b) $\dfrac{-3+5}{-2} = \dfrac{-7+4}{3} \neq \dfrac{-2}{1} \rightarrow$ El punto no pertenece a la recta.

063 Dados los puntos $A(-3, 2, 9)$, $B(1, 0, -7)$ y $C(0, 4, -3)$:

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por A y B.

b) ¿Están los tres puntos alineados?

a) $\overrightarrow{AB} = (4, -2, -16)$

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x = 1 + 4t \\ y = -2t \\ z = -7 - 16t \end{array}\right\}$$

b) $\left.\begin{array}{l} 0 = 1 + 4t \rightarrow t = -\dfrac{1}{4} \\ 4 = -2t \rightarrow t \neq -\dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \rightarrow$ C no pertenece a la recta que pasa por A y por B. Los puntos no están alineados.

064 Calcula el valor que debe tomar m para que las siguientes rectas se corten en un punto.

$$r\colon \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{0} \qquad s\colon \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 6 + 4\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{array}\right\}$$

$$r\colon \left\{\begin{array}{l} P(m, -10, -3) \\ \vec{v} = (-1, 4, 0) \end{array}\right. \qquad s\colon \left\{\begin{array}{l} Q(1, 6, -1) \\ \vec{u} = (0, 4, 2) \end{array}\right.$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$\overrightarrow{PQ} = (1 - m, 16, 2)$

Las rectas se cortan si $\text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1-m & 16 & 2 \end{pmatrix} = 2$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1-m & 16 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -8m + 32 = 0 \rightarrow m = 4$$

065 Expresa en la forma indicada la ecuación de las rectas cuyas ecuaciones implícitas son:

a) $r\colon \left.\begin{array}{r} x-3y+4z=2 \\ 3x-y+2z=4 \end{array}\right\}$ en forma paramétrica

b) $s\colon \left.\begin{array}{r} 2x+y-z=1 \\ x+3y+2z=0 \end{array}\right\}$ en forma continua

a) $x=2+3y-4z \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-3y+4z=2 \\ 8y-10z=-2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{4}-t \\ y=-\dfrac{1}{4}+5t \\ z=4t \end{array}\right\}$

b) $y=1-2x+z \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y-z=1 \\ -5x+5z=-3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{5}+t \\ y=-\dfrac{1}{5}-t \\ z=t \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x-\dfrac{3}{5}}{1}=\dfrac{y+\dfrac{1}{5}}{-1}=\dfrac{z}{1}$

066 Pasa a forma implícita la ecuación de la recta:

$$r\colon \frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3}$$

$r\colon \dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{2} \rightarrow r\colon \left.\begin{array}{r} x-1=-3y+3 \\ 2x-2=-3z+6 \end{array}\right\} \rightarrow r\colon \left.\begin{array}{r} x+3y-4=0 \\ 2x+3z-8=0 \end{array}\right\}$

067 Calcular la ecuación cartesiana de la recta cuya expresión paramétrica es $r\colon \left.\begin{array}{l} x=1-3\alpha \\ y=1+\alpha \\ z=2+2\alpha \end{array}\right\}$

¿Existe algún valor de v tal que el punto (v, v, v) pertenezca a la recta? Razonar la respuesta.

(País Vasco. Julio 2006. Bloque B. Problema B)

$r\colon \dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{2} \rightarrow r\colon \left.\begin{array}{r} x-1=-3y+3 \\ 2x-2=-3z+6 \end{array}\right\} \rightarrow r\colon \left.\begin{array}{r} x+3y-4=0 \\ 2x+3z-8=0 \end{array}\right\}$

$r\colon \left.\begin{array}{r} x+3y-4=0 \\ 2x+3z-8=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{P(v,v,v)} \begin{array}{l} v+3v-4=0 \rightarrow v=1 \\ 2+3-8\neq 0 \end{array}$

Ningún punto (v, v, v) verifica las dos ecuaciones, por tanto, no existe un valor de v tal que $P(v, v, v) \in r$.

068 Calcule la ecuación de la recta paralela a la recta r: $\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=1 \end{array}\right\}$ que pasa por el punto (0, 1, 0).

(Cataluña. Septiembre 2006. Cuestión 3)

$$r: \left.\begin{array}{r} z=x+y \\ 3x=1 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ y=-\dfrac{1}{3}+t \\ z=t \end{array}\right\} \text{ La recta paralela es } s: \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=1+t \\ z=t \end{array}\right\}$$

069 Sea r la recta definida por $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-k}{2}=\dfrac{z}{3}$ y s la recta definida por $\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$. Halla k sabiendo que las rectas r y s se cortan en un punto.

$$r: \begin{cases} P(2, k, 0) \\ \vec{v}=(1, 2, 3) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(-2, 1, 3) \\ \vec{u}=(-3, -2, -1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ}=(-4, 1-k, 3)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -4 & 1-k & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 8k-12=0 \rightarrow k=\frac{3}{2}$$

070 Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-2, -1, -4)$ y se apoya en las siguientes rectas:

$$r: \left.\begin{array}{l} x=4+t \\ y=1+t \\ z=2+t \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{r} 2x-y+z+4=0 \\ x+3y-2z-3=0 \end{array}\right\}$$

Calculamos la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r:

$Q(4, 1, 2) \in r \qquad \overrightarrow{PQ}=(6, 2, 6) \qquad \vec{v}_r=(1, 1, 1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z+4 \\ 6 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4x+4z+8=0 \rightarrow \pi: x-z-2=0$$

Calculamos la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta s:

$$s: \left.\begin{array}{r} 2x-y+z+4=0 \\ -7y+5z+10=0 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x=-1-t \\ y=5t \\ z=-2+7t \end{array}\right\} \begin{array}{l} R(-1, 0, -2) \in s \\ \vec{v}_s=(-1, 5, 7) \end{array} \qquad \overrightarrow{PR}=(1, 1, 2)$$

$$\sigma: \begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z+4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -3x-9y+6z+9=0 \rightarrow \sigma: x+3y-2z-3=0$$

La recta buscada es m: $\left.\begin{array}{r} x-z-2=0 \\ x+3y-2z-3=0 \end{array}\right\}$

071 Sean A y B los puntos del espacio de coordenadas $A(0, 1, 2)$, $B(1, 2, 3)$.
Encontrar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por dichos puntos.
¿Existen valores de r y s para los cuales el punto C de coordenadas $C(3, r+s, r-s)$ pertenezca a la recta calculada antes? En caso afirmativo calcular los valores de r y s. Razonar la contestación en caso negativo.

(País Vasco. Junio 2004. Bloque B. Cuestión B)

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$$

$$m\colon \left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= 1+t \\ z &= 2+t \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 3 &= t \\ r+s &= 1+t \\ r-s &= 2+t \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} r+s &= 4 \\ r-s &= 5 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} r &= \frac{9}{2} \\ s &= -\frac{1}{2} \end{aligned}\right.$$

072 Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(1, 0, 0)$ y corta a las rectas:

$$r_1\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \qquad r_2\colon \left.\begin{aligned} x+2y+z-1 &= 0 \\ 2x-y-z-3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(Navarra. Septiembre 2006. Grupo 1. Opción B)

Calculamos la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r_1:

$Q(2, 1, 0) \in r_1$ $\qquad \overrightarrow{PQ} = (1, 1, 0)$ $\qquad \vec{u} = (1, -1, 2)$

$$\pi_1\colon \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2x-2y-2z-2 = 0 \rightarrow \pi_1\colon x-y-z-1 = 0$$

Calculamos la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r_2:

$$\pi_2\colon \left.\begin{aligned} x+2y+z-1 &= 0 \\ 3x+y-4 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \pi_2\colon \left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= 4-3t \\ z &= -7+5t \end{aligned}\right\} \quad R(0, 4, -7) \in r_2 \qquad \begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= (-1, 4, -7) \\ \vec{v}_r &= (1, -3, 5) \end{aligned}$$

$$\pi_2\colon \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 4 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -x-2y-z+1 = 0 \rightarrow \pi_2\colon x+2y+z-1 = 0$$

La recta es s: $$\left.\begin{aligned} x-y-z-1 &= 0 \\ x+2y+z-1 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow s\colon \left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= 2-2t \\ z &= -3+3t \end{aligned}\right\} \rightarrow s\colon \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{3}$$

073 Prueba que las ecuaciones $\left.\begin{aligned} x-y+z-4 &= 0 \\ 3x+5z-9 &= 0 \end{aligned}\right\}$ y $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-3}$ representan la misma recta.

(La Rioja. Septiembre 2002. Propuesta A. Ejercicio 1)

$$r\colon \left.\begin{aligned} x-y+z-4 &= 0 \\ 3x+5z-9 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow r\colon \left.\begin{aligned} x &= 3+5t \\ y &= -1+2t \\ z &= -3t \end{aligned}\right\} \rightarrow r\colon \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$$

Las dos rectas tienen la misma ecuación, representan la misma recta.

074 Sean P y Q los puntos del espacio $P(1, 2, 2)$ y $Q(2, a, a)$. Hallar el valor de a para que la recta que une P y Q pase por el origen de coordenadas.

Hallar la ecuación de la recta como intersección de dos planos y en forma paramétrica.

(País Vasco. Julio 2007. Bloque B. Problema B)

$$\overrightarrow{PQ} = (1, a-2, a-2) \qquad r: \left.\begin{array}{r} x = 1+t \\ y = 2+(a-2)t \\ z = 2+(a-2)t \end{array}\right\}$$

Si la recta pasa por el origen de coordenadas: $\left.\begin{array}{r} 0 = 1+t \\ 0 = 2+(a-2)t \\ 0 = 2+(a-2)t \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ a = 4 \end{cases}$

Así, la ecuación de la recta es:

$$r: \left.\begin{array}{r} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = 2+2t \end{array}\right\} \rightarrow r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2} \rightarrow r: \left.\begin{array}{r} 2x - y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{array}\right\}$$

075 De todas las rectas que pasan por el punto $P(0, 2, -1)$, halle la que corta a las rectas de ecuaciones:

$$(x, y, z) = (1, 1, 2) + t(2, -1, 0) \qquad (x, y, z) = (0, 1, 1) + s(-3, 1, 2)$$

(Baleares. Junio 2006. Opción B. Cuestión 2)

Sean $A(1 + 2t, 1 - t, 2)$ un punto de la primera recta, y $B(-3s, 1 + s, 1 + 2s)$ un punto de la segunda.

Si la recta que buscamos pasa por A, B y P entonces, los puntos están alineados, es decir, $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BP}$ son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AP} = (-1-2t, 1+t, -3) \\ \overrightarrow{BP} = (3s, 1-s, -2-2s) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{-1-2t}{3s} = \frac{1+t}{1-s} = \frac{-3}{-2-2s}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} (1+2t)(2+2s) = -9s \\ (1+t)(2+2s) = 3(1-s) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4t + 11s + 4st = -2 \\ 2t + 5s + 2st = 1 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow 4t(1+s) = -2 - 11s \rightarrow t = -\frac{2+11s}{4(1+s)}$$

$$\rightarrow -\frac{2+11s}{2(1+s)} + 5s - s \cdot \frac{2+11s}{2(1+s)} = 1 \rightarrow s^2 + 5s + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} s = -1 \text{ (no válida)} \\ s = -4 \rightarrow t = -\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Así, $P(0, 2, -1) \in r$ y un vector director es $\overrightarrow{BP} = (12, -5, -6)$.

$$r: \left.\begin{array}{r} x = 12t \\ y = 2-5t \\ z = -1-6t \end{array}\right\}$$

076 **Encuentra la ecuación de la recta contenida en el plano $\pi: x + 2y + 6z - 2 = 0$ que corta a los ejes Y y Z.**

(Cataluña. Junio 2007. Cuestión 4)

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+6z-2=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \rightarrow A(0,1,0) \text{ es el punto de intersección del plano con el eje } Y.$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+6z-2=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \rightarrow B\left(0,0,\frac{1}{3}\right) \text{ es el punto de intersección del plano con el eje } Z.$$

Así, un vector director de la recta contenida en π que corta a los ejes Y y Z es $\overrightarrow{AB} = \left(0, -1, \frac{1}{3}\right)$.

$$r: \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=1-t \\ z=\frac{1}{3}t \end{array}\right\}$$

077 **Dados los puntos $A(-2, -4, -3)$ y $B(2, 6, 5)$, y la recta $r: \left.\begin{array}{r} x-y+z=1 \\ 2x+y-3z=2 \end{array}\right\}$, averiguar si existe alguna recta tal que contenga los puntos A y B y corte a la recta r. Razonar la respuesta.**

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2000. Bloque 1. Pregunta B)

La recta que contiene a A y B es:

$$\overrightarrow{AB} = (4, 10, 8) \qquad s: \left.\begin{array}{l} x=2+4t \\ y=6+10t \\ z=5+8t \end{array}\right\}$$

Calcularemos un vector director de r:

$$r: \left.\begin{array}{r} x-y+z=1 \\ 3x-2z=2 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x=2t \\ y=-2+5t \\ z=-1+3t \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_r = (2, 5, 3)$$

$$P(0, -2, -1) \in r \qquad \overrightarrow{AP} = (2, 2, 2)$$

Estudiamos las posiciones relativas de r y s.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 10 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

Las rectas no se cortan, se cruzan.

078 Halla las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por los puntos $P(3, -1, 5)$, $Q(1, 2, 3)$ y $R(9, -2, -2)$.

$\overrightarrow{PQ} = (-2, 3, -2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{PR} = (6, -1, -7)$

$$\pi\colon \left.\begin{array}{l} x = 3 - 2\lambda + 6\mu \\ y = -1 + 3\lambda - \mu \\ z = 5 - 2\lambda - 7\mu \end{array}\right\}$$

079 Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos $P(4, 3, 1)$, $Q(6, 2, -3)$ y $R(2, 4, -2)$.

$\overrightarrow{PQ} = (2, -1, -4)$ $\qquad$ $\overrightarrow{PR} = (-2, 1, -3)$

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z-1 \\ 2 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7x + 14y - 70 = 0 \rightarrow \pi\colon x + 2y - 10 = 0$$

080 Encuentra las ecuaciones paramétricas del plano paralelo a las rectas

$$r\colon \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} \text{ y } s\colon \left.\begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{array}\right\} \text{ que pasa por el punto } P(8, 9, 1).$$

Los vectores directores de las rectas son los vectores directores del plano.

$$\pi\colon \left.\begin{array}{l} x = 8 - 2\lambda - \mu \\ y = 9 - \lambda + 3\mu \\ z = 1 + 2\lambda - 3\mu \end{array}\right\}$$

081 Escribe en forma paramétrica las ecuaciones del plano $2x - y + 4z = 7$.

$$\pi\colon \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -7 + 2\lambda + 4\mu \\ z = \mu \end{array}\right\}$$

082 Escribe en forma implícita la ecuación del plano:

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 + \lambda + 3\mu \\ y = 3 + 2\lambda - \mu \\ z = 5 + 2\mu \end{array}\right\}$$

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4x - 2y - 7z + 45 = 0 \rightarrow \pi\colon 4x - 2y - 7z + 45 = 0$$

083 **Escribe las ecuaciones paramétricas de los planos cartesianos (los planos que contienen a dos de los ejes cartesianos).**

Ecuaciones paramétricas del plano OXY: $\left.\begin{array}{r} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=0 \end{array}\right\}$

Ecuaciones paramétricas del plano OXZ: $\left.\begin{array}{r} x=\lambda \\ y=0 \\ z=\mu \end{array}\right\}$

Ecuaciones paramétricas del plano OYZ: $\left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{array}\right\}$

084 **Determina la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-5}{2}$ y pasa por el punto $A(4, 0, -1)$.**

$P(1, -1, 5) \in r$ $\quad\quad \overrightarrow{AP}=(-3, -1, 6)$ $\quad\quad \vec{v}_r=(-1, 3, 2)$

Buscamos un plano que pase por $A(4, 0, -1)$ y tiene como vectores directores $\vec{v}_r$ y $\overrightarrow{AP}$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-4 & y & z+1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 20x+10z-70=0 \rightarrow \pi: 2x+z-7=0$$

085 **Halla los puntos en que corta a los ejes coordenados el plano $\pi: 2x-3y+5z-30=0$.**

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+5z-30=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \rightarrow x=15$$

Corta al eje X en el punto $P(15, 0, 0)$.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+5z-30=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \rightarrow y=-10$$

Corta al eje Y en el punto $Q(0, -10, 0)$.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+5z-30=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \rightarrow z=6$$

Corta al eje Z en el punto $R(0, 0, 6)$.

086 Obtén las ecuaciones del plano paralelo al plano $2x - 2y + 3z - 12 = 0$ que pasa por el punto $(-2, 3, -1)$.

$$\pi: 2x - 2y + 3z - 12 = 0 \rightarrow \pi: \left.\begin{array}{l} x = 6 + \lambda - 3\mu \\ y = \lambda \\ z = 2\mu \end{array}\right\}$$

Los vectores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (-3, 0, 2)$ son también vectores directores del plano que buscamos.

$$\pi': \begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 2y + 3z + 13 = 0 \rightarrow \pi': 2x - 2y + 3z + 13 = 0$$

087 Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$ y es paralelo a la recta $s: \left.\begin{array}{r} x + 2y - z + 4 = 0 \\ 2x - 3y + 2z + 4 = 0 \end{array}\right\}$.

$$s: \left.\begin{array}{r} x + 2y - z + 4 = 0 \\ 2x - 3y + 2z + 4 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x = -3 - t \\ y = 4t \\ z = 1 + 7t \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_s = (-1, 4, 7)$$

El punto que buscamos pasa por el punto $P(-1, -1, -3) \in r$, y tiene por vectores directores $\vec{v}_r = (-2, 2, -1)$ y $\vec{v}_s = (-1, 4, -7)$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+3 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 18x + 15y - 6z + 15 = 0 \rightarrow \pi: 6x + 5y - 2z + 5 = 0$$

088 Considera los puntos del espacio:

$A(0, 0, 1) \qquad B(1, 1, 2) \qquad C(0, -1, -1)$

a) Encuentra la ecuación del plano ABC.

b) Si D es el punto de coordenadas $(k, 0, 0)$, ¿cuánto ha de valer k para que los cuatro puntos A, B, C y D sean coplanarios?

(Cataluña. Junio 2004. Cuestión 2)

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) \qquad \overrightarrow{AC} = (0, -1, -2)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -x + 2y - z + 1 = 0 \rightarrow \pi: x - 2y + z - 1 = 0$$

b) Si D pertenece al mismo plano entonces:

$k - 2 \cdot 0 + 0 - 1 = 0 \rightarrow k = 1$

089 **Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano π: $x + y - z + 6 = 0$ con la recta s: $\frac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralela a la recta r: $\left.\begin{array}{r} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{array}\right\}$.**

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2005. Bloque 4. Pregunta A)

Calculamos la intersección entre π y s.

$$\left.\begin{array}{r} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \\ x + y - z + 6 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 3t + 2 + t + 1 - t + 6 = 0 \rightarrow t = -3$$

$P(-9, -1, -4)$ es el punto de intersección del plano π y la recta s.

Calculamos un vector director de r:

$$r: \left.\begin{array}{r} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 4 - 3t \\ z = 13 - 13t \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_r = (1, -3, 13)$$

La recta paralela a r que pasa por P es m: $\left.\begin{array}{l} x = -9 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = -4 - 13t \end{array}\right\}$

090 **Encuentra el plano que es paralelo a la recta: r: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{4}$ y que pasa por los puntos: $A(-3, 0, 1)$ $B(2, 2, -3)$.**

El plano pasa por A y tiene por vectores $\overrightarrow{AB} = (5, 2, -4)$ y $\vec{v}_z = (2, -3, 4)$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x+3 & y & z-1 \\ 5 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -4x - 28y - 19z + 7 = 0 \rightarrow \pi: 4x + 28y + 19z - 7 = 0$$

091 **Sean los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(a, 2, b)$ y $C(1, 0, 0)$.**

a) Con $a = 2$, calcula b para que los tres puntos determinen un plano que pase por el punto $P(2, 0, 1)$. ¿Cuál es la ecuación de dicho plano?

b) Calcula los valores de a y b para que los puntos A, B y C estén alineados.

(Asturias. Junio 2006. Bloque 3)

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 1, b - 1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (0, -1, -1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & b-1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: (b-2)x + y - z + 2 - b = 0$$

Si el plano contiene al punto P entonces: $(b - 2) \cdot 2 - 1 + 2 - b = 0 \rightarrow b = 3$

La ecuación del plano es: $x + y - z - 1 = 0$

b) A, B y C están alineados si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(a-1,1,b-1)\\ \overrightarrow{AC}=(0,-1,-1)\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}a-1=0\\ b-1=1\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=1\\ b=2\end{array}\right.$$

092 **Calcula la ecuación paramétrica y la ecuación cartesiana del plano que contiene a los puntos A, B y C de coordenadas $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 1)$ y $C(1, 1, 1)$.**

¿Existe algún valor de u tal que el punto $(3, 2u, u + 3)$ pertenezca al plano?

Razonar la respuesta, calculando el valor de u en caso de que sea afirmativa.

(País Vasco. Junio 2007. Bloque B. Problema B)

a) $\overrightarrow{AB}=(-1,1,1)$ $\qquad\overrightarrow{AC}=(0,1,1)$

$$\pi:\left.\begin{array}{l}x=1-\lambda\\ y=\lambda+\mu\\ z=\lambda+\mu\end{array}\right\}\rightarrow\pi:\begin{vmatrix}x-1 & y & z\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\rightarrow\pi: y-z=0$$

Si el plano contiene el punto $(3, 2u, u+3)$ entonces: $2u-u-3=0\rightarrow u=3$

093 **Dadas las rectas:** $r: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ $\qquad s: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z+5}{3}$

y el punto $P(1, 1, -1)$, queremos encontrar la ecuación de la recta que pasa por P y que corta a r y a s. Para conseguirlo:

a) Encuentra la ecuación general o cartesiana (es decir, la ecuación de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del plano π que contiene a la recta r y al punto P.

b) Encuentra el punto M calculando el punto de intersección del plano π con la recta s.

c) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y M.

d) Comprueba que la recta encontrada en el apartado anterior es la que buscamos.

(Cataluña. Junio 2008. Problema 6)

a) $Q(2,-1,0)\in r$ $\qquad\overrightarrow{PQ}=(1,-2,1)$

$$\pi:\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z+1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=2y+4z+2=0\rightarrow\pi: y+2z+1=0$$

b) $$s:\left.\begin{array}{l}x=1+t\\ y=-7+2t\\ z=-5+3t\end{array}\right\}$$

$\pi: y+2z+1=0\rightarrow -7+2t-10+6t+1=0\rightarrow t=2\rightarrow M(3,-3,1)$

c) $\overrightarrow{PM}=(2,-4,2)$ $\qquad m:\left.\begin{array}{l}x=1+2t\\ y=1-4t\\ z=-1+2t\end{array}\right\}$

d) La recta m pasa por P, para $t=0$, y por el punto M, punto de intersección de r y s, para $t=1$.

094 **Determinar una recta que sea paralela al plano que pasa por los puntos de coordenadas (1, 1, 0), (1, 0, 1) y (0, 1, 1), que también sea paralela al plano $x + 2y + 3z = 0$, y que no esté contenida en ninguno de estos planos.**

(Extremadura. Septiembre 2004. Repertorio A. Ejercicio 2)

El plano que pasa por $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$ y $C(0, 1, 1)$ es:

$\overrightarrow{AB} = (0, -1, 1)$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x - y - z + 2 = 0 \rightarrow \pi: x + y + z - 2 = 0$$

La recta de intersección entre los dos planos es:

$$r: \left.\begin{aligned} x + y + z - 2 = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{aligned} x + y + z - 2 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{aligned} x &= 4 + t \\ y &= -2 - 2t \\ z &= t \end{aligned}\right\}$$

La solución del problema es una recta paralela a r. Por ejemplo:

$$s: \left.\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= 1 + t \end{aligned}\right\}$$

095 **Determine los extremos de un segmento AB sabiendo que el punto A pertenece al plano $2x + y + z = 0$, el punto B pertenece a la recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{3}$ y el punto medio del segmento es (0, 0, 0).**

(Cataluña. Septiembre 2006. Problema 4)

El punto B es de la forma $(1 + 2t, 2 - t, 3t)$.
Si el punto medio del segmento es (0, 0, 0) entonces el punto A ha de ser de la forma $(-1 - 2t, -2 + t, -3t)$.
Como este punto pertenece al plano $2x + y + z = 0$ tenemos que:

$$2(-1 - 2t) - 2 + t - 3t = 0 \rightarrow -6t = 4 \rightarrow t = -\frac{2}{3}$$

Así, los puntos son $A\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{8}{3}, 2\right)$ y $B\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{8}{3}, -2\right)$.

096 **Encuentra las condiciones que deben satisfacer a y b para que el punto $Q(2, a, b)$ esté en el mismo plano que los puntos $A(1, 3, 1)$, $B(1, 0, -1)$ y $C(0, 0, 2)$.**

(País Vasco. Julio 2005. Bloque B. Cuestión B)

$\overrightarrow{AB} = (0, -3, -2)$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (-1, -3, 1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-1 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -9x + 2y - 3z + 6 = 0 \rightarrow \pi: 9x - 2y + 3z - 6 = 0$$

Si Q pertenece al plano entonces: $18 - 2a + 3b - 6 = 0 \rightarrow 2a - 3b = 12$

097 Se consideran la recta $r: (x, y, z) = (t+1, 2t, 3t)$, el plano $\pi: x - 2y - z = 0$ y el punto $P(1, 1, 1)$. Se pide:

a) Determinar la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto P y es paralelo al plano π.

b) Determinar la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y pasa por el punto P.

c) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de los planos anteriores, π_1 y π_2.

(C. Valenciana. Junio 2004. Ejercicio B. Problema 2)

a) $$\pi: \left.\begin{array}{l} x = 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array}\right\} \rightarrow \pi_1: \left.\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \mu \end{array}\right\}$$

$$\pi_1: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi_1: x - 2y - z + 2 = 0$$

b) $Q(1, 0, 0) \in r$ $\qquad \overrightarrow{PQ} = (0, -1, -1)$ $\qquad \vec{v}_r = (1, 2, 3)$

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi_2: x + y - z - 1 = 0$$

c) $$s: \left.\begin{array}{r} x - 2y - z + 2 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{r} x - 2y - z + 2 = 0 \\ 3y - 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 1 \\ z = t \end{array}\right\}$$

098 Dados el punto $A(3, 5, -1)$ y la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = y + 2 = \dfrac{z+1}{4}$

hállese el punto B perteneciente a r tal que el vector de extremos A y B es paralelo al plano π de ecuación $3x - 2y + z + 5 = 0$.

(Castilla y León. Junio 2005. Opción B. Cuestión 2)

El punto B es de la forma $(1 + 2t, -2 + t, -1 + 4t)$.

$\overrightarrow{AB} = (-2 + 2t, -7 + t, 4t)$

$$\pi: 3x - 2y + z + 5 = 0 \rightarrow \pi: \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -5 - 3\lambda + 2\mu \end{array}\right\}$$

Si el vector de extremos A y B es paralelo a π entonces los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u} = (1, 0, -3)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$ son linealmente dependientes.

$$\begin{vmatrix} -2+2t & -7+t & 4t \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 8t + 8 = 0 \rightarrow t = -1$$

Sustituyendo $t = -1$ en la expresión de B obtenemos $B(-1, -3, -5)$.

099 Estudia las posiciones relativas de las parejas de rectas siguientes.

a) $r\colon \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+2}{3} = z-3$ $\qquad s\colon x-2 = \dfrac{y+4}{-1} = \dfrac{z-4}{-2}$

b) $r\colon \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = z+4$ $\qquad s\colon \dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$

c) $r\colon \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ $\qquad s\colon \left.\begin{array}{r} 3x+z=10 \\ 5x-y-z=16 \end{array}\right\}$

d) $r\colon \left.\begin{array}{r} 2x+z=4 \\ x+3y+z=4 \end{array}\right\}$ $\qquad s\colon \left.\begin{array}{r} x+y-z=8 \\ 3x-y+3z=18 \end{array}\right\}$

e) $r\colon \left.\begin{array}{r} 2x+y-z=1 \\ x+2y+2z=0 \end{array}\right\}$ $\qquad s\colon \left.\begin{array}{r} -x+y+2z=-2 \\ 3x-y+3z=11 \end{array}\right\}$

f) $r\colon \left.\begin{array}{r} 2x+4y-z=7 \\ -x+y+2z=-2 \end{array}\right\}$ $\qquad s\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$

a) $r\colon \begin{cases} P(2,-2,3) \\ \vec{u}=(-1,3,1) \end{cases}$ $\qquad s\colon \begin{cases} Q(2,-4,4) \\ \vec{v}=(1,-1,-2) \end{cases}$ $\qquad \overrightarrow{PQ}=(0,-2,1)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son secantes.

b) $r\colon \begin{cases} P(3,2,-4) \\ \vec{u}=(2,-1,1) \end{cases}$ $\qquad s\colon \begin{cases} Q(-1,5,-1) \\ \vec{v}=(-4,2,-2) \end{cases}$ $\qquad \overrightarrow{PQ}=(-4,3,3)$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son paralelas.

c) $r\colon \begin{cases} P(3,-2,1) \\ \vec{u}=(-1,2,3) \end{cases}$ $\qquad s\colon \left.\begin{array}{r} 3x+z=10 \\ 5x-y-z=16 \end{array}\right\} \to s\colon \left.\begin{array}{l} x=t \\ y=-26+8t \\ z=10-3t \end{array}\right\}$

$s\colon \begin{cases} Q(0,-26,10) \\ \vec{v}=(1,8,-3) \end{cases}$ $\qquad \overrightarrow{PQ}=(-3,-24,9)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & -3 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & -3 \\ -3 & -24 & 9 \end{vmatrix} = 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & -3 \\ -3 & -24 & 9 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son secantes.

d) $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & 3 & 18 \end{vmatrix} = -180 \neq 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & 3 & 18 \end{pmatrix} = 4$$

Las rectas se cruzan.

e) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & 11 \end{pmatrix} = 3$$

Las rectas son secantes.

f) $$r\colon \left.\begin{aligned} 2x + 4y - z &= 7 \\ 6y + 3z &= 3 \end{aligned}\right\} \to r\colon \left.\begin{aligned} x &= 4 - 3t \\ y &= t \\ z &= 1 - 2t \end{aligned}\right\}$$

$$r\colon \begin{cases} P(4, 0, 1) \\ \vec{u} = (-3, 1, -2) \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} Q(1, 1, -1) \\ \vec{v} = (3, -1, 2) \end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ} = (-3, 1, -2)$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 1$$

Las rectas son coincidentes.

100 **Decide si las dos rectas se cortan, y en caso de que sea así, calcula el plano que las contiene.**

$$r: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 3-2\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = -\lambda \end{array}\right\}$$

$$r: \begin{cases} P(-3, 1, -1) \\ \vec{u} = (2, 2, -1) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(3, 1, 0) \\ \vec{v} = (-2, 1, -1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ} = (6, 0, 1)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son secantes.

El plano que las contiene es:

$$\pi: \begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z+1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -x+4y+6z-1=0 \rightarrow \pi: x-4y-6z+1=0$$

101 **Di si las dos rectas son o no paralelas.**

$$r: \left.\begin{array}{r} x+2y-z=13 \\ 2x-y-7z=16 \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 1-3\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = -\lambda \end{array}\right\}$$

En caso afirmativo, determina la ecuación del plano que las contiene.

$$r: \left.\begin{array}{r} x+2y-z=13 \\ y+z=2 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = 9+3t \\ y = 2-t \\ z = t \end{array}\right\}$$

$$r: \begin{cases} P(9, 2, 0) \\ \vec{u} = (3, -1, 1) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(1, 2, 0) \\ \vec{v} = (-3, 1, -1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ} = (-8, 0, 0)$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son paralelas.

El plano que las contiene es:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 3 & -1 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8y-8z+16=0 \rightarrow \pi: y+z-2=0$$

102 **Decide si estas dos rectas se cortan y, en caso afirmativo, determina el punto de corte.**

$$r\colon \left.\begin{array}{r} x=-4+7\lambda \\ y=2\lambda \\ z=-1 \end{array}\right\} \qquad s\colon \left.\begin{array}{r} x=1-\lambda \\ y=10+4\lambda \\ z=3+2\lambda \end{array}\right\}$$

$$r\colon \begin{cases} P(-4,0,-1) \\ \vec{u}=(7,2,0) \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} Q(1,10,3) \\ \vec{v}=(-1,4,2) \end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ}=(5,10,4)$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 30 \neq 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son secantes.

$$\left.\begin{array}{r} -4+7\lambda=1-t \\ 2\lambda=10+4t \\ -1=3+2t \end{array}\right\} \to \begin{cases} \lambda=1 \\ t=-2 \end{cases} \to P(3,2,-1) \text{ es el punto de corte.}$$

103 **Decide las posiciones relativas de las siguientes parejas formadas por un plano y una recta.**

a) $r\colon \left.\begin{array}{l} x=3-\lambda \\ y=2 \\ z=-1+3\lambda \end{array}\right\} \qquad \pi\colon 2x-3y+z-2=0$

b) $r\colon \left.\begin{array}{r} 2x+y-3z+3=0 \\ 5x+5y-7z+1=0 \end{array}\right\} \qquad \pi\colon x+3y-z-5=0$

c) $r\colon \left.\begin{array}{r} -4x+y-2z+3=0 \\ 2x+4y+z+4=0 \end{array}\right\} \qquad \pi\colon \left.\begin{array}{l} x=-1-\lambda+\mu \\ y=2+2\lambda-\mu \\ z=3-\mu \end{array}\right\}$

a) $r\colon \left.\begin{array}{c} \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{z+1}{3} \\ y=2 \end{array}\right\} \to r\colon \left.\begin{array}{r} 3x-9=-z-1 \\ y=2 \end{array}\right\} \to r\colon \left.\begin{array}{r} 3x+z-8=0 \\ y-2=0 \end{array}\right\}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3$$

La recta y el plano se cortan en un punto.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 2$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 3 \\ 5 & 5 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} = 2$

La recta está contenida en el plano.

c) $\pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2x - y - z + 3 = 0 \rightarrow \pi: 2x + y + z - 3 = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 2$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 60 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 3$

La recta y el plano son paralelos.

104 **Estudia las posiciones relativas de las parejas de planos.**

a) $\pi: \left.\begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda + \mu \\ y = -1 + 2\lambda - 3\mu \\ z = 1 + 5\mu \end{array}\right\}$ $\qquad \pi': -5x + 5y + 4z - 12 = 0$

b) $\pi: x - 2y + 4z - 1 = 0$ $\qquad \pi': 2x + 5y - 3z + 2 = 0$

c) $\pi: \left.\begin{array}{l} x = -\lambda - \mu \\ y = 3 + 2\lambda + 3\mu \\ z = 1 + 3\lambda + 4\mu \end{array}\right\}$ $\qquad \pi': x - y + z + 2 = 0$

a) $\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 10x - 10y - 8z - 22 = 0 \rightarrow \pi: 5x - 5y - 4z - 11 = 0$

$\text{Rango} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix} = 1$

$\begin{vmatrix} 5 & -11 \\ -5 & -12 \end{vmatrix} = -115 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 & -11 \\ -5 & 5 & 4 & -12 \end{pmatrix} = 2$

Los planos son paralelos.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = 2$

$\text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} = 2$

Los planos son secantes.

c) $\pi: \begin{vmatrix} x & y-3 & z-1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -x + y - z = 0 \rightarrow \pi: x - y + z + 2 = 0$

Las ecuaciones de π y π' son iguales, es decir, los planos son coincidentes.

Haciéndolo por rangos:

$\text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1$

$\text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$

Los planos son coincidentes.

105 **Estudia las posiciones relativas de los tríos de planos siguientes.**

a) $\pi: 4x + y + 3z + 2 = 0$
$\pi': -3x + 5y + 4z - 7 = 0$
$\pi'': y + 3z - 6 = 0$

b) $\pi: x - 2y + 3z - 1 = 0$
$\pi': 2x + y - z + 5 = 0$
$\pi'': 7x - 4y + 7z + 7 = 0$

c) $\pi: 6x - 3y + 9z - 1 = 0$
$\pi': -x + 2y - z + 1 = 0$
$\pi'': 4x - 2y + 6z + 5 = 0$

d) $\pi: 2x - 3y + z = 0$
$\pi': 2x - y + 4z + 5 = 0$
$\pi'': 6x - 5y + 9z - 1 = 0$

a) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 44 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3$

$\text{Rango} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = 3$

Los planos se cortan en un punto.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & -4 & 7 \end{pmatrix} = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & -4 & 7 & 7 \end{pmatrix} = 2$

Como no hay dos planos coincidentes, los tres planos se cortan en una recta.

c) $\begin{vmatrix} 6 & -3 & 9 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} = 2$

$\begin{vmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 51 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 3$

Como π y π'' son paralelos:

$$\frac{6}{4} = \frac{-3}{-2} = \frac{9}{6} \neq \frac{-1}{7}$$

Tenemos dos planos paralelos que cortan al tercero.

d) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 6 & -5 & 9 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 6 & -5 & 9 \end{pmatrix} = 2$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 6 & -5 & -1 \end{vmatrix} = -44 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 6 & -5 & 9 & -1 \end{pmatrix} = 3$

Como no hay planos paralelos, los planos se cortan dos a dos.

106 **Determina la posición relativa de las siguientes rectas:**

$$r_1: \left.\begin{array}{r} 7x+5y-7z-12=0 \\ 2x+3z+11=0 \end{array}\right\} \qquad r_2: \left.\begin{array}{r} 5x-5y-z-16=0 \\ 3x-2y-7=0 \end{array}\right\}$$

(Aragón. Junio 2007. Opción B. Cuestión 4)

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & -7 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 260 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 7 & 5 & -7 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & -5 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & -7 & -12 \\ 2 & 0 & 3 & 11 \\ 5 & -5 & -1 & -16 \\ 3 & -2 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -552 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 7 & 5 & -7 & -12 \\ 2 & 0 & 3 & 11 \\ 5 & -5 & -1 & -16 \\ 3 & -2 & 0 & -7 \end{pmatrix} = 4$$

Las rectas se cruzan.

107 **Determínese si el plano $\pi: 2x+3y-4=0$ corta o no al segmento de extremos $A(2,1,3)$ y $B(3,2,1)$.**

(Castilla y León. Junio 2004. Prueba A. Cuestión 4)

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por A y por B.

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -2)$

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = 3-2t \end{array}\right\} \rightarrow r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-2}$$

$$\rightarrow r: \left.\begin{array}{r} x-2 = y-1 \\ -2x+4 = z-3 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{r} x-y-1=0 \\ 2x+z-7=0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 3$$

La recta y el plano se cortan en un punto. Calculamos su intersección.

$$2(2+t)+3(1+t)-4=0 \rightarrow t = -\frac{3}{5} \rightarrow P\left(\frac{7}{5}, \frac{2}{5}, \frac{21}{5}\right)$$

Este punto no está situado entre A y B, por tanto, el plano no corta al segmento.

108 Sea r la recta de ecuación $\frac{x-5}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{4}$ y la recta s dada por $\left.\begin{array}{r}3x-2y+z=2\\-x+2y-3z=2\end{array}\right\}$.

a) Determina la posición relativa de ambas rectas.

b) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 4)

a) $s\colon \left.\begin{array}{r}3x-2y+z=2\\y-2z=2\end{array}\right\} \rightarrow s\colon \left.\begin{array}{l}x=2+t\\y=2+2t\\z=t\end{array}\right\}$ $\qquad s\colon \begin{cases}Q(2,2,0)\\ \vec{v}=(1,2,1)\end{cases}$

$r\colon \begin{cases}P(5,-2,0)\\ \vec{u}=(2,-1,4)\end{cases}$ $\qquad \overrightarrow{PQ}=(-3,4,0)$

$$\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{vmatrix}=5\neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\1 & 2 & 1\end{pmatrix}=2$$

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\1 & 2 & 1\\-3 & 4 & 0\end{vmatrix}=35\neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\1 & 2 & 1\\-3 & 4 & 0\end{pmatrix}=3$$

Las rectas se cruzan.

b) $$\pi\colon \begin{vmatrix}x-5 & y+2 & z\\2 & -1 & 4\\1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0 \rightarrow \pi\colon 9x-2y-5z-49=0$$

109 Sean r y s las rectas dadas por:

$r\colon \left.\begin{array}{r}2x-y=m\\z+2y=3\end{array}\right\}$ $\qquad s\colon \left.\begin{array}{r}x+y=2\\x+2z=3\end{array}\right\}$

a) Halla m para que ambas rectas se corten.

b) Para $m=1$, halla la ecuación del plano que contiene a r y a s.

(Castilla y León. Junio 2006. Prueba A. Problema 1)

a) El rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada tiene que ser 3.

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\0 & 2 & 1\\1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-3\neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\0 & 2 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}=3$$

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 0 & m\\0 & 2 & 1 & 3\\1 & 1 & 0 & 2\\1 & 0 & 2 & 3\end{vmatrix}=5m-5 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & m\\0 & 2 & 1 & 3\\1 & 1 & 0 & 2\\1 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix}=3 \rightarrow m=1$$

b) $r: \left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ z + 2y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 5 - 4t \end{array}\right\}$

$s: \left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ x + 2z = 3 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{array}\right\}$

El plano que buscamos pasa por el punto $A(0, -1, 5) \in r$ y tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas r y s.

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y+1 & z-5 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: 10x + 7y + 6z - 23 = 0$$

110 **Estudia, según los valores del parámetro k, la posición relativa de las rectas siguientes:**

$$x - k = \frac{y+1}{2k-1} = \frac{z}{2} \qquad \frac{x}{k+1} = \frac{y-2}{-1} = z + 2$$

(Baleares. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 2)

$r: \begin{cases} P(k, -1, 0) \\ \vec{u} = (1, 2k-1, 2) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(0, 2, -2) \\ \vec{v} = (k+1, -1, 1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ} = (-k, 3, -2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2k-1 \\ k+1 & -1 \end{vmatrix} = -k(2k+1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ k+1 & 1 \end{vmatrix} = -2k-1$$

$$\begin{vmatrix} 2k-1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2k+1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2k-1 & 2 \\ k+1 & -1 & 1 \\ -k & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2k^2 + 7k + 3 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

$$2k^2 + 7k + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Si $k \in \mathbb{R} - \left\{-3, -\dfrac{1}{2}\right\}$: el rango de la matriz formada por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$ es 3 y el de la matriz determinada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es 2, por tanto, las rectas se cruzan.
- Si $k = -3$: los rangos de ambas matrices valen 2, luego las rectas son secantes.
- Si $k = -\dfrac{1}{2}$: el rango de la matriz formadapor $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$ es 2 y el de la matriz determinada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es 1, por lo que las rectas son paralelas.

111 Dadas las rectas: $r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-3}$ $\quad s: \left.\begin{aligned} x &= 1+\lambda \\ y &= 3+2\lambda \\ z &= 1+\lambda \end{aligned}\right\}$

a) Estudia su posición relativa.

b) Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

(Galicia. Septiembre 2007. Bloque 2. Opción 2)

a) $r: \begin{cases} P(0, 1, 2) \\ \vec{u} = (1, -1, -3) \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} Q(1, 3, 1) \\ \vec{v} = (1, 2, 1) \end{cases}$ $\quad \overrightarrow{PQ} = (1, 2, -1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

Las rectas se cruzan.

b) $\pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: 5x - 4y + 3z - 2 = 0$

112 Dadas las siguientes rectas: $\frac{x-a}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ $\quad \left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2x + z &= 1 \end{aligned}\right\}$

calcula el valor de a de tal manera que ambas rectas se corten. Determina el punto de corte.

(Baleares. Septiembre 2004. Opción A. Cuestión 4)

$s: \left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2x + z &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= 1 - 3t \\ z &= 1 - 2t \end{aligned}\right\}$ $\quad s: \begin{cases} Q(0, 1, 1) \\ \vec{v} = (1, -3, -2) \end{cases}$

$r: \begin{cases} P(a, -1, -1) \\ \vec{u} = (-2, -1, 2) \end{cases}$ $\quad \overrightarrow{PQ} = (-a, 2, 2)$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas se cortan si la matriz formada por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$ tiene rango 2.

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -a & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 10 - 8a = 0 \rightarrow a = \frac{5}{4}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{5}{4} - 2\lambda &= t \\ -1 - \lambda &= 1 - 3t \\ -1 + 2\lambda &= 1 - 2t \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{4} \\ t = \frac{3}{4} \end{cases} \rightarrow P\left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\right) \text{ es el punto de corte.}$$

113 Sean r_1 y r_2 las rectas de ecuaciones: $r_1\colon \left.\begin{array}{r} x-2z-1=0 \\ y-z-2=0 \end{array}\right\}$ $\quad r_2\colon \left.\begin{array}{r} x+y+z-1=0 \\ -2y+2z-a=0 \end{array}\right\}$

Determina el valor de a para que r_1 y r_2 sean coplanarias.

(La Rioja. Junio 2005. Propuesta A. Ejercicio 5)

Las rectas son coplanarias si no se cruzan. Así, la matriz formada por las dos rectas no puede tener rango 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -a \end{vmatrix} = -4a-16=0 \rightarrow a=-4$$

114 Se consideran la recta $r\colon \left.\begin{array}{l} x=2+t \\ y=2+2t \\ z=3+3t \end{array}\right\}$, el plano $\pi\colon 2x-4y-2z=0$

y el punto $P(1, 1, 1)$. Se pide:

a) Determinar la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto P y es paralelo al plano π.

b) Determinar la ecuación general del plano π_2 que contiene a la recta r y pasa por el punto P.

(Canarias. Junio 2008. Bloque 4. Opción B)

a) $\pi\colon \left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=\lambda-2\mu \end{array}\right\}$ $\qquad \pi_1\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi_1\colon x-2y-z+2=0$

b) $r\colon \left\{\begin{array}{l} Q(2, 2, 3) \\ \vec{u}=(1, 2, 3) \end{array}\right.$ $\qquad \overrightarrow{PQ}=(1, 1, 2)$

$$\pi_2\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi_2\colon x+y-z-1=0$$

115 Calcula a para que la recta: $r\colon \left.\begin{array}{r} 5x-y+z=0 \\ x-y-z=-4 \end{array}\right\}$ sea paralela al plano $\pi\colon ax-6y+4z=5$.

(La Rioja. Junio 2002. Propuesta A. Ejercicio 2)

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \\ -6 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ a & -6 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 3$$

La recta es paralela al plano si la matriz de coeficientes tiene rango 2.

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ a & -6 & 4 \end{vmatrix} = 2a-52=0 \rightarrow a=26$$

116 Sea π el plano de ecuación $2x + 3y + 4z = a$ y r la recta que contiene al punto $P(1, 1, -1)$ y tiene como vector de dirección a $\vec{v} = (1, 2, -2)$.
¿Existe algún valor de a para el cual la recta esté contenida en el plano? Razonar la contestación en caso negativo. En caso afirmativo encontrar el valor de a.

(País Vasco. Julio 2006. Bloque B. Cuestión B)

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2} \rightarrow r: \left.\begin{matrix} 2x - y = 1 \\ 2x + z = 1 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

La recta está contenida en el plano si la matriz ampliada tiene rango 2.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix} = 2a - 2 = 0 \rightarrow a = 1$$

117 ¿Para qué valores del parámetro m la recta: $x = y + 1 = \dfrac{11 - mz}{3}$ es paralela al plano $2x + y + z = 9$? Determinar el punto de intersección de la recta y el plano para $m = 2$.

(Aragón. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 4)

$$r: \left.\begin{matrix} x = y + 1 \\ 3x = 11 - mz \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{matrix} x - y = 1 \\ 3x + mz = 11 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 11 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & m & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} = 3$$

La recta es paralela al plano si la matriz de coeficientes tiene rango 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & m \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 3m = 0 \rightarrow m = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & m \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Calculamos la intersección para $m = 2$.

$$\text{Si } m = 2 \rightarrow r: \left.\begin{matrix} x = t \\ y = -1 + t \\ z = \dfrac{11}{2} - \dfrac{3}{2}t \end{matrix}\right\} \text{ Sustituyendo en el plano:}$$

$$2t - 1 + t + \frac{11}{2} - \frac{3}{2}t = 9 \rightarrow t = 3 \rightarrow P(3, 2, 1) \text{ es el punto de intersección.}$$

118 **Estudiar la posición relativa del plano $\pi: 5x + \lambda y - 2z + 1 = 0$ y la recta $r: \left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ x - y + 2z = -1 \end{array}\right\}$ según los valores del parámetro λ.**

(Canarias. Septiembre 2005. Opción B. Cuestión 4)

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 5 & \lambda & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & \lambda & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4\lambda - 8$$

- Si $\lambda \neq -2$

  El rango de la matriz de coeficientes es 3 y coincide con el de la matriz ampliada, por tanto, la recta y el plano se cortan.

- Si $\lambda = -2$

  El rango de la matriz de coeficientes es 2, distinto al de la matriz ampliada, así la recta y el plano son paralelos.

119 **Sean los planos:**

$$\pi_1: 2x + 3y + z = 2$$
$$\pi_2: x + y - z = 1$$

a) Determina la posición relativa de los mismos.

b) Calcula una recta que esté contenida en el plano $\pi_2: x + y - z = 1$, sea paralela a la intersección de esos dos planos y que pase por el punto (5, −3, 1).

(Asturias. Junio 2003. Bloque 5)

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$

$\text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

Los planos son secantes.

b) $r: \left.\begin{array}{r} 2x + 3y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{r} 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + 4y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = 1 - 4t \\ y = 3t \\ z = -t \end{array}\right\}$

El punto (5, −3, 1) pertenece a esta recta ($t = -1$), por tanto, dicha recta es la que cumple las condiciones del ejercicio.

120 Consideramos las rectas:

$$r_1: \left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ y+z=2 \end{array}\right\} \qquad r_2: \left.\begin{array}{r} y=1 \\ x+y+z=6 \end{array}\right\} \qquad r_3: \left.\begin{array}{r} x-y=1 \\ y-z=3 \end{array}\right\}$$

Se pide:

a) Demuestra que las rectas r_1 y r_2 se cortan en un único punto.

b) Halla las ecuaciones en forma continua de la recta que pasa por el punto de intersección de r_1 y r_2 y es paralela a r_3.

(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 4. Pregunta A)

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = 3$$

Las rectas r_1 y r_2 se cortan en un punto.

b) $$\left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ y+z=2 \\ y=1 \\ x+y+z=6 \end{array}\right\} \to P(4, 1, 1) \text{ es el punto de intersección de } r_1 \text{ y } r_2.$$

$$r_3: \left.\begin{array}{l} x=4+t \\ y=3+t \\ z=t \end{array}\right\} \quad \text{La recta es } s: \frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$$

121 Estudie si existe algún punto que pertenezca a la vez a los tres planos siguientes. Calcule los puntos en común (si existen).

$$\pi_1: x-y+z=0 \qquad \pi_2: z=2y \qquad \pi_3: \left.\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda+\mu \\ z=1+2\lambda-\mu \end{array}\right\}$$

(Murcia. Septiembre 2007. Bloque 2. Cuestión B)

$$\pi_3: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3x+y+z+1=0 \to \pi_3: 3x-y-z-1=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Los tres planos se cortan en un punto.

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 2y-z=0 \\ 3x-y-z=1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 2y-z=0 \\ 2y-4z=1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 2y-z=0 \\ 3z=-1 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{6} \\ y=-\dfrac{1}{6} \\ z=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

El punto de intersección es: $P\left(\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{3}\right)$

122 **Discute, según los valores de a, la posición relativa de los siguientes planos indicando las figuras que determinan (no es necesario resolverlo).**

$\pi_1: (a+1)x + y + z = 3 \qquad \pi_2: x + 2y + az = 4 \qquad \pi_3: x + ay + 2z = 2a$

(La Rioja. Septiembre 2003. Propuesta A. Ejercicio 5)

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = -a^3 - a^2 + 6a$$

$$-a^3 - a^2 + 6a = 0 \to -a(a^2 + a - 6) = 0 \to \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ a=2 \\ a=-3 \end{array}\right.$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-3, 0, 2\}$: el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos es compatible determinado, es decir, los planos se cortan en un punto.

- Si $a = -3$: $\left.\begin{array}{r} -2x+y+z=3 \\ x+2y-3z=4 \\ x-3y+2z=-6 \end{array}\right\}$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \to \text{El rango de la matriz de coeficientes es 2.}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \to \text{El rango de la matriz ampliada es 3.}$$

Como no hay planos paralelos, los planos se cortan dos a dos.

- Si $a = 0$: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ x+2y=4 \\ x+2z=0 \end{array}\right\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to \text{El rango de la matriz de coeficientes es 2.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \to \text{El rango de la matriz ampliada es 3.}$$

Como no hay planos paralelos, los planos se cortan dos a dos.

• Si $a = 2$: $\left.\begin{array}{r} 3x + y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{array}\right\}$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow$ El rango de las dos matrices es 2.

Dos planos coinciden y cortan al primero en una recta.

123 Determina a y b para que los planos:

$$x + y + z = 2 \qquad 2x + 3y + z = 3 \qquad ax + 10y + 4z = b$$

se corten en una recta r. Da algún tipo de ecuaciones para r (las que quieras).

(La Rioja. Septiembre 2007. Propuesta B. Ejercicio 5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Los planos se cortan en una recta si el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada es 2. Entonces:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 10 & 4 \end{vmatrix} = 14 - 2a = 0 \rightarrow a = 7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 7 & 10 & b \end{vmatrix} = b - 11 = 0 \rightarrow b = 11$$

$$r: \left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{array}\right\} \rightarrow r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$$

124 En el espacio se consideran los tres planos de ecuaciones:

$$\pi_1: x + 2y + z = 1 \qquad \pi_2: px + y + pz = 1 \qquad \pi_3: px + y + 2z = 1$$

donde p es un parámetro real.

a) Averigüe para qué valores de p los tres planos se cortan en un único punto. Halle este punto cuando $p = 1$.

b) ¿Hay algún valor de p que hace que la intersección común sea una recta? Si es así, escriba la ecuación vectorial de esta recta.

c) Encuentre cuál es la posición relativa de los tres planos cuando $p = \frac{1}{2}$.

(Cataluña. Junio 2007. Problema 6)

a) Los planos se cortan en un punto si el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada es 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ p & 1 & p \\ p & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2p^2 - 5p + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} p = \frac{1}{2} \\ p = 2 \end{cases}$$

- Si $p \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$: el sistema es compatible determinado, es decir, los tres planos se cortan en un único punto.
- Si $p = 1$:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+2z=1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ y=0 \\ y-z=0 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right.$$

El punto de intersección es $P(1, 0, 0)$.

b) Si $p = 2$:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=1 \\ 2x+y+2z=1 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Como la segunda y la tercera ecuación son iguales, el rango de ambas matrices es 2.

Un plano corta a dos planos coincidentes en una recta.

$$r\colon \left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=1 \end{array}\right\} \to r\colon \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{3}-t \\ y=\frac{1}{3} \\ z=t \end{array}\right\} \to r\colon (x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) + t(-1, 0, 1)$$

c) Si $p = \frac{1}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ \frac{1}{2}x+y+\frac{1}{2}z=1 \\ \frac{1}{2}x+y+2z=1 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \neq 0 \to \text{El rango de la matriz de coeficientes es 2.}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \neq 0 \to \text{El rango de la matriz ampliada es 3.}$$

Como los dos primeros planos son paralelos, el tercero los corta en dos rectas paralelas.

125 **Halla la ecuación del plano π que pasa por el punto $P(3, -1, 4)$ y es paralelo a las rectas:**

$$r_1: \left.\begin{array}{r} 5x - y + 3z - 4 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \qquad r_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-3}$$

(Navarra. Junio 2008. Grupo 1. Opción A)

$$r_1: \left.\begin{array}{r} 5x - y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2z - 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r_1: \left.\begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{array}\right\}$$

El plano que buscamos pasa por $(3, -1, 4)$ y tiene como vectores directores los vectores directores de r_1 y r_2.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-4 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -3x - 3y - 3z + 18 = 0 \rightarrow \pi: x + y + z - 6 = 0$$

126 **Halla las ecuaciones paramétricas de una recta sabiendo que corta a la recta r de ecuaciones $x = y = z$, es paralela al plano π de ecuación $3x + 2y - z = 4$ y pasa por el punto $A(1, 2, -1)$.**

(Andalucía. Año 2006. Modelo 6. Opción B. Ejercicio 4)

Determinamos los vectores directores de π.

$$\pi: 3x + 2y - z = 4 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -4 + 3\lambda + 2\mu \end{array}\right\}$$

Calculamos la ecuación del plano paralelo a π que pasa por A.

$$\pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi': 3x + 2y - z - 8 = 0$$

Hallamos el punto de intersección de la recta r con este plano.

$r: x = y = z$

$\pi: 3x + 2y - z - 8 = 0 \rightarrow 3x + 2x - x - 8 = 0 \rightarrow x = 2$

El punto de intersección del plano con la recta $r: x = y = z$ es $P(2, 2, 2)$.

La recta que se pide pasa por A y por P.

$\overrightarrow{AP} = (1, 0, 3)$

$$r': \left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -1 + 3t \end{array}\right\}$$

127 Estudia y resuelve, según los valores de λ, el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=2\\ 2x-y&=\lambda\\ y+3z&=\lambda\\ x-y+2z&=0 \end{aligned}\right\}$$

Si las dos primeras ecuaciones representan una recta r y las dos últimas otra recta s, interpreta geométricamente los resultados obtenidos.

(La Rioja. Junio 2004. Propuesta B. Ejercicio 5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 0 & \lambda\\ 0 & 1 & 3 & \lambda\\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 14\lambda - 14 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

- Si $\lambda \neq 1$: el sistema es incompatible y las rectas se cruzan.
- Si $\lambda = 1$: el sistema es compatible determinado, es decir, las rectas se cortan en un punto.

128 Estudia la posición relativa de los cuatro planos siguientes:

$$\left.\begin{aligned} 7x+8y-z&=0\\ x-y&=-4\\ 2x+3y-5z&=-1\\ x+y&=0 \end{aligned}\right\}$$

(Baleares. Septiembre 2001. Opción B. Cuestión 4)

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 70 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 7 & 8 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & -5\\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -4\\ 2 & 3 & -5 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -4\\ 2 & 3 & -5 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

Los cuatro planos no tienen una intersección común. Estudiamos las posiciones relativas de los tres primeros planos.

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 70 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 7 & 8 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -4\\ 2 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

Los tres primeros planos se cortan en un punto. Como el cuarto plano no es paralelo a ninguno de los otros tres, este plano corta en una recta a cada uno de los otros planos.

129 Considera las rectas:

$$r: x-3=y-4=\frac{z-5}{2} \qquad s: \frac{x-5}{-2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-m}{2}$$

donde $m \in \mathbb{R}$.

a) Estudia, según los valores del parámetro m, las posiciones relativas de las dos rectas. En caso de que se corten las rectas r y s, calcula el punto de corte.

b) Cuando sean coplanarias, determina la ecuación general del plano que las contiene.

c) Estudia la posición relativa del plano del apartado anterior con el plano que pasa por los tres puntos: $A(3, 4, 5)$, $B(5, 4, -3)$ y $C(1, 2, 1)$.

Indicación: No es necesario construir el plano que pasa por esos tres puntos.

(Cantabria. Septiembre 2006. Bloque 3. Opción B)

a) $r: \begin{cases} P(3, 4, 5) \\ \vec{u}=(1, 1, 2) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(5, 4, m) \\ \vec{v}=(-2, -1, 2) \end{cases}$

$\overrightarrow{PQ}=(2, 0, m-5)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & m-5 \end{vmatrix} = m+3$$

- Si $m+3 \neq 0 \rightarrow m \neq -3$:

  El rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la ampliada 3, las rectas se cruzan.

- Si $m+3 = 0 \rightarrow m = -3$:

  El rango de las dos matrices es 2, las rectas son secantes.

Calculamos en este caso la intersección entre las dos rectas. Para ello igualaremos las ecuaciones paramétricas de ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{r} 3+\lambda=5-2t \\ 4+\lambda=4-t \\ 5+2\lambda=-3+2t \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \lambda=-2 \\ t=2 \end{cases} \rightarrow C(1, 2, 1) \text{ es el punto de corte.}$$

b) Las rectas son coplanarias si son secantes, es decir, si $m=-3$.

El plano que buscamos pasa por $P(3, 4, 5) \in r$ y tiene como vectores directores los vectores directores de r y s.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: 4x-6y+z+7=0$$

c) $A(3, 4, 5) \in r$

$B(5, 4, -3) \in r$

$C(1, 2, 1) \qquad 1-3=2-4=1-5 \rightarrow C \in r$

Los puntos A, B y C pertenecen a las rectas r y s por lo que también están en el plano. El plano que pasa por estos tres puntos es coincidente con el anterior.

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Responde a estas cuestiones.

a) ¿Están alineados los puntos $A(1, 0, -1)$, $B(-1, 1, 2)$ y $C(3, 0, 1)$? Justificar la respuesta.

b) En caso afirmativo, determinar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo, determinar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos.

(Canarias. Junio 2004. Opción A. Cuestión 4)

a) $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 3)$ $\qquad \overrightarrow{AC} = (2, 0, 2)$

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ no son proporcionales, por tanto, los puntos A, B y C no están alineados.

b) $\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2x + 10y - 2z - 4 = 0 \rightarrow \pi: x + 5y - z - 2 = 0$

2 Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta dada por $r: \left.\begin{array}{r} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{array}\right\}$.

¿Existe algún valor de s tal que el punto $(-3, s, s)$ pertenezca a la recta? Razona la respuesta tanto en caso afirmativo como negativo.

(País Vasco. Septiembre 2004. Bloque B. Cuestión B)

$$r: \left.\begin{array}{r} 3x + y + z = 0 \\ 4x + 3z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = -3t \\ y = 5t \\ z = 4t \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} -3 = -3t \\ s = 5t \\ s = 4t \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow t = -1 \\ \rightarrow s = -5 \\ \rightarrow -5 \neq -4 \rightarrow \text{No existe valor de s tal que } (-3, s, s) \in r. \end{array}$$

3 Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi: x + y - z + 6 = 0$ con la recta $s: \dfrac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralela a la recta $r: \left.\begin{array}{r} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{array}\right\}$.

(Andalucía. Junio 2002. Opción A. Ejercicio 4)

$$s: \left.\begin{array}{l} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{array}\right\}$$

Calculamos la intersección entre s y π.

$\pi: x + y - z + 6 = 0 \rightarrow 3t + 2 + t - (-1 + t) + 6 = 0 \rightarrow t = -3$

$P(-9, -1, -4)$ es el punto de intersección del plano π y de la recta s.

$$r: \begin{matrix} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{matrix}\Bigg\} \rightarrow r: \begin{matrix} x = t \\ y = 4 - 3t \\ z = 13 - 13t \end{matrix}\Bigg\}$$

La recta que buscamos es: $r': \begin{matrix} x = -9 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = -4 - 13t \end{matrix}\Bigg\}$

4 **Considera un plano $\pi: x + y + mz = 3$ y la recta $r:\ x = y - 1 = \dfrac{z-2}{2}$.**

a) Halla m para que r y π sean paralelos.

b) ¿Existe algún valor de m para que la recta r esté contenida en el plano π?

(Andalucía. Septiembre 2005. Opción A. Ejercicio 4)

$$r: \begin{matrix} x = y - 1 \\ 2x = z - 2 \end{matrix}\Bigg\} \rightarrow r: \begin{matrix} x - y = -1 \\ 2x - z = -2 \end{matrix}\Bigg\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 2 + 2m \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

a) Si $2 + 2m = 0 \rightarrow m = -1$:
El rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada es 3.
La recta r y el plano π son paralelos.

b) El rango de la matriz ampliada es 3 para cualquier valor de m, por lo que no hay ningún valor para el que la recta r esté contenida en el plano π.

5 **Estudia la posición relativa de los planos:**

$$\pi: x + y + 2z = 2 \quad \beta: 2x + my + 2mz = 2 + m \quad \alpha: mx + 2y + (2 + m)z = 0$$

según los valores de m.

(Cataluña. Septiembre 2007. Cuestión 2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m - 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 4 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2+m \\ m & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 - m^2$$

- Si $m \neq 2$: el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada es 3, los planos se cortan en un único punto.
- Si $m = 2$: el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada es 1, los planos son coincidentes.

6 Dadas las rectas $r: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-k}{1}$ y $s: \left.\begin{matrix} x-y+z=3 \\ 3x+z=1 \end{matrix}\right\}$:

a) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.

b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

(Madrid. Septiembre 2003. Opción A. Ejercicio 2)

a) $r: \left.\begin{matrix} x-1=-y-1 \\ x-1=-z+k \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{matrix} x+y=0 \\ x+z=k+1 \end{matrix}\right\}$

Las rectas son coplanarias si no se cruzan, es decir, si la matriz ampliada no tiene rango 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & k+1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow k-4=0 \rightarrow k=4$$

Si $k=4$, las rectas están contenidas en el mismo plano.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Si $k=4$, las rectas se cortan en un punto.

Calculamos el punto de intersección entre r y s.

$$\left.\begin{matrix} x+y=0 \\ x+z=5 \\ x-y+z=3 \\ 3x+z=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x=-2 \\ y=-2 \\ z=7 \end{matrix}\right.$$

El punto de intersección entre r y s es $P(-2, 2, 7)$.

Determinamos un vector director de s.

$$s: \left.\begin{matrix} x-y+z=3 \\ 3x+z=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{matrix} x=t \\ y=-2-2t \\ z=1-3t \end{matrix}\right\} \qquad \vec{v} = (1, -2, -3)$$

El plano que buscamos pasa por $P(-2, 2, 7) \in r \cap s$ y tiene como vectores directores los vectores directores de r y s.

$$\pi: \begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -x-2y+z-5=0 \rightarrow \pi: x+2y-z+5=0$$

7 Sea r la recta definida por $\frac{x-2}{3}=\frac{y-k}{4}=\frac{z}{5}$ y s la recta definida por $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{3}$.

a) Halla k sabiendo que las rectas r y s se cortan en un punto.

b) Determina la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

(Andalucía. Año 2007. Modelo 3. Opción A. Ejercicio 4)

a) $r: \begin{cases} P(2, k, 0) \\ \vec{u}=(3, 4, 5) \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} Q(-2, 1, 3) \\ \vec{u}=(-1, 2, 3) \end{cases}$ $\quad \overrightarrow{PQ}=(-4, 1-k, 3)$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=10\neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=2$$

Las rectas se cortan si $\text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1-k & 3 \end{pmatrix}=2.$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1-k & 3 \end{vmatrix}=8+14k=0 \rightarrow k=-\frac{4}{7}$$

b) El plano que buscamos pasa por $Q(-2, 1, 3)\in s$ y tiene como vectores directores los vectores directores de r y s.

$$\pi: \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-3 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=2x-14y+10z-12=0 \rightarrow \pi: x-7y+5z-6=0$$

8 Calcula el valor de a para que la recta $r: \left.\begin{array}{r} 5x-y+z=0 \\ x-y-z=-4 \end{array}\right\}$ sea paralela al plano $\pi: ax-6y+4z=5$.

(La Rioja. Junio 2002. Propuesta B. Ejercicio 2)

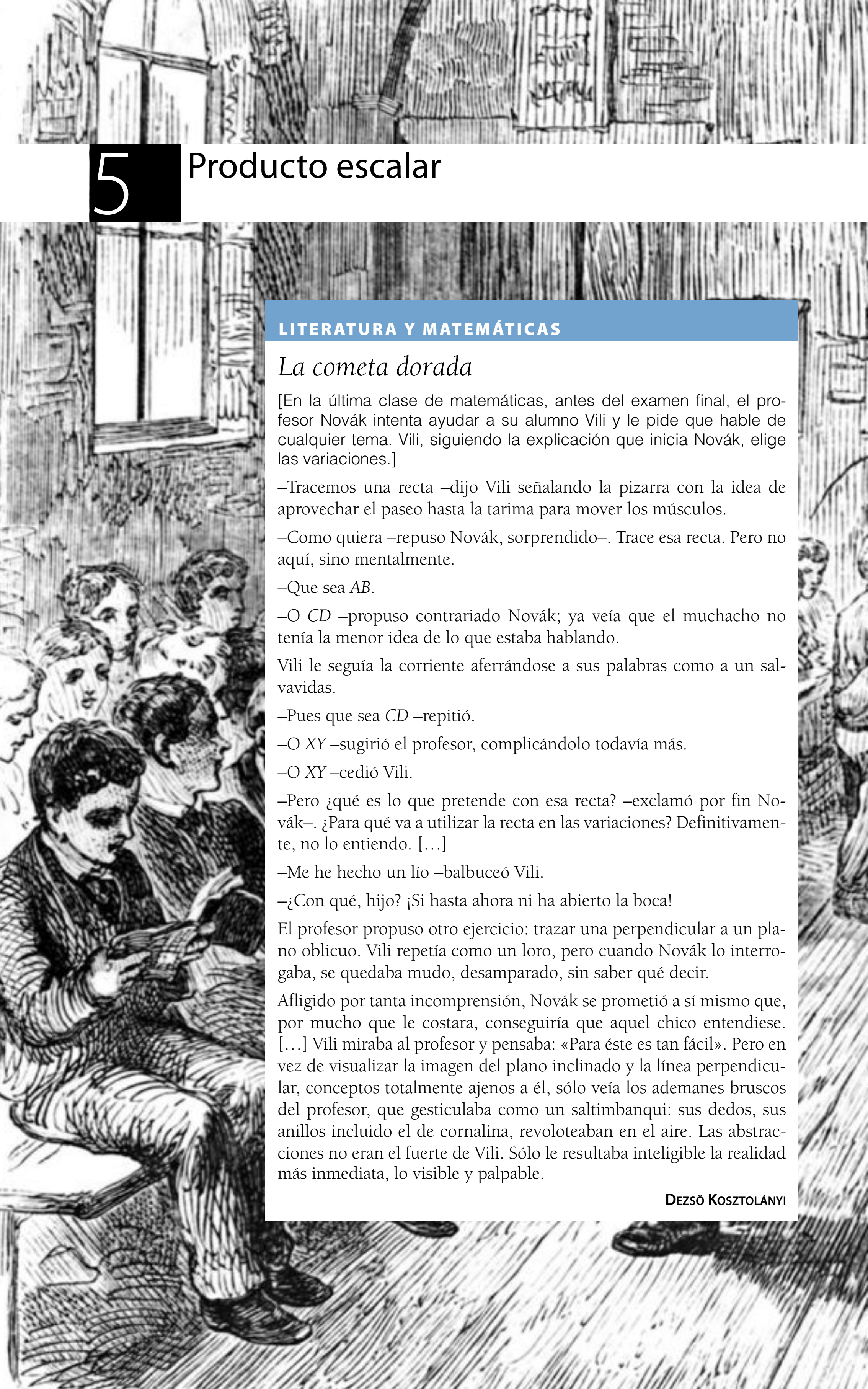
Para que la recta y el plano sean paralelos, el rango de la matriz de coeficientes debe ser 2, y el de la matriz ampliada, 3.

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-4\neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ a & -6 & 4 \end{vmatrix}=2a-52 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \\ -6 & 4 & 5 \end{vmatrix}=18\neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 3 para cualquier valor de a. El rango de la matriz de coeficientes es 2 si se cumple:

$$2a-52=0 \rightarrow a=26$$



5 Producto escalar

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

La cometa dorada

[En la última clase de matemáticas, antes del examen final, el profesor Novák intenta ayudar a su alumno Vili y le pide que hable de cualquier tema. Vili, siguiendo la explicación que inicia Novák, elige las variaciones.]

–Tracemos una recta –dijo Vili señalando la pizarra con la idea de aprovechar el paseo hasta la tarima para mover los músculos.

–Como quiera –repuso Novák, sorprendido–. Trace esa recta. Pero no aquí, sino mentalmente.

–Que sea *AB*.

–O *CD* –propuso contrariado Novák; ya veía que el muchacho no tenía la menor idea de lo que estaba hablando.

Vili le seguía la corriente aferrándose a sus palabras como a un salvavidas.

–Pues que sea *CD* –repitió.

–O *XY* –sugirió el profesor, complicándolo todavía más.

–O *XY* –cedió Vili.

–Pero ¿qué es lo que pretende con esa recta? –exclamó por fin Novák–. ¿Para qué va a utilizar la recta en las variaciones? Definitivamente, no lo entiendo. […]

–Me he hecho un lío –balbuceó Vili.

–¿Con qué, hijo? ¡Si hasta ahora ni ha abierto la boca!

El profesor propuso otro ejercicio: trazar una perpendicular a un plano oblicuo. Vili repetía como un loro, pero cuando Novák lo interrogaba, se quedaba mudo, desamparado, sin saber qué decir.

Afligido por tanta incomprensión, Novák se prometió a sí mismo que, por mucho que le costara, conseguiría que aquel chico entendiese. […] Vili miraba al profesor y pensaba: «Para éste es tan fácil». Pero en vez de visualizar la imagen del plano inclinado y la línea perpendicular, conceptos totalmente ajenos a él, sólo veía los ademanes bruscos del profesor, que gesticulaba como un saltimbanqui: sus dedos, sus anillos incluido el de cornalina, revoloteaban en el aire. Las abstracciones no eran el fuerte de Vili. Sólo le resultaba inteligible la realidad más inmediata, lo visible y palpable.

DEZSÖ KOSZTOLÁNYI

La cometa dorada
Dezsö Kosztolányi

Uno de los protagonistas de esta novela, que se desarrolla en una ciudad de Hungría, es un joven llamado Vili al que no le gustan ni las matemáticas ni la física. Una tarde abre en su habitación el libro de física y observa durante un rato esta fórmula:

$$g = S\sqrt{1 + \frac{4\pi rR}{T^2 g}\cos^2\varphi - 2\frac{4\pi R}{r^2 g}\cos^2\varphi}$$

Se le fueron las ganas de vivir. «¿Qué sentido tiene esto? –se preguntó confuso–. ¿Quién inventa estas cosas para amargarle la vida a los alumnos?» Sintió rabia. Se le hizo un nudo en la garganta. Los estúpidos números se arrastraban frente a él como gusanos, mientras que las letras lo hacían como larvas.

Mientras esperaba al profesor particular, trató de resolver algunos problemas de matemáticas:

Podía pasar horas leyéndolos, pero en vano: «Un señor compró cinco metros de paño...», «Ocho años atrás un padre era cien veces más viejo que su hijo; ocho años más tarde sólo le faltaban cuatro años para ser tres veces mayor que el mismo hijo...», «Un hombre rico que contrata a dos jornaleros...» Fijándose sólo en lo anecdótico y sin preocuparse de lo que había que resolver, fantaseaba divertidas situaciones con los personajes de los problemas. Se dejaba envolver como en un lento sueño, imaginándose los pormenores: el color del paño, quiénes eran el padre y su hijo, si ese señor tendría barba, si sabría el chaval montar en bicicleta y dónde viviría el rico... Pero, cuando llegaba el momento inevitable de vérselas con los números, desbaratado su juego, se justificaba argumentando: «Pero, vamos a ver, ¿quién necesita ese paño? Yo, seguro que no. Está más que claro que el padre, el hijo y el rico, todos, son unos burros y no sirven para nada».

En la escena que se narra en el texto, el profesor de matemáticas y física, Antal Novák, preocupado porque Vili no ha aprendido nada de lo que ha explicado durante el curso, trata, sin éxito, de enseñarle *algo* antes del examen final.

Determina la ecuación de la recta perpendicular al plano *horizontal* $z = 1$ que pasa por el punto $(-1, 3, 2)$. Como ves, este problema es sencillo. Pero ¿cómo se haría si fuese el plano *inclinado* $2x - y + z = 1$?

Una recta perpendicular al plano horizontal $z = 1$ tiene por vector director $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Punto:} & P(-1, 3, 2) \\ \text{Vector director:} & \vec{n} = (0, 0, 1) \end{array}\right\} \rightarrow r\colon \left.\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 2 + \lambda \end{array}\right\}$$

Si el plano es $2x - y + z = 1$, un vector perpendicular a él es $\vec{n} = (2, -1, 1)$. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Punto:} & P(-1, 3, 2) \\ \text{Vector director:} & \vec{n} = (2, -1, 1) \end{array}\right\} \rightarrow s\colon \left.\begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{array}\right\}$$

Producto escalar

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Si $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (0, 2, -4)$ y $\vec{w} = (-7, 0, 7)$, halla los vectores.

a) $\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$

b) $-\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$

c) $\frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{w}$

a) $\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = (1, -1, 2) - 3(0, 2, -4) + (-7, 0, 7) = (-6, -7, 21)$

b) $-\vec{v} + \frac{1}{3} \cdot \vec{w} = (0, -2, 4) + \left(\frac{-7}{3}, 0, \frac{7}{3}\right) = \left(\frac{-7}{3}, -2, \frac{19}{3}\right)$

c) $\frac{2}{3} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3} \cdot \vec{w} = \frac{2}{3} \cdot (1, -3, 6) + \left(\frac{-7}{3}, 0, \frac{7}{3}\right) = \left(-\frac{5}{3}, -2, \frac{19}{3}\right)$

002 Calcula el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$, siendo los puntos:

a) $A(1, 1, 1)$ y $B(-1, -1, -1)$

b) $A(-1, 1, -1)$ y $B(1, -1, 1)$

a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

b) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

003 Halla un punto C en el segmento AB, con $A(1, 1, 1)$ y $B(-1, -1, -1)$, de modo que $\overline{AC}$ sea la mitad que $\overline{CB}$.

Llamamos $C(c_1, c_2, c_3)$ al punto que nos piden.

$\overrightarrow{AC} = (c_1 - 1, c_2 - 1, c_3 - 1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{CB} = (-1 - c_1, -1 - c_2, -1 - c_3)$

Como $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CB} \rightarrow (c_1 - 1, c_2 - 1, c_3 - 1) = \left(\frac{-1 - c_1}{2}, \frac{-1 - c_2}{2}, \frac{-1 - c_3}{2}\right)$

Igualando coordenadas:

$$c_1 - 1 = \frac{-1 - c_1}{2} \rightarrow c_1 = \frac{1}{3}$$

$$c_2 - 1 = \frac{-1 - c_2}{2} \rightarrow c_2 = \frac{1}{3}$$

$$c_3 - 1 = \frac{-1 - c_3}{2} \rightarrow c_3 = \frac{1}{3}$$

El punto es $C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

ACTIVIDADES

001 Calcula el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$, sabiendo que $\vec{u}=(-1, 1, 0)$, $|\vec{v}|=2$ y el ángulo que forman es $\alpha = 30°$.

$$|\vec{u}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}\rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \cos\alpha=\sqrt{2}\cdot 2\cdot\cos 30°=\sqrt{6}$$

002 Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son tales que $\vec{u}=(-1, 1, 0)$, $|\vec{v}|=2$ y $\alpha=30°$, halla:

a) $Proy_{\vec{u}}\,\vec{v}$

b) $Proy_{\vec{v}}\,\vec{u}$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=|\vec{u}|\cdot Proy_{\vec{u}}\vec{v}$

Como $|\vec{u}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{6}$:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot Proy_{\vec{u}}\vec{v}\rightarrow\sqrt{6}=\sqrt{2}\cdot Proy_{\vec{u}}\vec{v}\rightarrow Proy_{\vec{u}}\vec{v}=\sqrt{3}$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|\cdot Proy_{\vec{v}}\vec{u}\rightarrow\sqrt{6}=2\cdot Proy_{\vec{v}}\vec{u}\rightarrow Proy_{\vec{v}}\vec{u}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

003 Si $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$, $\vec{u}\cdot\vec{w}=-1$ y $\vec{v}\cdot\vec{w}=2$, calcula estas operaciones.

a) $\vec{u}\cdot(\vec{w}-\vec{v})$

b) $-\vec{w}\cdot(2\vec{u}+\vec{v})$

c) $3\vec{w}\cdot(-2\vec{u}+\vec{v})$

d) $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(-\vec{w})$

a) $\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+(-1)\cdot(\vec{u}\cdot\vec{w})=2+(-1)\cdot(-1)=3$

b) $-\vec{w}\cdot(2\vec{u}+\vec{v})=(-2)\cdot(\vec{w}\cdot\vec{u})+(-1)\cdot(\vec{w}\cdot\vec{v})=-2\cdot(-1)+(-1)\cdot 2=0$

c) $3\vec{w}\cdot(-2\vec{u}+\vec{v})=(-6)\cdot(\vec{w}\cdot\vec{u})+3\cdot(\vec{w}\cdot\vec{v})=(-6)(-1)+3\cdot 2=12$

d) $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(-\vec{w})=(-2)\cdot(\vec{u}\cdot\vec{w})+(-1)\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})=-2\cdot(-1)+(-1)\cdot 2=0$

004 Dados los vectores $\vec{u}=(0, -1, 0)$, $\vec{v}=(-1, -2, 0)$ y $\vec{w}=(-4, 1, 1)$, efectúa las operaciones.

a) $\vec{u}\cdot(\vec{w}-\vec{v})$

b) $-\vec{w}\cdot(2\vec{u}+\vec{v})$

c) $3\vec{w}\cdot(-2\vec{u}+\vec{v})$

d) $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(-\vec{w})$

a) $\vec{u}\cdot(\vec{w}-\vec{v})=(0,-1,0)\cdot(-3,3,1)=-3$

b) $-\vec{w}\cdot(2\vec{u}+\vec{v})=(4,-1,-1)\cdot(-1,-4,0)=0$

c) $3\vec{w}\cdot(-2\vec{u}+\vec{v})=(-12,3,3)\cdot(-1,0,0)=12$

d) $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(-\vec{w})=(-1,-4,0)\cdot(4,-1,-1)=0$

005 Halla el ángulo que forman estos vectores.

a) $\vec{u}=(-2, 3, 0)$ $\quad\vec{v}=(0, 1, -1)$

b) $\vec{u}=(3, 1, 2)$ $\quad\vec{v}=(0, -1, -1)$

a) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{(-2)\cdot 0+3\cdot 1+0\cdot(-1)}{\sqrt{(-2)^2+3^2+0^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{26}}$

$\alpha=arc\ \cos\dfrac{3}{\sqrt{26}}=53{,}96°$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{3\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 2\cdot(-1)}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{0^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \dfrac{-3}{\sqrt{28}}$

$\alpha = \arccos\dfrac{-3}{\sqrt{28}} = 124{,}54°$

006 **Discute, ayudándote de un ejemplo, cuándo el ángulo que forman dos vectores es igual al ángulo que forman otros dos vectores paralelos a ellos. ¿Pueden ser diferentes los ángulos?**

Consideramos los vectores $\vec{u} = (1, 2, -1)$ y $\vec{v} = (2, -1, 0)$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \rightarrow \cos\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90°$

Dos vectores paralelos a los anteriores son, por ejemplo, $\vec{u_1} = (2, 4, -2)$ y $\vec{v_1} = (4, -2, 0)$.

$\vec{u_1}\cdot\vec{v_1} = 0 \rightarrow \cos\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90°$

El ángulo que forman dos vectores es siempre igual al ángulo que forman otros dos vectores paralelos a ellos.

007 **Calcula los vectores perpendiculares a estos.**

a) $\vec{u} = (1, 0, 0)$ **b)** $\vec{v} = (1, 1, 0)$ **c)** $\vec{w} = (1, 1, 1)$

a) Tomamos $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

$\vec{u} = (1, 0, 0) \perp \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \rightarrow 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 = 0$
$\rightarrow v_1 = 0, v_2 = \lambda, v_3 = \mu$

$(v_1, v_2, v_3) = (0, \lambda, \mu) = (0, \lambda, 0) + (0, 0, \mu) = \lambda(0, 1, 0) + \mu(0, 0, 1)$

Los vectores (0, 1, 0) y (0, 0, 1) forman una base de los vectores perpendiculares a $\vec{u}$.

Todo vector perpendicular a $\vec{u}$ es combinación lineal de ellos.

b) Tomemos $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

$\vec{v} = (1, 1, 0) \perp \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \rightarrow 1\cdot u_1 + 1\cdot u_2 + 0\cdot u_3 = 0$
$\rightarrow u_1 = -u_2 \rightarrow u_1 = \lambda, u_2 = -\lambda, u_3 = \mu$

$(u_1, u_2, u_3) = (\lambda, -\lambda, \mu) = \lambda(1, -1, 0) + \mu(0, 0, 1)$

Los vectores (1, −1, 0) y (0, 0, 1) forman una base de los vectores perpendiculares a $\vec{v}$.

Todo vector perpendicular a $\vec{v}$ es combinación lineal de ellos.

c) Tomamos $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$.

$\vec{w} = (1, 1, 1) \perp \vec{z} = (z_1, z_2, z_3) \rightarrow 1\cdot z_1 + 1\cdot z_2 + 1\cdot z_3 = 0$
$\rightarrow z_1 = -z_2 - z_3 \rightarrow z_1 = -\lambda - \mu, z_2 = \lambda, z_3 = \mu$

$(z_1, z_2, z_3) = (-\lambda - \mu, \lambda, \mu) = \lambda(-1, 1, 0) + \mu(-1, 0, 1)$

Los vectores (−1, 1, 0) y (−1, 0, 1) forman una base de los vectores perpendiculares a $\vec{w}$.

Todo vector perpendicular a $\vec{w}$ es combinación lineal de ellos.

008 **Encuentra el vector normal al plano:**

$$\pi: 3x - 2y = z + 1$$

Llamamos $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ a un vector genérico normal al plano π.

Tomamos $P(0, 0, -1)$, $Q(1, 1, 0)$ y $R(2, 0, 5)$ puntos pertenecientes al plano.

Buscamos el vector $\vec{n}$ que cumpla:

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = (n_1, n_2, n_3) \cdot (1, 1, 1) = n_1 + n_2 + n_3 = 0$
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{PR} = (n_1, n_2, n_3) \cdot (2, 0, 6) = 2n_1 + 6n_3 = 0$

Resolvemos el sistema: $\left.\begin{array}{r} n_1 + n_2 + n_3 = 0 \\ 2n_1 + 6n_3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} n_1 = -3\lambda \\ n_2 = 2\lambda \\ n_3 = \lambda \end{array}\right. \rightarrow \vec{n} = (-3\lambda, 2\lambda, \lambda)$

Un vector normal al plano π será, por ejemplo, cuando $\lambda = -1 \rightarrow \vec{n} = (3, -2, -1)$.

009 **Encuentra los planos que pasan por el punto $P(2, 1, 2)$ y son perpendiculares a las rectas.**

a) $r: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{3}$

b) $s: \left.\begin{array}{r} x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{array}\right\}$

a) Un vector director de la recta es $\vec{u} = (2, 2, 3)$.

La ecuación del plano es de la forma: $2x + 2y + 3z + D = 0$

Por pasar por $P(2, 1, 2) \rightarrow 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + D = 0 \rightarrow D = -12$

El plano es $\pi: 2x + 2y + 3z - 12 = 0$.

b) Escribimos la recta en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2\lambda \\ y = \dfrac{-1+\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

$$r: \left.\begin{array}{l} x = -2\lambda \\ y = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \text{Un vector director es } \vec{u} = \left(-2, \frac{1}{2}, 1\right).$$

Tomamos como vector director de la recta un vector proporcional a $\vec{u} \rightarrow \vec{v} = (-4, 1, 2)$.

La ecuación del plano es de la forma: $-4x + y + 2z + D = 0$

Por pasar por $P(2, 1, 2) \rightarrow -4 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 2 + D = 0 \rightarrow D = 3$

El plano es $\pi: -4x - 1y + 2z + 3 = 0$.

010 **Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano:**

$$\pi: \left.\begin{array}{l} x = 3 - 3\lambda + 2\mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = 2 \end{array}\right\}$$

¿Cuál es su punto de corte?

Escribimos la ecuación del plano en forma implícita:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y & z-2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -z + 2 = 0 \rightarrow \pi: z - 2 = 0$$

Un vector normal al plano es $\vec{n} = (0, 0, 1)$.

La recta que buscamos es el eje Z.

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{ y el punto de corte de la recta y el plano es } P(0, 0, 2).$$

011 **Halla el haz de planos secantes y el haz de planos perpendiculares a la recta:**

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-1}$$

Hallamos la ecuación de la recta en forma implícita:

$$r: \left.\begin{array}{r} x - 1 = -y - 1 \\ y + 1 = z \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

El haz de planos secantes es:

$$(x + y) + \lambda \cdot (y - z + 1) = 0$$

El haz de planos perpendiculares es:

$$x - y - z + D = 0$$

012 **Calcula la ecuación de la recta cuyo haz de planos perpendiculares es $x - y + z + D = 0$, sabiendo que pasa por el punto $P(0, 0, 0)$. ¿Cuál es su haz de planos secantes?**

El vector director de la recta es $\vec{v} = (1, -1, 1)$, y por pasar por el punto $P(0, 0, 0) \rightarrow r: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$

Calculamos el haz de planos secantes:

$$\left.\begin{array}{l} x = -y \\ y = -z \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow (x + y) + \lambda(y + z) = 0$$

013 **Halla el ángulo que forman la recta r, que pasa por los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(0, 0, 0)$, y la recta s: $(x, y, z) = (-1, 2, 3) + \lambda(1, 2, -3)$.**

El vector $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -1)$ es un vector director de la recta r, y el vector director de la recta s es $\vec{u} = (1, 2, -3)$.

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{u}) = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|} = \frac{\left|(-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + (-1)(-3)\right|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} =$$

$$= \frac{0}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}} \rightarrow \alpha = arc\cos 0 = 90°$$

014 **Calcula el ángulo que forman la recta $r: (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, -1)$ y el plano de ecuación $\pi: x + y - 3z + 2 = 0$.**

La recta tiene por vector director $\vec{u} = (1, 0, -1)$, y el vector normal del plano es $\vec{n} = (1, 1, -3)$.

$$\cos(\vec{u}, \vec{n}) = \frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|1\cdot 1 + 0\cdot 1 + (-1)(-3)\right|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{11}} = \frac{4}{\sqrt{22}}$$

$$\alpha = 90° - arc\cos\frac{4}{\sqrt{22}} = 90° - 31{,}48° = 58{,}52°$$

015 **Calcula el ángulo que forman las siguientes parejas de planos.**

a) $\pi: 3x - 2y + z - 3 = 0$ $\quad\pi': x - y - 25 = 0$

b) $\pi: x + y + z = 0$ $\quad\pi': x + 2y + 3z - 2 = 0$

c) $\pi: 2y + 2z - 3 = 0$ $\quad\pi': -y - z + 2 = 0$

a) El vector normal del plano π es $\vec{n}_1 = (3, -2, 1)$, y el vector normal del plano π' es $\vec{n}_2 = (1, -1, 0)$.

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|} = \frac{\left|3\cdot 1 + (-2)(-1) + 1\cdot 0\right|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{28}}$$

$$\alpha = arc\cos\frac{5}{\sqrt{28}} = 19{,}07°$$

b) El vector normal del plano π es $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$, y el vector normal del plano π' es $\vec{n}_2 = (1, 2, 3)$.

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|} = \frac{\left|1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{6}{\sqrt{42}}$$

$$\alpha = arc\cos\frac{6}{\sqrt{42}} = 22{,}21°$$

c) El vector normal del plano π es $\vec{n}_1 = (0, 2, 2)$, y el vector normal al plano π' es $\vec{n}_2 = (0, -1, -1)$.

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|} = \frac{\left|0\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 2\cdot(-1)\right|}{\sqrt{2^2+2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\alpha = arc\cos 1 = 0°$$

Los planos son paralelos.

016 **Halla el ángulo que forman los siguientes planos:**

$$\pi: \left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda + \mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda + \mu \end{array}\right\}$$

$$\pi': (x, y, z) = (-1, -1, 2) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(1, 0, -1)$$

Calculamos la ecuación implícita del plano π.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2y - 2z = 0 \rightarrow \text{Vector normal } \vec{n_1} = (0, 2, 2)$$

Calculamos la ecuación implícita del plano π'.

$$\pi': \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -x + 2y - z + 3 = 0 \rightarrow \text{Vector normal } \vec{n_2} = (-1, 2, -1)$$

Calculamos el ángulo que forman los dos planos.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \frac{|0 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)|}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{48}}$$

$$\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{48}} = 73{,}22°$$

017 **Encuentra la proyección de los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(-1, 1, 1)$ y $C(0, 2, 0)$ sobre la recta r.**

a) $r: \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$

b) $r: \left.\begin{array}{r} x + 2z = 3 \\ y - z = 0 \end{array}\right\}$

a) • Proyección del punto A.

$$\frac{0-3}{3} = \frac{0-2}{2} = \frac{0-1}{1} \rightarrow A \text{ pertenece a } r.$$

La proyección ortogonal de A sobre r es A.

• Proyección del punto B.

Calculamos la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto B.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector normal: } & \vec{n} = (3, 2, 1) \\ \text{Punto: } & B(-1, 1, 1) \end{array}\right\} \rightarrow 3(x+1) + 2(y-1) + 1(z-1) = 0$$

$$\rightarrow \pi: 3x + 2y + z = 0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{1} \\ 3x + 2y + z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

La proyección ortogonal de B sobre r es $Q(0, 0, 0)$.

- Proyección del punto C.

  Calculamos el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto C.

  $$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal:} & \vec{n} = (3, 2, 1) \\ \text{Punto:} & C(0, 2, 0)\end{array}\right\} \rightarrow 3(x-0)+2(y-2)+1(z-0)=0$$
  $$\rightarrow \pi\colon 3x+2y+z-4=0$$

  Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

  $$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{1} \\ 3x+2y+z-4=0\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{6}{7} \\ y = \dfrac{4}{7} \\ z = \dfrac{2}{7}\end{array}\right.$$

  La proyección del punto C sobre r es $Q\left(\dfrac{6}{7}, \dfrac{4}{7}, \dfrac{2}{7}\right)$.

b) - Proyección del punto A.

  La ecuación en forma continua de la recta r es:

  $$\frac{x-3}{2} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-0}{-1}$$

  Calculamos la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

  $$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal:} & \vec{n} = (2, -1, -1) \\ \text{Punto:} & A(0, 0, 0)\end{array}\right\} \rightarrow 2(x-0)+(-1)(y-0)+(-1)(z-0)=0$$
  $$\rightarrow \pi\colon 2x-y-z=0$$

  Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

  $$\left.\begin{array}{r} x+2z=3 \\ y-2z=0 \\ 2x-y-z=0\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{7} \\ y = \dfrac{12}{7} \\ z = \dfrac{6}{7}\end{array}\right.$$

  La proyección de A sobre la recta r es $Q\left(\dfrac{9}{7}, \dfrac{12}{7}, \dfrac{6}{7}\right)$.

- Proyección del punto B.

  Calculamos la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto B.

  $$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal:} & \vec{n} = (2, -1, -1) \\ \text{Punto:} & B(-1, 1, 1)\end{array}\right\} \rightarrow 2(x+1)+(-1)(y-1)+(-1)(z-1)=0$$
  $$\rightarrow \pi\colon 2x-y-z+4=0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2z = 3 \\ y - 2z = 0 \\ 2x - y - z + 4 = 0 \end{array}\right\} \to \begin{cases} x = \dfrac{1}{7} \\ y = \dfrac{20}{7} \\ z = \dfrac{10}{7} \end{cases}$$

La proyección de B sobre la recta r es $Q\left(\dfrac{1}{7}, \dfrac{20}{7}, \dfrac{10}{7}\right)$.

- Proyección del punto C.

  Calculamos la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto C.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector normal:} & \vec{n} = (2, -1, -1) \\ \text{Punto:} & C(0, 2, 0) \end{array}\right\} \to 2(x - 0) + (-1)(y - 2) + (-1)(z - 0) = 0$$
$$\to \pi\colon 2x - y - z + 2 = 0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2z = 3 \\ y - 2z = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{array}\right\} \to \begin{cases} x = \dfrac{5}{7} \\ y = \dfrac{16}{7} \\ z = \dfrac{8}{7} \end{cases}$$

La proyección de C sobre la recta r es el punto $Q\left(\dfrac{5}{7}, \dfrac{16}{7}, \dfrac{8}{7}\right)$.

018 **Calcula la proyección de los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(-1, 1, 1)$ y $C(0, 2, 0)$ sobre el plano π, determinado por las rectas:**

$$r\colon \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1} \qquad s\colon \left.\begin{array}{r} x + 2z = 3 \\ y - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Hallamos el plano π determinado por las rectas r y s:

$$r\colon \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1} \qquad s\colon \left.\begin{array}{r} x + 2z = 3 \\ y - 2z = 0 \end{array}\right\} \to r\colon \left.\begin{array}{l} x = 3 - 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5y + 10z = 0 \to \pi\colon y - 2z = 0$$

Su vector normal es $\vec{n} = (0, 1, -2)$.

- Proyección del punto A.

  El punto A pertenece a la recta r, por tanto, la proyección de A sobre el plano π es A.

- Proyección del punto B.

  Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto B.

  $$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal:} & \vec{n} = (0, 1, -2)\\ \text{Punto:} & B(-1, 1, 1)\end{array}\right\} \to r: \frac{x+1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2} \to r: \left.\begin{array}{r} x = -1\\ 2y + z = 3\end{array}\right\}$$

  Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

  $$\left.\begin{array}{r} x = -1\\ 2y + z = 3\\ y - 2z = 0\end{array}\right\} \to \begin{cases} x = -1\\ y = \dfrac{6}{5}\\ z = \dfrac{3}{5}\end{cases}$$

  La proyección del punto B sobre el plano π es $Q\left(-1, \frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

- Proyección del punto C.

  Calculamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto C.

  $$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal:} & \vec{n} = (0, 1, -2)\\ \text{Punto:} & C(0, 2, 0)\end{array}\right\} \to r: \frac{x-0}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{-2} \to r: \left.\begin{array}{r} x = 0\\ 2y + z = 4\end{array}\right\}$$

  Calculamos el punto de corte de esta recta y el plano π.

  $$\left.\begin{array}{r} x = 0\\ 2y + z = 4\\ y - 2z = 0\end{array}\right\} \to \begin{cases} x = 0\\ y = \dfrac{8}{5}\\ z = \dfrac{4}{5}\end{cases}$$

  La proyección de C sobre sobre el plano π es $Q\left(0, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

019 **Calcula la proyección ortogonal de la recta:**

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

sobre el plano:

$$\pi: \left.\begin{array}{l} x = \lambda - \mu\\ y = 2 - \lambda + 3\mu\\ z = 3 + 2\lambda - 2\mu\end{array}\right\}$$

Hallamos la ecuación del plano π en forma implícita.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-3\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & -2\end{vmatrix} = -4x + 2z - 6 = 0 \to \pi: 2x - z + 3 = 0$$

Vector director de la recta r: $\vec{u} = (1, 1, -1)$

Vector normal del plano π: $\vec{n} = (2, 0, -1)$

Punto de r: $P(2, 2, 2)$

Calculamos el plano π' que pasa por P y tiene por vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{n}$.

$$\pi': \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -x-y-2z+8=0 \rightarrow \pi': x+y+2z-8=0$$

Calculamos la recta s de intersección entre los planos π y π'.

$$s: \left.\begin{array}{r} 2x-z+3=0 \\ x+y+2z-8=0 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\lambda \\ y=\dfrac{19}{2}-\dfrac{5}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}$$

La proyección de la recta r sobre el plano π es $s: \left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\lambda \\ y=\dfrac{19}{2}-\dfrac{5}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}$

020 **Halla el punto donde se cortan las proyecciones de las rectas:**

$$r: \left.\begin{array}{r} x+2y-2=0 \\ x-y+1=0 \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x=-8+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-1+\lambda \end{array}\right\}$$

sobre el plano: $\pi: x-y+z+2=0$

Calculamos la recta r' proyección de la recta r sobre el plano π.

$$r: \left.\begin{array}{r} x+2y-2=0 \\ x-y+1=0 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_r=(0,0,1) \qquad P_r(0,1,0)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector director de } r: & \vec{v}_r=(0,0,1) \\ \text{Vector normal a } \pi: & \vec{n}_\pi=(1,-1,1) \\ \text{Punto de } r: & P_r(0,1,0) \end{array}\right\} \rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x+y-1=0$$

Por tanto, la proyección de r sobre π es:

$$r': \left.\begin{array}{r} x-y+z+2=0 \\ x+y-1=0 \end{array}\right\}$$

Hallamos la recta s' proyección de la recta s sobre el plano π.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector director de } s: & \vec{v}_s=(1,1,1) \\ \text{Vector normal a } \pi: & \vec{n}_\pi=(1,-1,1) \\ \text{Punto de } s: & P_s(-8,1,1) \end{array}\right\}$$

$$\pi'': \begin{vmatrix} x+8 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2x-2z+18=0 \rightarrow \pi'': x-z+9=0$$

Por tanto, la proyección de s sobre π es:

$$s': \left.\begin{array}{r} x-y+z+2=0 \\ x\quad -z+9=0 \end{array}\right\}$$

El punto de corte de r' y s' es:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z+2=0 \\ x+y-1=0 \\ x-y+z+2=0 \\ x-z+9=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{10}{3} \\ y=\dfrac{13}{3} \\ z=\dfrac{17}{3} \end{array}\right.$$

Las proyecciones de r y s sobre el plano π se cortan en $Q\left(-\dfrac{10}{3}, \dfrac{13}{3}, \dfrac{17}{3}\right)$.

021 **Obtén el simétrico de $P(0, 0, 1)$ respecto de $Q(1, -2, 1)$.**

El punto Q es el punto medio del segmento PP', siendo $P'(a, b, c)$.

$$(1, -2, -1) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{1+c}{2}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=-4 \\ c=-3 \end{array}\right. \rightarrow \text{El punto simétrico es } P'(2, -4, -3).$$

022 **Halla el simétrico del punto $P(-1, 2, 3)$ respecto de la recta $r: \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{2}$.**

Calculamos la proyección ortogonal Q del punto P sobre r.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector normal:} & \vec{n} = (3, -2, 2) \\ \text{Punto:} & P(-1, 2, 3) \end{array}\right\}$$

$\pi: 3(x+1) - 2(y-2) + 2(z-3) = 0 \rightarrow \pi: 3x - 2y + 2z + 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{2} \\ 3x-2y+2z+1=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=3 \\ 2x-3z=6 \\ 3x-2y+2z+1=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{15}{17} \\ y=\dfrac{7}{17} \\ z=\dfrac{-24}{17} \end{array}\right.$$

La proyección ortogonal de P sobre r es $Q\left(\dfrac{15}{17}, \dfrac{7}{17}, -\dfrac{24}{17}\right)$.

Hallamos el punto simétrico P' respecto de la proyección Q.

$$\left(\frac{15}{17}, \frac{7}{17}, -\frac{24}{17}\right) = \left(\frac{-1+a}{2}, \frac{2+b}{2}, \frac{3+c}{2}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{47}{17} \\ b=-\dfrac{20}{17} \\ c=-\dfrac{99}{17} \end{array}\right.$$

El punto simétrico de P respecto de r es $P'\left(\dfrac{47}{17}, -\dfrac{20}{17}, -\dfrac{99}{17}\right)$.

023 **Calcula los vértices del triángulo simétrico al formado por los puntos $A(0, -1, 2)$, $B(-1, 2, 0)$ y $C(2, 0, -1)$.**

a) Respecto del origen de coordenadas.

b) Respecto de la recta $r: (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 1, 1)$.

a) Calculamos el simétrico del punto A respecto de $O(0, 0, 0)$.

$$(0,0,0) = \left(\frac{a'_1 + 0}{2}, \frac{a'_2 - 1}{2}, \frac{a'_3 + 2}{2}\right) \to \begin{cases} a'_1 = 0 \\ a'_2 = 1 \\ a'_3 = -2 \end{cases} \to A'(0, 1, -2)$$

Hallamos el simétrico del punto B respecto de $O(0, 0, 0)$.

$$(0,0,0) = \left(\frac{b'_1 - 1}{2}, \frac{b'_2 + 2}{2}, \frac{b'_3 + 0}{2}\right) \to \begin{cases} b'_1 = 1 \\ b'_2 = -2 \\ b'_3 = 0 \end{cases} \to B'(1, -2, 0)$$

Calculamos el simétrico del punto C respecto de $O(0, 0, 0)$.

$$(0,0,0) = \left(\frac{c'_1 + 2}{2}, \frac{c'_2 + 0}{2}, \frac{c'_3 - 1}{2}\right) \to \begin{cases} c'_1 = -2 \\ c'_2 = 0 \\ c'_3 = 1 \end{cases} \to C'(-2, 0, 1)$$

El triángulo simétrico respecto al origen tendrá por vértices A', B' y C'.

b) Escribimos la recta en forma continua.

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$$

- Punto simétrico de A respecto a r.

  Calculamos la proyección ortogonal Q_A del punto A sobre r.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector normal:} & \vec{n} = (1, 1, 1) \\ \text{Punto:} & A(0, -1, 2) \end{array}\right\} \to \pi: x + y + z - 1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1} \\ x + y + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x = y \\ x = z \\ x + y + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \to \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases} \to Q_A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Hallamos el punto simétrico $A'(a'_1, a'_2, a'_3)$ respecto de la proyección Q_A.

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{0 + a'_1}{2}, \frac{-1 + a'_2}{2}, \frac{2 + a'_3}{2}\right) \to \begin{cases} a'_1 = \dfrac{2}{3} \\ a'_2 = \dfrac{5}{3} \\ a'_3 = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

El punto simétrico de A respecto de r es $A'\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

- Punto simétrico de B respecto de r.

  Calculamos la proyección ortogonal Q_B del punto B sobre r.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal:} & \vec{n}=(1,1,1)\\ \text{Punto:} & B(-1,2,0)\end{array}\right\}\to \pi\colon x+y+z+1=0$$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}\\ x+y+z+1=0\end{array}\right\}\to \left.\begin{array}{r}x=y\\ x=z\\ x+y+z+1=0\end{array}\right\}\to \begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}\\ y=-\dfrac{1}{3}\\ z=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\to Q_B\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$$

  Hallamos el punto simétrico $B'(b'_1, b'_2, b'_3)$ respecto de la proyección Q_B.

$$\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{-1+b'_1}{2},\frac{2+b'_2}{2},\frac{0+b'_3}{2}\right)\to\begin{cases}b'_1=\dfrac{2}{3}\\ b'_2=\dfrac{8}{3}\\ b'_3=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

  El punto simétrico de B respecto de r es $B'\left(\frac{1}{3},-\frac{8}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

- Punto simétrico de C respecto a r:

  Calculamos la proyección ortogonal Q_C del punto C sobre r.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal:} & \vec{n}=(1,1,1)\\ \text{Punto:} & C(2,0,-1)\end{array}\right\}\to \pi\colon x+y+z-1=0$$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}\\ x+y+z-1=0\end{array}\right\}\to \left.\begin{array}{r}x=y\\ x=z\\ x+y+z-1=0\end{array}\right\}\to \begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{1}{3}\\ z=\dfrac{1}{3}\end{cases}\to Q_C\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$$

  Hallamos el punto simétrico $C'(c'_1, c'_2, c'_3)$ respecto de la proyección Q_C.

$$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{2+c'_1}{2},\frac{0+c'_2}{2},\frac{-1+c'_3}{2}\right)\to\begin{cases}c'_1=-\dfrac{4}{3}\\ c'_2=\dfrac{2}{3}\\ c'_3=\dfrac{5}{3}\end{cases}$$

  El punto simétrico de C respecto de r es $C'\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$.

  El triángulo simétrico respecto a la recta r tendrá por vértices A', B' y C'.

Producto escalar

024 **Halla el simétrico del punto $P(0, 1, -3)$ respecto del plano cuya ecuación es:**

$$\pi: x + y + z - 2 = 0$$

Hallamos la proyección ortogonal Q del punto P sobre el plano π.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal:} & \vec{n} = (1, 1, 1)\\ \text{Punto:} & P(0, 1, -3)\end{array}\right\} \to r: \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{1}$$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+3}{1}\\ x + y + z - 2 = 0\end{array}\right] \to \left.\begin{array}{r} x = y - 1\\ x = z + 3\\ x + y + z - 2 = 0\end{array}\right\} \to \begin{cases} x = \dfrac{4}{3}\\ y = \dfrac{7}{3} \to Q\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{7}{3}, -\dfrac{5}{3}\right)\\ z = -\dfrac{5}{3}\end{cases}$$

Calculamos las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la proyección Q.

$$\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{0 + p'_1}{2}, \frac{1 + p'_2}{2}, \frac{-3 + p'_3}{2}\right) \to \begin{cases} p'_1 = \dfrac{8}{3}\\ p'_2 = \dfrac{11}{3}\\ p'_3 = -\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

El punto simétrico del punto P respecto del plano π es $P'\left(\frac{8}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

025 **Si los puntos $P(2, 0, 2)$ y $P'(3, 1, -3)$ son simétricos, halla el punto, una recta y el plano respecto de los cuales dichos puntos son simétricos. ¿Son únicos?**

Los puntos P y P' son simétricos respecto del punto medio del segmento PP'.

$$Q\left(\frac{2+3}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{2-3}{2}\right) \to Q\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

La recta respecto de la cual P y P' son simétricos pasa por el punto Q, y su vector director es perpendicular a $\overrightarrow{PP'} = (1, 1, -5)$.

Un vector perpendicular a $\overrightarrow{PP'}$ es $\vec{u} = (5, 5, 2)$, por tanto:

$$r: \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} + 5\lambda\\ y = \dfrac{1}{2} + 5\lambda\\ z = -\dfrac{1}{2} + 2\lambda\end{array}\right\}$$

El plano respecto del cual P y P' son simétricos pasa por el punto Q y tiene por vector normal al vector $\overrightarrow{PP'} = (1, 1, -5)$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector normal:} & \overrightarrow{PP'} = (1, 1, -5) \\ \text{Punto:} & Q\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\}$$

$$\pi: 1\cdot\left(x - \frac{5}{2}\right) + 1\cdot\left(y - \frac{1}{2}\right) - 5\cdot\left(z + \frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow \pi: x + y - 5z - \frac{11}{2} = 0$$

El plano y el punto respecto del cual P y P' son simétricos, son únicos.
Sin embargo, como existen infinitos vectores perpendiculares a $\overrightarrow{PP'}$, hay infinitas rectas respecto de las cuales los dos puntos son simétricos.

026 **Halla la distancia del punto $P(1, 1, -1)$ a la recta r: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$.**

Calculamos el plano π que pasa por P y es perpendicular a r.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector normal:} & \vec{n} = (3, 1, -2) \\ \text{Punto:} & P(1, 1, -1) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: 3(x-1) + (y-1) - 2(z+1) = 0$$

$$\rightarrow \pi: 3x + y - 2z - 6 = 0$$

Hallamos el punto de corte de la recta r y el plano π.

$$\left.\begin{array}{r} \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2} \\ 3x + y - 2z - 6 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 3y = -5 \\ 2x + 3z = -4 \\ 3x + y - 2z - 6 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{5}{14} \\ y = \frac{25}{14} \\ z = -\frac{11}{7} \end{array}\right.$$

La proyección ortogonal de P sobre r es $Q\left(\frac{5}{14}, \frac{25}{14}, \frac{-11}{7}\right)$.

La distancia del punto P a la recta r es la distancia de P al punto Q.

$$d(P, Q) = \sqrt{\left(\frac{5}{14} - 1\right)^2 + \left(\frac{25}{14} - 1\right)^2 + \left(-\frac{11}{7} + 1\right)^2} = \frac{\sqrt{266}}{14}$$

027 **Calcula el perímetro del triángulo de vértices:**

$A(0, 0, -3)$ $\quad B(2, 2, 2)$ $\quad C(2, 0, 5)$

Calculamos la medida de los lados del triángulo.

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{33}$$

$$d(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68}$$

$$d(B, C) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

El perímetro del triángulo es:

$$P = \sqrt{33} + \sqrt{68} + \sqrt{13}$$

028 **Calcula el área del triángulo que forman los puntos:**

$$A(2, 0, 0) \qquad B(-1, 3, 2) \qquad C(1, -4, -1)$$

Toma, por ejemplo, como base el lado *AB* y la altura será la distancia del vértice *C* a la recta que determinan los puntos *A* y *B*.

La base es: $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{22}$

La recta que determinan los puntos A y B es r: $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{2}$

Calculamos el plano π que pasa por C y es perpendicular a r.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal:} & \vec{n} = (-3, 3, 2) \\ \text{Punto:} & C(1, -4, -1)\end{array}\right\} \rightarrow \pi\colon -3(x-1) + 3(y+4) + 2(z+1) = 0$$

$$\rightarrow \pi\colon -3x + 3y + 2z + 17 = 0$$

Hallamos el punto de corte de la recta r y el plano π.

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{2} \\ -3x + 3y + 2z + 17 = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}3x + 3y = 6 \\ 2x + 3z = 4 \\ -3x + 3y + 2z + 17 = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}x = \dfrac{7}{2} \\ y = -\dfrac{3}{2} \\ z = -1\end{array}\right.$$

La proyección ortogonal del punto C sobre la recta r es $Q\left(\dfrac{7}{2}, -\dfrac{3}{2}, -1\right)$.

La altura del triángulo es la distancia del punto C a la recta r.

$$d(C, r) = d(C, Q) = \sqrt{\left(\frac{7}{2} - 1\right)^2 + \left(-\frac{3}{2} + 4\right)^2 + (-1+1)^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Por tanto, el área del triángulo es:

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{22} \cdot \dfrac{5\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{5\sqrt{11}}{2}$$

029 **Halla la distancia del punto *P*(2, 1, 0) al plano π.**

$$\left.\begin{array}{r}x = 2 - \lambda + \mu \\ \pi\colon y = 3\lambda - 2\mu \\ z = 1 + \lambda - 2\mu\end{array}\right\}$$

Hallamos la ecuación implícita del plano π.

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4x - y - z + 9 = 0 \rightarrow \pi\colon 4x + y + z - 9 = 0$$

$$d(P, \pi) = \frac{|4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2}} = 0$$

El punto $P(2, 1, 0)$ pertenece al plano π.

030 **Calcula la altura trazada desde el vértice D del tetraedro determinado por los puntos:**

$$A(2, 0, 0) \qquad B(-1, 3, 2) \qquad C(1, -4, -1) \qquad D(0, 0, 0)$$

Halla el plano determinado por los puntos A, B y C, y obtén la distancia del punto D a este plano.

Calculamos el plano que determinan los puntos A, B y C.

$\overrightarrow{AB} = (-3, 3, 2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (-1, -4, -1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -3 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 5x - 5y + 15z - 10 = 0 \rightarrow \pi: x - y + 3z - 2 = 0$$

$$\text{Altura} = d(D, \pi) = \frac{|1\cdot 0 - 1\cdot 0 + 3\cdot 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{11}}{11}$$

031 **Halla la distancia que hay entre los planos:** $\begin{matrix} \pi: 2x - 2y + 3z = 0 \\ \pi': 4x - 4y + 6z = 12 \end{matrix}$

Los vectores normales a los planos, $\vec{n} = (2, -2, 3)$ y $\vec{n}' = (4, -4, 6)$, son proporcionales. El punto $P(3, 0, -2) \in \pi$ y $P(3, 0, -2) \notin \pi'$, por tanto, los planos son paralelos.

$$d(\pi, \pi') = d(P, \pi') = \frac{|4\cdot 3 - 4\cdot 0 + 6\cdot(-2) - 12|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 6^2}} = \frac{12}{\sqrt{68}} = \frac{6\sqrt{17}}{17}$$

032 **Calcula la distancia entre la recta $r: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$ y el plano $\pi: x + 2y - 3z - 1 = 0$.**

El vector director de r es $\vec{u} = (1, 1, 1)$, y el vector normal del plano es $\vec{n} = (1, 2, -3)$.

Como $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$ y $P(0, 2, 0) \in r$ y $P(0, 2, 0) \notin \pi$, la recta y el plano son paralelos.

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1\cdot 0 + 2\cdot 2 - 3\cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}$$

033 **Calcula la distancia entre los siguientes pares de rectas.**

a) $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-1}$ $\qquad$ $s: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z}{-1}$

b) $r: \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+1}{-1}$ $\qquad$ $s: \left.\begin{matrix} 2x - 3y = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{matrix}\right\}$

a) Estudiamos la posición relativa de r y s.

$\vec{v}_r = (2, 3, -1)$ $\qquad$ $\left.\begin{matrix} P_r(0, 0, 0) \\ Q_s(0, -1, 0) \end{matrix}\right\} \rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (0, -1, 0)$

$\vec{v}_s = (1, -3, -1)$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

Por tanto, $d(r, s) = d(s, \pi_r)$, siendo π_r el plano que contiene a r y es paralelo a s.

$$\pi_r: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -6x + y - 9z = 0 \rightarrow \pi_r: 6x - y + 9z = 0$$

$$d(s, \pi_r) = d(Q_s, \pi_r) = \frac{|6 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) + 9 \cdot 0|}{\sqrt{6^2 + (-1)^2 + 9^2}} = \frac{1}{\sqrt{118}} = \frac{\sqrt{118}}{118}$$

b) La forma continua de la recta s es: $\dfrac{x-0}{9} = \dfrac{y-0}{6} = \dfrac{z-0}{4}$

Estudiamos la posición relativa de r y s.

$\vec{v}_r = (-1, -1, -1)$ $\qquad$ $\left.\begin{matrix} P_r(-1, -1, -1) \\ Q_s(0, 0, 0) \end{matrix}\right\} \rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (1, 1, 1)$

$\vec{v}_s = (9, 6, 4)$

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

Como $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ no son proporcionales, las rectas son secantes $\rightarrow d(r, s) = 0$.

034 **Halla la distancia entre los siguientes pares de rectas.**

a) $r: \left.\begin{matrix} 2x + y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$ $\qquad$ $s: \left.\begin{matrix} x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{matrix}\right\}$

b) ***r*** **es la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto** $P(-1, 2, 1)$, **y** ***s*** **es la recta que pasa por el punto** $Q(1, 1, 1)$ **y es perpendicular al plano** $\pi: x = 0$.

a) Estudiamos la posición relativa de r y s analizando el sistema formado por los cuatro planos.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3$$

El sistema es compatible determinado. Son rectas secantes $\rightarrow d(r, s) = 0$.

b) Calculamos las ecuaciones de las rectas.

$$\overrightarrow{PO} = (1, -2, -1) \rightarrow r: \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{-2} = \frac{z-0}{-1}$$

$$\text{Vector normal a } \pi: \vec{v}_s = (1, 0, 0) \rightarrow s: \left.\begin{matrix} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 \end{matrix}\right\}$$

Estudiamos su posición relativa.

$\vec{v}_r = (1, -2, -1)$ $\qquad$ $\left.\begin{matrix} P(-1, 2, 1) \\ Q(1, 1, 0) \end{matrix}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (2, -1, 0)$

$\vec{v}_s = (1, 0, 0)$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

Por tanto, $d(r, s) = d(s, \pi_r)$, siendo π_r el plano que contiene a r y es paralelo a s.

$$\pi_r: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -y + 2z = 0 \rightarrow \pi_r: y - 2z = 0$$

$$d(s, \pi_r) = d(Q, \pi_r) = \frac{|0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

035 **Dados $\vec{u} = (3, 4, -2)$ y $\vec{v} = (5, -1, 6)$, calcula:**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **b) $|\vec{u}|$** **c) $|\vec{v}|$**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 6 = -1$

b) $|\vec{u}| = \vec{u} \cdot \vec{u} = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}$

c) $|\vec{v}| = \vec{v} \cdot \vec{v} = \sqrt{25 + 1 + 36} = \sqrt{62}$

036 **Halla el módulo del vector $\vec{u} = (3, -5, 2)$. Calcula también dos vectores unitarios paralelos a él.**

$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$

Vectores unitarios paralelos a $\vec{u}$:

$$\vec{u_1} = \frac{1}{\sqrt{38}} \cdot (3, -5, 2) = \left(\frac{3}{\sqrt{38}}, -\frac{5}{\sqrt{38}}, \frac{2}{\sqrt{38}}\right)$$

$$\vec{u_2} = -\frac{1}{\sqrt{38}} \cdot (3, -5, 2) = \left(-\frac{3}{\sqrt{38}}, \frac{5}{\sqrt{38}}, -\frac{2}{\sqrt{38}}\right)$$

037 **En general, no es cierto que $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$. Compruébalo con $\vec{a} = (-3, 2, 2)$ y $\vec{b} = (1, -4, 3)$.**

$|\vec{a}| = \sqrt{17}$ $\quad |\vec{b}| = \sqrt{26}$ $\quad |\vec{a} + \vec{b}| = |(-2, -2, 5)| = \sqrt{33}$

$|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}| \rightarrow \sqrt{17} + \sqrt{26} \neq \sqrt{33}$

038 **¿Cómo tienen que ser dos vectores para que se verifique que $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$?**

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ deben ser paralelos y tener el mismo sentido, en caso contrario, el módulo de la suma es menor.

039 **Comprueba con $\vec{u} = (-5, 1, 2)$, $\vec{v} = (3, 4, -1)$ y $\vec{w} = (2, 1, -4)$ que se verifica la propiedad distributiva: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.**

$\vec{v} + \vec{w} = (5, 5, -5) \rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (-5) \cdot 5 + 1 \cdot 5 + (-5) \cdot 2 = -30$

$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = -13 + (-17) = -30$

Producto escalar

040 **Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, 2)$, $\vec{v} = (-2, 3, -1)$ y $\vec{w} = (7, -2, 1)$, realiza las operaciones posibles y explica por qué no se puede hacer el resto.**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w}$ b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ c) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$

a) No se puede realizar. El producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ es un número y no se puede sumar a un vector.

b) $\vec{v} + \vec{w} = (5, 1, 0) \rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 16$

c) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = -5\vec{w} = (-35, 10, -5)$

041 **Demuestra que las diagonales de un paralelogramo solo son iguales cuando sus lados son perpendiculares. Utiliza el resultado que afirma que si los lados de un paralelogramo son $\vec{u}$ y $\vec{v}$, entonces las diagonales son $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.**

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (\vec{u}-\vec{v}) \cdot (\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

Las diagonales son iguales si se cumple:

$2\vec{u} \cdot \vec{v} = -2\vec{u} \cdot \vec{v} \rightarrow 4\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Es decir, si los vectores son perpendiculares.

042 **Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ forman un triángulo. Demuestra que se cumple el teorema del coseno, aplicando la definición de módulo que proporciona el producto escalar $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.**

Si llamamos a, b y c a los lados del triángulo:

$a = |\vec{u}-\vec{v}| \qquad b = |\vec{u}| \qquad c = |\vec{v}|$

Como $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (\vec{u}-\vec{v}) \cdot (\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$

$$a^2 = b^2 - 2bc \cdot \cos A + c^2$$

Que es la expresión que conocemos como el teorema del coseno.

043 **Sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y que ambos vectores son perpendiculares, calcula el producto escalar: $(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$.**

$$(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v}) = 6\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{v} = 6 \cdot 3^2 + 0 - 2 \cdot 5^2 = 4$$

044 **Halla, en cada caso, el valor de p para que los vectores tengan módulo 7. ¿Hay siempre una única solución? Razona la respuesta.**

a) $\vec{u} = (2, -3, p)$

b) $\vec{v} = (-5, p, 6)$

c) $\vec{w} = (p, -1, 6)$

a) $\sqrt{2^2 + (-3)^2 + p^2} = 7 \rightarrow p^2 = 49 - 4 - 9 \rightarrow p = \pm 6$

b) $\sqrt{(-5)^2 + p^2 + 6^2} = 7 \rightarrow p^2 = 49 - 25 - 36 = -12 \rightarrow$ No hay solución.

c) $\sqrt{p^2 + (-1)^2 + 6^2} = 7 \rightarrow p^2 = 49 - 1 - 36 = 12 \rightarrow p = \pm\sqrt{12}$

Podemos obtener dos soluciones, una o ninguna.

045 **¿Qué valor debe tomar t para que los vectores $\vec{u} = (3, t, 5)$ y $\vec{v} = (2, -7, t)$ sean perpendiculares? ¿Y para que sean paralelos?**

Para que sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser 0.

$(3, t, 5) \cdot (2, -7, t) = 6 - 2t = 0 \rightarrow t = 3$

Para que sean paralelos deben ser proporcionales:

$\frac{3}{2} = \frac{t}{-7} = \frac{5}{t} \rightarrow$ No tiene solución.

No existe ningún valor de t para el que los vectores sean paralelos.

046 **Escribe un vector de módulo 1 que sea ortogonal al vector de coordenadas (1, 2, 1).**

(Extremadura. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 4)

Llamamos $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ al vector que buscamos.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \perp (1,2,1) \rightarrow (u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 2, 1) = u_1 + 2u_2 + u_3 = 0$$

Un vector que cumple esta condición es $\vec{u} = (-2, 1, 0)$, pero no es unitario.

Como $|\vec{u}| = \sqrt{5}$, un vector unitario que cumple esta condición es:

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-2, 1, 0) = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

047 **¿Cuánto debe valer m para que los puntos $A(5, m, 7)$, $B(3, -1, 4)$ y $C(6, 5, 4)$ formen un triángulo rectángulo con el ángulo recto en B?**

Los vectores $\overrightarrow{BA} = (2, m+1, 3)$ y $\overrightarrow{BC} = (3, 6, 0)$ deben ser perpendiculares.

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 6 + 6m + 6 = 0 \rightarrow m = -2$

048 **Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano π: $2x - 5y - z = 8$ que pasa por el punto $P(3, 3, -5)$.**

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector normal a } \pi: & \vec{n}_\pi = (2, -5, -1) \\ \text{Punto:} & P(3, 3, -5) \end{array}\right\} \rightarrow r: \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+5}{-1}$$

049 **Halla la ecuación de un plano perpendicular a la recta $r: \frac{x-2}{3} = y + 1 = \frac{x+7}{-2}$ y que la corte en el punto $P(5, 0, -9)$.**

El vector director de la recta es el vector normal del plano:

$\vec{n}_\pi = (3, 1, -2) \rightarrow \pi: 3x + y - 2z + D = 0$

$P(5, 0, -9) \in \pi \rightarrow 3 \cdot 5 + 0 - 2(-9) + D = 0 \rightarrow D = -33$

El plano es π: $3x + y - 2z - 33 = 0$.

050 **Demuestra que en cualquier triángulo, sus lados verifican que $a + b > c$.**

Consideramos como lados del triángulo los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} + \vec{v}$.

Supongamos que no es cierta la hipótesis $a + b > c$, es decir, que se cumple $|\vec{u} + \vec{v}| > |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

Por ser ambos miembros positivos: $|\vec{u}+\vec{v}|^2 > (|\vec{u}|+|\vec{v}|)^2$

$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha + |\vec{v}|^2$

$(|\vec{u}|+|\vec{v}|)^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}| + |\vec{v}|^2$

Si $|\vec{u}+\vec{v}| > |\vec{u}|+|\vec{v}|$, entonces:

$$\cancel{|\vec{u}|^2} + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha + \cancel{|\vec{v}|^2} > \cancel{|\vec{u}|^2} + 2|\vec{u}||\vec{v}| + \cancel{|\vec{v}|^2} \rightarrow 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha > 2|\vec{u}||\vec{v}|$$

Como $\cos\alpha < 1$, la desigualdad no es cierta.

051 **Determina el plano paralelo a $5x - 3y + 2z - 7 = 0$ que pasa por el punto $P(1, 2, 1)$.**

Si los planos son paralelos tienen el mismo vector normal.

$\vec{n} = (5, -3, 2) \rightarrow \pi\colon 5x - 3y + 2z + D = 0$

$P(1, 2, 1) \in \pi \rightarrow 5\cdot 1 - 3\cdot 2 + 2\cdot 1 + D = 0 \rightarrow D = -1 \rightarrow \pi\colon 5x - 3y + 2z - 1 = 0$

052 **Realiza de dos modos diferentes el siguiente problema: ¿Qué posición relativa tienen la recta $r\colon \left.\begin{array}{r} 2x - y + 3z = 8 \\ -x + 2y + 2z = 3 \end{array}\right\}$ y el plano $\pi\colon x - y + 3z = 12$? ¿Y la recta r y el plano $\gamma\colon 3x - 3y + z = 6$?**

- Posición relativa de r y π.
  - Primera forma. Estudiamos las soluciones del sistema de ecuaciones conjunto.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -8 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -12 \end{pmatrix}$$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.
La recta y el plano se cortan en un punto.

  - Segunda forma. Comparamos los vectores director y normal.
    Calculamos el vector director de la recta.

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{19}{3} - \dfrac{8}{3}\lambda \\ y = \dfrac{14}{3} - \dfrac{7}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_r = (-8, -7, 3)$$

Como $\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r \neq 0$, la recta y el plano no son paralelos ni la recta está contenida en el plano, entonces, se cortan.

- Posición relativa de r y γ.
  - Primera forma.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible.
La recta y el plano son paralelos.

– Segunda forma.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_r = (-8,-7,3)\\ \vec{n}_\gamma = (3,-3,1)\end{array}\right\} \to (-8, -7, 3) \cdot (3, -3, 1) = 0$$

Los vectores son perpendiculares, por tanto, la recta es paralela al plano o está contenida en él.

$P(1, 0, 2) \in r$ y $P(1, 0, 2) \notin \gamma$, la recta y el plano son paralelos.

053 **Expresa en forma implícita la ecuación del plano perpendicular al vector $\vec{n} = (3, -1, 10)$ y que pasa por el punto $P(-3, -3, 2)$. ¿Pertenece el punto $Q(-4, 2, 5)$ a dicho plano?**

El plano será de la forma $\pi: 3x - y + 10z + D = 0$

$$P(-3, -3, 2) \in \pi \to 3 \cdot (-3) - 1 \cdot (-3) + 10 \cdot 2 + D = 0 \to D = -14$$
$$\to \pi: 3x - y + 10z - 14 = 0$$

El punto Q cumple que: $3 \cdot (-4) - 2 + 10 \cdot 5 - 14 \neq 0 \to Q \notin \pi$

054 **Con las rectas $r: (x, y, z) = (-1, 2, 0) + \lambda(4, -1, m)$ y $s: \dfrac{x+2}{-8} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{-6}$, halla m para que:**

a) Las rectas sean paralelas. En este caso, halla el plano que las contiene.

b) Las rectas sean perpendiculares. ¿Se cortan? Si es así, determina el punto de corte.

Escribimos un punto y un vector director de cada recta.

$$\begin{array}{ll}\vec{v}_r = (4, -1, m) & P_r(-1, 2, 0)\\ \vec{v}_s = (-8, 2, -6) & P_s(-2, 0, 1)\end{array}\Bigg\} \to \overrightarrow{P_rP_s} = (-1, -2, 1)$$

a) $\dfrac{4}{-8} = \dfrac{-1}{2} = \dfrac{m}{-6} \to$ Las rectas son paralelas si $m = 3$.

Calculamos el plano que las contiene.

Dos vectores del plano son $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$ y un punto $P_r(-1, 2, 0)$, por tanto:

$$\pi: \left.\begin{array}{l} x = -1 - 8\lambda - \mu\\ y = 2 + 2\lambda - 2\mu\\ z = -6\lambda + \mu\end{array}\right\}$$

b) $\vec{v}_r \perp \vec{v}_s \to \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (4, -1, m) \cdot (-8, 2, -6) = -32 - 2 - 6m = 0$

$$\to m = -\frac{17}{3}$$

Estudiamos su posición relativa.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1\\ 4 & -1 & -\dfrac{17}{3}\\ -8 & 2 & -6\end{pmatrix} = 3 \to \text{Las rectas no se cortan, se cruzan.}$$

055 **Dados los planos π: $mx + y + 2z - 7 = 0$ y π': $3x + 4y + z + 1 = 0$, halla m para que los planos:**

a) Sean paralelos.

b) Sean perpendiculares.

a) $\frac{m}{3} = \frac{1}{4} = \frac{2}{1} \rightarrow$ No existe ningún valor para m que cumpla estas igualdades.
Por tanto, π y π' no pueden ser paralelos.

b) $\vec{n}_\pi \perp \vec{n}_{\pi'} \rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi'} = (m, 1, 2) \cdot (3, 4, 1) = 3m + 4 + 2 = 0 \rightarrow m = -2$

056 **Sea r: $(x, y, z) = (0, 3, 3) + t(0, 1, 1)$. Demuestra que:**

a) r está contenida en el plano π: $3x + 2y - 2z = 0$.

b) r es paralela al plano π': $3x + y - z - 5 = 0$.

a) $\vec{v}_r = (0, 1, 1)$ $\quad P_r(0, 3, 3)$ $\quad \vec{n}_\pi = (3, 2, -2)$
$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = 0 \rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$
r y π paralelos o r contenida en π.
$P_r(0, 3, 3) \in \pi \rightarrow 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 0 \rightarrow r$ está contenida en π.

b) $\vec{v}_r = (0, 1, 1)$ $\quad P_r(0, 3, 3)$ $\quad \vec{n}_{\pi'} = (3, 1, -1)$
$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_{\pi'} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0 \rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_{\pi'}$
r y π' paralelos o r contenida en π'.
$P_r(0, 3, 3) \notin \pi' \rightarrow 3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 3 - 5 \neq 0 \rightarrow r$ es paralela a π.

057 **Dada la recta r: $\left.\begin{array}{r} -x + y + 4z + 7 = 0 \\ 6x - 2y + 2z + 8 = 0 \end{array}\right\}$, halla la ecuación de un plano que la contenga y que sea perpendicular a π: $4x + 2y - z - 7 = 0$.**

Escribimos las rectas r en forma paramétrica.

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x = -\frac{11}{2} - \frac{5}{2}\lambda \\ y = -\frac{25}{2} - \frac{13}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow P\left(-\frac{11}{2}, -\frac{25}{2}, 0\right) \qquad \vec{v} = (5, 13, -2)$$

El plano π' está determinado por P_r, $\vec{v}_r$ y el vector normal de π, $\vec{n}_\pi = (4, 2, -1)$.

$$\pi'\colon \begin{vmatrix} x + \frac{11}{2} & y + \frac{25}{2} & z - 0 \\ 5 & 13 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -9x - 3y - 42z - 87 = 0$$

π': $3x + y + 14z + 29 = 0$

058 Sean las rectas:

$$r: \left.\begin{array}{r} 2x + y - z - 3 = 0 \\ 3x - 2y - 4z - 3 = 0 \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{r} 2x + 5z + 12 = 0 \\ x - 2y - 3z + 5 = 0 \end{array}\right\}$$

Encuentra la ecuación de un plano que:

a) Contenga a r y sea paralelo a s.

b) Contenga a r y sea perpendicular a s.

Escribimos las rectas r y s en forma paramétrica.

$$r: \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{7} + \dfrac{6}{7}\lambda \\ y = \dfrac{3}{7} - \dfrac{5}{7}\lambda \\ z = y \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_r = (6, -5, 7) \qquad P_r\left(\frac{9}{7}, \frac{3}{7}, 0\right)$$

$$s: \left.\begin{array}{l} x = -6 - \dfrac{5}{2}\mu \\ y = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{11}{4}\mu \\ z = \mu \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_s = (-10, -11, 4) \qquad P_s\left(-6, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

a) Los vectores directores del plano son los de r y s, y cualquier punto de r pertenece al plano.

$$\pi: \begin{vmatrix} x - \dfrac{9}{7} & y - \dfrac{3}{7} & z \\ 6 & -5 & 7 \\ -10 & -11 & 4 \end{vmatrix} = 57x - 94y - 116z - 33 = 0$$

b) Si un plano es perpendicular a s, todas las rectas contenidas en el plano son perpendiculares a s, y por tanto, r y s deben ser perpendiculares.

Como $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (6, -5, 7) \cdot (-10, -11, 4) = 23 \neq 0$, las rectas no son perpendiculares y no existe el plano que buscamos.

059 Calcula la ecuación de una recta que corte perpendicularmente a $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-1}{3}$ y pase por el punto $P(14, 3, 3)$.

Buscamos un punto $Q \in r$, tal que $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular al vector director de la recta r.

Un punto genérico de r tiene la forma $Q(2\lambda, 3 - 2\lambda, 1 + 3\lambda)$.

$\overrightarrow{PQ} = (2\lambda - 14, -2\lambda, 3\lambda - 2)$

$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = (2\lambda - 14, -2\lambda, 3\lambda - 2) \cdot (2, -2, 3) = 17\lambda - 34 = 0 \rightarrow \lambda = 2$

Así, $Q(4, -1, 7)$ y $\overrightarrow{PQ} = (-10, -4, 4)$.

Por tanto la recta es $s: \dfrac{x-14}{-10} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z-3}{4}$.

060 **Halla la ecuación de la recta que corta a r y s perpendicularmente.**

$$r:\left.\begin{array}{r} x=1 \\ y=11+2\lambda \\ z=-1+\lambda \end{array}\right\} \qquad s:\left.\begin{array}{r} x=6-4\mu \\ y=-2+\mu \\ z=2+\mu \end{array}\right\}$$

Hallamos un punto $P \in r$ y un punto $Q \in s$ de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{r} P(1, 11+2\lambda, -1+\lambda) \in r \\ Q(6-4\mu, -2+\mu, 2+\mu) \in s \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ}=(5-4\mu, -13+\mu-2\lambda, 3+\mu-\lambda)$$

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{PQ}\cdot(0, 2, 1)=-5\lambda+3\mu-23=0 \\ \overrightarrow{PQ}\cdot(-4, 1, 1)=-3\lambda+18\mu-30=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda=-4 \\ \mu=1 \end{array}\right.$$

Por tanto: $\left.\begin{array}{r} P(1, 3, -5) \in r \\ Q(2, -1, 3) \in s \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ}=(1, -4, 8)$

Luego, la recta buscada es: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z+5}{8}$

061 **Investiga si existe un plano que contenga a la recta r y sea perpendicular a la recta s.**

$$r: \frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-1} \qquad s:\left.\begin{array}{r} x=1+5\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=2\lambda \end{array}\right\}$$

En caso afirmativo, calcula la ecuación del plano.

Si un plano es perpendicular a s, todas las rectas contenidas en el plano son perpendiculares a dicha recta, y por tanto, r y s deben ser perpendiculares.

Como $(2, 4, -1)\cdot(5, -2, 2)=0 \rightarrow$ Los vectores son perpendiculares.

El plano que buscamos tiene como vector normal el vector director de s y pasar por el punto $P(3, -1, 0) \in r$.

$\pi: 5x-2y+2z+D=0$

$5\cdot 3-2\cdot(-1)+2\cdot 0+D=0 \rightarrow D=-17$

La ecuación del plano que buscamos es $\pi: 5x-2y+2z-17=0$.

062 **Se consideran los puntos $A(3, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.**

a) Halla la ecuación general del plano π que los contiene.

b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π y que pasa por el origen de coordenadas. Halla también el punto de intersección de la recta con el plano.

(Baleares. Junio 2005. Opción A. Cuestión 2)

a) El plano pasa por $A(3, 0, 0)$ y tiene por vectores directores $\overrightarrow{AB}=(-3, 2, 0)$ y $\overrightarrow{BC}=(0, -2, 1)$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=2x+3y+6z-6=0$$

b) La recta perpendicular a π que pasa por el origen es:

$$r:\left.\begin{array}{l} x=2\lambda \\ y=3\lambda \\ z=6\lambda \end{array}\right\}$$

Hallamos el punto de intersección de la recta r y el plano π.

$$2\cdot 2\lambda+3\cdot 3\lambda+6\cdot 6\lambda-6=0\rightarrow \lambda=\frac{6}{49}$$

El punto intersección es $P\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right)$.

063 **Encuentra la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las rectas:**

$$r_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{0} \qquad r_2:(x,y,z)=(0,0,1)+t(1,1,1)$$

(Navarra. Septiembre 2004. Grupo 1. Opción B)

Hallamos un punto $P\in r$ y un punto $Q\in s$ de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{l} P(1+2\lambda,\lambda,2) \\ Q(\mu,\mu,1+\mu) \end{array}\right\}\rightarrow \overrightarrow{PQ}=(\mu-1-2\lambda,\mu-\lambda,\mu-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}\cdot(2,1,0)=3\mu-5\lambda-2=0 \\ \overrightarrow{PQ}\cdot(1,1,1)=3\mu-3\lambda-2=0 \end{array}\right\}\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda=0 \\ \mu=\frac{2}{3} \end{array}\right.\rightarrow \left\{\begin{array}{l} P(1,0,2) \\ Q\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right) \\ \overrightarrow{PQ}=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right) \end{array}\right.$$

La recta buscada es $t:\frac{x-1}{-\frac{1}{3}}=\frac{y-0}{\frac{2}{3}}=\frac{z-2}{-\frac{1}{3}}\rightarrow t:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-1}$

064 **Se consideran las rectas:**

$$r:\left.\begin{array}{r} x-ay=1 \\ y-z=1 \end{array}\right\} \qquad s:\left.\begin{array}{r} x-2y-z=0 \\ x+y+z=8 \end{array}\right\}$$

Prueba que, para ningún valor de *a*, *r* y *s* pueden ser paralelas y averigua el único valor de *a* para el que se cortan. Para este valor de *a*, se pide:

a) Calcula el punto *P* intersección de *r* y *s* y la ecuación del plano π que las contiene.

b) Determina la ecuación de la recta *t* que está contenida en π y es perpendicular a *r* en el punto *P*. Escribe la ecuación de otras dos rectas que sean perpendiculares a *r* por el punto *P*.

(Cantabria. Septiembre 2000. Bloque 3. Opción B)

Escribimos las rectas en forma paramétrica.

$$r:\left.\begin{array}{l} x=1+a\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1+\lambda \end{array}\right\}\rightarrow \begin{array}{l} P_r(1,0,-1) \\ \vec{v}_r=(a,1,1) \end{array} \qquad s:\left.\begin{array}{l} x=\frac{16}{3}-\frac{1}{3}\mu \\ y=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}\mu \\ z=\mu \end{array}\right\}\rightarrow \begin{array}{l} Q_s\left(\frac{16}{3},\frac{8}{3},0\right) \\ \vec{v}_s=(1,2,-3) \end{array}$$

Estudiamos si $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son proporcionales.

$\frac{a}{1} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{-3} \rightarrow$ Las rectas no son paralelas para ningún valor de a.

Las rectas r y s son secantes si el rango de la matriz formada por $\overrightarrow{P_rQ_s}$, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ es 2.

$$\begin{vmatrix} \frac{16}{3}-1 & \frac{8}{3} & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 10a - 20$$

r y s secantes $\rightarrow$ Rango $(A) = 2 \rightarrow 10a - 20 = 0 \rightarrow a = 2$

a) Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 1+2\lambda &= \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\mu \\ \lambda &= \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\mu \\ -1+\lambda &= \mu \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 1 \end{cases} \rightarrow \text{El punto de intersección es } P(5, 2, 1).$$

El plano que contiene a las dos rectas es:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-5 & y-2 & z-1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5x + 7y + 3z + 8 = 0$$

b) La recta t es la intersección del plano π y otro plano perpendicular a la recta r que pasa por P.

El plano, π', perpendicular a r que pasa por P, tiene por vector normal $\vec{u} = (2, 1, 1)$ y pasa por el punto $P(5,\ 2,\ 1) \in \pi'$.

π': $2x + y + z + D = 0$

$P(5, 2, 1) \in \pi' \rightarrow 2 \cdot 5 + 2 + 1 + D = 0 \rightarrow D = -13$

El plano que buscamos es π': $2x + y + z - 13 = 0$.

La recta t es la intersección entre los dos planos.

$$t: \left.\begin{aligned} 2x + y + z - 13 &= 0 \\ -5x + 7y + 3z + 8 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Calculamos otras dos rectas perpendiculares a r que pasan por P.

Si $r' \perp r \rightarrow \vec{v}_{r'} \perp \vec{v}_r \rightarrow (u_1,\ u_2, u_3) \cdot (2, 1, 1) = 0$

Por ejemplo: $\begin{cases} \vec{v}_{r'} = (0, 1, -1) \\ \vec{v}_{r''} = (1, -1, -1) \end{cases}$ cumplen esta condición.

Así, las rectas:

$$r': \left.\begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 2 + \gamma \\ z &= 1 - \gamma \end{aligned}\right\} \quad \text{y} \quad r'': \left.\begin{aligned} x &= 5 + \alpha \\ y &= 2 - \alpha \\ z &= 1 - \alpha \end{aligned}\right\}$$

Son perpendiculares a r que pasan por P.

065 Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1, 0, -1)$, es perpendicular al plano $x - y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo a la recta $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$.

(Andalucía. Junio 2001. Opción A. Ejercicio 4)

El plano que buscamos tiene por vectores directores el vector normal al plano y el vector director de la recta, y pasa por el punto A.

La recta en forma paramétrica es $r\colon \left.\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_r = (2, 1, 0)$

$\pi\colon x - y + 2z + 1 = 0 \rightarrow$ Vector normal: $\vec{n} = (1, -1, 2)$

La ecuación del plano que buscamos es:

$$\pi'\colon \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 4y - 3z - 5 = 0$$

066 Considera $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, -1)$, $C(5, 2, 1)$ y $D(4, 3, 3)$.

a) Justifica que los puntos son los vértices consecutivos de un paralelogramo.

b) Razona si dicho paralelogramo es un rectángulo.

c) Determina la ecuación general del plano que contiene a los cuatro puntos.

(Cantabria. Junio 2007. Bloque 3. Opción B)

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (1, -1, -2) \rightarrow \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ son paralelos y de la misma medida.
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (3, 2, 2) \rightarrow \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son paralelos y de la misma medida.
Por tanto, son los vértices consecutivos de un paralelogramo.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = (1, -1, -2) \cdot (3, 2, 2) \neq 0 \rightarrow$ No son vectores perpendiculares.
No es un rectángulo, es un romboide.

c) Determinamos el plano con vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, y pasa por A.

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 8y + 5z - 1 = 0$$

067 Encuentra los puntos R pertenecientes a la recta: $r\colon \left.\begin{array}{r} 2x - y - z + 3 = 0 \\ -2x + 3y - z - 1 = 0 \end{array}\right\}$

tales que los segmentos PQ y PR forman un ángulo recto, siendo $P(1, 0, 0)$ y $Q(0, -1, 5)$.

(Navarra. Junio 2002. Opción A. Pregunta 2)

Escribimos la recta en forma paramétrica.

$r\colon \left.\begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = t \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, 1)$

Si $R \in r \rightarrow R(-2+\lambda, -1+\lambda, \lambda)$

$\overrightarrow{PQ} = (-1, -1, 5) \perp \overrightarrow{PR} = (-3+\lambda, -1+\lambda, \lambda)$

$$(-1, -1, 5) \cdot (-3+\lambda, -1+\lambda, \lambda) = 3\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{4}{3}$$

Por tanto, el único punto que cumple la condición es $R\left(-\frac{10}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

068 **Considera los puntos $A(0, 3, -1)$ y $B(0, 1, 5)$.**

a) Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo ABC de vértices A, B y $C(x, 4, 3)$ tiene un ángulo recto en C.

b) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos (0, 1, 5) y (3, 4, 3) y es paralelo a la recta definida por las ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{array}\right\}$

(Andalucía. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 4)

a) $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB} \rightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-x, -1, -4) \cdot (-x, -3, 2) = x^2 - 5 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

b) Escribimos la recta en forma paramétrica.

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 1 - \frac{1}{3}\lambda \\ y = 1 + \frac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_r = (1, -2, -3)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(0, 1, 5) \\ Q(3, 4, 3) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (3, 3, -2)$$

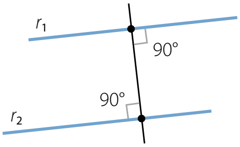
Calculamos la ecuación del plano que pasa por el punto $P(0, 1, 5)$ y tiene por vectores directores $\vec{v}_r$ y $\overrightarrow{PQ}$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z-5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13x - 7y + 9z - 38 = 0$$

069 **Halla la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las rectas:**

$$r_1: \left.\begin{array}{r} x + z - 1 = 0 \\ 2x + y + z + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

$$r_2: \frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$$



(Navarra. Junio 2006. Grupo 1. Opción B)

Hallamos un punto $Q \in r_1$ y un punto $Q \in r_2$ de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a ambas rectas.

$$r_1: \left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u} = (-1, 1, 1) \qquad r_2: \frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2} \rightarrow \vec{v} = (-1, 1, 2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Un punto genérico de la recta es } r_1 \text{ es } P(1-\lambda, -3+\lambda, \lambda) \\ \text{Un punto genérico de } r_2 \text{ es } Q(-\mu, \mu, -1+2\mu)\end{array}\right\} \overrightarrow{PQ} = (\lambda-\mu-1, -\lambda+\mu+3, -\lambda+2\mu-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u} = -3\lambda+4\mu+3=0 \\ \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v} = -4\lambda+6\mu+2=0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}-3\lambda+4\mu+3=0 \\ -4\lambda+6\mu+2=0\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda=5 \\ \mu=3\end{array}\right.$$

Por tanto los puntos son $P(-4, 2, 5)$ y $Q(-3, 3, 5)$.

La recta que buscamos tiene por vector director $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 0)$ y pasa por $P(-4, 2, 5)$.

$$s: \frac{x+4}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{0}$$

070 **Sean las rectas:**

$$r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \qquad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

a) Hallar la ecuación de la recta *t* que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.

b) Hallar la perpendicular común a las rectas *r* y *s*.

(Madrid. Junio 2006. Opción A. Ejercicio 4)

a) La recta t es la intersección de los planos π y π', siendo π el plano que contiene a la recta r, y π' el plano que contiene a s y pasa por el origen.

$$\pi: \left.\begin{array}{l}O(0,0,0) \\ \vec{u_r} = (-2, 2, -4) \\ \overrightarrow{P_rO} = (-1, 2, 0)\end{array}\right\} \qquad \pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix} = 8x+4y-2z=0$$

$$\pi: 4x+2y-z=0$$

$$\pi': \left.\begin{array}{l}O(0,0,0) \\ \vec{v_s} = (3, 1, 1) \\ \overrightarrow{Q_sO} = (2, -1, -2)\end{array}\right\} \rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2\end{vmatrix} = -x+8y-5z=0$$

Por tanto, la recta t es:

$$t: \left.\begin{array}{r}4x+2y-z=0 \\ -x+8y-5z=0\end{array}\right\}$$

b) Buscamos un vector $\vec{n} = (a, b, c)$ perpendicular a los vectores $\vec{u_r}$ y $\vec{v_s}$.

$$\left.\begin{array}{r}(a,b,c)\cdot(-2,2,-4) = -2a+2b-4c=0 \\ (a,b,c)\cdot(3,1,1) = 3a+b+c=0\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}a = -\frac{3}{4}\lambda \\ b = \frac{5}{4}\lambda \\ c = \lambda\end{array}\right.$$

Por ejemplo, un vector que cumple esta condición es $\vec{n} = (-3, 5, 4)$.

La recta perpendicular común a r y a s es la intersección de los planos π y π', siendo π el plano que contiene a r y tiene por vector director $\vec{n}$, y π' el plano que contiene a s y tiene por vector director $\vec{n}$.

$$\left.\begin{array}{r} P_r(-1, 2, 0) \\ \pi\colon \vec{u}_r = (-2, 2, -4) \\ \vec{n} = (-3, 5, 4) \end{array}\right\} \rightarrow \pi\colon \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ -2 & 2 & -4 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 28x + 20y - 4z - 12 = 0$$

$$\rightarrow \pi\colon 7x + 5y - z - 3 = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} Q_s(2, -1, -2) \\ \pi'\colon \vec{v}_s = (3, 1, 1) \\ \vec{n} = (-3, 5, 4) \end{array}\right\} \rightarrow \pi'\colon \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -x - 15y + 18z + 23 = 0$$

Por tanto, la recta perpendicular común a la recta r y s es:

$$\left.\begin{array}{r} 7x + 5y - z - 3 = 0 \\ -x - 15y + 18z + 23 = 0 \end{array}\right\}$$

071 **Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, -1, 1)$ y corta perpendicularmente la recta:**

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$$

(Baleares. Septiembre 2007. Opción A. Cuestión 2)

Calculamos el plano que es perpendicular a la recta y pasa por $P(2, -1, 1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vector normal: } \vec{v}_r = (3, 1, 2) \rightarrow \pi\colon 3x + y + 2z + D = 0 \\ P(2, -1, 1) \in \pi \rightarrow 3 \cdot 2 + (-1) + 2 \cdot 1 + D = 0 \rightarrow D = -7 \end{array}\right\}$$

El plano buscado es $\pi\colon 3x + y + 2z - 7 = 0$.

Hallamos el punto de corte de la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{2} \\ 3x + y + 2z - 7 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{39}{14} \\ y = -\dfrac{15}{14} \\ z = -\dfrac{1}{7} \end{array}\right.$$

La recta pasa por $P(2, -1, 1)$ y $Q\left(\dfrac{39}{14}, -\dfrac{15}{14}, -\dfrac{1}{7}\right) \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (11, -1, -16)$.

La recta que buscamos tiene como vector director $\overrightarrow{PQ}$ y pasa por el punto $P(2, -1, 1)$.

$$s\colon \frac{x-2}{11} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-16}$$

072 **Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 3, 1)$, $C(1, 0, 0)$ y $D(0, 2, 0)$; se pide hallar el punto P perteneciente a la recta determinada por A y B tal que el triángulo CDP sea rectángulo con hipotenusa CP.**

(Aragón. Septiembre 2001. Opción A. Cuestión 2)

La recta que pasa por A y B es: $r_{AB}\colon \left.\begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 \end{array}\right\}$

Un punto genérico de r_{AB} es $P(1-2\lambda, 1+2\lambda, 1)$.

$\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{DP} \rightarrow (1, -2, 0)\cdot(1-2\lambda, -1+2\lambda, 1) = 0 \rightarrow 3-6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{1}{2}$

Por tanto, el punto que buscamos es $P(0, 2, 1)$.

073 **Considere la recta r, definida por $\dfrac{x-1}{\alpha} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-1}{2}$ y el plano π de ecuación $2x - y + \beta z = 0$. Determine α y β en cada uno de los siguientes casos.**

a) La recta r es perpendicular al plano π.

b) La recta r está contenida en el plano π.

(Andalucía. Año 2007. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 4)

$r: \dfrac{x-1}{\alpha} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-1}{2} \rightarrow \vec{v}_r = (\alpha, 4, 2)$

$\pi: 2x - y + \beta z = 0 \rightarrow \vec{n}_\pi = (2, -1, \beta)$

a) $\vec{v}_r$ tiene que ser proporcional a $\vec{n}_\pi \rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{4}{-1} = \dfrac{2}{\beta} \rightarrow \begin{cases} \alpha = -8 \\ \beta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

b) El punto $P_r(1, 0, 1) \in \pi \rightarrow 2\cdot 1 - 1\cdot 0 + \beta\cdot 1 = 0 \rightarrow \beta = -2$

$\vec{v}_r = (\alpha, 4, 2)$ es perpendicular a $\vec{n}_\pi = (2, -1, -2)$:

$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \rightarrow (\alpha, 4, 2)\cdot(2, -1, -2) = 0 \rightarrow \alpha = 4$

074 **Decide si el plano $6x - 4y + z - 1 = 0$ pertenece al haz de planos definido por la recta $\left.\begin{aligned} 2x - y + z - 3 &= 0 \\ y + 2z - 8 &= 0 \end{aligned}\right\}$.**

En caso afirmativo, exprésalo como combinación lineal de los dos planos que definen la recta.

Estudiamos si el plano contiene a la recta.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ 6 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

El plano pertenece al haz de planos definido por la recta. La expresión del plano como combinación lineal de los dos planos que definen el haz de planos es:

$$6x - 4y + z - 1 = \alpha(2x - y + z - 3) + \beta(y + 2z - 8)$$

$$\left.\begin{aligned} 6 &= 2\alpha \\ -4 &= -\alpha + \beta \\ 1 &= \alpha + 2\beta \\ -1 &= -3\alpha - 8\beta \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Así: $6x - 4y + z - 1 = 3(2x - y + z - 3) - (y + 2z - 8)$

075 **Determina un plano que contiene a la recta:**

$$\left.\begin{array}{r} x-2y-5z=0 \\ 2x-y+3z-8=0 \end{array}\right\}$$

y que sea paralelo al plano $6x+22z-1=0$.

Escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r: \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{16}{3}-\dfrac{11}{3}\lambda \\ y=\dfrac{8}{3}-\dfrac{13}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_r=(11,-8,-3) \qquad P_r\left(\frac{16}{3},\frac{8}{3},0\right)$$

π: $6x+22z-1=0 \rightarrow$ Vector normal: $\vec{n}_\pi=(6,0,22)$

Como π' paralelo a $\pi \rightarrow \pi'$: $6x+22z+D=0$

Como $P_r\left(\frac{16}{3},\frac{8}{3},0\right)\in r \rightarrow 6\cdot\frac{16}{3}+22\cdot 0+D=0 \rightarrow D=-32$

Por tanto, la ecuación del plano que buscamos es π': $6x+22z-32=0$.

076 **Halla un plano del haz de planos de la recta:**

$$r: \frac{x-1}{2}=y+2=z-1$$

que sea perpendicular a la recta:

$$s: \left.\begin{array}{l} x=1+t \\ y=2t \\ z=-3+t \end{array}\right\}$$

Expresamos la recta en forma implícita:

$$r: \left.\begin{array}{r} x-1=2y+4 \\ y+2=z-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y-5=0 \\ y-z+3=0 \end{array}\right\}$$

El haz de planos es:

$$\lambda(x-2y-5)+y-z+3=0 \rightarrow \lambda x+(1-2\lambda)y-z-5\lambda+3=0$$

Buscamos un plano del haz cuyo vector normal sea paralelo al vector $\vec{u}_r=(1,2,1)$.

$\dfrac{\lambda}{1}=\dfrac{1-2\lambda}{2}=\dfrac{-1}{1} \rightarrow$ No tiene solución.

Por tanto, no existe el plano pedido.

077 **Calcula, empleando el haz de planos, la ecuación del plano que contiene a la recta** $r: \left.\begin{array}{r} 3x-2y+4z=8 \\ 5x-2y+z=5 \end{array}\right\}$ **y que pasa por el punto** $P(1, 0, 3)$.

El haz de planos que contiene a la recta es:

$3x-2y+4z-8+\lambda(5x-2y+z-5)=0$

Como debe pasar por el punto $P(1, 0, 3)$:

$3\cdot 1-2\cdot 0+4\cdot 3-8+\lambda(5\cdot 1-2\cdot 0+3-5)=0 \rightarrow \lambda=-\dfrac{7}{3}$

El plano que buscamos es:

$$3x - 2y + 4z - 8 - \frac{7}{3}(5x - 2y + z - 5) = 0$$

$$-\frac{26}{3}x + \frac{8}{3}y + \frac{5}{3}z + \frac{11}{3} = 0 \rightarrow 26x - 8y - 5z - 11 = 0$$

078 **Clasifica en agudo, obtuso o recto el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ según el signo de $\vec{u} \cdot \vec{v}$.**

Si $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \rightarrow \cos \widehat{\vec{u}\,\vec{v}} > 0 \rightarrow \widehat{\vec{u}\,\vec{v}}$ es agudo.

Si $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \rightarrow \cos \widehat{\vec{u}\,\vec{v}} < 0 \rightarrow \widehat{\vec{u}\,\vec{v}}$ es obtuso.

Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \cos \widehat{\vec{u}\,\vec{v}} = 0 \rightarrow \widehat{\vec{u}\,\vec{v}}$ es recto.

079 **¿Para qué valores de k los vectores $\vec{a} = (k, 3, 5)$ y $\vec{b} = (2, -4, -2)$ forman un ángulo obtuso?**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2k - 12 - 10$

Formarán un ángulo obtuso cuando: $2k - 22 < 0 \rightarrow k < 11$

080 **Determina el ángulo que forma el vector $\vec{u} = (3, -2, 4)$ con $\vec{v} = (4, 0, -1)$, y encuentra otro vector que forme el mismo ángulo con $\vec{v}$.**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 \quad |\vec{u}| = \sqrt{29} \quad |\vec{v}| = \sqrt{17} \rightarrow \cos \alpha = \frac{8}{\sqrt{29}\sqrt{17}} = 0{,}3603 \rightarrow \alpha = 68{,}88°$$

Para que $\vec{w} = (a, b, c)$ cumpla que $\widehat{\vec{w}\,\vec{v}} = \widehat{\vec{u}\,\vec{v}}$:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{|\vec{w}||\vec{v}|} = \frac{4a - c}{|\vec{w}||\vec{v}|}$$

Es decir, $|\vec{w}| = |\vec{u}|$ y $4a - c = 8$. Por ejemplo, $\vec{w} = (3, 2, 4)$ cumple estas condiciones.

081 **Halla el ángulo que forman estas parejas de vectores.**

a) $\vec{u} = (4, -1, 3)$ y $\vec{v} = (3, 0, 2)$

b) $\vec{u} = (5, 4, -1)$ y $\vec{v} = (2, -3, -2)$

c) $\vec{u} = (-4, 2, 5)$ y $\vec{v} = (1, 3, -2)$

d) $\vec{u} = (6, 8, -4)$ y $\vec{v} = (-9, -12, 6)$

a) $\cos \alpha = \dfrac{18}{\sqrt{26}\sqrt{13}} = 0{,}9791 \rightarrow \alpha = 11°\,44'\,34''$

b) $\cos \alpha = \dfrac{0}{\sqrt{42}\sqrt{17}} = 0 \rightarrow \alpha = 0°$

c) $\cos \alpha = \dfrac{-8}{\sqrt{45}\sqrt{14}} = -0{,}3187 \rightarrow \alpha = 108°\,31'\,10''$

d) $\cos \alpha = \dfrac{-174}{\sqrt{116}\sqrt{261}} = -1 \rightarrow \alpha = 180°$

082 **Determina la proyección ortogonal del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$.**
a) $\vec{u} = (3, -5, 2)$ y $\vec{v} = (1, 2, 0)$
b) $\vec{u} = (4, -1, -2)$ y $\vec{v} = (3, -2, 1)$

a) $Proy_{\vec{v}}\,\vec{u} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{-7}{\sqrt{5}} = -\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$ b) $Proy_{\vec{v}}\,\vec{u} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{12}{\sqrt{14}} = \dfrac{6\sqrt{14}}{7}$

083 **¿Qué valor debe tomar *a* para que el ángulo que forman $\vec{u} = (1, 2, 2)$ y $\vec{v} = (-3, 1, a)$ mida 60°?**

$$\cos 60° = \frac{2a-1}{3\sqrt{10+a^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow 7a^2 - 16a - 86 = 0$$

La única solución válida es $a = \dfrac{8+3\sqrt{74}}{7}$.

084 **Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores ortogonales y de módulo 1, halla los posibles valores del parámetro real *a* para que los vectores $\vec{u} + a\vec{v}$ y $\vec{u} - a\vec{v}$ formen un ángulo de 60°.**
(Castilla y León. Junio 2001. Prueba A. Cuestión 2)

$$(\vec{u}+a\vec{v})\cdot(\vec{u}-a\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - a^2\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 - a^2|\vec{v}|^2 = 1-a^2$$

$$(\vec{u}+a\vec{v})\cdot(\vec{u}+a\vec{v}) = |\vec{u}|^2 + 2a\vec{u}\cdot\vec{v} + a^2|\vec{v}|^2 = 1+a^2 \rightarrow |\vec{u}+a\vec{v}| = \sqrt{1+a^2}$$

$$(\vec{u}-a\vec{v})\cdot(\vec{u}-a\vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2a\vec{u}\cdot\vec{v} + a^2|\vec{v}|^2 = 1+a^2 \rightarrow |\vec{u}-a\vec{v}| = \sqrt{1+a^2}$$

$$\cos 60° = \frac{(\vec{u}+a\vec{v})\cdot(\vec{u}-a\vec{v})}{|\vec{u}-a\vec{v}||\vec{u}-a\vec{v}|} = \frac{1-a^2}{\sqrt{1+a^2}\cdot\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

085 **Decide si el triángulo de vértices $A(-2, 4, 0)$, $B(3, -3, 1)$ y $C(6, -2, 4)$ es rectángulo, acutángulo u obtusángulo.**

$|\overrightarrow{AB}| = |(5, -7, 1)| = 5\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{AC}| = |(8, -6, 4)| = 2\sqrt{29}$

$|\overrightarrow{BC}| = |(3, 1, 3)| = \sqrt{19}$

El lado mayor es $|\overrightarrow{AC}|$ y además:

$|\overrightarrow{AC}|^2 = 116 > |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = 19 + 75$

Por tanto, el triángulo es obtusángulo.

086 **Calcula el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$, sabiendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$ y que $|\vec{a} + \vec{b}| = 6$.**

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \rightarrow 36 = 9 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 64$$

$$\rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}(36-9-64) = -\frac{37}{2}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{37}{2} = |\vec{a}||\vec{b}|\,\alpha = 3\cdot 8\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = -\frac{37}{48} \rightarrow \alpha = 140°\,25'\,43''$$

087 **Obtén el valor de $|\vec{a} - \vec{b}|$, si $|\vec{a}| = 4$ y $|\vec{b}| = 7$ y el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es de 67°.**

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 16 - 2 \cdot 4 \cdot 7 \cos 67° + 49 = 43{,}11 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = 6{,}56$$

088 **Si $|\vec{u}| = 3$ y $|\vec{v}| = 4$ y ambos vectores forman un ángulo de 135°, determina el ángulo que forman los vectores $2\vec{u} + \vec{v}$ y $3\vec{u} - 2\vec{v}$.**

$$(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v}) = 6|\vec{u}|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} - 2|\vec{v}|^2 = 6 \cdot 3^2 - 3 \cdot 4 \cdot \cos 135° - 2 \cdot 4^2 =$$
$$= 6\sqrt{2} + 22$$

$$(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{u} + \vec{v}) = 4|\vec{u}|^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$
$$|2\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 135° + 4^2} = 4{,}2496$$

$$(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v}) = 9|\vec{u}|^2 - 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 4|\vec{v}|^2$$
$$|3\vec{u} - 2\vec{v}| = \sqrt{9 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 135° + 4 \cdot 4^2} = 15{,}7106$$

$$\cos \alpha = \frac{(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v})}{|2\vec{u} + \vec{v}| \cdot |3\vec{u} - 2\vec{v}|} = \frac{6\sqrt{2} + 22}{4{,}2496 \cdot 15{,}7106} = 0{,}4566 \rightarrow \alpha = 62°\,49'\,55''$$

089 **Demuestra que las diagonales de un rombo son perpendiculares.**

Los dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que generan un rombo tienen el mismo módulo. Sus diagonales son $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ y su producto escalar $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$. Por tanto, las diagonales son perpendiculares.

090 **Determina los ángulos que describen las siguientes parejas de rectas.**

a) $r: \left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{array}\right\}$ $\qquad s: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z+1}{2}$

b) $r: \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-1}{2}$ $\qquad s: \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$

c) $r: \left.\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 2 - 4\lambda \\ z = 7 + 14\lambda \end{array}\right\}$ $\qquad s: \left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 6 \\ -x + 4z = 0 \end{array}\right\}$

d) $r: \left.\begin{array}{r} 2x - y + 3z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 5 \end{array}\right\}$ $\qquad s: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$

a) $\vec{u}_r = (-1, -1, 2)$ y $\vec{v}_s = (3, -4, 2)$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{29}} = 0{,}379 \rightarrow \alpha = 67°\,43'\,31'$$

b) $\vec{u}_r = (6, -4, 2)$ y $\vec{v}_s = (-3, 2, -1)$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{28}{\sqrt{56}\sqrt{14}} = 1 \rightarrow \alpha = 0°$$

c) $\vec{u}_r = (-1, -4, 14)$

$$s:\left.\begin{array}{l} x = 4\lambda \\ y = -3 + \dfrac{5}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_s = (8, 5, 2)$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \alpha = 90°$

d) $\vec{v}_s = (2, 2, -1)$

$$r:\left.\begin{array}{l} x = -5 - 2\lambda \\ y = -10 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}_r = (-2, -2, 1)$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{7}{\sqrt{6} \cdot 3} = 0{,}9526 \rightarrow \alpha = 17°\, 42'\, 56''$$

091 Calcula el ángulo que forman estas parejas de rectas y planos.

a) $\pi: x - 2y + 3z = 8$ $\qquad r:\left.\begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array}\right\}$

b) $\pi: x - 3y - z = 6$ $\qquad r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{-4}$

c) $\pi: 2x + 2y + 2z = -3$ $\qquad r:\left.\begin{array}{l} x + 2y - 3z = 8 \\ -2x + y + z = 4 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (1, -2, 3) \\ \vec{u}_r = (1, 2, -1) \end{array}\right\} \rightarrow \alpha = 90° - arc\ cos\left(\dfrac{|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|}\right) =$

$$= 90° - arc\ cos\left(\frac{6}{\sqrt{14}\sqrt{6}}\right) = 90° - 49{,}1° = 40{,}9°$$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (1, -3, -1) \\ \vec{u}_r = (2, 2, -4) \end{array}\right\} \rightarrow \alpha = 90° - arc\ cos\left(\dfrac{|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|}\right) =$

$$= 90° - arc\ cos\left(\frac{0}{\sqrt{11}\sqrt{24}}\right) = 90° - 90° = 40°$$

c) $\vec{n}_\pi = (2, 2, 2)$

$$r:\left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}_r = (1, 1, 1)$$

$$\alpha = 90° - arc\ cos\left(\frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|}\right) = 90° - arc\ cos\left(\frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{12}}\right) = 90° - 0° = 90°$$

092 **Halla el ángulo que definen estas parejas de planos.**

a) $\alpha: 2x - y + 3z = -9$ $\quad\beta: 2x - 2y - 2z = 19$

b) $\alpha: -x + 5y + 3z = -1$ $\quad\beta: 3x + 5y + 7z = 9$

c) $\alpha: -4x + 12y - 28z = -13$ $\quad\beta: \left.\begin{array}{l} x = -2 + t + 3s \\ y = 2 - 2t + s \\ z = 1 - t \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\alpha = (2, -1, 3) \\ \vec{n}_\beta = (2, -2, -2) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0 \rightarrow \alpha = 90°$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\alpha = (-1, 5, 3) \\ \vec{n}_\beta = (3, 5, 7) \end{array}\right\}$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{43}{\sqrt{35}\sqrt{83}} = 0{,}7978 \rightarrow \alpha = 37°\,4'\,45''$$

c) Escribimos el plano β en forma implícita.

$$\beta: \begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x - 3y + 7z + 1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\alpha = (-4, 12, -28) \\ \vec{n}_\beta = (1, -3, 7) \end{array}\right\} \rightarrow \cos\alpha = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{236}{\sqrt{944}\sqrt{59}} = 1 \rightarrow \alpha = 0°$$

093 **Determina el vector o vectores unitarios, $\vec{v} = (a, b, c)$ (con $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$), que forman un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radianes con el vector $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes con el vector $\vec{w} = (2, 0, 2)$.**

(Galicia. Junio 2002. Bloque 2. Pregunta 2)

Planteamos un sistema con las condiciones del enunciado.

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \\ \cos\frac{\pi}{6} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{a + b + c}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\frac{\pi}{4} = \dfrac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{|\vec{w}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{2a + 2c}{\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\}$$

Quitando denominadores y suprimiendo las raíces obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a + b + c = \dfrac{3}{2} \\ a + c = 1 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene dos soluciones:

$$\left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \end{array}\right.$$

Por tanto, existen dos vectores que cumplen las condiciones del problema:

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{4}\right) \qquad \vec{v}_2 = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)$$

094 **Dadas las rectas:**

$$r\colon \left.\begin{array}{r} x-y+2=0 \\ z=-1 \end{array}\right\} \qquad s\colon \left.\begin{array}{r} x=2 \\ y-z-5=0 \end{array}\right\}$$

a) Determina su posición relativa.

b) En caso de cortarse, determina el ángulo que forman y el punto de corte.

(Canarias. Junio 2008. Bloque 4. Opción A)

a) Pasamos ambas rectas a forma paramétrica.

$$r\colon \left.\begin{array}{r} x-y+2=0 \\ z=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}_r = (1, 1, 0) \qquad P_r(-2, 0, -1)$$

$$s\colon \left.\begin{array}{r} x=2 \\ y-z-5=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=5+\mu \\ z=\mu \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_s = (0, 1, 1) \qquad Q_s(2, 5, 0)$$

Estudiamos el rango de la matriz formada por los vectores $\overrightarrow{PQ} = (4, 5, 1)$, $\vec{u}_r$ y $\vec{v}_s$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos, r y s son secantes.

b) Ángulo que forman:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60°$$

Calculamos el punto de corte.

$$\left.\begin{array}{r} -2+\lambda = 2 \\ \lambda = 5+\mu \\ -1 = \mu \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = 4 \\ \mu = -1 \end{array}\right.$$

El punto de corte entre las dos rectas es $C(2, 4, -1)$.

095 Calcula el ángulo que forma el plano $x + y + z = 0$ con la recta de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{array}\right\}$.

(Extremadura. Septiembre 2006. Repertorio A. Ejercicio 2)

$$r: \left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{array}\right\} \to r: \left.\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{array}\right\} \to \vec{u}_r = (-1, 1, -1)$$

$$\pi: x + y + z = 0 \to \vec{n}_\pi = (1, 1, 1)$$

$$\alpha = 90^\circ - arc\cos\left(\frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|}\right) = 90^\circ - arc\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}}\right) = 19{,}47^\circ$$

096 Sean π y π' los planos del espacio $\mathbb{R}^3$, determinados del modo siguiente:
El plano π pasa por los puntos (0, 2, 1), (3, −1, 1) y (1, −1, 5) y el plano π' pasa por los puntos (3, 0, 2), (2, 1, 1) y (5, 4, −2). Se pide calcular:

a) Una ecuación paramétrica de la recta intersección de los planos π y π'.
b) El ángulo α que forman los planos π y π'.
c) La ecuación del plano que contiene a la recta r y forma un ángulo de 90° con el plano π.

(C. Valenciana. Septiembre 2003. Ejercicio B. Problema 4)

- Plano π.
  $P(0, 2, 1)$ $\quad Q(3, -1, 1)$ $\quad R(1, -1, 5)$ $\quad \overrightarrow{PQ} = (3, -3, 0)$ $\quad \overrightarrow{PR} = (1, -3, 4)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -12x - 12y - 6z + 30 = 0 \to \pi: 2x + 2y + z - 5 = 0$$

- Plano π'.
  $P'(3, 0, 2)$ $\quad Q'(2, 1, 1)$ $\quad R'(5, 4, -2)$ $\quad \overrightarrow{P'Q'} = (3, -3, 0)$ $\quad \overrightarrow{P'R'} = (2, 4, -4)$

$$\pi': \begin{vmatrix} x-3 & y & z-2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = -6y - 6z + 12 = 0 \to \pi': y + z - 2 = 0$$

a) $$r: \left.\begin{array}{r} 2x + 2y + z - 5 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{array}\right\} \to r: \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{array}\right\}$$

b) $$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi'}|}{|\vec{n}_\pi| \cdot |\vec{n}_{\pi'}|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \alpha = 45^\circ$$

c) $$\left.\begin{array}{l} P(0, 3, -1) \in r \\ \vec{u}_r = (1, -2, 2) \\ \vec{n}_\pi = (2, 2, 1) \end{array}\right\} \to \pi'': \begin{vmatrix} x & y-3 & z+1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6x + 3y + 6z - 3 = 0$$

$$\to \pi'': 2x - y - 2z + 1 = 0$$

097 Averigua para qué valor de m la recta r: $\left.\begin{array}{r} x+2y+5z=m \\ 2x-y-z=-2 \end{array}\right\}$ se corta con la recta s: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-4}{5}$.

Calcula el coseno del ángulo que forman ambas rectas.

(La Rioja. Septiembre 2007. Propuesta A. Ejercicio 5)

Estudiamos el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+5z=m \\ 2x-y-z=-2 \\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3} \\ \dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-4}{5} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+5z=m \\ 2x-y-z=-2 \\ 3x-2y=5 \\ 5y-3z=-17 \end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & m \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\,(A)=3 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & m \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & -17 \end{vmatrix}=12m-327$$

- Si $12m-327=0 \rightarrow m=\dfrac{327}{12} \rightarrow \text{Rango}\,(A^*)=3$
- Si $12m-327\neq 0 \rightarrow m=\dfrac{327}{12} \rightarrow \text{Rango}\,(A^*)=4$

Si $m=\dfrac{327}{12} \rightarrow \text{Rango}\,(A)=\text{Rango}\,(A^*)=3$. El sistema es compatible determinado. Las rectas r y s se cortan en un punto.

Determinamos los vectores directores de las rectas.

$$r\text{: }\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{m-4}{5}-\dfrac{3}{5}\lambda \\ y=\dfrac{2m+2}{5}-\dfrac{11}{5}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}_r=(-3,-11,5)$$

$$s\text{: }\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-4}{5} \rightarrow \vec{v}_s=(2,3,5)$$

El ángulo que forman r y s es el que forman sus vectores directores.

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{14}{\sqrt{155}\,\sqrt{38}}=0{,}1824 \rightarrow \alpha=\text{arc cos}\,0{,}1824=79{,}49°$$

098 Consideremos los planos:

$$\pi_1 \colon x + y - 6 = 0 \qquad \pi_2 \colon 2x + 4y + \lambda z + 2 = 0$$

donde λ es un parámetro real. Se pide:

a) Determina las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los dos planos π_1 y π_2 cuando $\lambda = 4$.

b) Calcula razonadamente λ para que los planos π_1 y π_2 se corten formando un ángulo de 45°.

(C. Valenciana. Septiembre 2002. Ejercicio A. Problema 3)

a) Si $\lambda = 4 \rightarrow \pi_2 \colon 2x + 4y + 4z + 2 = 0 \rightarrow \pi_2 \colon x + 2y + 2z + 1 = 0$

$$r\colon \left.\begin{array}{r} x + y - 6 = 0 \\ x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r\colon \left.\begin{array}{l} x = 13 + 2\lambda \\ y = -7 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_{\pi_1} = (1, 1, 0) \\ \vec{n}_{\pi_2} = (2, 4, \lambda) \end{array}\right\} \rightarrow \cos 45° = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{6}{\sqrt{2}\sqrt{20 + \lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow 6 = \sqrt{20 + \lambda^2} \rightarrow \lambda = \pm 4$$

099 Dados los planos π_1 y π_2 de ecuaciones:

$$\pi_1 \colon x + 2y + z + 3 = 0 \qquad \pi_2 \colon 2x + y - z - 6 = 0$$

se pide:

a) Calcula el ángulo α que forman los planos π_1 y π_2.

b) Calcula la ecuación paramétrica de la recta r, intersección de los planos π_1 y π_2.

c) Comprueba que el plano π de ecuación $\pi\colon x + y - 1 = 0$ es el plano bisector de π_1 y π_2, es decir, π forma un ángulo $\frac{\alpha}{2}$ con cada uno de los planos π_1 y π_2, donde α es el ángulo obtenido en el apartado a).

(C. Valenciana. Septiembre 2007. Bloque 2. Problema 2)

a) $$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_1 = (1, 2, 1) \\ \vec{n}_2 = (2, 1, -1) \end{array}\right\} \rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60°$$

b) $$r\colon \left.\begin{array}{r} x + 2y + z + 3 = 0 \\ 2x + y - z + 6 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r\colon \left.\begin{array}{l} x = 5 + \lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

c) $\pi\colon x + y - 1 = 0 \rightarrow \vec{n}_\pi = (1, 1, 0)$

$$\cos \beta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \beta = 30°$$

$$\cos \gamma = \frac{|\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_2| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \gamma = 30°$$

Por tanto, el plano π es bisector de los planos π_1 y π_2.

100 Dados la recta $r: \left.\begin{array}{r} x=-1 \\ y-z-1=0 \end{array}\right\}$ y el plano $\pi: x+y-2=0$:

a) Determina su posición relativa.

b) En caso de cortarse, determina el ángulo que forman y el punto de corte.

(Canarias. Junio 2007. Opción A. Cuestión 4)

a) $r: \left.\begin{array}{r} x=-1 \\ y-z-1=0 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}_r=(0,1,1)$

$\pi: x+y-2=0 \rightarrow \vec{n}_\pi=(1,1,0)$

Como $\vec{u}_r = \vec{n}_\pi \neq 0 \rightarrow$ Los vectores no son perpendiculares, y por tanto, el plano y la recta son secantes.

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{u}_r=(0,1,1) \\ \vec{n}_\pi=(1,1,0) \end{array}\right\}$

$$\alpha = 90° - arc\cos\left(\frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{u}_r|\cdot|\vec{n}_\pi|}\right) = 90° - arc\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right) = 30°$$

El punto de corte lo hallamos resolviendo el sistema formado por todas las ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} x=-1 \\ y-z-1=0 \\ x+y-2=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=3 \\ z=2 \end{array}\right.$$

Por tanto, el punto de corte es $P(-1, 3, 2)$.

101 Dadas las rectas:

$$r: \left.\begin{array}{l} y=2x+1 \\ z=2x+1 \end{array}\right\} \qquad s: \frac{x+3}{2}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+2}{1}$$

encuentra una recta bisectriz de r y s (una recta bisectriz de otras dos pasa por el punto de intersección de estas, está en el mismo plano que ellas y forma el mismo ángulo con ambas).

(Navarra. Junio 2000. Opción A. Pregunta 2)

Hallamos el punto de intersección de las rectas.

$$\left.\begin{array}{r} y=2x+1 \\ z=2x+1 \\ \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+3}{2} \\ \dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+2}{1} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{array}\right.$$

El punto de intersección de r y s es $P(-1, -1, -1)$.

Determinamos los vectores directores de *r* y *s*.

$$r\colon \left.\begin{matrix} y = 2x+1 \\ z = 2x+1 \end{matrix}\right\} \rightarrow r\colon \left.\begin{matrix} x = \lambda \\ y = 2\lambda + 1 \\ z = 2\lambda + 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \vec{u}_r = (1, 2, 2)$$

$$s\colon \frac{x+3}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{1} \rightarrow \vec{v}_s = (2, 2, 1)$$

Buscamos un vector $\vec{w} = (a, b, c)$ que cumpla la condición:

$$\cos(\vec{u}_r, \vec{w}) = \cos(\vec{v}_s, \vec{w})$$

$$\frac{\vec{u}_r \cdot \vec{w}}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{w}|} = \frac{\vec{v}_s \cdot \vec{w}}{|\vec{v}_s| \cdot |\vec{w}|}$$

$$\frac{a+2b+2c}{3 \cdot |\vec{w}|} = \frac{2a+2b+c}{3 \cdot |\vec{w}|}$$

$$a - c = 0 \rightarrow a = c$$

Los vectores $\vec{w}$ que buscamos son del tipo $\vec{w} = (a, b, a)$.

Además, el vector $\vec{w}$ tiene que pertenecer al plano determinado por las rectas *r* y *s*, es decir, tiene que ser linealmente dependiente de los vectores directores de las rectas.

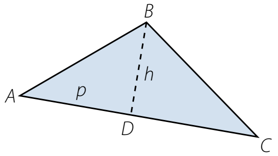
$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 3b - 4a = 0 \rightarrow a = \frac{3}{4}b$$

Si hacemos $b = 4$, un vector puede ser $\vec{w} = (3, 4, 3)$.

La ecuación de la bisectriz de *r* y *s* es:

$$t\colon \left.\begin{matrix} x = -1 + 3t \\ y = -1 + 4t \\ z = -1 + 3t \end{matrix}\right\}$$

102 **Calcula la altura que parte de *B* en el triángulo de vértices *A*(3, −1, −2), *B*(4, 2, 1) y *C*(5, 3, 4), haciendo uso de proyecciones de vectores.**



$\overrightarrow{AB} = (1, 3, 3)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (2, 4, 6)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{19}$ $\qquad$ $|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{14}$

$$p = |\overrightarrow{AD}| = Proy_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{32}{2\sqrt{14}} = \frac{8\sqrt{14}}{7}$$

$$h = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{AD}|^2} = 0{,}8452$$

103 **Dada la recta: $r: \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z+7}{-11}$ y el plano π: $2x + y - 3z + 8 = 0$:**

a) Decide su posición relativa y, en caso de cortarse, el ángulo que forman.

b) Calcula la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

a) $\vec{u}_r = (2, 5, -11)$ $\vec{n}_\pi = (2, 1, -3)$

Como $\vec{u}_r = \vec{n}_\pi \neq 0 \rightarrow$ Los vectores no son perpendiculares. La recta corta al plano.

$$\alpha = 90° - arc\ cos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = 90° - arc\ cos \frac{42}{\sqrt{150}\sqrt{14}} = 66{,}42°$$

b) Calculamos el plano π' que contiene a r y corta perpendicularmente π.

$$\left.\begin{array}{r} P(5, 3, -7) \in r \\ \vec{u}_r = (2, 5, -11) \\ \vec{n}_\pi = (2, 1, -3) \end{array}\right\} \rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-5 & y-3 & z+7 \\ 2 & 5 & -11 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4x - 16y - 8z + 12 = 0$$

$$\rightarrow \pi': x + 4y + 2z - 3 = 0$$

La recta s, proyección ortogonal de la recta r sobre π, es el corte de los planos π y π'.

$$s: \left.\begin{array}{r} 2x + y - 3z + 8 = 0 \\ x + 4y + 2z - 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x = -5 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

104 **Calcula el punto simétrico de $P(6, 10, 22)$ respecto del plano $2x + 3y + 7z - 10 = 0$.**

Hallamos la proyección ortogonal Q del punto P sobre el plano π.

- Recta perpendicular a π que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{r} P(6, 10, 22) \\ \vec{n}_\pi = (2, 3, 7) \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = 6 + 2\lambda \\ y = 10 + 3\lambda \\ z = 22 + 7\lambda \end{array}\right\}$$

- Intersección entre la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{r} x = 6 + 2\lambda \\ y = 10 + 3\lambda \\ z = 22 + 7\lambda \\ 2x + 3y + 7z - 10 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ \lambda = -3 \end{array}\right. \rightarrow Q(0, 1, 1)$$

Q es el punto medio entre P y su punto simétrico $P'(a, b, c)$.

$$(0, 1, 1) = \left(\frac{6+a}{2}, \frac{10+b}{2}, \frac{22+c}{2}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -6 \\ b = -8 \\ c = -20 \end{array}\right.$$

El punto simétrico del punto P respecto del plano π es $P'(-6, -8, -20)$.

105 **Halla la proyección ortogonal P' del punto $P(7, 3, -3)$ sobre el plano π: $3x + y - z = 5$. Comprueba que la distancia de P al plano es la misma que la distancia a P'. Utiliza P' para calcular el punto simétrico de P respecto del plano.**

Hallamos la proyección ortogonal P' del punto P sobre el plano π.

- Recta perpendicular a π que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{r} P(7,3,-3) \\ \vec{n}_\pi = (3,1,-1) \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = 7 + 3\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -3 - \lambda \end{array}\right\}$$

- Intersección entre la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{r} x = 7 + 3\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -3 - \lambda \\ 3x + y - z = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \\ \lambda = -2 \end{array}\right. \rightarrow P'(1, 1, -1)$$

Veamos que las distancias son iguales:

$$d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 7 + 3 - (-3) - 5|}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{22}{\sqrt{11}} = 2\sqrt{11}$$

$$d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(-6,-2,-2)| = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

Calculamos el punto $Q(q_1, q_2, q_3)$ simétrico del punto P respecto al plano π.

$$(1, 1, -1) = \left(\frac{7+q_1}{2}, \frac{3+q_2}{2}, \frac{-3+q_3}{2}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} q_1 = -5 \\ q_2 = -1 \\ q_3 = 1 \end{array}\right.$$

El punto simétrico del punto P respecto del plano π es $Q(-5, -1, 1)$.

106 **Obtén las coordenadas del punto simétrico a $P(2, 1, 17)$ respecto de la recta r, cuya ecuación vectorial es: $r: (x, y, z) = (-1, 4, 2) + \lambda(2, 1, 4)$.**

Calculamos la proyección ortogonal Q del punto P sobre r.

- Plano perpendicular a r que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{r} P(2,1,17) \\ \vec{u}_r = (2,1,4) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: 2x + y + 4z - 73 = 0$$

- Intersección entre el plano y la recta.

$$\left.\begin{array}{r} x = -1 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 2 + 4\lambda \\ 2x + y + 4z - 73 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 7 \\ z = 14 \\ \lambda = 3 \end{array}\right. \rightarrow Q(5, 7, 14)$$

Hallamos el punto simétrico $P'(a, b, c)$ respecto de la proyección Q.

$$(5, 7, 14) = \left(\frac{2+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{17+c}{2}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 8 \\ b = 13 \\ c = 11 \end{array}\right.$$

El punto simétrico de P respecto de la resta r es $P'(8, 13, 11)$.

107 Considera el punto $P(2, 0, 1)$ y la recta:

$$r: \left.\begin{array}{r} x + 2y = 6 \\ z = 2 \end{array}\right\}$$

a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y a r.

b) Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

(Andalucía. Junio 2005. Opción A. Ejercicio 4)

a) Escribimos la recta r en forma paramétrica.

$$r: \left.\begin{array}{r} x + 2y = 6 \\ z = 2 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = 6 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u_r} = (-2, 1, 0) \qquad Q_r(6, 0, 2)$$

El plano que buscamos tiene como vectores directores $\vec{u_r}$ y $\overrightarrow{PQ_r}$, y pasa por el punto P.

$$\left.\begin{array}{r} P(2, 0, 1) \\ \vec{u_r} = (-2, 1, 0) \\ \overrightarrow{PQ_r} = (4, 0, 1) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x + 2y - 4z + 2 = 0$$

b) Calculamos la proyección ortogonal Q del punto P sobre r.

- Plano perpendicular a r que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{r} P(2, 0, 1) \\ \vec{u_r} = (-2, 1, 0) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: -2x + y + 4 = 0$$

- Intersección entre el plano y la recta.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 6 \\ z = 2 \\ -2x + y + 4 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{14}{5} \\ y = \dfrac{8}{5} \\ z = 2 \end{array}\right. \rightarrow Q\left(\frac{14}{5}, \frac{8}{5}, 2\right)$$

Calculamos el punto $P'(a, b, c)$ simétrico del punto P respecto al plano π.

$$\left(\frac{14}{5}, \frac{8}{5}, 2\right) = \left(\frac{2+a}{2}, \frac{0+b}{2}, \frac{1+c}{2}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{18}{5} \\ b = \dfrac{16}{5} \\ c = 3 \end{array}\right.$$

El punto simétrico del punto P respecto del plano π es $P'\left(\dfrac{18}{5}, \dfrac{16}{5}, 3\right)$.

108 Para cada valor de a los puntos $P(1, 2, 3)$ y $A(0, 1, a)$ son simétricos respecto a un plano.

Halla, de forma razonada, la ecuación de dicho plano. En particular encuentra el plano para $a = 2$.

(País Vasco. Junio 2005. Bloque B. Cuestión B)

Hallamos el plano que pasa por el punto medio M del segmento PA y cuyo vector normal es el vector $\overrightarrow{PA}$.

$$\left.\begin{array}{l} M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{3+a}{2}\right) \\ \overrightarrow{PA} = (-1, -1, a-3) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: -x - y + (a-3)z - \frac{a^2-13}{2} = 0$$

Para $a = 2 \rightarrow \pi_1: -x - y - z + \dfrac{9}{2} = 0 \rightarrow \pi_1: 2x + 2y + 2z - 9 = 0$

109 **Escribir las ecuaciones implícitas de una recta con la dirección del vector (1, −1, 0) y que pasa por P', siendo P' el simétrico de $P(0, -2, 0)$ respecto al plano π: $x + 3y + z = 5$.**

(Aragón. Junio 2007. Opción A. Cuestión 4)

Hallamos la proyección ortogonal Q del punto P sobre el plano π.

- Recta perpendicular a π que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{r} P(0, -2, 0) \\ \vec{n}_\pi = (1, 3, 1) \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

- Intersección entre la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{r} x = \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = \lambda \\ x + 3y + z - 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ \lambda = 1 \end{array}\right. \rightarrow Q(1, 1, 1)$$

Calculamos las coordenadas de $P'(a, b, c)$, punto simétrico de P respecto de π.

$$(1, 1, 1) = \left(\frac{0+a}{2}, \frac{-2+b}{2}, \frac{0+c}{2}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{array}\right.$$

El punto simétrico del punto P respecto del plano π es $P'(2, 4, 2)$.

La ecuación de la recta, en forma implícita, que pasa por el punto P' y tiene por vector director (1, −1, 0) es:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{0} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{-1} \\ \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-2}{0} \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{r} x + y - 6 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

110 **Halla la distancia del punto $A(3, -1, -2)$ al punto $B(5, 2, 4)$.**

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(5-3)^2 + (2+1)^2 + (4+2)^2} = 7$$

111 **¿Es isósceles el triángulo de vértices $A(2, 5, -1)$, $B(3, -2, 4)$ y $C(-2, -3, 11)$?**

$|\overrightarrow{AB}| = |(-1, -7, 5)| = 5\sqrt{3}$ $\qquad$ $|\overrightarrow{BC}| = |(-5, -1, 7)| = 5\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{AC}| = |(-4, -8, 12)| = 4\sqrt{14}$

Tiene dos lados iguales y uno desigual, el triángulo es isósceles.

112 ¿Qué lado es menor en el triángulo de vértices $A(3, -1, 4)$, $B(0, -2, 3)$ y $C(5, 5, -1)$?

$|\overrightarrow{AB}| = |(-3, -1, -1)| = \sqrt{11}$ $\quad |\overrightarrow{BC}| = |(5, 7, -4)| = \sqrt{90}$

$|\overrightarrow{AC}| = |(2, 6, -5)| = \sqrt{65}$

El menor lado es AB.

113 Determina las distancias que hay entre estos puntos: $P(1, 0, 3)$, $Q(4, 5, 1)$ y $R(10, 15, -3)$. ¿Qué puedes decir de los tres puntos?

$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(3, 5, -2)| = \sqrt{38}$

$d(Q, R) = |\overrightarrow{QR}| = |(6, 10, -4)| = 2\sqrt{38}$

$d(P, R) = |\overrightarrow{PR}| = |(9, 15, -6)| = 3\sqrt{38}$

Como $d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R) \rightarrow$ Los tres puntos están alineados.

114 Comprueba que la recta $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{3} = z + 3$ no corta al plano $3x - 2y = 8$.

$r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{3} = z + 3 \rightarrow \vec{u}_r = (2, 3, 1)$ $\qquad P_r(3, -1, -3)$

$\pi: 3x - 2y = 8 \rightarrow \vec{n}_\pi = (3, -2, 0)$.

$\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \rightarrow \vec{u}_r$ y $\vec{n}_\pi$ son perpendiculares.

La recta es paralela al plano o está contenida en él.

Como $P_r(3, -1, 3) \in r$ y $P_r(3, -1, 3) \notin \pi \rightarrow$ la recta y el plano son paralelos.

115 Halla la distancia al plano $\pi: 8x - 4y + z - 5 = 0$ de los puntos $P(2, 4, 12)$, $Q(0, -1, 1)$ y $R(1, 3, 2)$. ¿Qué puedes decir del punto Q? ¿Y qué tienen en común P y R?

$$d(P, \pi) = \left|\frac{8\cdot 2 - 4\cdot 4 + 12 - 5}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2}}\right| = \frac{7}{9} \qquad d(R, \pi) = \left|\frac{8\cdot 1 - 4\cdot 3 + 2 - 5}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2}}\right| = \frac{7}{9}$$

$$d(Q, \pi) = \left|\frac{8\cdot 0 - 4\cdot(-1) + 1 - 5}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2}}\right| = 0$$

El punto Q pertenece al plano y los puntos P y R equidistan de él.

116 Calcula la distancia entre las siguientes parejas de planos.

a) $\pi: \left.\begin{array}{l} x = -4 + 2\lambda + 2\mu \\ y = 1 + \lambda - \mu \\ z = 2 - \lambda - 5\mu \end{array}\right\}$ $\qquad \pi': \left.\begin{array}{l} x = 4 + 4\mu \\ y = 3 + \lambda + \mu \\ z = -4 + 2\lambda - 4\mu \end{array}\right\}$

b) $\pi: \left.\begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda - \mu \\ y = -2\lambda + \mu \\ z = 3 + \mu \end{array}\right\}$ $\qquad \pi': \left.\begin{array}{l} x = 5 + 4\mu \\ y = -1 + \lambda - 2\mu \\ z = 8 + 3\lambda + 2\mu \end{array}\right\}$

c) $\pi: 2x - 4y + z - 7 = 0$ $\qquad \pi': -x + 3y - 5z + 9 = 0$

a) Escribimos los planos en forma implícita.

$$\pi: \begin{vmatrix} x+4 & y-1 & z-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -6x+8y-4z-24=0$$

$$\pi': \begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z+4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -6x+8y-4z-16=0$$

Los planos son paralelos. Tomando $P(4, 3, -4) \in \pi'$.

$$d(\pi, \pi') = d(\pi, P) = \frac{|-6\cdot 4+8\cdot 3-4\cdot(-4)-24|}{\sqrt{36+64+16}} = \frac{8}{\sqrt{116}} = \frac{4\sqrt{29}}{29}$$

b) Escribimos los planos en forma implícita.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2x-3y+z-1=0$$

$$\pi': \begin{vmatrix} x-5 & y+1 & z-8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8x+12y-4z+4=0$$

Los planos son coincidentes $\rightarrow d(\pi, \pi') = 0$.

c) Los planos son secantes $\rightarrow d(\pi, \pi') = 0$.

117 **Halla la distancia del punto $P(-5, 2, -2)$ al plano de ecuación $\pi: 2x - y + z - 4 = 0$. Obtén la proyección ortogonal de P sobre el plano π, que es un punto P'. Comprueba que la distancia de P a P' es la misma que de P al plano π.**

$$d(P, \pi) = \left|\frac{2\cdot(-5)-2+(-2)-4}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}\right| = 3\sqrt{6}$$

Hallamos la proyección ortogonal P' del punto P sobre el plano π.

- Recta perpendicular a π que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{r} P(-5, 2, -2) \\ \vec{n}_\pi = (2, -1, 1) \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = -5+2\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = -2+\lambda \end{array}\right\}$$

- Intersección entre la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{r} x = -5+2\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = -2+\lambda \\ 2x-y+z-4=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \\ \lambda = 3 \end{array}\right. \rightarrow P'(1, -1, 1)$$

Hallamos la distancia de P a P'.

$$d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(6, -3, 3)| = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \rightarrow d(P, P') = d(P, \pi)$$

Producto escalar

118 Halla dos puntos de r: $\left.\begin{array}{l} x=-3+p \\ y=-2 \\ z=-5+p \end{array}\right\}$ y de s: $\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-11}{3}=\dfrac{z+2}{-2}$

que se encuentren a la mínima distancia.

Hallamos un punto $P \in r$ y un punto $Q \in s$ con la condición de que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{r} P(-3+p,-2,-5+p) \\ Q(6+2q, 11+3q,-2-2q) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ}=(-p+2q+9,\,3q+13,\,-p-2q+3)$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}_r=(-p+2q+9, 3q+13,-p-2q+3) \cdot(1,0,1)=12-2p=0 \rightarrow p=6$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_s=(-p+2q+9, 3q+13,-p-2q+3) \cdot(2,3,-2)=17q+51=0$$

$$q=-3$$

Por tanto, los puntos buscados son $P(3,-2,1)$ y $Q(0,2,4)$.

119 a) Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r_1 que pasa por los puntos $A(1, 2, 3)$ y $B(2, 2, 3)$.

b) Calcula la ecuación general del plano π que pasa por los puntos A, B y $C(2, 2, 4)$.

c) ¿Cuántos planos distintos pueden formarse con los puntos A, B, C y $D(1, 2, 4)$? Justifica tu respuesta.

d) Prueba que los puntos A, B, C y D anteriores forman un cuadrado y calcula su área.

(Cantabria. Junio 2005. Bloque 3. Opción A)

a) $\left.\begin{array}{r} A(1,2,3) \\ \overrightarrow{AB}=(1,0,0) \end{array}\right\} \rightarrow r:\left.\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=2 \\ z=3 \end{array}\right\} \rightarrow r:\left.\begin{array}{l} y=2 \\ z=3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} A(1,2,3) \\ \overrightarrow{AB}=(1,0,0) \\ \overrightarrow{AC}=(1,0,1) \end{array}\right\} \rightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right|=y-2=0$

c) $\pi: y-2=0 \xrightarrow{D(1,2,4)} 2-2=0 \rightarrow D \in \pi$

Con los puntos A, B, C y D sólo puede formarse un plano.

d) $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$ $\quad\quad \overrightarrow{BC}=(0,0,1)$

$\overrightarrow{CD}=(-1,0,0)$ $\quad\quad \overrightarrow{DA}=(0,0,-1)$

Estos vectores son de módulo uno y además paralelos dos a dos, por tanto, generan un cuadrado de área 1.

120 De una recta r se sabe que está contenida en el plano π de ecuación $x-y=0$, que $A(0, 0, 0)$ pertenece a r, y que el vector que une A y $B(1, 0, -1)$ es perpendicular a r. Determina la recta r y calcula la distancia entre r y el plano paralelo a π que pasa por B.

(Castilla y León. Septiembre 2007. Prueba B. Problema 1)

- El vector director de la recta r, $\vec{u}_r=(a, b, c)$, es perpendicular al vector normal del plano π, $\vec{n}_\pi=(1,-1,0)$

  $\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi=(a, b, c) \cdot(1,-1,0)=a-b=0 \rightarrow a=b$

  El vector director de la recta es de la forma $\vec{u}_r=(a, a, c)$.

- El vector director de la recta r, $\vec{u}_r = (a, a, c)$, es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB} = (1, 0, -1)$.

  $\vec{u}_r \cdot \overrightarrow{AB} = (a, a, c) \cdot (1, 0, -1) = a - c = 0 \rightarrow a = c$

  El vector director de la recta es de la forma $\vec{u}_r = (a, a, a)$. Por ejemplo, para $a = 1$, el vector $\vec{u}_r = (1, 1, 1)$ es un vector director de r.

  Por tanto, la ecuación de la recta r es:

  $$\left.\begin{array}{ll} \text{Punto:} & A(0,0,0) \\ \text{Vector director:} & \vec{u}_r = (1,1,1) \end{array}\right\} \rightarrow r: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

  El plano π' es paralelo al plano $\pi \rightarrow \pi'$: $x - y + D = 0$

  $$B(1, 0, -1) \in \pi' \rightarrow 1 - 0 + D = 0 \rightarrow D = -1$$

  π': $x - y - 1 = 0$

  Como r es paralela a π', la distancia de la recta al plano es la misma que la distancia del punto $A(0, 0, 0) \in r$ al plano π'.

  $$d(r, \pi') = d(A, \pi') = \frac{|0 - 0 - 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

121 **a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano $\pi: x + y + z = 3$.**

b) Obtén el punto de corte de la recta con el plano π.

c) Halla el punto de la recta $\left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array}\right\}$ cuya distancia al punto $P(1, 0, 2)$ sea $\sqrt{5}$.

(Aragón. Junio 2008. Bloque 2. Opción B)

a) $$\left.\begin{array}{ll} \text{Punto:} & A(0,0,0) \\ \text{Vector director:} & \vec{n}_\pi = (1,1,1) \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \\ x + y + z = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ \lambda = 1 \end{array}\right. \rightarrow P(1, 1, 1)$$

c) Un punto genérico de la recta r es $Q(\lambda, 3 - \lambda, 1 + 2\lambda)$.

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{5} \rightarrow (\lambda - 1)^2 + (3 - \lambda)^2 + (2\lambda - 1)^2 = (\sqrt{5})^2$$
$$\rightarrow 6\lambda^2 - 12\lambda + 11 = 5 \rightarrow \lambda = 1$$

Por tanto, el punto buscado es $Q(1, 2, 3)$.

122 **La trayectoria de un proyectil viene dada por la recta: r: $\left.\begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array}\right\}$.**

a) Estudia si el proyectil impacta con la superficie determinada por el plano.

b) Calcula el punto de impacto y la distancia recorrida por el proyectil desde el punto inicial $P(2, 3, 1)$ hasta el punto de impacto.

(Murcia. Junio 2006. Bloque 2. Cuestión B)

a) $\left.\begin{array}{r} x = 2 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \\ 3x + y - z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 5 \\ z = 5 \\ \lambda = 2 \end{array}\right.$

Este sistema tiene solución, por tanto, el proyectil impacta con la superficie determinada por el plano.

b) El punto del impacto es $Q(0, 5, 5)$.

$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-2, 2, 4)| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

123 **Halla los puntos de la recta $r: x - 1 = y + 2 = z$ que equidistan de los planos $\pi_1: 4x - 3z - 1 = 0$ y $\pi_2: 3x + 4y - 1 = 0$.**

(Cataluña. Junio 2007. Cuestión 4)

Un punto genérico de la recta r es $P(1 + \lambda, -2 + \lambda, \lambda)$.

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \rightarrow \frac{|4 + 4\lambda - 3\lambda - 1|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|3 + 3\lambda - 8 + 4\lambda - 1|}{\sqrt{9 + 16}}$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3 + \lambda = 7\lambda - 6 \rightarrow \lambda = \dfrac{3}{2} \\ 3 + \lambda = -7\lambda + 6 \rightarrow \lambda = \dfrac{3}{8} \end{array}\right.$$

Los puntos son $Q_1\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y $Q_2\left(\frac{11}{8}, -\frac{13}{8}, \frac{3}{8}\right)$.

124 **Calcula la distancia entre los planos $x + y - z = 5$ y $x + y - z - 1 = 0$.**

(Baleares. Junio 2004. Opción A. Cuestión 1)

Los planos son paralelos. La distancia entre los dos planos es la misma que la distancia entre un punto del primer plano al segundo plano.

$A(3, 2, 0) \in \pi : x + y - z = 5$

$$d(\pi, \pi') = d(A, \pi') = \frac{|3 + 2 - 0 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

125 **Sean P y Q los puntos del espacio de coordenadas $P(0, 0, 0)$ y $Q(0, 1, 2)$. Encuentra la condición que debe cumplir un punto de coordenadas $A(x, y, z)$ para que la distancia de A hasta P sea igual que la distancia desde A hasta Q.**

¿El conjunto de todos los puntos que satisfacen esta condición forma un plano? Razona la contestación.

(País Vasco. Junio 2006. Bloque B. Cuestión B)

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PA} = (x, y, z) \\ \overrightarrow{QA} = (x, y - 1, z - 2) \end{array}\right\} \rightarrow |\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{QA}|$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2} \rightarrow 2y + 4z = 5$$

La condición que deben cumplir las coordenadas del punto $A(x, y, z)$ es que $2y + 4z = 5$.

El conjunto de todos los puntos que cumplen esta condición es el plano $\pi: 2y + 4z = 5$.

126 Un helicóptero situado en el punto $P(1, 2, 1)$ quiere aterrizar en el plano $\pi: x + y + 3z = 0$.

a) Calcula la ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que le lleve al punto más cercano del plano π.

b) Calcula dicho punto.

c) Calcula la distancia que debe recorrer.

(Murcia. Junio 2007. Bloque 2. Cuestión A)

a) La trayectoria es la recta perpendicular al plano que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Punto:} & P(1, 2, 1)\\ \text{Vector director:} & \vec{n}_\pi = (1, 1, 3)\end{array}\right\} \to r: \left.\begin{array}{l}x = 1 + \lambda\\ y = 2 + \lambda\\ z = 1 + 3\lambda\end{array}\right\}$$

b)
$$\left.\begin{array}{r}x = 1 + \lambda\\ y = 2 + \lambda\\ z = 1 + 3\lambda\\ x + y + 3z = 0\end{array}\right\} \to \begin{cases} x = \dfrac{5}{11}\\ y = \dfrac{16}{11}\\ z = -\dfrac{7}{11}\\ \lambda = -\dfrac{6}{11}\end{cases} \to Q\left(\frac{5}{11}, \frac{16}{11}, -\frac{7}{11}\right)$$

c) $d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \left|\left(-\dfrac{6}{11}, -\dfrac{6}{11}, -\dfrac{18}{11}\right)\right| = \dfrac{6\sqrt{11}}{11}$

127 Halla razonadamente las ecuaciones de los dos planos paralelos al plano π de ecuación $\pi: 12x + 3y - 4z = 7$ que distan 6 unidades de π.

(C. Valenciana. Junio 2001. Ejercicio A. Problema 1)

π_1 paralelo al plano $\pi \to \pi_1: 12x + 3y - 4z + D_1 = 0$

π_2 paralelo al plano $\pi \to \pi_2: 12x + 3y - 4z + D_2 = 0$

Como $A(0, 1, -1) \in \pi$:

$$d(\pi, \pi_1) = d(A, \pi_1) = \frac{|12 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) + D|}{\sqrt{12^2 + 3^2 + (-4)^2}} = 6$$

$$|D + 7| = 78 \to \begin{cases} D = 71\\ D = -85\end{cases}$$

Los planos son: $\pi_1: 12x + 3y - 4z + 71 = 0$ y $\pi_2: 12x + 3y - 4z - 85 = 0$

128 Halla la ecuación general del plano que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (1, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 3).

Halla los puntos de la recta $x = y = z$ que están a distancia $\dfrac{1}{7}$ de este plano.

(Baleares. Junio 2002. Opción B. Cuestión 4)

Si $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 3)$:

$$\left.\begin{array}{r} A(1, 0, 0) \\ \overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 3) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6x + 3y + 2z - 6 = 0$$

Un punto genérico de la recta r: $x = y = z$ es de la forma $P(\lambda, \lambda, \lambda)$.

$$d(P, \pi) = \frac{|6 \cdot \lambda + 3 \cdot \lambda + 2\lambda - 6|}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{1}{7} \rightarrow |11\lambda - 6| = 1 \rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{1+6}{11} = \dfrac{7}{11} \\ \lambda = \dfrac{-1+6}{11} = \dfrac{5}{11} \end{cases}$$

Los puntos buscados son: $Q_1\left(\frac{7}{11}, \frac{7}{11}, \frac{7}{11}\right)$ y $Q_2\left(\frac{5}{11}, \frac{5}{11}, \frac{5}{11}\right)$.

129 **a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta** $\left.\begin{array}{l} x + y + z - 3 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{array}\right\}$ **que pasa por el punto (5, 0, 10).**

b) Hallar la distancia de dicho plano al punto (2, 1, 0).

(La Rioja. Septiembre 2002. Propuesta B. Ejercicio 5)

a) El vector director de la recta es el vector normal del plano que buscamos.

$$r: \left.\begin{array}{r} x + y + z - 3 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = 7 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -4 + 2\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u_r} = (-3, 1, 2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Punto:} & P(5, 0, 10) \\ \text{Vector normal:} & \vec{u_r} = (-3, 1, 2) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: -3x + y + 2z - 5 = 0$$

b) $$d(\pi\,(2, 1, 0)) = \frac{|-3 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{7}$$

130 **Halla la distancia del plano $\pi: 4x - 10y + 2z = -1$ al plano σ:** $\left.\begin{array}{l} x = 2\lambda + 3\mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda - \mu \end{array}\right\}$.

(Galicia. Junio 2002. Bloque 2. Pregunta 1)

Determinamos sus posiciones relativas.

$$\left.\begin{array}{r} A(0, 0, 0) \\ \vec{u_\sigma} = (2, 1, 1) \\ \vec{v_\sigma} = (3, 1, -1) \end{array}\right\} \rightarrow \sigma: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2x + 5y - z = 0 \rightarrow n_\sigma = (-2, 5, -1)$$

π: $4x - 10y + 2z = -1 \rightarrow \vec{n_\pi} = (4, -10, 2)$

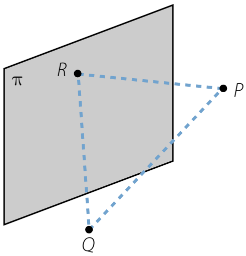
$\vec{n_\sigma}$ y $\vec{n_\pi}$ son proporcionales $\rightarrow \sigma$ y π son paralelos.

La distancia entre los dos planos es igual a la distancia entre un punto $A(0, 0, 0) \in \sigma$ y el plano π.

$$d(\sigma, \pi) = d(A, \pi) = \frac{|4 \cdot 0 - 10 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{16 + 100 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{120}} = \frac{\sqrt{30}}{60}$$

131 Construye un triángulo equilátero de forma que dos de sus vértices sean $P(1, 2, 3)$ y $Q(-1, 4, 3)$ y el tercer vértice R esté en el plano $\pi: x+y+z=2$. ¿Qué área tiene?

(Navarra. Junio 2003. Opción C. Pregunta 1)



- $R(a, b, c) \in \pi \rightarrow a+b+c=2$
- $d(P, Q) = d(P, R) = d(Q, R)$

$$\sqrt{(-2)^2+2^2+0^2} = \sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2} = \sqrt{(a+1)^2+(b-4)^2+(c-3)^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 8 = (a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2 \\ 8 = (a+1)^2+(b-4)^2+(c-3)^2 \end{cases}$$

Tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=2 \\ (a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2=8 \\ (a+1)^2+(b-4)^2+(c-3)^2=8 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} a_1=-1,\ b_1=2,\ c_1=1 \\ a_2=-\dfrac{5}{3},\ b_2=\dfrac{4}{3},\ c_2=\dfrac{7}{3} \end{cases}$$

Obtenemos dos soluciones: $R_1(-1, 2, 1)$ y $R_2\left(-\dfrac{5}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$

Calculamos el área:

$\text{Base} = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Como los ángulos de un triángulo equilátero valen 60°:

$$\text{Altura} = \sqrt{8}\cdot \text{sen } 60° = \sqrt{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$$

$$\text{Área} = \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{3}$$

132 Sean las rectas:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2} \qquad s: \left.\begin{array}{r} x-3y-5=0 \\ x-3z-8=0 \end{array}\right\}$$

a) Halla la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

b) Calcula la distancia entre el plano π y la recta s.

(Madrid. Septiembre 2007. Opción B. Ejercicio 3)

a) $s: \left.\begin{array}{r} x-3y-5=0 \\ x-3z-8=0 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x=8+3\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}_s = (3, 1, 1) \qquad Q_s(8, 1, 0)$

$r: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{2} \rightarrow \vec{v}_r = (1, -1, 2) \qquad P_r(0, 1, 2)$

El plano π tiene como vectores directores $\vec{u}_s$ y $\vec{v}_r$ y pasa por el punto $P_r(0, 1, 2)$.

$$\left.\begin{array}{r} P_r(0,1,2) \\ \vec{v}_r = (1,-1,2) \\ \vec{u}_s = (3,1,1) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3x+5y+4z-13=0$$

b) La distancia de la recta s al plano π es la distancia de un punto de la recta s al plano.

Tomamos $Q_s(8, 1, 0) \in s$.

$$d(s, \pi) = d(Q_s, \pi) = \frac{|-3\cdot 8 + 5\cdot 1 + 4\cdot 0 - 13|}{\sqrt{9+25+16}} = \frac{32}{\sqrt{50}} = \frac{16\sqrt{2}}{5}$$

133 **Sean los puntos $A(\lambda, 2, \lambda)$, $B(2, -\lambda, 0)$ y $C(\lambda, 0, \lambda+2)$.**

a) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A, B y C estén alineados?

b) Comprobar que si A, B y C no están alineados el triángulo que forman es isósceles.

c) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor de $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen de coordenadas.

(Madrid. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 4)

a) Para que A, B y C estén alineados, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen que ser proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2-\lambda, -2-\lambda, -\lambda) \\ \overrightarrow{AC} = (0,-2,2) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2-\lambda}{0} = \frac{-2-\lambda}{-2} = \frac{-\lambda}{2}$$

$\rightarrow$ No existe solución.

Los tres puntos no están alineados.

b) $\overrightarrow{AB} = (2-\lambda, -2-\lambda, -\lambda)$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2-\lambda)^2 + (-2-\lambda)^2 + (-\lambda)^2} = \sqrt{3\lambda^2+8}$

$\overrightarrow{AC} = (0,-2,2)$ $\quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

$\overrightarrow{BC} = (\lambda-2, \lambda, \lambda+2)$ $\quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(\lambda-2)^2 + \lambda^2 + (\lambda+2)^2} = \sqrt{3\lambda^2+8}$

Luego $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{B}|$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. El triángulo es siempre isósceles.

c) El plano pasa por $A(0, 2, 0)$ y tiene por vectores directores $\overrightarrow{AB} = (2, -2, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (0, -2, 2)$:

$$\left.\begin{array}{r} A(0,2,0) \\ \overrightarrow{AB} = (2,-2,0) \\ \overrightarrow{AC} = (0,-2,2) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4x-4y-4z+8=0$$

$$\rightarrow \pi: x+y+z-2=0$$

$$d(O, \pi) = \frac{|-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

134 La recta $x = \dfrac{1-y}{3} = \dfrac{2-z}{2}$ corta a los tres planos coordenados en tres puntos. Determina las coordenadas de esos puntos, las distancias existentes entre cada par de ellos e indica cuál es el que se encuentra en medio de los otros dos.

(Aragón. Septiembre 2004. Opción A. Cuestión 2)

- Corte con eje X.

$$x = 0 \rightarrow 0 = \frac{1-y}{3} = \frac{2-z}{2} \rightarrow \left.\begin{matrix} 1-y=0 \\ 2-z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} y=1 \\ z=2 \end{matrix}\right. \rightarrow P(0, 1, 2)$$

- Corte con eje Y.

$$y = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3} = \frac{2-z}{2} \rightarrow \left.\begin{matrix} x=\dfrac{1}{3} \\ 6-3z=2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x=\dfrac{1}{3} \\ z=\dfrac{4}{3} \end{matrix}\right. \rightarrow Q\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$$

- Corte con eje Z.

$$z = 0 \rightarrow x = \frac{1-y}{3} = \frac{2}{2} \rightarrow \left.\begin{matrix} x=1 \\ 1-y=3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x=1 \\ y=-2 \end{matrix}\right. \rightarrow R(1, -2, 0)$$

La distancia entre cada par de puntos son los módulos de los vectores que determinan.

$\overrightarrow{PQ} = \left(\dfrac{1}{3}, -1, -\dfrac{2}{3}\right)$ $\qquad |\overrightarrow{PQ}| = \dfrac{\sqrt{14}}{3}$

$\overrightarrow{PR} = (1, -3, -2)$ $\qquad |\overrightarrow{PR}| = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{QR} = \left(\dfrac{2}{3}, -2, -\dfrac{4}{3}\right)$ $\qquad |\overrightarrow{QR}| = \dfrac{2\sqrt{14}}{3}$

La distancia más larga es la que hay desde el punto P al punto R, por tanto, el punto Q es el que está en el medio de los otros dos.

135 Se consideran los puntos $A(0, 1, 0)$ y $B(1, 0, 1)$. Se pide:

a) Escribe la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ que equidistan de A y B.

b) Determina la ecuación que verifican los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a A es igual a la distancia de A a B.

c) Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x, y, z)$ del plano $x + y + z = 3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A.

(Madrid. Septiembre 2006. Opción A. Ejercicio 4)

a) $d(A, X) = d(B, X)$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2} \rightarrow 2x - 2y + 2z - 1 = 0$$

La ecuación que verifican los puntos X es un plano.

b) $d(A, X) = d(A, B)$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} = \sqrt{3} \rightarrow x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3$$

Se trata de la ecuación de la esfera de centro el punto $A(0, 1, 0)$ y radio $\sqrt{3}$.

c) $C \in \pi$: $x + y + z = 3 \rightarrow C(\lambda, \mu, 3 - \lambda - \mu)$

El triángulo ABC es rectángulo con ángulo recto en A:

$\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (\lambda, \mu - 1, 3 - \lambda - \mu)$ son perpendiculares.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \rightarrow \lambda - \mu + 1 + 3 - \lambda - \mu = 0 \rightarrow \mu = 2$

Por tanto, los puntos que buscamos son de la forma $C(\lambda, 2, 1 - \lambda)$. Es decir, pertenecen a la recta:

$$r: \left.\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= 2 \\ z &= 1 - \lambda \end{aligned}\right\}$$

136 **Demostrar que las rectas:**

$$L_1: \left.\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 3 + 3t \\ z &= 3 + t \end{aligned}\right\} \qquad L_2: \left.\begin{aligned} 3x - y + 4 &= 0 \\ x - z + 4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

son paralelas.

Encontrar la ecuación del plano paralelo al determinado por dichas rectas y que diste de él $\sqrt{6}$.

(Murcia. Septiembre 2005. Bloque 2. Cuestión 2)

$$L_1: \left.\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 3 + 3t \\ z &= 3 + t \end{aligned}\right\} \rightarrow \vec{u}_1 = (1, 3, 1) \qquad P_1(1, 3, 3)$$

$$L_2: \left.\begin{aligned} 3x - y + 4 &= 0 \\ x - z + 4 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow L_2: \left.\begin{aligned} x &= -4 + \lambda \\ y &= -8 + 3\lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}\right\} \rightarrow \vec{v}_2 = (1, 3, 1) \qquad Q_2(-4, -8, 0)$$

Las dos rectas tienen el mismo vector director, por tanto, son paralelas.

El plano determinado por L_1 y L_2 tiene como vectores directores $\vec{u}_1$ y $\overrightarrow{P_1Q_2}$, y pasa por el punto $P_1(1, 3, 3)$.

$$\left.\begin{aligned} P_1(1, 3, 3) \\ \vec{u}_1 = (1, 3, 1) \\ \overrightarrow{P_1Q_2} = (-5, -11, -3) \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -5 & -11 & -3 \end{vmatrix} = 2x - 2y + 4z - 8 = 0 \rightarrow \pi: x - y + 2z - 4 = 0$$

Un plano paralelo a π será de la forma π': $x - y + 2z + D = 0$. Así:

$$d(\pi, \pi') = d(P_1, \pi') = \frac{|1 - 3 + 6 + D|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{|4 + D|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

$$|4 + D| = 6 \rightarrow \begin{cases} D = 6 - 4 = 2 \\ D = -6 - 4 = -10 \end{cases}$$

Los planos buscados son σ_1: $x - y + 2z + 2 = 0$ y σ_2: $x - y + 2z - 10 = 0$.

137 El plano π es el que pasa por los puntos $P_1(-3, 0, 0)$, $P_2(1, -1, -1)$ y $P_3(-1, 0, -1)$. Encuentra los dos puntos de la recta:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{-1}$$

que están a distancia 1 del plano π.

(Navarra. Septiembre 2007. Grupo 1. Opción B)

El plano está determinado por el punto $P_1(-3, 0, 0)$ y los vectores directores $\overrightarrow{P_1P_3} = (2, 0, -1)$.

$$\left.\begin{array}{r} P_1(-3, 0, 0) \\ \overrightarrow{P_1P_2} = (4, -1, -1) \\ \overrightarrow{P_1P_3} = (2, 0, -1) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x+3 & y & z \\ 4 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = x + 2y + 2z + 3 = 0$$

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{-1} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = -2-\lambda \end{array}\right\}$$

Un punto genérico de r es $A(\lambda, 1, -2-\lambda)$.

$$d(A, \pi) = \frac{|\lambda + 2\cdot 1 + 2(-2-\lambda) + 3|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|1-\lambda|}{3} = 1$$

$$|1-\lambda| = 3 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 3+1 = 4 \\ \lambda = -3+1 = -2 \end{cases}$$

Los puntos buscados son $A_1(4, 1, -6)$ y $A_2(-2, 1, 0)$.

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 a) Definición de módulo de un vector. Propiedades.

b) Determine los valores de a y b ($a > 0$) para que los vectores $\vec{u} = (a, b, b)$, $\vec{v} = (b, a, b)$ y $\vec{w} = (b, b, a)$ sean unitarios y ortogonales dos a dos.

(Galicia. Junio 2003. Bloque 2. Pregunta 1)

a) El módulo de un vector es la raíz cuadrada positiva del producto escalar del vector por si mismo.

Propiedades:
1. $|\vec{u}| \geq 0$
2. $|k\vec{u}| = |k||\vec{u}|, \forall k \in \mathbb{R}$
3. $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$

b) $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1 \rightarrow \sqrt{a^2 + 2b^2} = 1 \rightarrow a^2 + 2b^2 = 1$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = ab + ba + bb = 2ab + b^2 = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = bb + ab + ba = 2ab + b^2 = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = ab + bb + ba = 2ab + b^2 = 0$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a^2+2b^2=1 \\ 2ab+b^2=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} a^2+2b^2=1 \\ b(2a+b)=0 \end{array}\right\} \to \begin{cases} b=0,\ a=\pm 1 \\ b=-2a \to \begin{cases} a=\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{2}{3} \\ a=-\dfrac{1}{3},\ b=\dfrac{2}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Como a > 0, tenemos dos soluciones: $\begin{cases} a=1,\ b=0 \\ a=\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$

2 Determina una constante a para que el plano de ecuación $\pi: ax+y+z=2$ forme un ángulo de $\dfrac{\pi}{3}$ radianes con el plano $z=0$.

(Extremadura. Julio 2003. Repertorio A. Ejercicio 4)

$\pi: ax+y+z=2 \to \vec{n}_\pi=(a,1,1)$

$\pi': z=0 \to \vec{n}_{\pi'}=(0,0,1)$

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|(a,1,1)\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{a^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+2}}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+2}} \to a^2+2=4 \to a=\pm\sqrt{2}$$

3 Encuentra los puntos de la recta $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-2}$ que están a distancia 1 del plano $\pi: 2x-2y+z-5=0$.

(Navarra. Junio 2005. Grupo 1. Opción A)

$\pi: 2x-2y+z-5=0 \to \vec{n}_\pi=(2,-2,1)$

$$r: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-2} \to r: \left.\begin{array}{l} x=2+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-2\lambda \end{array}\right\} \to \vec{u}_r=(1,1,-2)$$

Un punto genérico de r es $A(2+\lambda, 1+\lambda, -2\lambda)$.

$$d(A,\pi)=\frac{|2(2+\lambda)-2(1+\lambda)+(-2\lambda)-5|}{\sqrt{4+4+1}}=1$$

$$\frac{|-2\lambda-3|}{3}=1 \to |-2\lambda-3|=3 \to \begin{cases} \lambda=\dfrac{-3-3}{2}=-3 \\ \lambda=\dfrac{-3+3}{2}=0 \end{cases}$$

Los puntos buscados son $A_1(-1,-2,6)$ y $A_2(2,1,0)$.

4 Encuentra las ecuaciones de los planos paralelos a $\pi: 2x - y + 2z = 3$ situados a 6 unidades de distancia del mismo.

(Cataluña. Septiembre 2007. Cuestión 1)

π' paralelo a $\pi \rightarrow \pi': 2x - y + 2z + D = 0$

Si tomamos $P(1, -1, 0) \in \pi$, tenemos:

$$d(\pi, \pi') = d(P, \pi') = \frac{|2 \cdot 1 - (-1) + 2 \cdot 0 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 6$$

$$\frac{|3 + D|}{3} = 6 \rightarrow |3 + D| = 18 \rightarrow \begin{cases} D = 18 - 3 = 15 \\ D = -18 - 3 = -21 \end{cases}$$

Por tanto, los planos son $\pi_1: 2x - y + 2z + 15 = 0$ y $\pi_2: 2x - y + 2z - 21 = 0$.

5 a) Halla un punto de la recta $r: \left.\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= -t \\ z &= -1 \end{aligned}\right\}$ equidistante de los puntos $P(-1, 2, 1)$ y $Q(0, 3, 1)$.

b) Calcula la ecuación implícita de un plano π de modo que el simétrico del punto P respecto del plano π sea el punto Q.

(Castilla-La Mancha. Junio 2006. Bloque 4. Pregunta B)

Un punto genérico de la recta r es $R(1 + 2t, -t, -1)$.

$\overrightarrow{PR} = (2t + 2, -t - 2, -2)$

$\overrightarrow{QR} = (1 + 2t, -t - 3, -2)$

$$|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{QR}| \rightarrow \sqrt{(2t + 2)^2 + (-t - 2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{(2t + 1)^2 + (-t - 3)^2 + (-2)^2}$$

$$\rightarrow (2t + 2)^2 + (-t - 2)^2 \rightarrow (2t + 1)^2 + (-t - 3)^2 \rightarrow t = 1$$

Por tanto, un punto de la recta r equidistante de los puntos P y Q es $R(3, -1, -1)$.

6 Dados los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(0, 1, 0)$ se pide:

a) Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describir dicho conjunto de puntos.

b) Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican dist $(P, S) = 2$ dist (Q, S), donde «dist» significa distancia.

(Madrid. Septiembre 2008. Opción A. Ejercicio 3)

a) Buscamos los puntos $R(a, b, c)$, tales que $d(P, R) = d(Q, R)$.

$$|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{QR}| \rightarrow \sqrt{(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 3)^2} = \sqrt{a^2 + (b - 1)^2 + c^2}$$

$$\rightarrow (a - 1)^2 + (c - 3)^2 = a^2 + c^2 \rightarrow a + 3c = 5 \rightarrow \begin{cases} a = 5 - 3\mu \\ b = \lambda \\ c = \mu \end{cases}$$

Los puntos que cumplen esta condición son de la forma $R(5 - 3\mu, \lambda, \mu)$

y forman el plano de ecuación $\pi: \left.\begin{aligned} x &= 5 - 3\mu \\ y &= \lambda \\ z &= \mu \end{aligned}\right\}$.

b) Hallamos la recta que pasa por P y Q.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Punto:} & P(1, 1, 3)\\ \text{Vector director:} & \overrightarrow{PQ} = (-1, 0, -3)\end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{r} x = 1-\lambda\\ y = 1\\ z = 3-3\lambda\end{array}\right\}$$

Un punto genérico de la recta es $S(1-\lambda, 1, 3-3\lambda)$.

$\overrightarrow{PS} = (-\lambda, 0, -3\lambda) \rightarrow |\overrightarrow{PS}| = \sqrt{10\lambda^2}$

$\overrightarrow{QS} = (1-\lambda, 0, -3\lambda) \rightarrow |\overrightarrow{QS}| = \sqrt{10\lambda^2 - 20\lambda + 10}$

$d(P, S) = 2 \cdot d(Q, S) \rightarrow \sqrt{10\lambda^2} = 2\sqrt{10\lambda^2 - 20\lambda + 10}$

$$\rightarrow 3\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases}\lambda = 2\\ \lambda = \dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Los puntos buscados son $S_1(-1, 1, -3)$ y $S_2\left(\dfrac{1}{3}, 1, 1\right)$.

7 **Hállense las ecuaciones de la recta r que pasa por $P(2, 1, -1)$, está contenida en el plano $\pi: x + 2y + 3z = 1$, y es perpendicular a la recta $s: \left.\begin{array}{l} x = 2z - 3\\ y = z + 4\end{array}\right\}$.**

(Castilla y León. Junio 2007. Prueba A. Cuestión 2)

Escribimos la recta s en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} x = -3 + 2\lambda\\ y = 4 + \lambda\\ z = \lambda\end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}_s = (2, 1, 1)$$

Hallamos el plano π' perpendicular al plano que pase por el punto P.

$$\pi': \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix} = x - 5y + 3z + 6 = 0$$

La recta r será $r: \left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1\\ x - y + 2z = 8\end{array}\right\}$

8 **Calcule la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta r.**

$$r: \left.\begin{array}{r} x = 1+\lambda\\ y = 1-\lambda\\ z = 1+2\lambda\end{array}\right\}$$

(Murcia. Septiembre 2006. Bloque 2. Cuestión A)

Calculamos el plano π que pasa por P y es perpendicular a r.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Punto:} & P(1, -1, 3)\\ \text{Vector normal:} & \vec{u}_r = (1, -1, 2)\end{array}\right\} \rightarrow \pi: x - y + 2z - 8 = 0$$

Hallamos el punto de corte Q de la recta r y el plano π.

$$\left.\begin{array}{r} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1+2\lambda \\ x-y+2z-8=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=0 \\ z=3 \\ \lambda=1 \end{array}\right. \rightarrow Q(2, 0, 3)$$

La distancia del punto P a la recta r es la distancia de P a Q.

$$d(P, Q)=\sqrt{(2-1)^2+(0+1)^2+(3-3)^2}=\sqrt{2}$$

9 **Determina los puntos de la recta r de ecuaciones r: $\left.\begin{array}{r} x=0 \\ y-1=\dfrac{z-3}{2} \end{array}\right\}$ que equidistan del plano π de ecuación π: $x+z=1$ y del plano π' de ecuación π': $y-z=3$.**

(Andalucía. Septiembre 2006. Opción A. Ejercicio 4)

$$s: \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y-1=\dfrac{z-3}{2} \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=\lambda \\ z=1+2\lambda \end{array}\right\}$$

Un punto genérico de la recta s es $P(0, \lambda, 1+2\lambda)$.

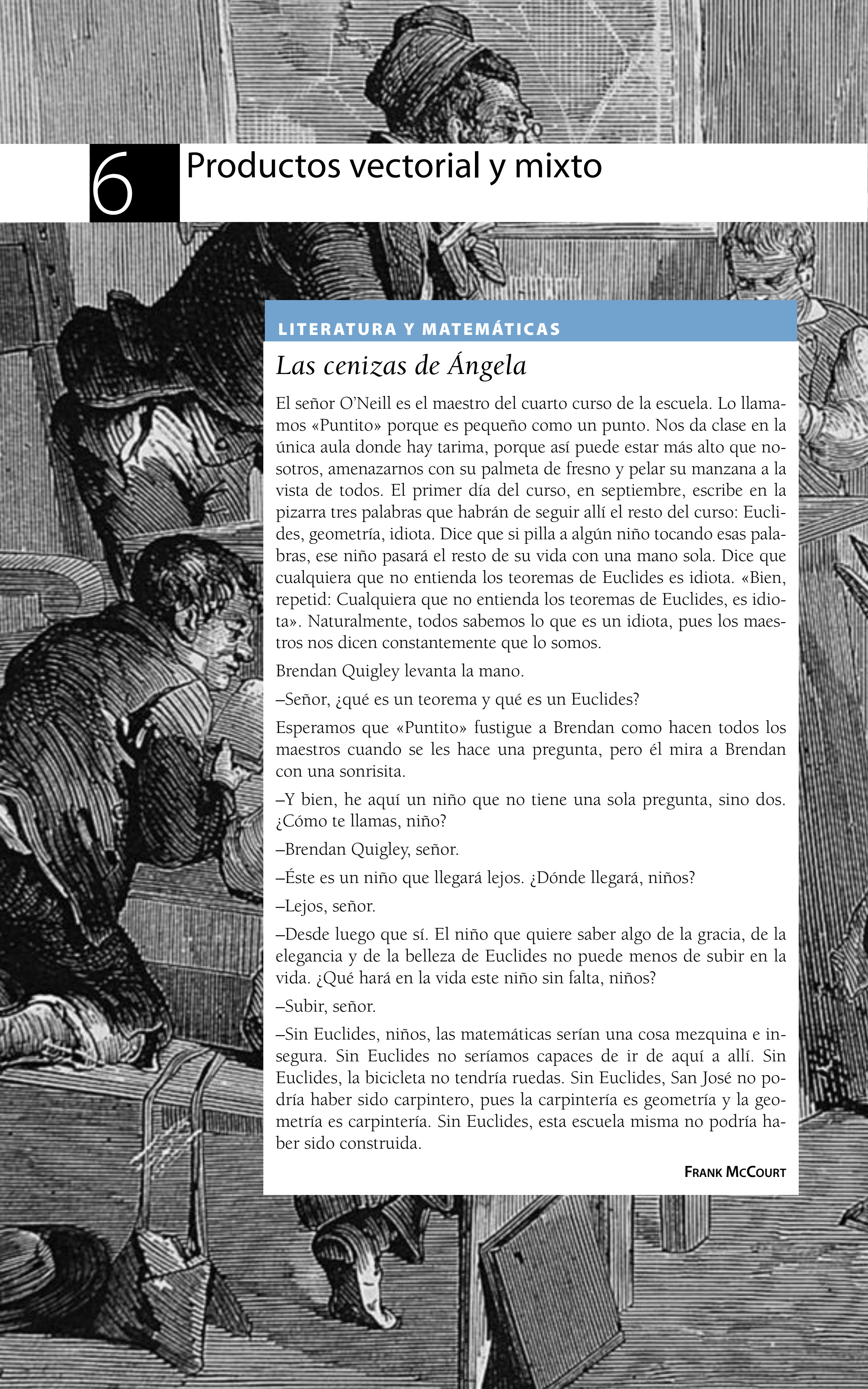
$$d(P, \pi)=d(P, \pi')$$

$$\frac{|1+2\lambda-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|\lambda-(1+2\lambda)-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

$$\frac{2\lambda}{\sqrt{2}}=\frac{|-\lambda-4|}{\sqrt{2}} \rightarrow 2\lambda=|-\lambda-4| \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda=-\dfrac{4}{3} \\ \lambda=\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

Los puntos buscados son $P_1\left(0, -\dfrac{4}{3}, -\dfrac{5}{3}\right)$ y $P_2\left(0, \dfrac{4}{3}, \dfrac{11}{3}\right)$.

6 Productos vectorial y mixto



LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Las cenizas de Ángela

El señor O'Neill es el maestro del cuarto curso de la escuela. Lo llamamos «Puntito» porque es pequeño como un punto. Nos da clase en la única aula donde hay tarima, porque así puede estar más alto que nosotros, amenazarnos con su palmeta de fresno y pelar su manzana a la vista de todos. El primer día del curso, en septiembre, escribe en la pizarra tres palabras que habrán de seguir allí el resto del curso: Euclides, geometría, idiota. Dice que si pilla a algún niño tocando esas palabras, ese niño pasará el resto de su vida con una mano sola. Dice que cualquiera que no entienda los teoremas de Euclides es idiota. «Bien, repetid: Cualquiera que no entienda los teoremas de Euclides, es idiota». Naturalmente, todos sabemos lo que es un idiota, pues los maestros nos dicen constantemente que lo somos.

Brendan Quigley levanta la mano.

–Señor, ¿qué es un teorema y qué es un Euclides?

Esperamos que «Puntito» fustigue a Brendan como hacen todos los maestros cuando se les hace una pregunta, pero él mira a Brendan con una sonrisita.

–Y bien, he aquí un niño que no tiene una sola pregunta, sino dos. ¿Cómo te llamas, niño?

–Brendan Quigley, señor.

–Éste es un niño que llegará lejos. ¿Dónde llegará, niños?

–Lejos, señor.

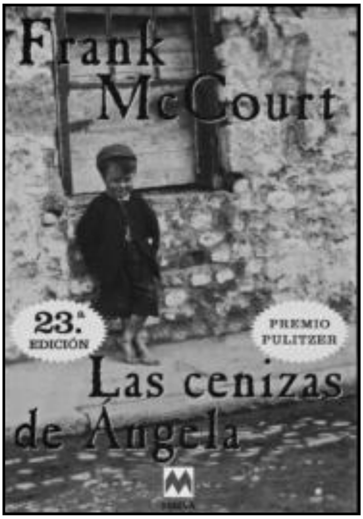
–Desde luego que sí. El niño que quiere saber algo de la gracia, de la elegancia y de la belleza de Euclides no puede menos de subir en la vida. ¿Qué hará en la vida este niño sin falta, niños?

–Subir, señor.

–Sin Euclides, niños, las matemáticas serían una cosa mezquina e insegura. Sin Euclides no seríamos capaces de ir de aquí a allí. Sin Euclides, la bicicleta no tendría ruedas. Sin Euclides, San José no podría haber sido carpintero, pues la carpintería es geometría y la geometría es carpintería. Sin Euclides, esta escuela misma no podría haber sido construida.

FRANK MCCOURT

Las cenizas de Ángela
Frank McCourt



En esta novela se narra la vida en Irlanda antes y durante la segunda guerra mundial. No contiene más referencias a las matemáticas que las que aparecen en la magistral descripción de la primera clase que imparte el profesor «Puntito».

–Jodido Euclides –murmura detrás de mí Paddy Clohessy. «Puntito» le dice con voz cortante:

–Tú, niño: ¿cómo te llamas?

–Clohessy, señor.

–Ah, el niño vuela con un ala. ¿Cuál es tu nombre de pila?

–Paddy.

–Paddy, ¿y qué más?

–Paddy, señor.

–Y ¿qué decías a McCourt, Paddy?

–Le decía que debíamos ponemos de rodillas y dar gracias a Dios de que haya existido Euclides.

–Ya lo creo, Clohessy. Veo la mentira podrida en tus labios. ¿Qué veo, niños?

–La mentira, señor.

–¿Y cómo está la mentira, niños?

–Podrida, señor.

–¿Dónde, niños, dónde?

–En sus labios, señor.

–Euclides era griego, niños. ¿Qué es un griego, Clohessy?

–Una especie de extranjero, señor.

–Clohessy, eres retrasado mental. Y bien, Brendan, sin duda tú debes de saber lo que es un griego, ¿no?

–Sí, señor. Euclides era griego.

«Puntito» le dirige la sonrisita. Dice a Clohessy que debe imitar el modelo de Quigley, que sabe lo que es un griego. Traza dos líneas, una junto a otra, y nos dice que son líneas paralelas, y que lo mágico y lo misterioso es que no se encuentran nunca, aunque se prolonguen hasta el infinito, aunque se prolonguen hasta los hombros de Dios, y eso, niños, está muy lejos, aunque ahora hay un judío alemán que está poniendo todo el mundo patas arriba con sus ideas sobre las líneas paralelas.

Escuchamos a «Puntito» y nos preguntamos qué tiene que ver todo esto con el estado del mundo, con que los alemanes lo invadan todo y bombardeen todo lo que se tiene en pie. No podemos preguntárselo nosotros, pero podemos hacer que Brendan Quigley se lo pregunte. Está claro que Brendan es el ojito derecho del maestro, y eso significa que puede hacerle las preguntas que quiera.

La geometría que se estudia en estos temas se llama *euclídea*, porque se ajusta a las ideas que expuso Euclides en uno de los libros más importantes de toda la historia: *Los Elementos*. Pero existen también geometrías *no euclídeas*. Investiga las diferencias que hay entre unas y otras, y escribe un breve trabajo con los datos obtenidos.

Se denomina **geometría no euclídea** a la rama de la geometría cuyos postulados y propiedades difieren en algún punto de los establecidos por Euclides.

Productos vectorial y mixto

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 **Calcula los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & -1 & y \\ 0 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x+2 & y & z-3 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 17$

b) $\begin{vmatrix} x & -1 & y \\ 0 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8x - 8y + 2$

c) $\begin{vmatrix} x+2 & y & z-3 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -12x + 12y + 3z - 33$

002 **Halla un punto y un vector director de la siguiente recta:**

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

Un punto es $P(1, 1, 1)$ y un vector director es $\vec{u} = (1, -1, 2)$.

003 **Calcula un punto y un vector normal de este plano:**

$$\pi: 2x - 3y + z + 5 = 0$$

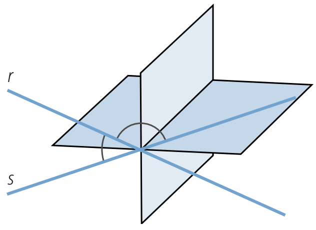
Un punto es $P(-4, -1, 0)$ y un vector normal es $\vec{n} = (2, -3, 1)$.

004 **Dibuja el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas:**

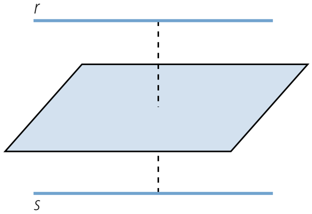
a) Que se cortan.

b) Que son paralelas.

a)



b)



005 **Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de coordenadas cartesianas es 10.**

El lugar geométrico es el plano de ecuación: $x + y + z - 10 = 0$.

ACTIVIDADES

001 **Calcula $\vec{u} \times \vec{v}$, sabiendo que $\vec{u} = (-1, 1, 0)$, $\vec{v} = (-1, 0, 1)$ y el ángulo que forman es $\alpha = 60°$.**

- Módulo: $|\vec{u}| = \sqrt{2}$ $\qquad |\vec{v}| = \sqrt{2}$

  $$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen } 60° = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

- Dirección: Hallamos el plano que tiene por vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y pasa por el origen de coordenadas.

  $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x + y + z = 0$$

  El vector $\vec{u} \times \vec{v}$ tiene la dirección del vector normal del plano $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

- Sentido: el del avance de un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

002 **Si $\vec{u} = (-1, 1, 0)$, $\vec{v} = (-1, 0, 1)$ y su ángulo es $\alpha = 60°$, halla el área del paralelogramo que forman.**

$$\text{Área del paralelogramo} = |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen } 60° = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

003 **Si $\vec{u} \times \vec{v} = 2\vec{t}$ y $\vec{u} \times \vec{w} = -\vec{t}$, calcula:**

a) $\vec{u} \times (\vec{w} - \vec{v})$ $\qquad$ **c) $3\vec{u} \times (-2\vec{w} + \vec{v})$**

b) $-\vec{u} \times (2\vec{w} + \vec{v})$ $\qquad$ **d) $(2\vec{w} + \vec{v}) \times (-\vec{u})$**

a) $\vec{u} \times (\vec{w} - \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{w} - \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{t} - 2\vec{t} = -3\vec{t}$

b) $-\vec{u} \times (2\vec{w} + \vec{v}) = \vec{u} \times (-2\vec{w}) - \vec{u} \times \vec{v} = -2(\vec{u} \times \vec{w}) - \vec{u} \times \vec{v} = 2\vec{t} - 2\vec{t} = \vec{0}$

c) $3\vec{u} \times (-2\vec{w} + \vec{v}) = -6(\vec{u} \times \vec{w}) + 3(\vec{u} \times \vec{v}) = 6\vec{t} + 6\vec{t} = 12\vec{t}$

d) $(2\vec{w} + \vec{v}) \times (-\vec{u}) = -2(\vec{w} \times \vec{u}) - (\vec{v} \times \vec{u}) = 2\vec{t} - 2\vec{t} = \vec{0}$

004 **Si $\vec{u} = (0, -1, 0)$, $\vec{v} = (-1, -2, 0)$ y $\vec{w} = (-4, 1, 1)$, halla:**

a) $\vec{u} \times (\vec{w} - \vec{v})$ $\qquad$ **c) $3\vec{u} \times (-2\vec{w} + \vec{v})$**

b) $-\vec{u} \times (2\vec{w} + \vec{v})$ $\qquad$ **d) $(2\vec{w} + \vec{v}) \times (-\vec{u})$**

a) $\vec{u} \times (\vec{w} - \vec{v}) = (0, -1, 0) \times (-3, 3, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 3\vec{k} = (-1, 0, -3)$

b) $-\vec{u} \times (2\vec{w} \times \vec{v}) = (0, 1, 0) \times (-9, 0, 2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 9\vec{k} = (2, 0, 9)$

c) $3\vec{u} \times (-2\vec{w} + \vec{v}) = (0, -3, 0) \times (7, -4, -2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & 0 \\ 7 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 21\vec{k} = (6, 0, 21)$

d) $(2\vec{w} + \vec{v}) \times (-\vec{u}) = (-9, 0, 2) \times (0, 1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -9 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 9\vec{k} = (-2, 0, -9)$

Productos vectorial y mixto

005 **Encuentra el vector normal al plano que pasa por:**

a) $A(1, 1, 1)$ $\quad B(3, 1, 0)$ $\quad C(-1, 0, 1)$

b) $D(0, 0, 0)$ $\quad E(2, 2, 2)$ $\quad F(0, 1, -2)$

a) El vector normal es:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} = (-1, 2, -2)$$

b) El vector normal es:

$$\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DF} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k} = (-6, 4, 2)$$

006 **Halla una base ortogonal que contenga a $\vec{u} = (2, -1, 0)$.**

Tomamos un vector no proporcional a $\vec{u}$, por ejemplo (0, 0, 1), y hallamos el segundo vector de la base, que llamamos $\vec{v}$.

$$\vec{v} = (2, -1, 0) \times (0, 0, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} = (-1, -2, 0)$$

Hallamos el tercer vector de la base, que llamamos $\vec{w}$.

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (2, -1, 0) \times (-1, -2, 0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -5\vec{k} = (0, 0, -5)$$

Una base $\mathcal{B} = \{(2, -1, 0), (-1, -2, 0), (0, 0, -5)\}$ es ortoganal.

007 **Halla una base de vectores ortogonales en el espacio. ¿Cuántas bases hay? Razona tu respuesta.**

Cualquier conjunto de tres vectores perpendiculares entre sí forman una base del espacio. Como existen infinitos conjuntos de tres vectores perpendiculares entre sí, hay infinitas bases.

Un ejemplo de base ortogonal es la base canónica: $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

008 **Calcula el vector director de la recta determinada por cada pareja de planos.**

a) $\pi_1\colon -y - z + 1 = 0$ $\quad \pi_2\colon 3x + z - 6 = 0$

b) $\pi_1\colon 2x - y - 3z = 0$ $\quad \pi_2\colon 3x - y + 5z = 0$

a) $$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_1 = (0, -1, -1) \\ \vec{n}_2 = (3, 0, 1) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

El vector director de la recta es $\vec{v} = (-1, -3, 3)$.

b) $$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_1 = (2, -1, -3) \\ \vec{n}_2 = (3, -1, 5) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - 19\vec{j} + \vec{k}$$

El vector director de la recta es $\vec{v} = (-8, -19, 1)$.

009 **Dada la recta:**

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

Halla su ecuación implícita, y comprueba que el producto vectorial de los vectores normales de los planos es proporcional a $\vec{v} = (1, -1, 2)$.

Hallamos la ecuación implícita de la recta r.

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{y+1}{-1} \\ x = \dfrac{z-1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + 1 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

Los vectores normales de los planos son:

$\vec{n}_1 = (1, 1, 0)$

$\vec{n}_2 = (2, 0, -1)$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} = (-1, 1, -2)$$

El vector $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-1, 1, -2)$ es proporcional a $\vec{v} = (1, -1, 2)$.

010 **Halla el área encerrada en los triángulos cuyos vértices son:**

a) $A(0, 0, 0)$ $B(-1, 2, 1)$ $C(-1, -1, -1)$

b) $A(3, 0, 0)$ $B(0, 2, 0)$ $C(0, 0, 1)$

a) Dos lados del triángulo son:

$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 1)$

$\overrightarrow{AC} = (-1, -1, -1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} = (-1, -2, 3)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\text{Área} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

b) Dos lados del triángulo son:

$\overrightarrow{AB} = (-3, 2, 0)$

$\overrightarrow{AC} = (-3, 0, 1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k} = (2, 3, 6)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\text{Área} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{7}{2}$$

011 **Calcula el área del triángulo cuyos vértices son:**

$A(2, 1, 3)$ $B(3, 0, 1)$ $C(-1, -2, 0)$

Comprueba que el resultado es independiente de los vectores que elijas para hallar el área.

$\overrightarrow{AB} = (1, -1, -2)$ $\overrightarrow{AC} = (-3, -3, -3)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 9\vec{j} - 6\vec{k} = (-3, 9, -6)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 9^2 + (-6)^2} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$$

Comprobamos que el resultado es independiente de los vectores elegidos.

- El área del triángulo de lados $\overrightarrow{BA} = (-1, 1, 2)$ y $\overrightarrow{BC} = (-4, -2, -1)$ es:

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 9\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$$

- El área del triángulo de lados $\overrightarrow{CA} = (3, 3, 3)$ y $\overrightarrow{CB} = (4, 2, 1)$ es:

$$\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 9\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}| = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}|}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$$

El área del triángulo tampoco varía.

012 **Halla la distancia del punto $P(1, 0, 2)$ a las rectas.**

a) $r: \left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ y + 3z = 0 \end{array}\right\}$ b) $s: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-5}{2}$

a) Calculamos un vector director $\vec{v}_r$ y un punto A de la recta.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = (-3, -3, 1)$$

$A(0, 0, 0) \in r$ $\overrightarrow{AP} = (1, 0, 2)$

$$\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k} = (-6, 7, 3)$$

$|\vec{v}_r| = \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19}$ $\qquad |\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{36+49+9} = \sqrt{94}$

La distancia del punto P a la recta r es:

$$d(P, r) = \frac{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}_r|} = \frac{\sqrt{94}}{\sqrt{19}} = \frac{\sqrt{1.786}}{19}$$

b) Calculamos un vector director $\vec{v}_s$ y un punto A de la recta.

$\vec{v}_s = (1, 3, 2)$ $\qquad A(0, -2, 5) \in s$ $\qquad \overrightarrow{AP} = (1, 2, -3)$

$$\vec{v}_s \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -13\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k} = (-13, 5, -1)$$

$|\vec{v}_s| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$ $\qquad |\vec{v}_s \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{169+25+1} = \sqrt{195}$

La distancia del punto P a la recta s es:

$$d(P, s) = \frac{|\vec{v}_s \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\sqrt{195}}{\sqrt{15}} = \sqrt{13}$$

013 **Calcula la distancia del origen de coordenadas a las siguientes rectas.**

a) $r\colon \left.\begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 0 \end{array}\right\}$ $\qquad$ b) $s\colon \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+4}{2}$

a) Hallamos un vector director $\vec{v}_r$ y un punto A de la recta.

$\vec{v}_r = (3, -1, 0)$ $\qquad A(1, 2, 0) \in s$ $\qquad \overrightarrow{AO} = (-1, -2, 0)$

$$\vec{v}_r \times \overrightarrow{AO} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -7\vec{k} = (0, 0, -7)$$

$|\vec{v}_r| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ $\qquad |\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{49} = 7$

La distancia del origen de coordenadas O a la recta r es:

$$d(O, r) = \frac{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{AO}|}{|\vec{v}_r|} = \frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{10}$$

b) Calculamos un vector director $\vec{v}_s$ y un punto A de la recta.

$\vec{v}_s = (-1, -1, 2)$ $\qquad A(2, 1, -4) \in s$ $\qquad \overrightarrow{AO} = (-2, -1, 4)$

$$\vec{v}_s \times \overrightarrow{AO} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{k} = (-2, 0, -1)$$

$|\vec{v}_s| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ $\qquad |\vec{v}_s \times \overrightarrow{AO}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

La distancia del origen de coordenadas O a la recta s es:

$$d(O, s) = \frac{|\vec{v}_s \times \overrightarrow{AO}|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

Productos vectorial y mixto

014 Calcula el producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, siendo los vectores $\vec{u} = (0, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$ y $\vec{w} = (0, 0, -1)$.

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} = (-1, 1, 0)$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (0, 1, 0) \cdot (-1, 1, 0) = 1$$

015 Calcula el volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u} = (-2, 0, 0)$, $\vec{v} = (3, 2, 1)$ y $\vec{w} = (-2, 0, 4)$.

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - 14\vec{j} + 4\vec{k} = (8, -14, 4)$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (-2, 0, 0) \cdot (8, -14, 4) = -16$$

$$\text{Volumen} = \left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right| = 16$$

016 Calcula el producto mixto de los siguientes vectores:

$$\vec{u} = (3, 8, 0) \qquad \vec{v} = (0, -1, 3) \qquad \vec{w} = (-5, 4, 0)$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -156$$

017 Comprueba que este producto mixto es cero.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}]$$

Sean: $\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ $\qquad$ $\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 + v_1 & u_2 + v_2 & u_3 + v_3 \end{vmatrix} = 0$$

La tercera fila es combinación de la primera y la segunda.

018 Halla el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores:

$$\vec{u} = (-1, -1, -1) \qquad \vec{v} = (1, 1, 1) \qquad \vec{w} = (0, 0, 2)$$

Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales, los tres vectores, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, no generan un paralelepípedo.

019 Obtén el volumen del tetraedro cuyos vértices tienen las siguientes coordenadas:

$$A(0, 0, 0) \qquad B(0, 0, 1) \qquad C(0, 2, 0) \qquad D(3, 0, 0)$$

$\overrightarrow{AB} = (0, 0, 1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (0, 2, 0)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD} = (3, 0, 0)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$\text{Volumen} = \frac{\left|[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}]\right|}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

020 **Determina la distancia entre las siguientes rectas que se cruzan:**

$$r: \left.\begin{array}{r} y = 1 \\ x + z = -2 \end{array}\right\} \qquad s: \frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{-2}$$

Hallamos un punto y un vector de cada recta.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{k} = (1, 0, -1) \qquad P_r(-2, 1, 0) \in r$$

$$\vec{v}_s = (-2, 3, -2) \qquad P_s(-1, -1, 4) \in s$$

El vector determinado por los puntos P_r y P_s es: $\overrightarrow{P_rP_s} = (1, -2, 4)$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k} = (3, 4, 3)$$

$$[\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \overrightarrow{P_rP_s} \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_s) = (1, -2, 4) \cdot (3, 4, 3) = 7$$

Por tanto, la distancia entre las rectas es:

$$d(r, s) = \frac{\left|[\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|} = \frac{7}{\sqrt{9+16+9}} = \frac{\sqrt{238}}{34}$$

021 **Estudia la posición relativa de estas rectas, y calcula la distancia entre ellas.**

$$r: \left.\begin{array}{r} 3x - y = -2 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x - y - z = 2 \end{array}\right\}$$

Hallamos un punto y un vector de cada recta.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k} = (1, 3, 4) \qquad P_r(0, 2, 2) \in r$$

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{j} - 2\vec{k} = (0, 2, -2) \qquad P_s\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \in s$$

Determinamos la posición relativa de las dos rectas.

El vector determinado por los puntos P_r y P_s es: $\overrightarrow{P_rP_s} = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -2\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -14\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} = (-14, 2, 2) \neq 0 \\ [\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \overrightarrow{P_rP_s} \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_s) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -2\right) \cdot (-14, 2, 2) = -42 \neq 0 \end{array}\right\}$$

Es decir, las rectas se cruzan.

Por tanto, la distancia entre las rectas es:

$$d(r, s) = \frac{\left|[\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|} = \frac{42}{\sqrt{(-14)^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{42}{\sqrt{204}} = \frac{7\sqrt{51}}{17}$$

Productos vectorial y mixto

022 **Calcula el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de dos puntos fijos *A*(2, 0, 1) y *B*(4, −2, 0).**

Llamamos $P(x, y, z)$ a los puntos del espacio que equidistan de los puntos *A* y *B*.

$$d(A, P) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2}$$
$$d(B, P) = \sqrt{(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-0)^2}$$

Igualando ambas distancias:

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = (x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-0)^2$$
$$-4x - 4y - 2z - 15 = 0$$

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de *A* y de *B* es el plano de ecuación:

$$\pi\colon 4x + 4y + 2z + 15 = 0$$

023 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de tres puntos fijos *A*(1, 0, 0), *B*(0, 1, 0) y *C*(0, 0, 1).**

Llamamos $P(x, y, z)$ a los puntos que equidistan de los puntos *A*, *B* y *C*.

$$d(A, P) = \sqrt{(x-1)^2} = x - 1$$
$$d(B, P) = \sqrt{(y-1)^2} = y - 1$$
$$d(C, P) = \sqrt{(z-1)^2} = z - 1$$

Igualando las distancias:

$$x - 1 = y - 1 = z - 1$$

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos *A*, *B* y *C* es la recta de ecuación:

$$r\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$$

024 **Determina el lugar geométrico de los puntos del espacio que distan 1 unidad de los planos.**

a) $\pi_1\colon x = 0$ **b)** $\pi_2\colon x - y + 2z = 0$

a) Llamamos $P(x, y, z)$ a los puntos del espacio que distan 1 unidad del plano π_1.

$$d(P, \pi_1) = \frac{|x|}{\sqrt{1}} = 1 \rightarrow |x| = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por dos planos:

$\pi_1\colon x = 1$ $\pi_2\colon x = -1$

b) Llamamos $P(x, y, z)$ a los puntos del espacio que distan 1 unidad del plano π_2.

$$d(P, \pi_2) = \frac{|x - y + 2z|}{\sqrt{1+1+4}} = 1 \rightarrow |x - y + 2z| = \sqrt{6} \rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = \sqrt{6} \\ x - y + 2z = -\sqrt{6} \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por dos planos:

$\sigma_1\colon x - y + 2z - \sqrt{6} = 0$ $\sigma_2\colon x - y + 2z + \sqrt{6} = 0$

025 **Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de estos planos:**

$$\pi_1: x = 0 \qquad \pi_2: x - y + 2z = 0$$

Llamamos $P(x, y, z)$ a los puntos que equidistan de los planos π_1 y π_2.

$$d(P, \pi_1) = \frac{|x|}{\sqrt{1}} = |x|$$

$$d(P, \pi_2) = \frac{|x - y + 2z|}{\sqrt{6}}$$

Igualando las distancias:

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \rightarrow |x| = \frac{|x - y + 2z|}{\sqrt{6}} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x - y + 2z}{\sqrt{6}} \\ x = \dfrac{-x + y - 2z}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por los planos:

$$\sigma_1: (\sqrt{6} - 1)x + y - 2z = 0 \qquad \sigma_2: (\sqrt{6} + 1)x - y + 2z = 0$$

026 **Halla la ecuación general de la esfera cuyo centro es el punto $C(7, -1, 0)$ y que pasa por el punto de coordenadas $P(-3, 4, -2)$.**

Calculamos el radio de la esfera.

$$d(P, C) = \sqrt{10^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{129}$$

La ecuación de la esfera es:

$$(x - 7)^2 + (y + 1)^2 + (z - 0)^2 = 129$$

Desarrollando obtenemos la ecuación general.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 2y - 79 = 0$$

027 **Estudia si esta ecuación corresponde a una esfera. En caso afirmativo, calcula su centro y su radio.**

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2 = 0$$

Si esta ecuación correspondiera a una esfera se debería cumplir que:

$$\left.\begin{array}{r} -2a = 0 \\ -2b = -2 \\ -2c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ 1 - r^2 = 2 \rightarrow r^2 = -1 \end{array}\right.$$

Como $r^2 = -1$ no tiene solución, esta ecuación no corresponde a una esfera.

028 **Discute la posición relativa de la recta $s: (x, y, z) = (4, -2, 1) + \lambda(1, 2, -1)$ y la esfera de centro $C(2, 0, 3)$ y radio $r = 3$.**

Hallamos la distancia de la recta al centro de la esfera:

$\vec{v}_s = (1, 2, -1) \qquad A(4, -2, 1) \in s \qquad \overrightarrow{AC} = (-2, 2, 2)$

$$\vec{v}_s \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 6\vec{k} = (6, 0, 6)$$

$$\left|\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$$

$$d(C, s) = \frac{\left|\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{12} > 3$$

La distancia de la recta al centro es mayor que el radio. Por tanto, la recta es exterior a la esfera.

029 **Halla la posición relativa del plano π: $3x - 2y + 3z = 1$ y la esfera de centro $C(2, 0, 3)$ y radio $r = 3$.**

Hallamos la distancia del centro de la esfera al plano.

$$d(C, \pi) = \frac{|3\cdot 2 - 2\cdot 0 + 3\cdot 3 - 1|}{|(3, -2, -3)|} = \frac{14}{\sqrt{22}} < 3$$

La distancia del centro al plano es menor que el radio. Por tanto, el plano es secante a la esfera.

030 **Halla el plano tangente a la esfera de centro $C(2, 0, 3)$ y radio $r = 3$ en el punto $P(2, 0, 0)$.**

El vector normal del plano es: $\overrightarrow{CP} = (0, 0, -3)$

La ecuación del plano tangente a la esfera en el punto P es:
π: $0\cdot(x-2) + 0\cdot(y-0) + (-3)\cdot(z-0) = 0 \rightarrow \pi$: $-3z = 0$

031 **Calcula la recta normal a la esfera de centro $C(2, 0, 3)$ y radio $r = 3$ en el punto $P(2, 0, 0)$.**

$$\left.\begin{array}{l} P(2, 0, 0) \\ \overrightarrow{CP} = (0, 0, -3) \end{array}\right\} \rightarrow s\colon \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -3\lambda \end{array}\right\}$$

032 **Comprueba, con un ejemplo, la relación que hay entre:**

Una recta perpendicular al plano tangente a una esfera en un punto, y la recta normal a la esfera en ese mismo punto.

Una recta perpendicular al plano tangente a una esfera en un punto es la recta normal a la esfera en ese punto.

Por ejemplo, el plano tangente a la esfera de centro $C(2, 0, 1)$ y radio $r = 2$ en el punto $P(0, 0, 1)$ es $2x = 0$.

La recta tangente a ese plano en $P(0, 0, 1)$ es:

$$s\colon \left.\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}\right\}$$

La recta normal a la esfera en $P(0, 0, 1)$ es:

$$s\colon \left.\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}\right\}$$

Ambas expresiones coinciden.

033 Si $\vec{u} = (-1, 4, 2)$, $\vec{v} = (-3, 1, 6)$ y $\vec{w} = (3, 3, -1)$, calcula:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$ b) $\vec{u} \times (\vec{v} - 2\vec{w})$ c) $2\vec{u} + \vec{v} \times \vec{w}$

a) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 22\vec{i} + 11\vec{k} = (22, 0, 11)$

b) $\vec{u} \times (\vec{v} - 2\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & 2 \\ -9 & -5 & 8 \end{vmatrix} = 42\vec{i} - 10\vec{j} + 41\vec{k} = (42, -10, 41)$

c) $2\vec{u} + \vec{v} \times \vec{w} = 2\vec{u} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1, 4, 2) + (-19, 15, -12) = (-21, 23, -8)$

034 Siendo $\vec{u} = (3, 2, 0)$ y $\vec{v} = (3, 6, -2)$, halla $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$, y explica el resultado.

$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 6\vec{j} + 12\vec{k}$ $\qquad \vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 6\vec{j} - 12\vec{k}$

$\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentidos opuestos.

035 Encuentra dos vectores que tengan módulo 5 y que sean perpendiculares a los vectores $\vec{u} = (2, 0, -1)$ y $\vec{v} = (6, -3, 2)$.

Calculamos un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 10\vec{j} - 6\vec{k} = (-3, -10, -6)$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{9 + 100 + 36} = \sqrt{145}$

Los vectores perpendiculares a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de módulo 5 son:

$$\vec{w}_1 = \frac{5}{\sqrt{145}}(-3, -10, -6) = \left(-\frac{3\sqrt{145}}{29}, -\frac{10\sqrt{145}}{29}, -\frac{6\sqrt{145}}{29}\right)$$

$$\vec{w}_2 = -\frac{5}{\sqrt{145}}(-3, -10, -6) = \left(\frac{3\sqrt{145}}{29}, \frac{10\sqrt{145}}{29}, \frac{6\sqrt{145}}{29}\right)$$

036 Si $\vec{u} = (3, 2, 0)$ y $\vec{v} = (3, 6, -2)$, calcula $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$. Extrae una conclusión general.

$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 6\vec{j} + 12\vec{k}$

$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (3, 2, 0) \cdot (-4, 6, 12) = 0$

$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$ siempre vale 0 porque $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector perpendicular a $\vec{u}$.

037 Justifica mediante determinantes que $\vec{u} \times \vec{u} = 0$.

El determinante de una matriz con dos filas iguales es siempre nulo.

038 **Demuestra, usando las propiedades de los determinantes, que el producto vectorial distribuye a la suma.**

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

Consideramos los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 + w_1 & v_2 + w_2 & v_3 + w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

039 **Determina, usando el producto vectorial, el ángulo que forman los vectores (4, −1, 3) y (3, 0, 2).**

$\vec{u} = (4, -1, 3)$ $\qquad\qquad$ $\vec{v} = (3, 0, 2)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (-2, 1, 3)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}\, \alpha$$

$$\rightarrow \text{sen}\, \alpha = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|(-2, 1, 3)|}{\sqrt{26}\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{14}{26 \cdot 13}} = 0{,}2035 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 11^\circ\ 44'\ 34'' \\ \alpha = 168^\circ\ 15'\ 26'' \end{cases}$$

Tomando el ángulo entre dos vectores como el menor que forman sus direcciones al cortarse, la solución es $\alpha = 11^\circ\ 44'\ 34''$.

040 **Halla $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ en los siguientes casos.**

a) $\vec{u} = (0, 4, 2)$ $\quad \vec{v} = (-2, 7, 1)$ $\quad \vec{w} = (5, -2, 1)$

b) $\vec{u} = (0, 4, 2)$ $\quad \vec{v} = (5, -2, 1)$ $\quad \vec{w} = (-2, 7, 1)$

c) $\vec{u} = (9, 4, 1)$ $\quad \vec{v} = (-1, 5, -11)$ $\quad \vec{w} = (12, 6, 0)$

a) $|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & 7 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -34$

c) $|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}| = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & -11 \\ 12 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$

b) $|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 34$

041 **Demuestra, utilizando propiedades de los determinantes, que para k, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se verifica que:**

$$[k\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, k\vec{v}, \vec{w}] = k[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

Consideramos los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.
Utilizando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} ku_1 & ku_2 & ku_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ kv_1 & kv_2 & kv_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Por tanto: $[k\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, k\vec{v}, \vec{w}] = k[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

042 **Dado el vector $\vec{a} = (3, -5, 2)$, elige otro vector $\vec{b}$ y comprueba que $[\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}] = 0$. Explica por qué sucede esto.**

Para cualquier vector $\vec{b}$ que elijamos, $2\vec{a} - \vec{b}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Como el producto mixto de vectores linealmente dependientes es cero: $[\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}] = 0$

043 **Explica por qué para cualesquiera $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$:**

$$[\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}, -3\vec{a} + 5\vec{b}, -2\vec{a} + 7\vec{b} - \vec{c}\,] = 0$$

El producto mixto de los tres vectores definidos como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \\ -2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Esto ocurre porque los tres vectores son coplanarios y, por tanto, el volumen del paralelepípedo que forman es cero.

044 **Comprueba con $\vec{u} = (3, -4, 5)$ y $\vec{v} = (-2, 3, 1)$ si se verifica la igualdad: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$**

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -19\vec{i} - 13\vec{j} + \vec{k} = (-19, -13, 1)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = 3\sqrt{59}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = (-6 - 12 + 5)^2 = 169$$

$$|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = 5\sqrt{2}\sqrt{14} - 169 = 10\sqrt{7} - 169$$

Como $3\sqrt{59} \neq 10\sqrt{7} - 169 \rightarrow$ No se verifica la igualdad.

045 **En general, el producto vectorial no tiene la propiedad asociativa: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$**

Compruébalo para $\vec{u} = \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{k}$ y $\vec{w} = \vec{k}$.

$$\left.\begin{array}{l} (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{j} \times \vec{k}) \times \vec{k} = \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \\ \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{j} \times (\vec{k} \times \vec{k}) = \vec{j} \times \vec{0} = \vec{0} \end{array}\right\} \rightarrow \text{No se cumple la propiedad asociativa.}$$

046 **Demuestra que $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v})$, sean cualesquiera los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

$$(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{u} - \vec{v} \times \vec{v}$$

Sabemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{v} = \vec{0} \\ \vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v} \end{array}\right\} \rightarrow (\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v})$$

Productos vectorial y mixto

047 **Encuentra un vector $\vec{a}$ que tenga módulo 3, y tal que si $\vec{b} = (3, -3, 0)$ se verifique que $\vec{a} \times \vec{b} = (6, 6, 3)$.**

Consideramos el vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 3a_3\vec{i} + 3a_3\vec{j} - 3(a_1+a_2)\vec{k} = (6, 6, 3)$$

Igualando coordenadas:

$$\left.\begin{aligned} 3a_3 &= 6 \\ -3(a_1 + a_2) &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} a_3 &= 2 \\ a_2 &= -1 - a_1 \end{aligned}\right. \rightarrow \vec{a} = (a_1, -1 - a_1, 2)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2a_1^2 + 2a_1 + 5}$$

Como $|\vec{a}| = 3 \rightarrow 2a_1^2 + 2a_1 + 5 = 9 \rightarrow \begin{cases} a_1 = -2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

Por tanto, hay dos vectores que cumplen la condición inicial: $\vec{a}_1 = (-2, 1, 2)$ y $\vec{a}_2 = (1, -2, 2)$

048 **Calcula el valor de *a* para que el producto vectorial de los vectores $(a, -a, 2)$ y $(2, a, 1)$ sea proporcional al vector $(1, 1, 0)$.**

(Castilla y León. Septiembre 2002. Prueba A. Cuestión 2)

$\vec{u} = (a, -a, 2)$ $\qquad\qquad$ $\vec{v} = (2, a, 1)$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & -a & 2 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = -3a\vec{i} + (4 - a)\vec{j} + (a^2 + 2a)\vec{k} = (-3a, 4 - a, a^2 + 2a)$$

Como debe ser proporcional al vector (1, 1, 0), entonces:

$$\frac{-3a}{1} = \frac{4 - a}{1} = \frac{a^2 + 2a}{0} \rightarrow \left.\begin{aligned} -3a &= 4 - a \\ a^2 + 2a &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow a = -2$$

049 **Si tenemos $\vec{u} = (3, -2, 5)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 1)$, ¿qué vectores $\vec{w}$ cumplen que $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{v}$? Escribe tres ejemplos.**

Consideramos el vector $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (-5w_2 - 2w_3)\vec{i} + (5w_1 - 3w_3)\vec{j} + (2w_1 + 3w_2)\vec{k} = (-1, 1, 2)$$

Igualando coordenadas:

$$\left.\begin{aligned} -5w_2 - 2w_3 &= -1 \\ 5w_1 - 3w_3 &= 1 \\ 2w_1 + 3w_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} w_1 &= \frac{1 + 3\lambda}{5} \\ w_2 &= \frac{1 - 2\lambda}{5} \\ w_3 &= \lambda \end{aligned}\right.$$

Obtenemos tres ejemplos dando valores a λ:

Para $\lambda = -2 \rightarrow \vec{w}_1 = (-1, 1, -2)$

Para $\lambda = 3 \longrightarrow \vec{w}_2 = (2, -1, 3)$

Para $\lambda = 8 \longrightarrow \vec{w}_3 = (5, -3, 8)$

050 Encuentra un vector $\vec{u}$, de modo que para los vectores $\vec{a} = (3, 5, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, -4)$ y $\vec{c} = (-3, -1, 2)$ se verifique que $2\vec{a} - 3\vec{u} = \vec{b} \times \vec{c}$.

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 10\vec{j} - \vec{k} = (-4, 10, -1)$$

$$2\vec{a} - 3\vec{u} = \vec{b} \times \vec{c} \rightarrow 3\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b} \times \vec{c} \rightarrow \vec{u} = \frac{1}{3}(2\vec{a} - \vec{b} \times \vec{c})$$

$$\rightarrow \vec{u} = \frac{1}{3}[2(3, 5, 1) - (-4, 10, -1)] = \left(\frac{10}{3}, 0, 1\right)$$

051 ¿Cómo han de ser dos vectores para que cumplan que $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$?

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen} \alpha = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 1$$

Los vectores deben ser perpendiculares.

052 Halla el vector director de la recta $r: \left.\begin{array}{r} 12x + 6y - 18z - 13 = 0 \\ -8x - 4y + 12z + 5 = 0 \end{array}\right\}$

$$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 12 & 6 & -18 \\ -8 & -4 & 12 \end{vmatrix} = (0, 0, 0) \rightarrow \text{ Los planos no definen una recta.}$$

Como los vectores normales son proporcionales, los planos son paralelos o coincidentes, es decir, no se cortan en una única recta.

053 Determina la ecuación de una recta perpendicular a r y s que pase por el punto $P(3, -2, 0)$, siendo:

$$r: x = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{3} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = -3 + \lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{array}\right\}$$

$$\vec{v_r} = (1, -2, 3) \qquad \vec{v_s} = (0, 1, -2) \qquad \vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = (1, 2, 1)$$

La recta que buscamos es $t: \left.\begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}$

054 Decide si las rectas son paralelas.

$$r: \left.\begin{array}{l} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{r} 2x + y - z - 3 = 0 \\ -x + 2y + 2z - 5 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\vec{v_r} = (3, 2, -1) \qquad \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k} = (4, -3, 5)$$

$$\frac{3}{4} \neq \frac{2}{-3} \neq \frac{-1}{5} \rightarrow \text{Los vectores no son proporcionales, por tanto, las rectas no son paralelas.}$$

Productos vectorial y mixto

055 **Determina la distancia del punto $P(1, 2, 3)$ a la recta:**

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-2}$$

Tomamos un vector director $\vec{v}_r$ y un punto A de la recta.

$\vec{v}_r = (2, -1, -2)$ $\qquad A(1, -1, 0) \in r$ $\qquad \overrightarrow{AP} = (0, 3, 3)$

$$\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k} = (3, -6, 6)$$

$|\vec{v}_r| = \sqrt{4+1+4} = 3$ $\qquad |\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{9+36+36} = 9$

La distancia del punto P a la recta r es:

$$d(P, r) = \frac{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}_r|} = \frac{9}{3} = 3$$

056 **Halla la distancia del punto $P(-2, 2, -9)$ a la recta:**

$$r: \left.\begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ x + 6y + 2z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Encuentra también el punto de r que se encuentra a esa distancia de P. Comprueba que las dos distancias coinciden.

- Calculamos la distancia del punto P a la recta.
  Tomamos un vector director $\vec{v}_r$ y un punto A de la recta.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} = (6, -2, 3)$$

$A(1, 0, 0) \in r$ $\qquad \overrightarrow{AP} = (-3, 2, -9)$

$$\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -9 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 45\vec{j} + 6\vec{k} = (12, 45, 6)$$

$|\vec{v}_r| = \sqrt{36+4+9} = 7$ $\qquad |\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{144 + 2.025 + 36} = \sqrt{2.205} = 21\sqrt{5}$

La distancia del punto P a la recta r es:

$$d(P, r) = \frac{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}_r|} = \frac{21\sqrt{5}}{7} = 3\sqrt{5}$$

- Determinamos el punto que se encuentra a esta distancia de P.
  Hallamos el plano perpendicular a la recta r que pasa por P.

$6x - 2y + 3z + D = 0 \rightarrow 6 \cdot (-2) - 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-9) + D = 0 \rightarrow D = 43$

$\pi: 6x - 2y + 3z + 43 = 0$

Calculamos el punto Q intersección de la recta r con el plano π.

$$\left.\begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ x + 6y + 2z &= 1 \\ 6x - 2y + 3z + 43 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= -5 \\ y &= 2 \\ z &= -3 \end{aligned}\right. \rightarrow Q(-5, 2, -3)$$

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-3, 0, 6)| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = d(P, r)$$

057 **Encuentra un punto en la recta r: $\left.\begin{array}{l} x = 2 + 4t \\ y = -1 + 5t \\ z = 2t \end{array}\right\}$ que se halla a 3 unidades de distancia del punto $P(8, 11, 3)$.**

Comprueba que ese es el punto de la recta más próximo a P.

Un punto de la recta r es de la forma $R(2 + 4t, -1 + 5t, 2t)$.

$$d(P, R) = |\overrightarrow{PR}| = |(4t - 6, 5t - 12, 2t - 3)| = \sqrt{45t^2 - 180t + 189}$$

$$d(P, R) = 3 \rightarrow \sqrt{45t^2 - 180t + 189} = 3 \rightarrow t = 2 \rightarrow \text{El punto es } R(10, 9, 4).$$

Calculamos la distancia de P a la recta.

$$\overrightarrow{PR} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 18\vec{k} = (-9, 0, 18)$$

$$|\vec{v}_r| = \sqrt{16 + 25 + 4} = 3\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{PR} \times \vec{v}_r| = \sqrt{81 + 324} = 9\sqrt{5}$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{PR} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|} = \frac{9\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = 3$$

Como la distancia del punto a la recta es también 3, el punto R es el más próximo a P.

058 **Calcula el punto del plano π: $\left.\begin{array}{l} x = -1 + 3\lambda \\ y = 1 + 4\lambda + \mu \\ z = 1 + 2\lambda + 2\mu \end{array}\right\}$ que se halla más próximo al punto $P(17, -4, 9)$. ¿A qué distancia se encuentra?**

Tenemos que hallar la proyección del punto P sobre el plano.

Calculamos el vector normal $\vec{n}$ del plano.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k} = (6, -6, 3) \rightarrow \vec{n} = (2, -2, 1)$$

La recta perpendicular al plano que pasa por P es:

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 17 + 2t \\ y = -4 - 2t \\ z = 9 + t \end{array}\right\}$$

Calculamos la intersección de esta recta con el plano.

$$\left.\begin{array}{r} 17 + 2t = -1 + 3\lambda \\ -4 - 2t = 1 + 4\lambda + \mu \\ 9 + t = 1 + 2\lambda + 2\mu \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \mu = -1 \\ t = -6 \end{array}\right. \rightarrow \text{El punto de intersección es } P'(5, 8, 3).$$

La distancia del punto P al plano coincide con la distancia entre P y P'.

$$d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(-12, 12, -6)| = 18$$

059 **Halla la distancia entre las rectas:**

$$r\colon x-5=y-2=2-z \qquad s\colon \left.\begin{aligned} x&=-1\\ y&=4+\lambda\\ z&=4+\lambda \end{aligned}\right\}$$

Hallamos un punto y un vector de cada recta.

$\vec{v}_r=(1,1,-1)$ $\quad P_r(5,2,2)$ $\quad \vec{v}_s=(0,1,1)$ $\quad P_s(-1,4,4)$

Calculamos un vector determinado por un punto de cada recta.

$\overrightarrow{P_rP_s}=(-6,2,2)$

Calculamos el producto mixto de los tres vectores.

$$\vec{v}_r\times\vec{v}_s=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}=(2,-1,1) \qquad \left|\vec{v}_r\times\vec{v}_s\right|=\sqrt{6}$$

$$[\overrightarrow{P_rP_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s]=\overrightarrow{P_rP_s}\cdot(\vec{v}_r\times\vec{v}_s)=(-6,2,2)\cdot(2,-1,1)=-12$$

Por tanto, la distancia entre las rectas es:

$$d(r,s)=\frac{\left|[\overrightarrow{P_rP_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s]\right|}{\left|\vec{v}_r\times\vec{v}_s\right|}=\frac{12}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}$$

060 **Comprueba que la distancia entre las siguientes rectas es 3, y halla un punto de cada una de las rectas que se encuentre a esa distancia.**

$$r\colon \left.\begin{aligned} x&=4+2\lambda\\ y&=-1\\ z&=6+4\lambda \end{aligned}\right\} \qquad s\colon \frac{x-1}{3}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-1}{4}$$

- Calculamos la distancia entre las dos rectas.

  Hallamos un punto y un vector de cada recta.

  $\vec{v}_r=(2,0,4)$ $\quad P_r(4,-1,6)$ $\quad \vec{v}_s=(3,-1,4)$ $\quad P_s(1,4,1)$

  Calculamos un vector determinado por un punto de cada recta.

  $\overrightarrow{P_rP_s}=(-3,5,-5)$

  Calculamos el producto mixto de los tres vectores.

$$\vec{v}_r\times\vec{v}_s=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & 4\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}=4\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}=(4,4,-2)$$

$$\left|\vec{v}_r\times\vec{v}_s\right|=\sqrt{16+16+4}=6$$

$$[\overrightarrow{P_rP_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s]=\overrightarrow{P_rP_s}\cdot(\vec{v}_r\times\vec{v}_s)=(-3,5,-5)\cdot(4,4,-2)=18$$

  La distancia entre las rectas es:

$$d(r,s)=\frac{\left|[\overrightarrow{P_rP_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s]\right|}{\left|\vec{v}_r\times\vec{v}_s\right|}=\frac{18}{6}=3$$

- Calculamos los puntos que se encuentran a esta distancia.

  Sean R y S dos puntos genéricos de las rectas r y s, respectivamente.

  $R(4+2\lambda,-1,6+4\lambda)\in r$ $\qquad S(1+3\mu,4-\mu,1+4\mu)\in s$

  $\overrightarrow{RS}=(-2\lambda+3\mu-3,-\mu+5,-4\lambda+4\mu-5)$

El vector $\overrightarrow{RS}$ debe ser perpendicular a los vectores directores de las rectas.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{RS}\cdot\vec{v_r} = -20\lambda + 22\mu - 26 = 0\\ \overrightarrow{RS}\cdot\vec{v_s} = -22\lambda + 26\mu - 34 = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda = 2\\ \mu = 3\end{array}\right.$$

Los puntos que buscamos son $R(8, -1, 14)$ y $S(10, 1, 13)$.

La distancia entre estos dos puntos es: $d(R, S) = |\overrightarrow{RS}| = |(2, 2, -1)| = 3$

061 **Calcula la distancia entre las rectas r y s:**

r pasa por el punto $P(-1, 2, -4)$ y es paralela a la recta $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{x+6}{5}$.

$$s: \left.\begin{array}{r}2x + y - z = 4\\ -x + 2y + z = 1\end{array}\right\}$$

Las ecuaciones paramétricas de las rectas r y s son:

$$r: \left.\begin{array}{l}x = -1 + 3\lambda\\ y = 2 - \lambda\\ z = -4 + 5\lambda\end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{l}x = 5 - 3\mu\\ y = \mu\\ z = 6 - 5\mu\end{array}\right\}$$

Hallamos un punto y un vector de cada recta:

$\vec{v_r} = (3, -1, 5)$ $\quad P_r(-1, 2, -4)$ $\quad \vec{v_s} = (-3, 1, -5)$ $\quad P_s(5, 0, 6)$

Como $\vec{v_r}$ y $\vec{v_s}$ son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

La distancia entre las rectas es la distancia de $P_r(-1, 2, -4)$ a la recta s.

$\overrightarrow{P_rP_s} = (6, -2, 10)$

$$\overrightarrow{P_rP_s} \times \vec{v_r} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & -2 & 10\\ -3 & 1 & -5\end{vmatrix} = 0 \rightarrow d(r, s) = d(P_r, s)\frac{|\overrightarrow{P_rP_s} \times \vec{v_r}|}{|\vec{v_r}|} = 0$$

Las rectas son coincidentes.

062 **Expresa en forma paramétrica las ecuaciones de la recta que resulta de cortar los planos π: $2x - 3y + 5z = 10$ y π': $-x + y - 2z = -4$.**

a) Resolviendo primero el sistema que forman.

b) Hazlo también calculando un vector director.

a) $$\left.\begin{array}{r}2x - 3y + 5z = 10\\ -x + y - 2z = -4\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}x = 2 - \lambda\\ y = -2 + \lambda\\ z = \lambda\end{array}\right\}$$

b) $$\vec{v_r} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 5\\ -1 & 1 & -2\end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = (1, -1, -1)$$

Calculamos un punto de la recta.

$$\left.\begin{array}{r}2x - 3y + 5z = 10\\ -x + y - 2z = -4\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Si } z=2} \left.\begin{array}{r}2x - 3y = 0\\ -x + y = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}x = 0\\ y = 0\end{array}\right.$$

Un punto de la recta es $P(0, 0, 2)$

La ecuación paramétrica de la recta es r: $\left.\begin{array}{l}x = \lambda\\ y = -\lambda\\ z = 2 - \lambda\end{array}\right\}$

Productos vectorial y mixto

063 **Encuentra la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.**

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{-1} \qquad s: \left.\begin{array}{r} 2x+y-z+8=0 \\ 5x-2y-2z-6=0 \end{array}\right\}$$

Buscamos el plano que pasa por $P_r(1, -2, 3)$ y tiene como vectores directores $\vec{v}_r = (2, -2, -1)$ y $\vec{v}_s$.

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - \vec{j} - 9\vec{k} = (-4, -1, -9)$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -4 & -1 & -9 \end{vmatrix} = 17x + 22y - 10z + 57 = 0$$

064 **Determina la ecuación de una recta que pasa por el punto $(-1, 4, 2)$ y es paralela a la recta intersección de los planos:**

$$\pi: 2x+3y-z+2=0 \qquad \pi': x-2y+2z+5=0$$

Buscamos la recta que pasa por $P(-1, 4, 2)$ y tiene como vector director el vector director de la recta dada.

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k} = (4, -5, -7)$$

La ecuación de la recta buscada es:

$$s: \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z-2}{-7}$$

065 **Decide si las dos rectas se cortan y, en caso afirmativo, determina el punto de corte. Halla también la ecuación de una recta que pase por el punto $A(3, -1, 0)$ y sea perpendicular a las dos rectas.**

$$r: \frac{x}{-1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+4}{2} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 5+2\lambda \\ y = 4-\lambda \\ z = -2 \end{array}\right\}$$

- Determinamos la posición relativa de las rectas.

  $\vec{u}_r = (-1, 1, 2)$ $\quad P_r(0, 6, -4)$ $\quad \vec{v}_s = (2, -1, 0)$ $\quad Q_s(5, 4, -2)$

  $\overrightarrow{P_rQ_s} = (5, -2, 2)$

  $$\text{Rango}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

  Como los vectores directores no son proporcionales, las rectas se cortan.

- Determinamos el punto de corte de las rectas.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-6}{1} = \dfrac{z+4}{2} \\ x = 5+2\lambda \\ y = 4-\lambda \\ z = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 7 \\ z = -2 \end{array}\right. \rightarrow \text{El punto de corte es } C(-1, 7, -2).$$

- Hallamos la recta que pasa por $A(3, -1, 0)$ y es perpendicular a las rectas r y s.

$$\vec{u_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k} = (2, 4, -1)$$

La recta es t: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z}{-1}$

066 **Una recta pasa por el punto (1, −1, 0) y es paralela a los planos $x + y = 1$, $x + z = 1$. Halla sus ecuaciones.**

(La Rioja. Junio 2004. Propuesta A. Ejercicio 1)

Buscamos una recta que pasa por $P(1, -1, 0)$ y tiene como vector director el producto vectorial de los vectores normales de los planos.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = (1, -1, -1)$$

La recta es r: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{-1}$

067 **Encuentra una recta paralela al plano π: $2x - 5y + z - 2 = 0$ que se halle a $2\sqrt{30}$ de distancia.**

Tomamos un punto del plano, por ejemplo: $P(2, 1, 3) \in \pi$

Si al punto P le sumamos un vector de módulo $2\sqrt{30}$ que sea perpendicular al plano, obtendremos un punto que está a esa distancia del plano.

El vector perpendicular al plano con módulo $2\sqrt{30}$ será un vector proporcional al vector normal del plano.

Como $\vec{n} = (2, -5, 1)$, el vector que buscamos será de la forma:
$\lambda\vec{n} = \lambda(2, -5, 1) = (2\lambda, -5\lambda, \lambda)$

Y debe cumplir que:

$$|(2\lambda, -5\lambda, \lambda)| = \sqrt{30\lambda^2} = 2\sqrt{30} \rightarrow \lambda = 2$$

Es decir, un vector perpendicular al plano con módulo $2\sqrt{30}$ es $\vec{u} = (4, -10, 2)$.

$Q + \vec{u} = (2, 1, 3) + (4, -10, 2) = (6, -9, 5)$

El punto $Q(6, -9, 5)$ está a distancia $2\sqrt{30}$ del plano.

La recta que buscamos pasa por el punto Q y tiene como vector director un vector perpendicular al vector normal.

Si $\vec{v_r} = (a, b, c)$, tiene que cumplirse:

$\vec{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow (a, b, c) \cdot (2, -5, 1) = 2a - 5b + c = 0$

Si $a = 1$ y $b = 0 \rightarrow c = -2$

El vector $\vec{v_r} = (1, 0, -2)$ es perpendicular a $\vec{n}$.

La recta buscada es:

$$r: \left.\begin{aligned} x &= 6 + \lambda \\ y &= -9 \\ z &= 5 - 2\lambda \end{aligned}\right\}$$

068 **Calcula la distancia de $P(-3, 4, 0)$ a las rectas.**

a) $r: \dfrac{x+4}{2} = y-2 = \dfrac{z-2}{-3}$

b) $s: \left.\begin{array}{l} x = 3+2\lambda \\ y = 19+5\lambda \\ z = -3-\lambda \end{array}\right\}$

c) $t: \left.\begin{array}{r} x+2y+3z-1=0 \\ 2x-4y+z+12=0 \end{array}\right\}$

a) $\vec{u}_r = (2, 1, -3) \qquad Q_r(-4, 2, 2) \qquad \overrightarrow{PQ_r} = (-1, -2, 2)$

$$\overrightarrow{PQ_r} \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (4, 1, 3)$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{PQ_r} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{13}{7}} = \frac{\sqrt{91}}{7}$$

b) $\vec{u}_s = (2, 5, -1) \qquad Q_s(3, 19, -3) \qquad \overrightarrow{PQ_s} = (6, 15, -3)$

$$\overrightarrow{PQ_s} \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 15 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{El punto } P \text{ pertenece a la recta } s.$$

c) $$\vec{u}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 14\vec{i} + 5\vec{j} - 8\vec{k} = (14, 5, -8)$$

$Q_t(1, 3, -2) \qquad \overrightarrow{PQ_t} = (4, -1, -2)$

$$\overrightarrow{PQ_t} \times \vec{u}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & -2 \\ 14 & 5 & -8 \end{vmatrix} = 18\vec{i} + 4\vec{j} + 34\vec{k} = (18, 4, 34)$$

$$d(P, t) = \frac{|\overrightarrow{PQ_t} \times \vec{u}_t|}{|\vec{u}_t|} = \frac{\sqrt{1.496}}{\sqrt{285}} = \frac{2\sqrt{106.590}}{285}$$

069 **Halla la distancia entre la recta $r: (13+t, 7-t, -4+2t)$ y el plano $\pi: 4x+2y-z-7=0$. Encuentra dos puntos del plano que se encuentren a esa distancia de r. Obtén la ecuación de la proyección ortogonal de r sobre π.**

$$\left.\begin{array}{r} \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{n} = (4, 2, -1) \end{array}\right\} \rightarrow \text{Son perpendiculares.}$$

La recta es paralela al plano o está contenida en él.

Calculamos la distancia de un punto de la recta, $P(13, 7, -4) \in r$, al plano π:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \left| \frac{4 \cdot 13 + 2 \cdot 7 + 4 - 7}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-1)^2}} \right| = \frac{63}{\sqrt{21}} = 3\sqrt{21}$$

Para hallar dos puntos del plano que se encuentren a distancia $3\sqrt{21}$, calculamos los puntos P' y Q' del plano que sean proyección ortogonal de dos puntos P y Q de la recta r.

- Proyección ortogonal P' del punto $P(13, 7, -4) \in r$ sobre el plano.

  La recta perpendicular al plano que pasa por P es r_1: $\left.\begin{array}{l} x = 13 + 4p \\ y = 7 + 2p \\ z = -4 - p \end{array}\right\}$

  Hallamos el punto P' intersección entre r_1 y π.

$$\left.\begin{array}{r} x = 13 + 4p \\ y = 7 + 2p \\ z = -4 - p \\ 4x + 2y - z - 7 = 0 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \\ p = -3 \end{array}\right. \to P'(1, 1, -1)$$

- Proyección ortogonal Q' del punto $Q(14, 6, -2) \in r$ sobre el plano.

  La recta perpendicular al plano que pasa por Q es r_2: $\left.\begin{array}{l} x = 14 + 4p \\ y = 6 + 2p \\ z = -2 - p \end{array}\right\}$

  Hallamos el punto Q' intersección entre r_2 y π.

$$\left.\begin{array}{r} x = 14 + 4p \\ y = 6 + 2p \\ z = -2 - p \\ 4x + 2y - z - 7 = 0 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ p = -3 \end{array}\right. \to Q'(2, 0, 1)$$

  La proyección ortogonal de r sobre π pasa por los puntos P' y Q'.

$$r': \left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{array}\right\}$$

070 **Calcula la distancia entre las dos rectas.**

$$r: \left.\begin{array}{r} 3x - 2y - 1 = 0 \\ 3x + 2y + 6z - 9 = 0 \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 1 + 4t \\ y = -1 + 6t \\ z = 2 - 4t \end{array}\right\}$$

Justifica lo que sucede.

Determinamos los vectores directores de las rectas.

$$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 18\vec{j} + 12\vec{k} = (-12, -18, 12)$$

$\vec{v_s} = (4, 6, -4)$

$$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0 \to \text{Las rectas son paralelas o coincidentes.}$$

La ecuación implícita de la recta s es: $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y \qquad - 5 = 0 \\ x \qquad - z + 1 = 0 \end{array}\right\}$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & -9 \\ 3 & -2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son coincidentes, por tanto, $d(r, s) = 0$.

071 **Halla la distancia entre las rectas r: $(3-\lambda, 2\lambda, 5+\lambda)$ y s, que pasa por los puntos $A(-1, -2, 4)$ y $B(3, -10, 0)$.**

Calculamos un punto y un vector director de cada recta.

$\vec{u}_r = (-1, 2, 1)$ $\quad P(3, 0, 5)$ $\quad A(-1, -2, 4)$ $\quad \overrightarrow{AB} = (4, -8, -4)$

Como los vectores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

$$\overrightarrow{AP} = (4, 2, 1) \qquad \overrightarrow{AP} \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{j} + 10\vec{k} = (0, -5, 10)$$

$$|\vec{u}_r| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \qquad |\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{25+100} = 5\sqrt{5}$$

Como las rectas son paralelas:

$$d(s, r) = d(A, r) = \frac{|\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}_r|} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{30}}{6}$$

072 **Calcula la distancia de la recta r: $\left.\begin{array}{l} x = 2+3\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 4-\lambda \end{array}\right\}$ al eje Z.**

$\vec{u}_r = (3, 2, -1)$ $\quad P_r(2, -1, 4)$ $\quad O(0, 0, 0)$ $\quad \vec{v}_z = (0, 0, 1)$

$$[\overrightarrow{P_rO}, \vec{u}_r, \vec{v}_z] = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$\vec{u}_r \times \vec{v}_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 3\vec{j} = (2, -3, 0) \qquad |\vec{u}_r \times \vec{v}_z| = \sqrt{13}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rO}, \vec{u}_r, \vec{v}_z]|}{|\vec{u}_r \times \vec{v}_z|} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$$

073 **Determina la ecuación de un plano paralelo al plano OXY que se encuentre a 5 unidades de distancia.**

La ecuación del plano OXY es $z = 0$. Hay dos planos paralelos que están a 5 unidades de distancia de él, son los planos $z = 5$ y $z = -5$.

074 **Halla la ecuación de un plano paralelo al eje Y que se encuentre a 4 unidades de distancia.**

Hay infinitos planos en esa situación. Por ejemplo, $z = 4$ y $x = -4$.

075 **Determina las ecuaciones de una recta paralela al eje Y que está a 6 unidades de distancia de $O(0, 0, 0)$.**

El eje Y tiene por ecuación: $\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$. Una recta que está a 6 unidades del origen es la recta que pasa por $(6, 0, 0)$. La recta paralela al eje Y que pasa por el punto $(6, 0, 0)$ es: $\left.\begin{array}{l} x = 6 \\ z = 0 \end{array}\right\}$

076 Halla el valor del parámetro a para que las rectas:

$$r: -x = y - a = z - 3 \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = -3 + \lambda \\ y = 6 - \lambda \\ z = -3 + \lambda \end{array}\right\}$$

se encuentren a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades.

Determinamos un punto y un vector director de cada recta.

$\vec{u}_r = (-1, 1, 1)$ $\quad P(0, a, 3)$ $\quad \vec{v}_s = (1, -1, 1)$ $\quad Q(-3, 6, -3)$

$\overrightarrow{PQ} = (-3, 6 - a, -6)$

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 6-a & -6 \end{vmatrix} = 6 - 2a$$

$$\vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j} = (2, 2, 0) \qquad |\vec{u}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{8}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{u}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{|6 - 2a|}{\sqrt{8}} = \frac{|3 - a|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \rightarrow |3 - a| = 2 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 5 \end{cases}$$

077 Considera el triángulo que tiene por vértices los puntos $A(1, 1, 2)$, $B(1, 0, -1)$ y $C(1, -3, 2)$.

a) Razona si el triángulo es rectángulo.
b) Calcula la recta r que pasa por B y es perpendicular al lado AC.
c) Calcula la recta s que pasa por los puntos A y C.
d) Si D es el punto de corte de las rectas r y s, calcula el módulo del vector $\overrightarrow{BD}$.
e) Calcula la longitud del lado AC.
f) Calcula el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ y comprueba que su módulo es igual a $h \cdot b$ siendo h el módulo del vector $\overrightarrow{BD}$ y b la longitud del lado AC (calculados en apartados anteriores).

(Cantabria. Junio 2006. Bloque 2. Opción B)

a) Analizamos los productos escalares $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AC} = (0, -4, 0)$ $\quad \overrightarrow{AB} = (0, -1, -3)$ $\quad \overrightarrow{BC} = (0, -3, 3)$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \neq 0$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 12 \neq 0$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -6 \neq 0$

El triángulo no tiene lados perpendiculares, no es un triángulo rectángulo.

b) Hallamos el plano perpendicular al lado AC y que pase por el punto B.

$\overrightarrow{AC} = (0, -4, 0) \rightarrow \pi: \; -4y + D = 0$

$B(1, 0, -1) \in \pi \rightarrow D = 0$

Por tanto, el plano es $\pi: y = 0$.

La recta que pasa por A y C es: $s: \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 - 4\lambda \\ z = 2 \end{array}\right\}$

Calculamos el punto de corte del plano y la recta.

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 - 4\lambda \\ z = 2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \to \text{El punto de corte es } D(1, 0, 2).$$

La recta que buscamos es la recta que pasa por B y D.

$$\overrightarrow{BD} = (0, 0, 3) \to r\colon \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 + 3\mu \end{array}\right\}$$

c) $\overrightarrow{AC} = (0, -4, 0) \to s\colon \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 - 4\lambda \\ z = 2 \end{array}\right\}$

d) $|\overrightarrow{BD}| = |(0, 0, 3)| = 3$

e) $|\overrightarrow{AC}| = |(0, -4, 0)| = 4$

f) $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 12\vec{i} = (12, 0, 0)$ $\qquad |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = 12$

$|\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = 3 \cdot 4 = 12$

Por tanto: $|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{AC}|$

078 **Dadas las rectas:**

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x + 2y = 7 \end{array}\right\} \qquad s\colon \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = -5 \end{array}\right\}$$

Halla un punto en cada una de ellas, de tal forma que el vector que los una sea perpendicular a ambas.

(Castilla y León. Junio 2007. Prueba B. Cuestión 2)

$P_r(7, 0, 7)$ $\qquad \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = (2, -1, 1)$

$P_s(2, -5, 0)$ $\qquad \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} = (0, 0, 1)$

Sea $A(7 + 2\lambda, -\lambda, 7 + \lambda)$ un punto genérico de la recta r, y $B(2, -5, \mu)$ un punto genérico de la recta s. Tenemos que hallar λ y μ de forma que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular a ambas rectas.

$\overrightarrow{AB} = (-2\lambda - 5, \lambda - 5, \mu - \lambda - 7)$

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{AB} \cdot (-2, 1, -1) = 6\lambda - \mu + 12 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot (0, 0, 1) = \mu - \lambda - 7 = 0 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \mu = 6 \end{array}\right.$$

Los puntos son: $A(5, 1, 6)$ y $B(2, -5, 6)$

079 La recta $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ \lambda y+z=1 \end{array}\right\}$ corta en P y Q respectivamente a los planos $y = 0$ y $x = 0$.

a) Determina los puntos (si los hay) en el eje Z que equidisten de P y de Q. Naturalmente estos posibles puntos dependen del valor de λ.

b) Determina λ para que, además, los puntos del eje Z formen con P y Q un triángulo equilátero.

(Aragón. Junio 2002. Opción A. Cuestión 2)

Hallamos los puntos P y Q.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ \lambda y+z=1 \\ y=0 \end{array}\right\} \rightarrow P(1, 0, 1) \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ \lambda y+z=1 \\ x=0 \end{array}\right\} \rightarrow Q(0, 1, 1-\lambda)$$

a) Un punto genérico del eje Z es de la forma $A(0, 0, \alpha)$. Buscamos los puntos A que cumplen: $d(A, P) = d(A, Q)$

$$\overrightarrow{AP} = |(1, 0, 1-\alpha)| = \sqrt{1+(1-\alpha)^2}$$

$$\overrightarrow{AQ} = |(0, 1, 1-\lambda-\alpha)| = \sqrt{1+(1-\lambda-\alpha)^2}$$

$$d(A, P) = d(A, Q) \rightarrow \sqrt{1+(1-\alpha)^2} = \sqrt{1+(1-\lambda-\alpha)^2} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha = \dfrac{2-\lambda}{2} \end{cases}$$

- Si $\lambda = 0 \rightarrow \alpha$ puede tomar cualquier valor.
  Todos los puntos del eje Z equidistan de P y Q.
- Si $\lambda \neq 0 \rightarrow \alpha = \dfrac{2-\lambda}{2}$
  El único punto del eje Z que equidista de P y Q es $A\left(0, 0, \dfrac{2-\lambda}{2}\right)$.

b) Los puntos A, P y Q formarán un triángulo equilátero si existen un λ para el que: $d(A, P) = d(A, Q) = d(P, Q)$

- Si $\lambda \neq 0 \rightarrow A\left(0, 0, \dfrac{2-\lambda}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AP}| = \left|\left(1, 0, \dfrac{\lambda}{2}\right)\right| = \sqrt{1+\dfrac{\lambda^2}{4}} \\ |\overrightarrow{AQ}| = \left|\left(1, 0, -\dfrac{\lambda}{2}\right)\right| = \sqrt{1+\dfrac{\lambda^2}{4}} \\ |\overrightarrow{PQ}| = |(-1, 1, -\lambda)| = \sqrt{1+1+\lambda^2} \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt{1+\dfrac{\lambda^2}{4}} = \sqrt{1+1+\lambda^2} \rightarrow 3\lambda^2 = -4$$

No tiene soluciones reales.

A, P y Q no forman un triángulo equilátero.

- Si $\lambda = 0 \rightarrow P(1, 0, 1)$, $Q(0, 1, 1)$ y $A(0, 0, \alpha)$

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AP}| = |(1, 0, 1-\alpha)| = \sqrt{1+(1-\alpha)^2} \\ |\overrightarrow{AQ}| = |(0, 1, 1-\alpha)| = \sqrt{1+(1-\alpha)^2} \\ |\overrightarrow{PQ}| = |(-1, 1, 0)| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt{1+(1-\alpha)^2} = \sqrt{2} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

Hay dos puntos del eje Z que forman un triángulo equilátero con P y Q: $A(0, 0, 0)$ y $A'(0, 0, 2)$.

080 a) **Demuestra que las rectas:**

$$l_1\colon \left.\begin{aligned} x &= t\\ y &= -t\\ z &= 2+t\end{aligned}\right\} \qquad l_2\colon \left.\begin{aligned} x+y-z&=0\\ 2x+y+1&=0\end{aligned}\right\}$$

se cruzan en el espacio.

b) **Encuentra la distancia entre dichas rectas.**

(Murcia. Junio 2004. Bloque 2. Cuestión 2)

a) Expresamos la recta l_2 en forma paramétrica.

$$l_2\colon \left.\begin{aligned} x &= -1-p\\ y &= 1+2p\\ z &= p\end{aligned}\right\}$$

Determinamos un punto y un vector director de cada recta.

$\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$ $\quad P(0, 0, 2)$ $\quad \vec{v}_2 = (-1, 2, 1)$ $\quad Q(-1, 1, 0)$ $\quad \overrightarrow{PQ} = (-1, 1, -2)$

$$[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{vmatrix} = -1$$

$$\vec{u}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix} = -3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} = (-3, -2, 1)$$

Como $[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{PQ}] \neq 0$ y $\vec{u}_1 \times \vec{v}_2 \neq 0 \rightarrow$ Las rectas se cruzan.

b) $|\vec{u}_1 \times \vec{v}_2| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{u}_1 \times \vec{v}_2|} = \frac{|-1|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14}$$

081 a) **Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano π: $x+y+z=3$. Obtén el punto de corte de la recta con el plano π.**

b) **Halla el punto de la recta** $r\colon \left.\begin{aligned} x &= \lambda\\ y &= 3-\lambda\\ z &= 1+2\lambda\end{aligned}\right\}$ **cuya distancia al punto $P(1, 0, 2)$ sea $\sqrt{5}$.**

(Aragón. Junio 2008. Bloque 2. Opción B)

a) Buscamos una recta que pasa por $O(0, 0, 0)$ y tiene como vector director al vector normal del plano $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

$$s\colon \left.\begin{aligned} x &= \mu\\ y &= \mu\\ z &= \mu\end{aligned}\right\}$$

Hallamos el punto de corte de la recta con el plano π.

$$\left.\begin{aligned} x &= \mu\\ y &= \mu\\ z &= \mu\\ x+y+z &= 3\end{aligned}\right\} \rightarrow \mu = 1 \rightarrow Q(1, 1, 1)$$

b) Un punto genérico de la recta r es $A(\lambda, 3-\lambda, 1+2\lambda)$.

$$|\overrightarrow{PA}| = |(\lambda-1, 3-\lambda, -1+2\lambda)| = \sqrt{5} \rightarrow (\lambda-1)^2 + (3-\lambda)^2 + (-1+2\lambda)^2 = 5$$
$$\rightarrow \lambda = 1$$

El punto que cumple la condición es $A(1, 2, 3)$.

082 **Determinar las coordenadas de un punto que diste 2 unidades de la recta:**

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

(Extremadura. Junio 2005. Repertorio A. Ejercicio 4)

$A(1, 0, 1) \in r$

$\vec{n} = (0, 1, 1)$ es un vector perpendicular al vector director $\vec{v} = (1, 1, -1)$ de la recta.

Determinamos un vector perpendicular a la recta que tenga módulo 2.

Como $|\vec{n}| = \sqrt{2} \rightarrow |\sqrt{2} \cdot \vec{n}| = 2$

El extremo P del vector $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \sqrt{2} \cdot \vec{n}$ es un punto que está a 2 unidades de distancia de la recta.

$P = (1, 0, 1) + \sqrt{2} \cdot (0, 1, 1) = \left(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)$

Veamos que es cierto:

$$\overrightarrow{PA} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 20 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\sqrt{2}\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k} = \left(2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

$|\overrightarrow{PA} \times \vec{u}| = 2\sqrt{3}$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{2\sqrt{3}}{|(1, 1, -1)|} = 2$$

083 **Halla la ecuación general del plano que corta a los ejes coordenados en los puntos (2, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 2). Determina los puntos de la recta $x = y = z$ que están a distancia 5 de este plano.**

Buscamos un plano que pasa por $A(2, 0, 0)$ y tiene por vectores directores $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2)$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2x + 4y + 2z - 4 = 0 \rightarrow \pi:\ x + 2y + z - 2 = 0$$

Determinamos los puntos de la recta que estén a 5 unidades del plano.

Un punto genérico de la recta es $P(t, t, t)$.

$$d(P, \pi) = \frac{|t + 2t + t - 2|}{\sqrt{1+4+1}} = 5 \rightarrow \left.\begin{matrix} 4t - 2 = 5\sqrt{6} \\ 4t - 2 = -5\sqrt{6} \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} t = \dfrac{5\sqrt{6}+2}{4} \\ t = \dfrac{-5\sqrt{6}+2}{4} \end{matrix}\right.$$

Los puntos son $P_1\left(\frac{5\sqrt{6}+2}{4}, \frac{5\sqrt{6}+2}{4}, \frac{5\sqrt{6}+2}{4}\right)$

y $P_2\left(\frac{-5\sqrt{6}+2}{4}, \frac{-5\sqrt{6}+2}{4}, \frac{-5\sqrt{6}+2}{4}\right)$.

084 **Dado el plano π_1: $3x + \alpha y + z = 6$, calcula α para que la recta r que pasa por el punto $P(1, 1, 2)$ y es perpendicular a este plano (π_1) sea paralela al plano π_2: $x - y = 3$. Calcula la distancia de la recta r al origen.**

(Galicia. Septiembre 2000. Bloque 2. Pregunta 2)

Buscamos la recta que pasa por $P(1, 1, 2)$ y tiene como director el vector normal al plano π_1, $\vec{n} = (3, \alpha, 1)$.

$$r: \left.\begin{aligned} x &= 1 + 3\lambda \\ y &= 1 + \alpha\lambda \\ z &= 2 + \lambda \end{aligned}\right\}$$

Si r es paralela a π_2, el vector director de r es perpendicular al vector normal de π_2.

$(3, \alpha, 1) \cdot (1, -1, 0) = 0 \rightarrow 3 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 3$

Calculamos la distancia de r al origen de coordenadas.

$$\overrightarrow{OP} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 5\vec{j} = (-5, 5, 0) \qquad \left|\overrightarrow{OP} \times \vec{u}\right| = \sqrt{50}$$

$$d(O, r) = \frac{\left|\overrightarrow{OP} \times \vec{u}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{50}}{|(3, 3, 1)|} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{19}} = \frac{5\sqrt{38}}{19}$$

085 **Dadas las rectas:**

$$r: \left.\begin{aligned} x - ay &= 2 \\ ay + z &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad s: \left.\begin{aligned} x - z &= 1 \\ y + z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

se pide:

a) Discutir la posición relativa de las dos rectas r, s según los valores del parámetro a.

b) Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r, s.

(Madrid. Junio 2008. Opción A. Ejercicio 2)

a) Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada del sistema que forman los cuatro planos.

$$\left.\begin{aligned} x - ay &= 2 \\ ay + z &= 1 \\ x - z &= 1 \\ y + z &= 3 \end{aligned}\right\} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4a \qquad \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a + 1$$

- Si $a \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 4$ y Rango $(A) = 3 \rightarrow$ Las rectas se cruzan.
- Si $a = 0 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Las rectas se cortan en un punto.

b) Escribimos las rectas en forma paramétrica.

$$r: \left.\begin{aligned} x &= 3 - \lambda \\ y &= 1 - \lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}\right\} \qquad s: \left.\begin{aligned} x &= 1 + \mu \\ y &= 3 - \mu \\ z &= \mu \end{aligned}\right\}$$

Calculamos un punto y un vector director de cada recta.

$\vec{u}_r = (-1, -1, 1)$ $P(3, 1, 0)$ $\vec{v}_s = (1, -1, 1)$ $Q(1, 3, 0)$ $\overrightarrow{PQ} = (-2, 2, 0)$

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$\vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{j} + 2\vec{k} = (0, 2, 2) \qquad |\vec{u}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{u}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

086 Las trayectorias de dos aviones vienen dadas por las rectas:

$$r_1: \left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array}\right\} \qquad r_2: \left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{array}\right\}$$

a) Estudie si las trayectorias se cortan, se cruzan o son coincidentes.

b) Calcule la distancia mínima entre ambas trayectorias.

(Murcia. Junio 2006. Bloque 2. Cuestión A)

a) Determinamos un punto y un vector director de cada recta.

$\vec{u}_1 = (1, -1, 2)$ $P(1, 1, 1)$ $\vec{v}_2 = (-1, 1, 0)$ $Q(1, 0, 2)$ $\overrightarrow{PQ} = (0, -1, 1)$

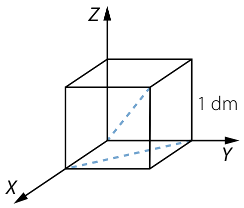
$$[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\vec{u}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} = (-2, -2, 0)$$

Como $[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{PQ}] \neq 0$ y $\vec{u}_1 \times \vec{v}_2 \neq 0 \rightarrow r_1$ y r_2 se cruzan.

b) $$d(r_1, r_2) = \frac{|[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{u}_1 \times \vec{v}_2|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

087 Dado un cubo (hexaedro regular) de lado 1 dm, se considera una de sus diagonales y la diagonal de una de sus caras de manera que estas no tengan ningún vértice en común.



Halla la distancia entre estas diagonales.

Indicación: Dibuja el cubo con un vértice en el origen de coordenadas y los vértices contiguos sobre los ejes de coordenadas.

(Baleares. Junio 2006. Opción A. Cuestión 2)

D_1 diagonal que pasa por los puntos $A(0, 0, 0)$ y $B(1, 1, 1)$.

D_2 diagonal que pasa por los puntos $C(1, 0, 0)$ y $D(0, 1, 0)$.

Calculamos un punto y un vector director de cada diagonal.

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) \qquad A(0, 0, 0) \qquad \overrightarrow{CD} = (-1, 1, 0) \qquad C(1, 0, 0) \qquad \overrightarrow{AC} = (1, 0, 0)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} = (-1, -1, 2)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{6}$$

$$d(D_1, D_2) = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AC}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

088 **Un asteroide que sigue aproximadamente la trayectoria dada por la recta:**

$$r\colon x + 1 = \frac{y}{2} = 2z + 1$$

se está acercando a un planeta situado en el punto $P(1, 1, 2)$.

a) Calcule la distancia más cercana a la que se encontrará del planeta.

b) Calcule el punto de la trayectoria del asteroide donde se alcanzará dicha distancia mínima.

c) Si inicialmente el asteroide se encuentra en el punto $Q\left(-1, 0, -\frac{1}{2}\right)$, calcule la distancia que deberá recorrer para alcanzar dicho punto.

(Murcia. Junio 2007. Bloque 2. Cuestión B)

a) Escribimos la ecuación de la recta en forma continua.

$$r\colon \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \rightarrow \begin{cases} Q\left(-1, 0, -\frac{1}{2}\right) \\ \vec{u} = (2, 4, 1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(-2, -1, -\frac{5}{2}\right)$$

Calculamos la distancia de la recta al punto.

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -\frac{5}{2} \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 9\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k} = (9, -3, -6)$$

$$|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}| = 3\sqrt{14}$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{3\sqrt{14}}{|(2, 4, 1)|} = \frac{3\sqrt{14}}{\sqrt{21}} = \sqrt{6}$$

b) Un punto genérico de la recta r es $R\left(-1+2\lambda,\ 4\lambda,\ -\frac{1}{2}+\lambda\right)$.

Hallamos el valor de λ para el que el vector $\overrightarrow{PR}=\left(2\lambda-2,\ 4\lambda-1,\ \lambda-\frac{5}{2}\right)$ sea perpendicular al vector director de la recta.

$$\overrightarrow{PR}\cdot\vec{u}=\left(2\lambda-2,\ 4\lambda-1,\ \lambda-\frac{5}{2}\right)\cdot(2,4,1)=21\lambda-\frac{21}{2}=0\rightarrow\lambda=\frac{1}{2}$$

El punto que cumple la condición es $R(0, 2, 0)$.

c) $|\overrightarrow{QR}|=\left|\left(1,\ 2,\ \frac{1}{2}\right)\right|=\frac{\sqrt{21}}{2}$

089 **Dados el punto $Q(3, -1, 4)$ y la recta r de ecuaciones paramétricas:**

$$r:\left.\begin{aligned}x&=-2+3\lambda\\ y&=-2\lambda\\ z&=1+4\lambda\end{aligned}\right\}$$

se pide:

a) Hallar la distancia del punto Q a la recta r.

b) Justificar que la recta s que pasa por Q y tiene a $(1, -1, 1)$ como vector direccional no corta a r.

c) Calcular la distancia entre las rectas r y s.

(C. Valenciana. Junio 2007. Bloque 2. Problema 2)

a) Un punto de la recta es $A(-2, 0, 1)$ y un vector director es $\vec{u}_r=(3,-2,4)$.

$\overrightarrow{QA}=(-5, 1, -3)$

$$\overrightarrow{QA}\times\vec{u}_r=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-5&1&-3\\3&-2&4\end{vmatrix}=-2\vec{i}+11\vec{j}+7\vec{k}=(-2,11,7)$$

$$|\overrightarrow{QA}\times\vec{u}_r|=\sqrt{174}$$

$$d(Q,r)=\frac{|\overrightarrow{QA}\times\vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|}=\frac{\sqrt{174}}{|(3,-2,4)|}=\frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}}=\sqrt{6}$$

b) $$s:\left.\begin{aligned}x&=3+\mu\\ y&=-1-\mu\\ z&=4+\mu\end{aligned}\right\}\rightarrow\vec{v}_s=(1,-1,1)$$

$$[\vec{u}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{QA}]=\begin{vmatrix}3&-2&4\\1&-1&1\\-5&1&-3\end{vmatrix}=-6\neq0\rightarrow\text{Las rectas se cruzan.}$$

c) $$\vec{u}_r\times\vec{v}_s=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-2&4\\1&-1&1\end{vmatrix}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(2,1,-1)\qquad|\vec{u}_r\times\vec{v}_s|=\sqrt{6}$$

$$d(s,r)=\frac{|[\vec{u}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{QA}]|}{|\vec{u}_r\times\vec{v}_s|}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

090 Se considera la recta $r: \left.\begin{array}{l} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{array}\right\}$ y el punto $P(1, 2, 3)$.

a) Calcula las ecuaciones paramétricas del plano π que es perpendicular a la recta r y contiene al punto P.

b) Considera la recta:

$$s: \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2+\alpha \\ z=3+2\alpha \end{array}\right\}$$

¿Cuál es la posición relativa entre la recta s y el plano π?

c) Calcula cuáles son las coordenadas del punto Q de la recta s que está más próximo a la recta r. Justifica tu respuesta.

(Cantabria. Junio 2004. Bloque 3. Opción B)

a) Buscamos un plano que pasa por le punto $P(1, 2, 2)$ y que tiene como vector normal al vector director de la recta.

$$r: \left.\begin{array}{l} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1+4\lambda \\ y=4-2\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u_r}=(4, -2, 1)$$

$\pi: 4x-2y+z+D=0$

$4\cdot 1-2\cdot 2+3+D=0 \rightarrow D=-3$

$$\pi:\ 4x-2y+z-3=0 \rightarrow \pi: \left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=3-4\lambda+2\mu \end{array}\right\}$$

b) Vector director de la recta s: $\vec{v_s}=(0, 1, 2)$

Vector normal de π: $\vec{n}=(4, -2, 1)$

$\vec{v_s}\cdot\vec{n}=0\cdot 4+1\cdot(-2)+2\cdot 1=0 \rightarrow$ La recta es paralela al plano o está contenida en él.

Como el punto $P(1, 2, 3)\in r$ y $P(1, 2, 3)\in\pi$, la recta y el plano son coincidentes.

c) Un punto genérico de s es $Q(1, 2+\alpha, 3+2\alpha)$.

Un punto genérico de la recta r es $R(-1+4\lambda, 4-2\lambda, \lambda)$.

$\overrightarrow{RQ}=(2-4\lambda, \alpha+2\lambda-2, 2\alpha-\lambda+3)$

$\overrightarrow{RQ}$ debe ser perpendicular a las dos rectas:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RQ}\cdot\vec{u_r}=15-21\lambda=0 \\ \overrightarrow{RQ}\cdot\vec{v_s}=5\alpha+4\quad=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda=\dfrac{5}{7} \\ \alpha=-\dfrac{4}{5} \end{array}\right. \rightarrow \text{El punto es } Q\left(1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right).$$

091 Halla la distancia del punto $P(2, 1, 1)$ a la recta:

$$r: \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{2}{3}+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}$$

(Castilla y León. Junio 2003. Prueba A. Cuestión 2)

$\vec{u}_r = (0, 1, 1)$ $A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) \in r$ $\overrightarrow{AP} = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$

$$\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{5}{3}\vec{j} - \frac{5}{3}\vec{k} = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right) \qquad |\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{6}$$

$$d(P, r) = \frac{|\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}_r|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

092 **Con los datos de la actividad anterior, encuentra el punto *Q* de *r* más próximo a *P*. Comprueba que la distancia entre esos puntos es la misma que has calculado antes.**

El punto *Q* es la intersección de la recta *r* y el plano que pasa por *P* y es perpendicular a la recta.

El plano que pasa por *P* y es perpendicular a *r* tiene como vector normal el vector director de *r*.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_r = (0, 1, 1) \rightarrow \pi\colon y + z + D = 0 \\ P(2, 1, 1) \in \pi \rightarrow 1 + 1 + D = 0 \rightarrow D = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \pi\colon\ y + z - 2 = 0$$

Calculamos la intersección entre la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{r} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} + \lambda \\ z = \lambda \\ y + z - 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \rightarrow Q\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Comprobamos que la distancia entre los dos puntos coincide con la distancia del punto a la recta.

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \left|\left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right| = \sqrt{3} = d(P, r)$$

093 **Calcula la distancia entre las rectas de ecuaciones:**

$$r\colon x = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{7} \qquad s\colon x - 2 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$$

(Galicia. Junio 2005. Bloque 2. Pregunta 1)

Hallamos un punto y un vector de cada recta.

$\vec{u}_r = (1, 3, 7)$ $P_r(0, 1, 4)$ $\vec{v}_s = (1, 3, 4)$ $Q_s(2, 2, 3)$ $\overrightarrow{P_rQ_s} = (2, 1, -1)$

$$\vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 3\vec{j} = (-9, 3, 0)$$

$$[\overrightarrow{P_rQ_s}, \vec{u}_r, \vec{v}_s] = \overrightarrow{P_rQ_s} \cdot (\vec{u}_r \times \vec{v}_s) = (2, 1, -1) \cdot (-9, 3, 0) = -15$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rQ_s}, \vec{u}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{u}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{15}{\sqrt{81 + 9}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

094 Halla el área del paralelogramo definido por los vectores $\vec{u} = (4, -3, 2)$ y $\vec{v} = (2, -3, 3)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 8\vec{j} - 6\vec{k} = (-3, -8, -6)$$

$$\text{Área del paralelogramo} = \sqrt{9 + 64 + 36} = \sqrt{109}$$

095 Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$, calcula:

a) El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Un vector unitario ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

(La Rioja. Septiembre 2001. Propuesta A. Ejercicio 2)

a) $$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} = (4, -2, 1)$$

b) $\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \sqrt{21}$

El vector unitario y ortogonal a los dos vectores dados será:

$$\frac{1}{\sqrt{21}}(\vec{u} \times \vec{v}) = \left(\frac{4\sqrt{21}}{21}, -\frac{2\sqrt{21}}{21}, \frac{\sqrt{21}}{21}\right)$$

c) $\text{Área del paralelogramo} = \left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \sqrt{21}$

096 Halla el área del triángulo de vértices $A(1, 2, 3)$, $B(4, -3, 4)$ y $C(5, 9, 9)$.

$\overrightarrow{AB} = (3, -5, 1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (4, 7, 6)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = -37\vec{i} - 14\vec{j} + 41\vec{k} = (-37, -14, 41)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{3.246}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{\sqrt{3.246}}{2}$$

097 Los vectores $\vec{u} = (-4, 3, 2)$ y $\vec{v} = (1, 2, 3)$ son dos de los lados de un triángulo.

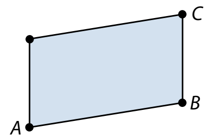
a) Calcula el perímetro de dicho triángulo.

b) Halla su área.

a) $$\text{Perímetro} = \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| + \left|\vec{u} - \vec{v}\right| = \sqrt{29} + \sqrt{14} + \sqrt{(-4-1)^2 + (3-2)^2 + (2-3)^2} = 14{,}18$$

b) $$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 14\vec{j} - 11\vec{k} = (5, 14, -11)$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \frac{\sqrt{342}}{2} = \frac{3\sqrt{38}}{2}$$



098 **Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(3, 1, 0)$, $B(4, 5, 2)$ y $C(4, 7, -2)$. Halla el cuarto vértice y su área.**

$\overrightarrow{AB} = (1, 4, 2)$

El punto D cumple:

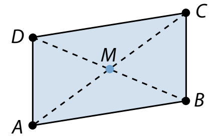
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB} = (4, 7, -2) - (1, 4, 2) = (3, 3, -4) \rightarrow D = (3, 3, -4)$

Calculamos el área.

$\overrightarrow{AD} = (0, 2, -4)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -20\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k} = (-20, 4, 2)$$

Área del paralelogramo $= \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \left|(-20, 4, 2)\right| = 2\sqrt{105}$



099 **El centro del paralelogramo $ABCD$ es $M(2, 2, 6)$. Determina los vértices C y D, sabiendo que $A(0, 1, 3)$ y $B(1, 4, 5)$. Calcula también su área.**

El punto C cumple: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AM} = (0, 1, 3) + 2(2, 1, 3) = (4, 3, 9) \rightarrow C(4, 3, 9)$

El punto D cumple: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BM} = (1, 4, 5) + 2(1, -2, 1) = (3, 0, 7) \rightarrow D(3, 0, 7)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 14\vec{i} + 2\vec{j} - 10\vec{k} = (14, 2, -10)$$

Área del paralelogramo $= \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \left|(14, 2, -10)\right| = 10\sqrt{3}$

100 **Comprueba que los puntos $A(2, 3, 0)$, $B(4, 5, 2)$, $C(7, 6, 5)$ y $D(6, 1, 4)$ son coplanarios. Halla el área del polígono $ABCD$.**

Los puntos son coplanarios si los vectores $\overrightarrow{AB} = (2, 2, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (5, 3, 5)$ y $\overrightarrow{AD} = (4, -2, 2)$ son linealmente dependientes.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Los puntos son coplanarios.}$$

Calculamos el área del triángulo descrito por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 4\vec{k} = (4, 0, -4)$$

$$\text{Área } T_1 = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(4, 0, 4)\right| = 2\sqrt{2}$$

Calculamos el área del triángulo descrito por los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 22\vec{i} - 22\vec{k} = (22, 0, -22)$$

$$\text{Área } T_2 = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{2}\left|(22, 0, -22)\right| = 22\sqrt{2}$$

Área de cuadrilátero $= 2\sqrt{2} + 22\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$

Productos vectorial y mixto

101 **Calcula el área de un rombo de 2 cm de lado, sabiendo que tiene un ángulo de 60°.**

Tenemos dos vectores de módulo 2 cm que forman un ángulo de 60°.

Área del rombo $= |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\, sen\ \alpha = 2 \cdot 2 \cdot sen\ 60° = 2\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

102 **En el triángulo determinado por los vectores $\vec{u} = (1, 0, -3)$ y $\vec{v} = (2, 1, 4)$:**

a) Halla el área.

b) Decide si es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

a) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 10\vec{j} + \vec{k} = (3, -10, 1)$

Área del triángulo $= \dfrac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = |(3, -10, 1)| = \dfrac{\sqrt{110}}{2}$

b) Calculamos los módulos de los vectores que forman el triángulo.

$|\vec{u}| = \sqrt{10}$

$|\vec{v}| = \sqrt{21}$

$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{51}$

El ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ será el ángulo mayor del triángulo por ser el lado $\vec{u} - \vec{v}$ el de mayor medida.

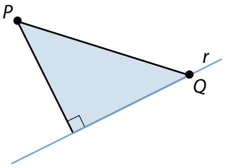
$cos\ \alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{-10}{\sqrt{10}\sqrt{21}} \rightarrow \alpha = 133°\ 38'\ 7''$

El triángulo es obtusángulo.

103 **Calcula el área de un triángulo rectángulo que tiene un cateto sobre la recta:**

$$r: \frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{4} = z - 2$$

y dos de sus vértices son $P(5, -3, 4)$ y $Q(6, 3, 3)$.



Comprueba que se verifica el teorema de Pitágoras.

Calculamos el punto de corte de la recta r con el plano que pasa por el punto P y es perpendicular a r.

El plano que pasa por el punto P y es perpendicular a r tiene como vector normal al vector director de la recta r.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r = (3, 4, 1) \rightarrow \pi: 3x + 4y + z + D = 0 \\ P(5, -3, 4) \in \pi \rightarrow 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-3) + 4 + D = 0 \rightarrow D = -7 \end{array}\right\}$$

El plano es π: $3x + 4y + z - 7 = 0$

Calculamos la intersección entre este plano y la recta r.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+1}{4} \\ \dfrac{y+1}{4}=z-2 \\ 3x+4y+z-7=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases}$$

El tercer vértice del triángulo rectángulo es $A(3, -1, 2)$.

Calculamos el área del triángulo.

$$\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AQ}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-10\vec{i}+4\vec{j}+14\vec{k}=(-10, 4, 14)$$

$$|\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AQ}|=2\sqrt{78}$$

$$\text{Área del triángulo}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{78}$$

Comprobamos que se verifica el teorema de Pitágoras.

$$d(P, Q)=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{38}$$

$$d(A, Q)=|\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{26}$$

$$d(A, P)=|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{12}$$

$$[d(P, Q)]^2=[d(A, Q)]^2+[d(A, P)]^2$$

$$\left(\sqrt{38}\right)^2=\left(\sqrt{26}\right)^2+\left(\sqrt{12}\right)^2 \rightarrow 38=26+12$$

104 **Calcula α para que los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(3, 0, 2)$, $C(5, -2, 2)$ y $D(2, 1, \alpha)$ sean coplanarios. Calcula el área del polígono $ABCD$.**

(Galicia. Septiembre 2000. Bloque 2. Pregunta 1)

Los puntos son coplanarios si los vectores $\overrightarrow{CA}=(-4, 3, -1)$, $\overrightarrow{CB}=(-2, 2, 0)$, y $\overrightarrow{CD}=(-3, 3, \alpha-2)$ son linealmente dependientes.

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & \alpha-2 \end{vmatrix}=4-2\alpha$$

Los puntos son coplanarios si $4-2\alpha=0 \rightarrow \alpha=2$

Si $D(2, 1, 2)$, los vectores $\overrightarrow{CB}=(-2, 2, 0)$ y $\overrightarrow{CD}=(-3, 3, 0)$ son proporcionales, por tanto, los puntos C, B y D están alineados, y están situados en ese orden.

La figura $ABCD$ es un triángulo de vértices A, C y D.

$$\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CD}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix}=3\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}=(3, 3, -3)$$

$$\text{Área del triángulo}=\frac{|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CD}|}{2}=\frac{|(3, 3, -3)|}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

105 Sea el plano π de ecuación $x - 5y + z + 3 =$ y sean las rectas r y s con ecuaciones:

$$r: x - 3 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{3} \qquad s: \frac{x+1}{2} = y = z + 2$$

Determina:

a) Los puntos de intersección del plano π con cada una de las dos rectas.

b) El área y el perímetro del triángulo formado por los dos puntos anteriores y el origen de coordenadas.

(Aragón. Junio 2004. Opción B. Cuestión 2)

a) $$\left.\begin{array}{r} x-3 = \dfrac{y-2}{2} \\ x-3 = \dfrac{z-4}{3} \\ x-5y+z+3=0 \end{array}\right\} \to P(3, 2, 4) \qquad \left.\begin{array}{r} \dfrac{x+1}{2} = y \\ y = z+2 \\ x-5y+z+3=0 \end{array}\right\} \to Q(-1, 0, -2)$$

b) $\overrightarrow{OP} = (-3, -2, -4) \qquad \overrightarrow{OQ} = (1, 0, 2) \qquad \overrightarrow{PQ} = (-4, -2, -6)$

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} = (-4, 2, 2)$$

$$\left|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}\right| = 2\sqrt{6}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\left|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}\right|}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$$

$$\text{Perímetro del triángulo} = \left|\overrightarrow{OP}\right| + \left|\overrightarrow{PQ}\right| + \left|\overrightarrow{OQ}\right| = \sqrt{29} + 2\sqrt{14} + \sqrt{5} = 15{,}1$$

106 Determina el valor de a para que los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(1, 2, 1)$ y $C(1, 0, a)$ sean los tres vértices de un triángulo de área $\frac{7}{2}$.

$\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0) \qquad \overrightarrow{AC} = (0, 0, a-1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (2a-2)\vec{i} = (2a-2, 0, 0) \qquad \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = |2a-2|$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{|2a-2|}{2} = \frac{7}{2} \to \begin{cases} 2a-2 = 7 \\ 2a-2 = -7 \end{cases} \to \begin{cases} a = \dfrac{9}{2} \\ a = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

107 Dadas las rectas $r_1: \left.\begin{array}{l} x+2y=2 \\ x=-2z \end{array}\right\}$ y $r_2: \left.\begin{array}{l} x=-y \\ y=z+1 \end{array}\right\}$, se pide:

a) Determinar las coordenadas del punto P en que se cortan y las ecuaciones del plano que las contiene.

b) Calcular la ecuación de la recta s que pasa por el punto $Q(2, 0, 1)$ y corta perpendicularmente a r_1.

c) Obtener las coordenadas del punto R, intersección de r_1 y s, y el área del triángulo de vértices P, Q y R.

(Cantabria. Junio 2002. Bloque 3. Opción A)

a) Calculamos el punto de intersección.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=2 \\ x=-2z \\ x=-y \\ y=z+1 \end{array}\right\} \rightarrow P(-2,2,1)$$

El plano que contiene a estas dos rectas es un plano que pasa por el punto $P(-2, 2, 1)$ y tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas.

$$r_1\colon \left.\begin{array}{l} x=-2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v_1}=(-2,1,1)$$

$$r_2\colon \left.\begin{array}{l} x=-1-\mu \\ y=1+\mu \\ z=\mu \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v_2}=(-1,1,1)$$

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = y-z-1=0$$

b) Hallamos el plano perpendicular a r_1 que pasa por Q. Este plano tiene como vector normal el vector director de r_1.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_1}=(-2,1,1) \rightarrow \pi\colon -2x+y+z+D=0 \\ Q(2,0,1)\in\pi \rightarrow -2\cdot 2+0+1+D=0 \rightarrow D=3 \end{array}\right\} \rightarrow \pi\colon -2x+y+z+3=0$$

Calculamos el punto de corte de r_1 y π.

$$-2(-2\lambda)+1+\lambda+\lambda+3=0 \rightarrow \lambda=-\frac{2}{3} \rightarrow T\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

La recta que buscamos, s, pasa por los puntos Q y T.

$$\overrightarrow{QT}=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{5}{3}\right) \rightarrow s\colon \left.\begin{array}{l} x=2-2t \\ y=t \\ z=1-5t \end{array}\right\}$$

c) La intersección entre r_1 y s es el punto $T\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

$$\overrightarrow{PQ}=(4,-2,0)$$

$$\overrightarrow{PT}=\left(\frac{10}{3},-\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PT}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 0 \\ \frac{10}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \end{vmatrix} = \frac{10}{3}\vec{i}+\frac{20}{3}\vec{j}=\left(\frac{10}{3},\frac{20}{3},0\right)$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PT}\right|=\frac{10\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Área del triángulo}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PT}\right|=\frac{5\sqrt{5}}{3}$$

108 En el espacio se consideran:

La recta r intersección de dos planos de ecuaciones implícitas:

$$x + y - z = 5 \qquad\qquad 2x + y - 2z = 2$$

Y la recta s que pasa por los puntos: $P(3, 10, 5)$ $\quad Q(5, 12, 6)$

Se pide:

a) Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta r y de la recta s.

b) Calcular el punto H, intersección de r y s y el ángulo α que determinan r y s.

c) Calcular los puntos M y N de la recta r para los que el área de cada uno de los triángulos de vértices PQM y PQN es de 3 unidades.

(C. Valenciana. Junio 2006. Ejercicio A. Problema 2)

a) $r\colon \left.\begin{array}{l} x = -3 + \lambda \\ y = 8 \\ z = \lambda \end{array}\right\}$ $\qquad \overrightarrow{PQ} = (2, 2, 1) \rightarrow s\colon \left.\begin{array}{l} x = 3 + 2\mu \\ y = 10 + 2\mu \\ z = 5 + \mu \end{array}\right\}$

b) Calculamos la intersección de las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{r} -3 + \lambda = 3 + 2\mu \\ 8 = 10 + 2\mu \\ \lambda = 5 + \mu \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 4 \\ \mu = -1 \end{cases} \rightarrow H(1, 8, 4)$$

El ángulo que determinan r y s es el que determinan sus vectores directores.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{|(1, 0, 1)\cdot(2, 2, 1)|}{\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = 45°$$

c) Un punto genérico de la recta r es $M(-3 + \lambda, 8, \lambda)$.

$\overrightarrow{PM} = (-6 + \lambda, -2, -5 + \lambda)$ $\qquad \overrightarrow{PQ} = (2, 2, 1)$

$$\overrightarrow{PM} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6+\lambda & -2 & -5+\lambda \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2\lambda + 8)\vec{i} + (\lambda - 4)\vec{j} + (2\lambda - 8)\vec{k} = (-2\lambda + 8, \lambda - 4, 2\lambda - 8)$$

$$\left|\overrightarrow{PM} \times \overrightarrow{PQ}\right| = 3(\lambda - 4)$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\left|\overrightarrow{PM} \times \overrightarrow{PQ}\right|}{2} = \frac{3|\lambda - 4|}{2} = 3 \rightarrow \begin{cases} \lambda - 4 = 2 \\ \lambda - 4 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 6 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Los puntos que buscamos son $M(3, 8, 6)$ y $N(-1, 8, 2)$.

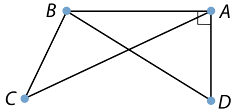
109 Dados los puntos: $A(1, 2, 3)$ $\quad B(0, 2, 0)$ $\quad C(1, 0, 1)$

a) Prueba que no están alineados y escribe la ecuación general del plano π determinado por estos tres puntos.

b) Determina las ecuaciones paramétricas de la recta que es la altura del triángulo ABC correspondiente al vértice C.

c) Calcula el área de ABC.

d) Calcula un punto D del plano π que has calculado en el apartado a) tal que, el triángulo ABD cumpla las dos condiciones siguientes:



- ABD es un triángulo rectángulo con el ángulo recto en el vértice A.
- Área (ABD) = Área (ABC)

(Cantabria. Septiembre 2005. Bloque 3. Opción B)

a) Los vectores $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, -3)$ y $\overrightarrow{AC} = (0, -2, -2)$ no son proporcionales, por tanto, los tres puntos no están alineados.

El plano que los contiene pasa por el punto A y tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -6x - 2y + 2z + 4 = 0 \to \pi: 3x + y - z - 2 = 0$$

b) La altura que buscamos es la recta perpendicular al segmento AB que pasa por el punto C.

Calculamos el plano que pasa por C y es perpendicular al segmento AB. Este plano tiene como vector normal al vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1, 0, -3) \to \pi: -x - 3z + D = 0 \\ C(1, 0, 1) \in \pi \to -1 \cdot 1 + 0 - 3 \cdot 1 + D = 0 \to D = 4 \end{array}\right\} \to \pi: x + 3z - 4 = 0$$

Hallamos el punto de corte del plano con la recta que pasa por A y B.

$$r_{AB}: \left.\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = 3 - 3t \end{array}\right\} \to 1 - t + 3(3 - 3t) - 4 = 0 \to t = \frac{3}{5}$$

El punto de corte es $C'\left(\frac{2}{5}, 2, \frac{6}{5}\right)$

La altura que buscamos es la recta que pasa por C y C'.

$$\overrightarrow{CC'} = \left(-\frac{3}{5}, 2, \frac{1}{5}\right) \to s: \left.\begin{array}{l} x = 1 - 3\lambda \\ y = 10\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array}\right\}$$

c) $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} = (-6, -2, 2)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 2\sqrt{11}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{11}$$

d) La altura de los dos triángulos es $\overrightarrow{CC'} = \left|\left(-\frac{3}{5}, 2, \frac{1}{5}\right)\right| = \frac{\sqrt{110}}{5}$.

$\overrightarrow{CC'}$ es un vector perpendicular al lado AB. El punto D pertenece a una recta que pasa por A y tiene con vector director $\overrightarrow{CC'}$.

$$m: \left.\begin{array}{l} x = 1 - 3\mu \\ y = 2 + 10\mu \\ z = 3 + \mu \end{array}\right\}$$

Por tanto, el punto D será de la forma $D(1 - 3\mu, 2 + 10\mu, 3 + \mu)$.

Calculamos el área del triángulo ABD.

$\overrightarrow{AB} = (-1, 0, -3)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD} = (-3\mu, 10\mu, \mu)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -3 \\ -3\mu & 10\mu & \mu \end{vmatrix} = 30\mu\vec{i} + 10\mu\vec{j} - 10\mu\vec{k} = (30\mu, 10\mu, -10\mu)$$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = 10\mu\sqrt{11}$

Área del triángulo $= \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = 5|\mu|\sqrt{11}$

Como Área (ABD) = Área (ABC):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Área }(ABC) = \sqrt{11}\\ \text{Área }(ABD) = 5|\mu|\sqrt{11}\end{array}\right\} \rightarrow \sqrt{11} = 5|\mu|\sqrt{11} \rightarrow |\mu| = \frac{1}{5} \rightarrow \begin{cases}\mu = \dfrac{1}{5}\\ \mu = -\dfrac{1}{5}\end{cases}$$

Por tanto, hay dos puntos que cumplen las condiciones:

$D_1\left(\dfrac{2}{5}, 4, \dfrac{16}{5}\right)$ y $D_2\left(\dfrac{8}{5}, 0, \dfrac{14}{5}\right)$

110 Se dan los puntos $A(2, 1, 1)$ y $B(1, 0, -1)$, y la recta:

$$r: x - 5 = y = \frac{z+2}{-2}$$

Se pide que calcules razonadamente:

a) El punto C de r que equidista de A y B.

b) El área del triángulo ABC.

(C. Valenciana. Junio 2008. Bloque 2. Problema 1)

a) Un punto genérico de la recta r es $C(5 + \lambda, \lambda, -2 - 2\lambda)$.

$\overrightarrow{AC} = (\lambda + 3, \lambda - 1, -2\lambda - 3)$ $\quad \overrightarrow{BC} = (\lambda + 4, \lambda, -2\lambda - 1)$

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \rightarrow \sqrt{6\lambda^2 + 16\lambda + 19} = \sqrt{6\lambda^2 + 12\lambda + 17} \rightarrow \lambda = -\dfrac{1}{2}$

Por tanto, el punto es $C\left(\dfrac{9}{2}, -\dfrac{1}{2}, -1\right)$.

b) $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -1 & -2\\ \dfrac{5}{2} & -\dfrac{3}{2} & -2\end{vmatrix} = -\vec{i} - 7\vec{j} + 4\vec{k} = (-1, -7, 4)$$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{66}$

Área del triángulo $= \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \dfrac{\sqrt{66}}{2}$

111 De los planos paralelos al plano $x + y + z = 8$ encontrar el que determina con los ejes coordenados un triángulo de área $8\sqrt{3}$.

(Baleares. Septiembre 2001. Opción A. Cuestión 2)

Los planos paralelos a $x + y + z = 8$ son de la forma $x + y + z = d$.

Calculamos los puntos de corte de un plano paralelo al dado con los ejes coordenados.

Corte con eje X: $\left.\begin{array}{r}x + y + z = d\\ y = 0\\ z = 0\end{array}\right\} \rightarrow A(d, 0, 0)$

Corte con eje Z: $\left.\begin{aligned} x+y+z&=d\\ x&=0\\ y&=0 \end{aligned}\right\} \to C(0,0,d)$

Corte con eje Y: $\left.\begin{aligned} x+y+z&=d\\ x&=0\\ z&=0 \end{aligned}\right\} \to B(0,d,0)$

Calculamos el área del triángulo ABC.

$\overrightarrow{AB}=(-d,d,0)$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{AC}=(-d,0,d)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -d & d & 0\\ -d & 0 & d \end{vmatrix}=d^2\vec{i}+d^2\vec{j}+d^2\vec{k}=(d^2,d^2,d^2) \qquad \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=d^2\sqrt{3}$$

$$\text{Área del triángulo}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{d^2\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}\to\begin{cases} d=4\\ d=-4 \end{cases}$$

Los planos que buscamos son: $x+y+z=4$ y $x+y+z=-4$

112 **Dados el plano π: $3x+2y-z+10=0$ y el punto $P(1,2,3)$, se pide:**

a) Halla la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

b) Halla el punto Q intersección de π y r.

c) Halla el punto R intersección de π con el eje Y.

d) Halla el área del triángulo PQR.

(Madrid. Junio 2008. Opción B. Ejercicio 4)

a) La recta buscada pasa por el punto P y tiene como vector director el vector normal del plano.

$$r:\left.\begin{aligned} x&=1+3\lambda\\ y&=2+2\lambda\\ z&=3-\lambda \end{aligned}\right\}$$

b) $\left.\begin{aligned} x&=1+3\lambda\\ y&=2+2\lambda\\ z&=3-\lambda\\ 3x+2y-z+10&=0 \end{aligned}\right\}\to\lambda=-1\to Q(-2,0,4)$

c) Eje Y: $\left.\begin{aligned} x&=0\\ y&=0 \end{aligned}\right\}$

Calculamos la intersección de π con el eje Y.

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y-z+10&=0\\ x&=0\\ z&=0 \end{aligned}\right\}\to R(0,-5,0)$$

d) $\overrightarrow{PQ}=(-3,-2,1)$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{PR}=(-1,-7,-3)$

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & -2 & 1\\ -1 & -7 & -3 \end{vmatrix}=13\vec{i}-10\vec{j}+19\vec{k}=(13,-10,19) \qquad \left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|=3\sqrt{70}$$

$$\text{Área del triángulo}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|=\frac{3\sqrt{70}}{2}$$

Productos vectorial y mixto

113 **Calcula el volumen del paralelepípedo descrito por los vectores $\vec{u} = (3, 0, 4)$, $\vec{v} = (2, -3, 5)$ y $\vec{w} = (8, 5, 2)$.**

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 8 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 43$$

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = \left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right| = 43$$

114 **Los tres vectores siguientes describen un tetraedro, $\vec{u} = (1, 2, 9)$, $\vec{v} = (3, 6, -2)$ y $\vec{w} = (3, -2, 2)$. Halla su volumen.**

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -232$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right| = \frac{232}{6} = \frac{116}{3}$$

115 **Calcula el volumen del paralelepípedo que definen los vectores $\vec{u} = (-3, 2, 1)$, $\vec{v} = (4, 5, -3)$ y $\vec{w} = (7, 3, -4)$. ¿Qué observas? Da una explicación.**

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ 7 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = \left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right| = 0$$

Los tres vectores son linealmente dependientes, por tanto, los tres puntos son coplanarios y no describen ningún paralelepípedo.

116 **Halla el valor de m para que los vectores $\vec{u} = (1, m - 2, -1)$, $\vec{v} = (2, 5, 0)$ y $\vec{w} = (1, m, 1)$ determinen un paralelepípedo de volumen 6.**

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & m-2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 14 - 4m$$

$$\text{Volumen} = \left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right| = \left|14 - 4m\right| = 6 \rightarrow \begin{cases} 14 - 4m = 6 \\ 14 - 4m = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 5 \end{cases}$$

117 **Los puntos $A(0, 0, -1)$, $B(1, 0, -2)$, $C(0, 1, -2)$ y $D(4, 1, 5)$ son los vértices de un tetraedro. Calcula su volumen.**

$\overrightarrow{AB} = (1, 0, -1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (0, 1, -1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD} = (4, 1, 6)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 11$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = \frac{11}{6}$$

118 **El plano π: $3x + y + 2z - 18 = 0$ define con los planos coordenados un tetraedro con vértice en el origen de coordenadas. Calcula su volumen.**

Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes.

Corte con eje X: $\left.\begin{array}{r} 3x + y + 2z - 18 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A(6, 0, 0)$

Corte con eje Y: $\left.\begin{array}{r} 3x + y + 2z - 18 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow B(0, 18, 0)$

Corte con eje Z: $\left.\begin{array}{r} 3x + y + 2z - 18 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow C(0, 0, 9)$

Calculamos el volumen del tetraedro.

$$[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 972$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]\right| = \left|\frac{972}{6}\right| = 162$$

119 **Determina el volumen del tetraedro de vértices $A(1, 2, 0)$, $B(0, 2, -1)$, $C(-1, 0, -6)$ y $D(4, 1, 1)$.**

Con ese volumen, decide si los puntos son coplanarios o no.

$\overrightarrow{AB} = (-1, 0, -1)$ $\qquad \overrightarrow{AC} = (-2, -2, -6)$ $\qquad \overrightarrow{AD} = (3, -1, 1)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{El volumen del tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = 0$$

Los cuatro puntos no determinan ningún volumen. Los puntos son coplanarios.

120 **Halla el área del triángulo que se forma al cortar el plano π: $2x - 3y + 5z - 30 = 0$ con los tres ejes coordenados. Calcula también el volumen que aparece al unir esos tres puntos con el origen de coordenadas, haciéndolo de dos maneras diferentes.**

Calculamos los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas.

Corte con eje X: $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 5z - 30 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow P(15, 0, 0)$

Corte con eje Y: $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 5z - 30 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow Q(0, -10, 0)$

Corte con eje Z: $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 5z - 30 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow R(0, 0, 6)$

Calculamos el área del triángulo *PQR*.

$\overrightarrow{PQ} = (-15, -10, 0)$ $\qquad$ $\overrightarrow{PR} = (-15, 0, 6)$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -15 & -10 & 0 \\ -15 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -60\vec{i} + 90\vec{j} - 150\vec{k} = (-60, 90, -150)$$

$$\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = 30\sqrt{38}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = 15\sqrt{38}$$

Calculamos el área del tetraedro *OPQR*.

- Primera forma.

  $\overrightarrow{OP} = (15, 0, 0)$ $\qquad$ $\overrightarrow{OQ} = (0, -10, 0)$ $\qquad$ $\overrightarrow{OR} = (0, 0, 6)$

  $$[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}] = \begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -900$$

  $$\text{Volumen} = \frac{1}{6}\,[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}] = \frac{900}{6} = 150$$

- Segunda forma.

  Podemos calcular el volumen del tetraedro utilizando la fórmula del volumen de una pirámide.

  Tomamos como base el triángulo inicial y la altura será la distancia del origen al plano determinado por ese triángulo.

  $$d(O, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 30|}{\sqrt{4 + 9 + 25}} = \frac{30}{\sqrt{38}}$$

  $$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \times \text{Área de la base} \times \text{Altura} = \frac{1}{3} \cdot 15\sqrt{38} \cdot \frac{30}{\sqrt{38}} = 150$$

121 **Sean los puntos *A*(2, 3, 0) y *B*(−2, 1, 4).**

Determina:

a) La ecuación del plano π, mediatriz del segmento *AB*.

b) El volumen del tetraedro formado por π y los tres planos coordenados.

c) La ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el origen.

Nota: El plano mediatriz de un segmento es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio.

(Aragón. Junio 2004. Opción A. Cuestión 2)

a) El plano π pasa por el punto medio *M*, del segmento *AB*, y tiene por vector normal el vector director de la recta que pasa por *A* y *B*.

$$M\left(\frac{2-2}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = M(0, 2, 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-4, -2, 4) \rightarrow \pi\colon -4x - 2y + 4z + D = 0 \\ M(0, 2, 2) \in \pi \rightarrow -4 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + D = 0 \rightarrow D = -4 \end{array}\right\}$$

El plano es $\pi\colon 2x + y - 2z + 2 = 0$

b) Calculamos los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas.

Corte con eje X: $\left.\begin{array}{r} 2x + y - 2z + 2 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow P(-1, 0, 0)$

Corte con eje Y: $\left.\begin{array}{r} 2x + y - 2z + 2 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow Q(0, -2, 0)$

Corte con eje Z: $\left.\begin{array}{r} 2x + y - 2z + 2 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow R(0, 0, 1)$

El volumen del tetraedro $OPQR$.

$$[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6}[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

c) La recta que buscamos pasa por el origen y tiene como vector director el vector normal del plano π.

$$s: \left.\begin{array}{l} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{array}\right\}$$

122 **Sean los puntos $P(8, 13, 8)$ y $Q(-4, -11, -8)$. Se considera el plano π, perpendicular al segmento PQ por su punto medio.**

a) Obtén la ecuación del plano π.

b) Calcula la proyección ortogonal del punto $O(0, 0, 0)$ sobre el plano π.

c) Halla el volumen del tetraedro determinado por los puntos en que el plano π corta a los ejes de coordenadas y el origen de coordenadas.

(Madrid. Junio 2000. Opción B. Ejercicio 4)

a) El plano π pasa por el punto medio M, del segmento PQ, y tiene por vector normal el vector director de la recta que pasa por P y Q.

$$M\left(\frac{8-4}{2}, \frac{13-11}{2}, \frac{8-8}{2}\right) = M(2, 1, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (-12\ \ -24, -16) \rightarrow \pi: -12x - 24y - 16z + D = 0 \\ M(2, 1, 0) \in \pi \rightarrow -12 \cdot 2 - 24 \cdot 1 - 16 \cdot 0 + D = 0 \rightarrow D = 48 \end{array}\right\}$$

El plano es π: $3x + 6y + 4z - 12 = 0$

b) La proyección ortogonal del punto O sobre el plano π es el punto de corte de π con la recta perpendicular a π que pasa por O.

La recta perpendicular a π que pasa por O tiene como vector director el vector normal de π.

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = 6\lambda \\ z = 4\lambda \end{array}\right\}$$

Calculamos la intersección entre π y r.

$$\left.\begin{array}{r} x = 3\lambda \\ y = 6\lambda \\ z = 4\lambda \\ 3x + 6y + 4z - 12 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lambda = \frac{12}{61}$$

La proyección ortogonal es $R\left(\frac{36}{61}, \frac{72}{61}, \frac{48}{61}\right)$

c) Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas.

Corte con eje X: $\left.\begin{array}{r} 3x + 6y + 4z - 12 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A(4, 0, 0)$

Corte con eje Y: $\left.\begin{array}{r} 3x + 6y + 4z - 12 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow B(0, 2, 0)$

Corte con eje Z: $\left.\begin{array}{r} 3x + 6y + 4z - 12 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow C(0, 0, 3)$

$$[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]\right| = \frac{24}{6} = 4$$

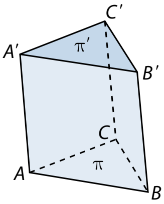
123 **Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura, con $A(1, -1, 0)$, $B(1, 0, -1)$, $C(0, 1, -1)$ y $A'(1, -1, \alpha)$.**

Calcula:

a) La ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C.

b) El valor de α para que el plano π', que contiene a los puntos A', B' y C', diste una unidad del plano π.

c) Para $\alpha = 1$, la ecuación del plano π' y el volumen del prisma.



(Asturias. Junio 2004. Bloque 3)

a) El plano π pasa por el punto A y tiene por vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} = (0, 1, -1)$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (-1, 2, -1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = x + y + z = 0$$

b) $\left.\begin{array}{l} \pi' \text{ es paralelo al plano } \pi \rightarrow \pi': x + y + z + D = 0 \\ A'(1, -1, \alpha) \in \pi' \rightarrow 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot \alpha + D = 0 \rightarrow D = -\alpha \end{array}\right\}$

El plano es π': $x + y + z - \alpha = 0$

Como π y π' son paralelos tomamos $A(1, -1, 0) \in \pi$.

$$d(\pi, \pi') = d(A, \pi') = \frac{|1 - 1 + 0 - \alpha|}{\sqrt{1+1+1}} = 1 \rightarrow \begin{cases} \alpha = \sqrt{3} \\ \alpha = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Existen dos puntos que cumplen la condición:

$A'\left(1, -1, \sqrt{3}\right)$ y $A'\left(1, -1, -\sqrt{3}\right)$

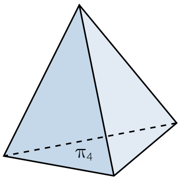
c) $\alpha = 1 \rightarrow \pi' \colon x + y + z - 1 = 0$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{Volumen del prisma} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}]\right| = \frac{1}{2}$$

124 **Obtener las ecuaciones de las rectas obtenidas al cortar cada uno de los planos, $\pi_1\colon x + y + z = 3$, $\pi_2\colon x - z = 0$ y $\pi_3\colon y - z = 0$ con el plano $\pi_4\colon z = 0$.**

Esos cuatro planos limitan un tetraedro del que se obtendrá el área de la cara situada en el plano π_4 y la altura sobre esa cara, explicando el método utilizado.



(C. Valenciana. Junio 2001. Ejercicio B. Problema 4)

$$\pi_1 \cap \pi_4 = r_1\colon \left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r_1\colon \left.\begin{array}{r} x = 3 - a \\ y = a \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\pi_2 \cap \pi_4 = r_2\colon \left.\begin{array}{r} x - z = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r_2\colon \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = b \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\pi_3 \cap \pi_4 = r_3\colon \left.\begin{array}{r} y - z = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r_3\colon \left.\begin{array}{r} x = c \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

La base del tetraedro es un triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección de estas rectas.

$$A = r_1 \cap r_2 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ z = 0 \\ x - z = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A(0, 3, 0)$$

$$B = r_1 \cap r_3 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ z = 0 \\ y - z = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow B(3, 0, 0)$$

$$C = r_2 \cap r_3 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - z = 0 \\ z = 0 \\ y - z = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow C(0, 0, 0)$$

El área de la base del tetraedro es el área del triángulo ABC.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -9\vec{k} = (0, 0, -9) \qquad \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 9$$

Área de la base $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{9}{2}$

El vértice del tetraedro es el punto D que es la intersección de los tres primeros planos.

$$D = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ x-z=0 \\ y-z=0 \end{array}\right\} \rightarrow D(1, 1, 1)$$

Calculamos el volumen del tetraedro.

$\overrightarrow{AB} = (3, -3, 0)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (0, -3, 0)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD} = (1, -2, 1)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -9$$

Volumen del tetraedro $= \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Aplicamos la fórmula de volumen de una pirámide para calcular su altura.

$$\text{Volumen} = \frac{\text{Área de la base} \times \text{Altura}}{3} \rightarrow \text{Altura} = \frac{3 \times \text{Volumen}}{\text{Área de la base}} = \frac{3 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{9}{2}} = 1$$

125 **Consideremos un paralelepípedo de bases *ABCD* y *EFGH*, siendo:**

$A(3, 1, 0)$ $\qquad$ $B(0, 0, 1)$ $\qquad$ $C(-1, 3, 1)$ $\qquad$ $E(6, 3, 0)$

Halla el área de una de las bases, el volumen del paralelepípedo y la distancia entre las bases.

Calculamos el área del paralelogramo *ABCD*.

$\overrightarrow{BA} = (3, 1, -1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{BC} = (-1, 3, 0)$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + \vec{j} + 10\vec{k} = (3, 1, 10) \qquad |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{110}$$

Área de la base $ABCD = |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{110}$

Calculamos D, el cuarto vértice de la base *ABCD*.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow (-3, -1, 1) = (-1 - d_1, 3 - d_2, 1 - d_3) \rightarrow D(2, 4, 0)$

Calculamos el volumen del paralelepípedo generado por $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{AB} = (-3, -1, 1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD} = (-1, 3, 0)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AE} = (3, 2, 0)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -11$$

Volumen del paralelépipedo $= \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}]\right| = 11$

La distancia entre las bases es la altura del paralelepípedo.

$$\text{Volumen} = \text{Área de la base} \times \text{Altura} \rightarrow \text{Altura} = \frac{\text{Volumen}}{\text{Área de la base}} = \frac{11}{\sqrt{110}} = \frac{\sqrt{110}}{10}$$

126 **El plano de ecuación general $x+y+z=10$ corta a las rectas:**

$$r_1: x = y = 1 \qquad r_2: y = z = 2 \qquad r_3: x = z = 3$$

en los puntos A, B y C, respectivamente. Se pide:

a) Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son A, B, C y $D(1, 2, 3)$.

b) Determina la distancia del vértice D hasta la cara opuesta del tetraedro.

(Castilla-La Mancha. Junio 2006. Bloque 4. Pregunta A)

a) Calculamos A, B y C.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ x=y=1 \end{array}\right\} \to A(1, 1, 8) \qquad \left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ y=z=2 \end{array}\right\} \to B(6, 2, 2)$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ x=z=3 \end{array}\right\} \to C(3, 4, 3)$$

Calculamos el volumen del tetraedro determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB} = (5, 1, -6) \qquad \overrightarrow{AC} = (2, 3, -5) \qquad \overrightarrow{AD} = (0, 1, -5)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -52$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = \frac{52}{6} = \frac{26}{3}$$

b) La cara opuesta es el plano $x+y+z=10$.

$$d(D, \pi) = \frac{|1+2+3-10|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

127 **Considera los puntos $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(2, 2, 1)$ y $D(1, 1, 2)$, y calcula:**

a) El volumen del tetraedro que determinan.

b) La ecuación cartesiana o implícita del plano que contiene al punto D y es paralelo al que contiene a los puntos A, B y C.

(Castilla-La Mancha. Junio 2004. Bloque 4. Pregunta B)

a) El tetraedro está determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0) \qquad \overrightarrow{AC} = (0, 2, 1) \qquad \overrightarrow{AD} = (-1, 1, 2)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

b) El plano pasa por el punto D y tiene por vectores directores $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (0, 2, 1)$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2x+2y-4z+4=0 \to \pi:\ x+y-2z+2=0$$

128 **Halla todos los puntos tales que unidos con los puntos $A(3, 5, -1)$, $B(5, 9, -5)$ y $C(6, 2, 2)$, forman un tetraedro de 15 unidades de volumen.**

Llamamos $P(x, y, z)$ a un punto genérico y calculamos el volumen del tetraedro generado por los vectores $\overrightarrow{AB} = (2, 4, -4)$, $\overrightarrow{AC} = (3, -3, 3)$ y $\overrightarrow{AP} = (x-3, y-5, z+1)$.

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}] = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & -3 & 3 \\ x-3 & y-5 & z+1 \end{vmatrix} = -18y - 18z + 72$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}]\right| = \frac{|-18y - 18z + 72|}{6} = 15$$

$$\rightarrow \begin{cases} -3y - 3z + 12 = 15 \\ -3y - 3z + 12 = -15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y + z + 1 = 0 \\ y + z - 9 = 0 \end{cases}$$

El lugar geométrico de los puntos que cumplen la condición son dos planos.

129 **Encuentra los puntos de la recta:**

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{2}$$

que equidistan de los planos: $x + y - z + 1 = 0$ y $x - y + z + 2 = 0$.

(Baleares. Septiembre 2002. Opción B. Cuestión 4)

Un punto genérico de la recta es $P(-1 + 2\lambda, -3\lambda, 2 + 2\lambda)$.

Buscamos los puntos de la recta que equidistan de los dos planos.

$$\frac{|-1 + 2\lambda - 3\lambda - 2 - 2\lambda + 1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|-1 + 2\lambda + 3\lambda + 2 + 2\lambda + 2|}{\sqrt{1+1+1}}$$

$$|-3\lambda - 2| = |7\lambda + 3| \rightarrow \begin{cases} -3\lambda - 2 = 7\lambda + 3 \\ -3\lambda - 2 = -7\lambda - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{2} \\ \lambda = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Los puntos que equidistan de los dos planos son: $P_1\left(-2, \frac{3}{2}, 1\right)$ y $P_2\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$

130 **Halla la ecuación general del plano que equidista de los puntos $P(2, 1, 3)$ y $Q(0, 3, -1)$ y es paralelo al plano π: $3x - y + z + 1 = 0$.**

(Navarra. Septiembre 2006. Grupo 1. Opción A)

El plano π' que buscamos es paralelo a $\pi \rightarrow \pi'$: $3x - y + z + D = 0$.

$$d(P, \pi') = d(Q, \pi') \rightarrow \frac{|3 \cdot 2 - 1 + 3 + D|}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{|3 \cdot 0 - 3 - 1 + D|}{\sqrt{9+1+1}}$$

$$|D + 8| = |D - 4| \rightarrow D = -2$$

El plano es π': $3x - y + z - 2 = 0$

131 Dados los puntos: $A(1, 0, 0)$, $B(0, -1, 0)$ y $C(0, 0, 3)$.

Se pide:

a) Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de A, B y C, indicando qué figura forman.

b) Halla las coordenadas del centro de la circunferencia que pasa por esos puntos.

(Aragón. Junio 2001. Opción B. Cuestión 2)

a) Tomamos un punto $P(x, y, z)$ que equidista de A, B y C.

$d(A, P) = d(B, P) = d(C, P)$

$d(A, P) = (x-1)^2 + y^2 + z^2$

$d(B, P) = x^2 + (y+1)^2 + z^2$

$d(C, P) = x^2 + y^2 + (z-3)^2$

- $d(A, P) = d(B, P)$

  $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y+1)^2 + z^2$

  $x + y = 0$

  Es la ecuación de un plano.

- $d(B, P) = d(C, P)$

  $x^2 + (y+1)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2$

  $y + 3z = 4$

  Es la ecuación de un plano.

  El lugar geométrico de los puntos que equidistan de A, B y C es la recta de intersección de los dos planos.

  $$r: \left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ y + 3z = 4 \end{array}\right\}$$

b) El centro de la circunferencia es equidistante de los tres puntos, es decir, pertenece a la recta r. De la misma manera, el centro de la circunferencia y los puntos A, B y C tienen que pertenecer al mismo plano. Por tanto, el centro será la intersección de la recta con el plano.

El plano pasa por $A(1, 0, 0)$ y tiene por vectores directores $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 3)$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3x + 3y - z + 3 = 0 \rightarrow \pi: 3x - 3y + z - 3 = 0$$

Calculamos la intersección entre la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ y + 3z - 4 = 0 \\ 3x - 3y + z - 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{19} \\ y = -\dfrac{5}{19} \\ z = \dfrac{27}{19} \end{array}\right.$$

El centro de la circunferencia es $\left(\dfrac{5}{19}, -\dfrac{5}{19}, \dfrac{27}{19}\right)$.

132 **Determina la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$ y $D(0, 0, 1)$. Calcula también su centro y su radio.**

La ecuación de la esfera es de la forma $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$.

Como pasa por los puntos A, B, C y D:

$$\left.\begin{array}{r}(-a)^2+(-b)^2+(-c)^2=r^2\\(1-a)^2+(-b)^2+(-c)^2=r^2\\(-a)^2+(1-b)^2+(-c)^2=r^2\\(-a)^2+(-b)^2+(1-c)^2=r^2\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}a^2+b^2+c^2=r^2\\a^2+b^2+c^2=r^2+2a-1\\a^2+b^2+c^2=r^2+2b-1\\a^2+b^2+c^2=r^2+2c-1\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}a=\dfrac{1}{2}\\b=\dfrac{1}{2}\\c=\dfrac{1}{2}\\r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$

La ecuación de la esfera es: $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 **a) Define e interpreta el producto vectorial de vectores.**

b) Calcula los vectores unitarios perpendiculares a $\vec{u}=(1,-2,2)$ y $\vec{v}=(1,0,1)$.

c) Halla la distancia al origen del plano determinado por el punto $(1, 1, 1)$ y los vectores del apartado anterior.

(Galicia. Junio 2006. Bloque 2. Opción 1)

a) El producto vectorial de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es otro vector $\vec{u}\times\vec{v}$ que tiene los siguientes elementos:

- Módulo: $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \mathit{sen}\ \alpha$, siendo α el menor ángulo que forman los vectores.
- Dirección: la perpendicular de cualquier plano generado por ambos vectores.
- Sentido: el del avance de un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

La interpretación geométrica del módulo del producto vectorial de dos vectores es el área del paralelogramo que definen ambos vectores.

b) Hallamos los vectores perpendiculares a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-2&2\\1&0&1\end{vmatrix}=-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}=(-2,1,2) \qquad |\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{4+1+4}=3$$

$$\vec{v}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&1\\1&-2&2\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}=(2,-1,-2) \qquad |\vec{v}\times\vec{u}|=\sqrt{4+1+4}=3$$

Hallamos los vectores perpendiculares unitarios.

$$\vec{w}_1=\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \qquad \vec{w}_2=\frac{\vec{v}\times\vec{u}}{|\vec{v}\times\vec{u}|}=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

c) Calculamos el plano determinado por el punto P y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\left.\begin{array}{l} P(1, 1, 1) \in \pi \to -2\cdot 1 + 1 + 2\cdot 1 + D = 0 \to D = -1 \\ \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (-2, 1, 2) \to \pi: -2x + y + 2z + D = 0 \end{array}\right\} \pi: -2x + y + 2z - 1 = 0$$

Calculamos la a distancia del origen de coordenadas al plano.

$$d(O, \pi) = \frac{|-2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{3}$$

2 **Halla el valor de a de forma que $A(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 1)$ y $C(1, 6, a)$ sean los vértices de un triángulo de área $\frac{3}{2}$.**

(La Rioja. Junio 2006. Propuesta A. Ejercicio 1)

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (0, 6, a - 1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)\vec{i} = (a - 1, 0, 0)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(a-1)^2} = a - 1$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{a-1}{2} = \frac{3}{2} \to a = 4$$

3 **Se consideran la recta r: $\left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\}$ y el punto $P(1, 2, -1)$.**

a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a r.

b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano hallado y los ejes cartesianos.

(Cantabria. Junio 2003. Bloque 3. Opción A)

a) El plano que buscamos pasa por el punto P y tiene como vector normal al vector director de la recta r.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = (1, 1, 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 1, 2) \to \pi: x + y + 2z + D = 0 \\ P(1, 2, -1) \in \pi \to 1 + 2 + 2\cdot(-1) + D = 0 \to D = -1 \end{array}\right\} \to \pi: x + y + 2z - 1 = 0$$

b) Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas.

$$\text{Corte con eje } X: \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ z = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \end{array}\right\} \to A(1, 0, 0)$$

$$\text{Corte con eje } Y: \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ z = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \end{array}\right\} \to B(0, 1, 0)$$

$$\text{Corte con eje } Z: \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \end{array}\right\} \to C\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0) \qquad \overrightarrow{AC} = \left(-1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \vec{k} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

4 Dados los puntos $A(1, 2, 0)$, $B(-1, 0, 0)$, $C(0, -2, 0)$ y $D(0, 0, 1)$, se pide:

a) Ecuación de la recta que contiene a B y C.

b) Área del triángulo ABC.

c) Volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

(La Rioja. Septiembre 2004. Propuesta A. Ejercicio 5)

a) $\overrightarrow{BC} = (1, -2, 0) \qquad B = (-1, 0, 0)$

$$r: \left.\begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

b) $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, 0) \qquad \overrightarrow{AC} = (-1, -4, 0)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 6\vec{k} = (0, 0, 6) \qquad |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 6$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

c) $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, 0) \qquad \overrightarrow{AC} = (-1, -4, 0) \qquad \overrightarrow{AD} = (-1, -2, 1)$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}| = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{|[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}]|}{6} = \frac{|6|}{6} = 1$$

5 Sea r la recta que pasa por $A(0, 0, 0)$ y $B(80, 10, 0)$ y sea s la recta que pasa por $C(0, 0, 10)$ y $D(m, 10, 10)$. Obtener la distancia entre las rectas r y s y justificar, geométricamente, que la distancia es independiente del valor de m.

(C. Valenciana. Septiembre 2001. Ejercicio A. Problema 1)

$\vec{u}_r = \overrightarrow{AB} = (80, 10, 0)$ $\quad\quad$ $\vec{v}_s = \overrightarrow{CD} = (m, 10, 0)$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{AC} = (0, 10, 0)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} 80 & 10 & 0 \\ m & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 8.000 - 100m$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 80 & 10 & 0 \\ m & 10 & 0 \end{vmatrix} = (800 - 10m)\vec{k} = (0, 0, 800 - 10m)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}\right| = 800 - 10m$$

$$d(r, s) = \frac{\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}]\right|}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}\right|} = \frac{|8.000 - 100m|}{800 - 10m} = 10$$

La distancia es independiente del valor de m porque la recta r está contenida en el plano $z = 0$, y las rectas de dirección $\overrightarrow{CD}$ lo están en el plano $z = 10$.

6 **a) Calcúlense los valores de *a* para los cuales las rectas:**

$$r: \left.\begin{array}{r} 3x + ay - 6az + 1 = 0 \\ -x + y + 3z - 3 = 0 \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + a\lambda \end{array}\right\}$$

son perpendiculares.

b) Para $a = 1$, calcúlese la recta que pasa por (1, 1, 1) y se apoya en *r* y *s*.

(Castilla y León. Septiembre 2005. Prueba A. Problema 1)

a) Hallamos los vectores directores de cada recta.

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & a & -6a \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (9a)\vec{i} + (-9 + 6a)\vec{j} + (3 + a)\vec{k} = (9a, -9 + 6a, 3 + a)$$

$$\vec{u}_s = (-1, 1, a)$$

Las rectas son perpendiculares si lo son sus vectores directores.

$$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = (9a, -9 + 6a, 3 + a) \cdot (-1, 1, a) = a^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -3 \end{cases}$$

b) Si $a = 1$:

$$r: \left.\begin{array}{r} 3x + y - 6z + 1 = 0 \\ -x + y + 3z - 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = -1 + 9\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 4\lambda \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array}\right\}$$

La recta que nos piden está determinada por dos planos π_1 y π_2.

Hallamos el plano π_1, que contiene a la recta r y al punto $P(1, 1, 1)$.

$R(-1, 2, 0) \in r \rightarrow \overrightarrow{PR} = (-2, 1, -1)$

$$\pi_1: \begin{vmatrix} x + 1 & y - 2 & z \\ 9 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -x + y + 3z - 3 = 0 \rightarrow \pi_1: x - y - 3z + 3 = 0$$

Hallamos π_2, que contiene a la recta s y al punto $P(1, 1, 1)$.

$S(-1, 3, 1) \in s \to \overrightarrow{PS} = (-2, 2, 0)$

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2x - 2y + 4 = 0 \to \pi_2: x + y - 2 = 0$$

La recta que pasa por P y se apoya en r y s es:

$$m: \left.\begin{array}{r} x - y - 3z + 3 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

7 a) **¿Cuál es la posición relativa de las rectas r_1 y r_2 siguientes?**

$$r_1: \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 2z \end{array}\right\} \qquad r_2: \left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{array}\right\}$$

b) **¿Es posible encontrar un plano que sea perpendicular a la recta r_1 y que además contenga la recta r_2? Justifica tu respuesta.**

c) **Calcula la ecuación general del plano π que contiene a las dos rectas r_1 y r_2.**

d) **Calcula la ecuación paramétrica de una recta r_3 perpendicular al plano π y tal que:**

distancia (r_1, r_3) = distancia $(r_2, r_3) = \sqrt{105}$

(Cantabria. Septiembre 2005. Bloque 3. Opción A)

a) Escribimos las rectas en forma paramétrica.

$$r_1: \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

$$r_2: \left.\begin{array}{l} x = \mu \\ y = -2\mu \\ z = \mu \end{array}\right\}$$

Sus vectores directores no son proporcionales y las dos rectas pasan por el origen de coordenadas, por tanto, se cortan.

b) Existe ese plano si r_1 y r_2 son perpendiculares.

$\vec{u}_1 = (0, 2, 1)$

$\vec{v}_2 = (1, -2, 1)$,

$\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2 = (0, 2, 1) \cdot (1, -2, 1) = -3 \neq 0$

No es posible encontrar un plano que cumpla las condiciones.

c) El plano que buscamos pasa por el punto $A(0, 0, 0) \in r_1$ y tiene como vectores directores los vectores directores de r_1 y r_2.

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4x + y - 2z = 0$$

d) r_3 tiene como vector director el vector normal del plano. Además, como r_1 y r_2 están contenidas en el plano, r_3 pasa por un punto del plano π cuya distancia

Tomamos un punto $P(x, y, z)$ que cumpla estas condiciones.

$$\left.\begin{array}{r}4x+y-2z=0\\ d((P), r_1)=\sqrt{105}\\ d((P), r_2)=\sqrt{105}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}4x+y-2z=0\\ \dfrac{|(-y+2z, x, -2x)|}{\sqrt{5}}=\sqrt{105}\\ \dfrac{|(-y-2z, x-z, 2x+y)|}{\sqrt{6}}=\sqrt{105}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}4x+y-2z=0\\ \sqrt{(-y+2z)^2+x^2+4x^2}=\sqrt{525}\\ \sqrt{(-y-2z)^2+(x-z)^2+(2x+y)^2}=\sqrt{630}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}4x=-y+2z\\ 16x^2+x^2+4x^2=525\\ (-y-2z)^2+(x-z)^2+(2x+y)^2=630\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}4x=-y+2z\\ x^2=25\\ (-y-2z)^2+(x-z)^2+(2x+y)^2=630\end{array}\right\} \rightarrow x=\pm 5$$

- Si $x=5$:

  $$\left.\begin{array}{r}y=2z-20\\ (-2z+20-2z)^2+(5-z)^2+(10+2z-20)^2=630\end{array}\right\}$$

  $21z^2-210z+525=630 \rightarrow z=5\pm\sqrt{30} \rightarrow y=-10\pm 2\sqrt{30}$

  Obtenemos dos puntos:

  $\left(5, -10+2\sqrt{30}, 5+\sqrt{30}\right)$ y $\left(5, -10-2\sqrt{30}, 5-\sqrt{30}\right)$

- Si $x=-5$:

  $$\left.\begin{array}{l}y=2z+20\\ (-2z-20-2z)^2+(-5-z)^2+(-10+2z+20)^2=630\end{array}\right\}$$

  $21z^2+210z+525=630 \rightarrow z=-5\pm\sqrt{30} \rightarrow y=10\pm 2\sqrt{30}$

  Obtenemos otros dos puntos:

  $\left(-5, 10+2\sqrt{30}, -5+\sqrt{30}\right)$ y $\left(-5, 10-2\sqrt{30}, -5-\sqrt{30}\right)$

  Obtenemos cuatro rectas que cumplen las condiciones del problema.

  $$r_3\colon \left.\begin{array}{l}x=5+4\lambda\\ y=-10+2\sqrt{30}+\lambda\\ z=5+\sqrt{30}-2\lambda\end{array}\right\} \qquad r_3\colon \left.\begin{array}{l}x=5+4\lambda\\ y=-10-2\sqrt{30}+\lambda\\ z=5-\sqrt{30}-2\lambda\end{array}\right\}$$

  $$r_3\colon \left.\begin{array}{l}x=-5+4\lambda\\ y=10+2\sqrt{30}+\lambda\\ z=-5+\sqrt{30}-2\lambda\end{array}\right\} \qquad r_3\colon \left.\begin{array}{l}x=-5+4\lambda\\ y=10-2\sqrt{30}+\lambda\\ z=-5-\sqrt{30}-2\lambda\end{array}\right\}$$