Actividades iniciales

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales :

$$a)\ \begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 5y = 23 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ x + 3y + 6z + 10t = 0 \\ x + 4y + 10z + 20t = 0 \end{cases}$$

a) La solución es $x = 4$, $y = 3$.
b) La solución es $x = 2$, $y = 2$, $z = 3$.
c) La solución es $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$.

2. Estudia y resuelve cuando sea posible los sistemas de ecuaciones siguientes, según los valores del parámetro *m*:

$$a)\ \begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = m^2 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + my + z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

a) • Si $m = -1$, el sistema es incompatible.
• Si $m = 1$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son: $x = 1 - t$, $y = t$ con $t \in R$.
• Si $m \notin \{-1, 1\}$, el sistema es compatible determinado.

Su solución es $x = \dfrac{m}{m+1}$, $y = \dfrac{m^2 + m + 1}{m + 1}$

b) • Si $m = -2$, el sistema es incompatible.
• Si $m = 1$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x = 1 - t - s,\quad y = t,\quad z = s \text{ con } t, s \in R.$$

• Si $m \notin \{-2, 1\}$ el sistema es compatible determinado. Su solución es:

$$x = -\frac{m+1}{m+2},\ y = \frac{1}{m+2},\ z = \frac{(m+1)^2}{(m+2)}$$

c) • Si m = 1, el sistema es incompatible.
• Si m ≠ 1, el sistema es compatible determinado. Su solución es:

$$x = 0,\quad y = \frac{1}{1-m},\quad z = \frac{8m - 6}{m - 1}$$

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Resuelve los siguientes sistemas:

$$a)\ \begin{cases} 7x - 2y = 12 \\ x - 2 = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 7 \\ x - 5y = 5 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 4x - 2x = 6 \\ 10x - 5x = 15 \end{cases}$$

a) La solución es $x = 2$, $y = 1$.
b) El sistema es incompatible.
c) El sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son: $x = t$, $y = 2t - 3$ con $t \in R$.

2 Discute y resuelve según los valores de a los sistemas:

$$a)\ \begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + a^2y = 1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x + ay = ax \\ 3x + ay = ay \end{cases}$$

a) • Si $a = 1$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x = 1 - t,\ y = t \text{ con } t \in R$$

• Si $a \neq 1$, el sistema es compatible determinado. Su solución es:

$$x = \frac{(a+1)(a^2+1)}{a^2 + a + 1},\ y = -\frac{a}{a^2 + a + 1}$$

b) • Si $a = 0$, el sistema es compatible determinado. Su solución es:

$$x = 0,\quad y = 0.$$

• Si $a \neq 0$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son: $x = 0$, $y = t$ con $t \in R$.

3 Dado el sistema $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x - my = 2m - 1 \end{cases}$ **halla *m*, para que:**

***a)* no tenga soluciones,**
***b)* tenga infinitas soluciones,**
c)* tenga solución única, *y
***d)* tenga una solución en la que $x = 3$.**

a) El sistema es incompatible si $m = -1$.
b) El sistema es compatible indeterminado si $m = 1$.
c) El sistema es compatible determinado si $m \neq 1$ y $m \neq -1$.
d) El valor de m es $-4/3$.

4 Estudia el siguiente sistema según los valores de

$$a\ \begin{cases} 2x - y = 2 \\ ax - 2y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \\ x + 5y = a \end{cases}$$

- Si $a = 1$, el sistema es compatible determinado con solución $x = 1$, $y = 0$.
- Si $a \neq 1$ el sistema es incompatible.

5 **Dado el sistema de ecuaciones**

$$\begin{cases} 2x - y = m \\ mx + 3y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

a) **Haz un estudio de él según los diferentes valores del parámetro *m*.**
b) **Resuelve el sistema en los casos que sea compatible.**

a) • Si $m = 1$, el sistema es compatible determinado.
• Si $m = -8$, el sistema es compatible determinado.
• Si $m \neq 1$ y $m \neq -8$, el sistema es incompatible.
b) Si $m = 1$, la solución es $x = 1$, $y = 1$.
Si $m = -8$, la solución es $x = 10$, $y = 28$.

6 **Resuelve los sistemas de ecuaciones con tres incógnitas:**

a) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x + z = 4 \\ y + z = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \\ x + 4y + 2z = 5 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ 3x + 4y + z = 7 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ -y + z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$

a) La solución es $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.
b) Las soluciones son:
$$x = 4 - t,\ y = 6 - t,\ z = t \text{ con } t \in R$$
c) Las soluciones son:
$$x = 1 + 2t,\ y = t,\ z = 2 + 3t \text{ con } t \in R$$
d) La solución es $x = 1$, $y = 0$, $z = -2$.
e) Las soluciones son:
$$x = 5 - 7t,\ y = -2 + 5t,\ z = t \text{ con } t \in R$$
f) La solución es $x = 2/3$, $y = -7/9$, $z = 2/9$.

7 **Dado el sistema**

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

a) **Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.**
b) **Añade una ecuación para que el sistema tenga infinitas soluciones.**

a) Por ejemplo, la ecuación añadida para que el sistema sea incompatible es $3x + 2z = 5$.
c) La ecuación añadida para que el sistema sea compatible indeterminada puede ser $3x + 2z = 2$.

8 **Si el rango de la matriz de los coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es dos ¿Puede ser el sistema compatible? ¿Puede ser incompatible?**

Pueden darse las dos situaciones:
Para el sistema $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + 2z = 9 \\ 2x + 2y + 3z = 15 \end{cases}$

el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es dos y el sistema es compatible indeterminado; sus soluciones son:
$$x = t,\ y = 3 - t,\ z = 3 \text{ con } t \in R.$$

Para el sistema $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + 2z = 9 \\ 2x + 2y + 3z = 10 \end{cases}$

el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es dos y el sistema es incompatible.

9 **En un sistema de ecuaciones el determinante de la matriz de los coeficientes es cero. ¿Puede tener solución el sistema? ¿Se puede aplicar la regla de Cramer?**

El sistema $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + 2z = 9 \\ 2x + 2y + 3z = 15 \end{cases}$

que es compatible indeterminado responde afirmativamente a la primera cuestión del ejercicio.
Puede aplicarse la regla de Cramer al sistema equivalente

$$\begin{cases} y + z = 6 - x \\ y + 2z = 9 - x \end{cases}$$

dicha regla proporciona las soluciones, en función de la incógnita x:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6-x & 1 \\ 9-x & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3-x}{1},\quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6-x \\ 1 & 9-x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3}{1} = 3$$

10 **Calcula el valor de *m* para que el sistema**

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ (m - 1)x + 3y + z = m \\ x + (m - 1)y - z = 0 \end{cases}$$

a) **Tenga una solución única.**
b) **Tenga infinitas soluciones.**
c) **No tenga soluciones.**

a) El sistema tiene solución única si m es distinto de –1 y de 2.
b) El sistema tiene infinitas soluciones si $m = 2$.
c) El sistema no tiene soluciones si $m = -1$.

11 **¿Para qué valores de k el sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ y + 3z = k \\ x + z = 1 \end{cases}$ tiene solución única?**

Para cualquier valor de k el sistema tiene solución única. Ésta es:

$$x = 2 - k/4\ ,\ y = 3 + k/4\ ,\ z = -1 + k/4.$$

12 **Estudia según los valores de a el sistema**

$$\begin{cases} ax - y + 2z = 1 \\ x - 2y = 2 \\ ax + y - z = 1 \end{cases}$$

Resuélvelo para $a = 1$.

- Si $a = -1/6$, el sistema es incompatible.
- Si $a \neq -1/6$, el sistema es compatible determinado.

Para $a = 1$, el sistema es $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x - 2y = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

y su solución es:

$$x = 6/7\ ,\ y = 3/7\ ,\ z = 2/7$$

13 **Discute según los valores de a y resuélve, cuando sea posible, el sistema:**

$$\begin{cases} 2y - z = a \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - 4z = a \end{cases}$$

- Si $a \neq 7$, el sistema es incompatible.
- Si $a = 7$, el sistema es compatible determinado. Su solución es:

$$x = 43/9\ ,\ y = 13/3\ ,\ z = 5/3.$$

14 **Discute y resuelve los siguientes sistemas:**

$$a) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ 5x - y + mz = 0 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ -4x - 2y + mz = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

a) • Si $a \neq 5$, el sistema es compatible determinado. Su solución es $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
  • Si $m = 5$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son: $x = -t$, $y = 0$, $z = t$ con $t \in R$.

b) • Si $m \neq 46/3$, el sistema es compatible determinado. Su solución es $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
  • Si $m = 46/3$ el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x = \frac{22}{3}t\ ,\ y = -7t,\ z = t \text{ con } t \in R$$

15 **Dado el sistema homogéneo**

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + kz = 0 \\ x - y - 4z = 0 \end{cases}$$

***a)* Indica para qué valores de k admite solución distinta de la trivial.**
***b)* Resuelve el sistema anterior para un valor k que lo haga compatible indeterminado.**

a) Sólo para $k = 7/4$, el sistema admite una solución distinta de la trivial.
b) Para el valor anterior, las soluciones son:

$$x = \frac{5t}{4}\ ,\ y = \frac{9t}{4}\ ,\ z = t \text{ con } t \in R$$

16 **Discute y resuelve, según los valores de m, los sistemas:**

$$a) \begin{cases} (m+1)\ x = y + z = 0 \\ x + (m-2)\ y + z = 0 \\ x + y + (m-3)\ z = 0 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x - y + mz = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ 5x - my + 2z = 0 \end{cases}$$

a) • Si m es distinto de $+2$, $-2 - \sqrt{7}$ o $-2 + \sqrt{7}$, el sistema es compatible determinado. Su solución es la trivial.
  • Si m es 2, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son: $x = -t$, $y = 2t$, $z = t$ con $t \in R$.
  • Si m es $-2 - \sqrt{7}$ o $-2 + \sqrt{7}$, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para cualquier valor de m, el sistema es compatible determinado y su solución es la trivial.

17 **Elimina los parámetros que intervienen en los sistemas siguientes:**

$$a) \begin{cases} x = 2m + n \\ y = -m + n \\ z = 3m - 2n \\ t = m + n \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x = p + q \\ y = q + r \\ z = p + r \\ t = 2p - 3r \\ u = p + q + r \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = 1 + p + q \\ y = -p + 2q \\ z = 2 + 2p + 3q \\ t = -1 + 2p \\ u = 3 - q \end{cases}$$

Eliminando los parámetros, se obtiene:

$$a) \begin{cases} x - 7y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - 3t = 0 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 5x - 5y - z - 2t = 0 \\ x + y - z - 2u = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 7x + y - 3z = 1 \\ 4x - 2y - 3t = 7 \\ 2x - t + 2u = 8 \end{cases}$$

18 **Dado el sistema**

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 3x - 3y + z = 4 \end{cases}$$

a) **Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.**

b) **Añade una ecuación para que el sistema sea compatible e indeterminado.**

a) Puede añadirse la ecuación $5x - 5y + 2z = 10$.
b) Puede añadirse la ecuación $5x - 5y + 2z = 9$.

19 **Discute, según los valores del parámetro k, y resuelve en los casos que proceda, los sistemas:**

$$a) \begin{cases} 2x - y - z = k \\ x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ky + 3z = 3 \\ y = z \\ 3y - z = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ kx + y + 3z = 6 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

a) • Si $k \neq 3$, el sistema es incompatible.
• Si $k = 3$, el sistema es compatible determinado.
Su solución es $x = 5/3$, $y = 2/3$, $z = -1/3$.

b) • Si $k \neq 4$, el sistema es incompatible.
• Si $k = 4$, el sistema es compatible determinado.
Su solución es $z = -4$, $y = 1$, $z = 1$.

c) • Si $k \neq 3$, el sistema es incompatible.
• Si $k = 3$, el sistema es compatible determinado.
Su solución es $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$.

20 **Un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, ¿puede ser compatible determinado? Justifica la respuesta con un ejemplo.**

La respuesta es afirmativa.
El ejemplo pedido puede ser $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + 2y = 26 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

21 **La matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas es tal que $a_{12} = a_{13} = a_{22} = 0$. ¿Qué valores puede tomar el resto de componentes de la matriz para que el sistema sea compatible determinado?**

La matriz de los coeficientes es de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Para que el sistema sea compatible determinado, el determinante de dicha matriz debe ser distinto de cero. Por tanto, los elementos a_{11}, a_{23} y a_{32} deben ser distintos de cero. Los restantes elementos pueden ser cualesquiera.

22 **¿Para qué valor o valores de m el sistema**

$$\begin{cases} mx + 2y = 0 \\ mx + my + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

admite alguna solución diferente de $x = y = z = 0$? Da a m uno de estos valores y halla todas las soluciones del sistema que resulten.

Si m es distinto de 2, la única solución del sistema es la trivial. Para $m = 2$, el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son: $x = t,\ y = t,\ z = 4t$ con $t \in R$.

23 **Estudia, para los diferentes valores del parámetro a, la existencia de soluciones del sistema**

$$\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$$

y resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

• Si a es distinto de 1 o 2, el sistema es compatible determinado.
• Si $a = 1$, el sistema es incompatible.
• Si $a = 2$, el sistema es compatible indeterminado.
Sus soluciones son:

$$x = 1 - t,\ y = 0,\ z = t \text{ con } t \in R.$$

24 **Sean S y S' dos sistemas de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes.**

a) **Justifica con un ejemplo que uno de los sistemas puede ser compatible y otro incompatible.**

b) **Si ambos son compatibles, ¿puede ser uno determinado y otro indeterminado?**

a) El sistema compatible puede ser $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$

El sistema incompatible puede ser $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$

b) Esta situación no puede darse, es decir, ambos sistemas serán determinados o indeterminados.

25 **Discute para los valores del parámetro k y resuelve en los casos que proceda, los sistemas siguientes:**

$$a) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ kx + 2z = 0 \\ 2x - y + kz = 0 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - kz = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} (k+1)\,x + 2y + z = 0 \\ 3x + ky - 2z = 0 \\ kx + y - z = 0 \end{cases}$$

a) • Si k $\neq$ 1 y $k \neq -2$ el sistema es compatible determinado. Su solución es la trivial.
• Si k = 1, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x = -2t,\ y = t,\ z = t \text{ con } t \in R$$

• Si $k = -2$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x = t,\ y = -2t,\ z = t \text{ con } t \in R$$

b) • Si $k \neq 23/5$ el sistema es compatible determinado. Su solución es la trivial.
• Si $k = 23/5$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x = t/5,\ y = 75/5,\ z = t$$

c) • Si $k \neq 1{,}71$ y $k \neq -3{,}21$, el sistema es compatible determinado. Su solución es la trivial.
• Si $k = 1{,}71$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x = 0{,}3t \quad y = -0{,}4t \quad z = t \quad \text{con } t \in R$$

• Si $k = -3{,}21$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x = 0{,}17t \quad y = -1{,}3t \quad z = t \quad \text{con } t \in R$$

26 Calcula el menor valor posible de *n* entre los números naturales 1, 2, 3, ... tal que el sistema

$$\begin{cases} n^2x + ny = 1 \\ x + n^2y = 0 \end{cases}$$

admita solución. Resuélvelo.

El determinante de la matriz de los coeficientes $\begin{pmatrix} n^2 & n \\ 1 & n^2 \end{pmatrix}$ es $n^4 - n = n\,(n-1)\,(n^2 + n + 1)$.
El menor número natural que hace el sistema compatible es $n = 2$.

Para $n = 2$, el sistema es $\begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ x + 4y = 0 \end{cases}$

y su solución: $x = \frac{4}{14}$, $y = -\frac{1}{14}$

27 Determina *m* y *n* en el sistema

$$\begin{cases} x + 2y = m \\ 3x - y = m - n \\ x - y = 4 \end{cases}$$

para que éste resulte compatible.

Para que el sistema sea compatible, la relación entre m y n debe ser $m - 3n - 28 = 0$.

28 Clasifica en función del número de soluciones los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a)\ \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

a) Tiene infinitas soluciones, que son: $x = 3-t,\ y = t,\ z = 0$ con $t \in R$
b) No tiene soluciones.
c) Tiene una solución que es $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

29 Discute, según los valores de *m*, el sistema

$$\begin{cases} mx + y = 2 - 2m \\ x + my = m - 1 \end{cases}$$

y resolverlo cuando *m* = 5.

• Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$, el sistema es compatible determinado.
• Si $m = 1$, el sistema es compatible indeterminado.
• Si $m = -1$, el sistema es incompatible.

Cuando $m = 5$, el sistema es $\begin{cases} 5x + y = -8 \\ x + 5y = 4 \end{cases}$

y su solución: $x = -\frac{11}{6}$, $y = \frac{7}{6}$

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

30 Encuentra todas las soluciones del sistema siguiente, según los valores del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

Para cualquier valor que tome el parámetro *a,* el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x = 1 - t,\ y = (1 - 2a)t,\ z = 2t \text{ con } t \in R \text{ y } a \in R$$

31 Discute el sistema siguiente, según los diferentes valores de los parámetros *a, b* (*a, b* $\in$ *R*).

$$\begin{cases} ax + ay + az = 0 \\ ax + by + bz = 0 \\ ax + by + z = 0 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

es $\det A = a\,(a-b)\,(b-1)$. Pueden darse las siguientes situaciones:

• Si $a \neq b$, $a \neq 0$, $b \neq 1$.
El rango de A es 3 y el sistema es compatible determinado.

• Si $a \neq b$, $a = 0$.
— $b \neq 1$. El rango de A es 2 y el sistema es compatible indeterminado.
— $b = 1$. El rango de A es 1 y el sistema es compatible indeterminado.

• Si $a \neq b$, $b = 1$.

— $a \neq 0$. El rango de A es 2 y el sistema es compatible indeterminado.

— $a = 0$. El rango de A es 1 y el sistema es compatible indeterminado.

• Si $a = b$.

— $a \neq 0$, $a \neq 1$. El rango de A es 2 y el sistema es compatible indeterminado.

— $a = 0$. El rango de A es 1 y el sistema es compatible indeterminado.

— $a = 1$. El rango de A es 1 y el sistema es compatible indeterminado.

32 Discute, según los valores del parámetro *m*, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{aligned} mx + y + z &= m^2 \\ x - y + z &= 1 \\ 3x - y - z &= 1 \\ 6x - y + z &= 3m \end{aligned}\right.$$

• Si $m \neq 2$, el sistema es incompatible.

• Si $m = 2$. el sistema es compatible determinado.

33 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= b \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}\right.$$

***a)* Discute el sistema en función de *a* y *b*.**

***b)* Resuelve el sistema para $a = b = -2$.**

a) • Si $a \neq 1$ y b cualquiera, el sistema es compatible determinado.

• Si $a = 1$ y $b = 1$, el sistema es compatible indeterminado.

• Si $a = 1$ y $b \neq 1$, el sistema es incompatible.

b) Para $a = b = -2$, el sistema es $\left\{\begin{aligned} -2x + y + z &= 1 \\ x - 2y + z &= -2 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}\right.$

y su solución es:

$$x = 0,\ y = 1,\ z = 0$$

34 Dado el sistema $\left\{\begin{aligned} 3x + 4y - 5z &= 6 \\ x - y + z &= n \\ x - y + mz &= 2 \end{aligned}\right.$

Se pide:

***a)* Discutirlo según los valores de los parámetros *m* y *n*.**

***b)* Resolverlo para $m = 3$, $n = 0$, usando el método de Gauss o bien matricialmente, es decir, hallando la inversa de la matriz de los coeficientes.**

a) • Si $m \neq 1$ y n cualquiera, el sistema es compatible determinado.

• Si $m = 1$ y $n = 2$, el sistema es compatible indeterminado.

• Si $m = 1$ y $n \neq 2$, el sistema es incompatible.

b) Para $m = 3$, $n = 0$, el sistema es $\left\{\begin{aligned} 3x + 4y - 5z &= 6 \\ x - y + z &= 0 \\ x - y + 3z &= 2 \end{aligned}\right.$

• Por el método de Gauss

$$\left\{\begin{aligned} 3x + 4y - 5z &= 6 \\ x - y + z &= 0 \\ x - y + 3z &= 2 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 3x + 4y - 5z &= 6 \\ 7y - 8z &= 6 \\ 7y - 14z &= 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 3x + 4y - 5z &= 6 \\ 7y - 8z &= 6 \\ 6z &= 6 \end{aligned}\right.$$

La solución es $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$.

• Matricialmente, a través de la matriz inversa.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/2 & 1/14 \\ 1/7 & -1 & 2/7 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

35 Elimina los parámetros *a* y *b* en el sistema:

$$\left\{\begin{aligned} x + y &= 3a + 3 \\ 2x + y - z &= 3a + 3b + 1 \\ x - 2y + z &= -2a + 5b - 8 \end{aligned}\right.$$

Debe cumplirse que

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & x + y - 3 \\ 3 & 3 & 2x + y - z - 1 \\ -2 & 5 & x - 2y + z + 8 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinando y simplificando, se obtiene:

$$\boxed{y - 2z = 2}$$

36 Discute, según los valores del parámetro *m*, el sistema

$$\left\{\begin{aligned} x - y &= m \\ x + m^2 z &= 2m + 1 \\ x - y + (m^2 - m)\, z &= 2m \end{aligned}\right.$$

Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

• Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, el sistema es compatible determinado.

• Si $m = 1$, el sistema es incompatible.

• Si $m = 0$, el sistema es compatible indeterminado.

Sus soluciones son:

$$x = 0,\ y = 0,\ z = t \text{ con } t \in R$$

37 Resuelve el siguiente sistema homogéneo, dejando como parámetros libres las incógnitas de mayor subíndice:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 + x_3 - x_5 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 - 2x_5 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}\right.$$

Resolviendo por el método de Gauss se obtiene:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Tomando como parámetros las incógnitas x_4 y x_5 se obtienen las soluciones:

$x_1 = 0$
$x_2 = -x_4 + 2x_5$ con $x_4, x_5 \in R$
$x_3 = x_5$

Resolución de problemas

1. PESADA DIFÍCIL. Cuatro amigos, Arturo, Berta, Carlos y Diana encuentran una antigua báscula que sólo pesa objetos cuyo peso está entre 50 y 100 kg. Estos amigos individualmente pesan menos de 50 kg y los tres juntos más de 100 kg, por lo que deciden pesarse de dos en dos de la siguiente manera: Arturo y Berta, 69 kg; Berta y Carlos, 79 kg; Carlos y Diana, 74 kg; Diana y Arturo, 64 kg. Con estos datos, ¿pueden determinar el peso de cada uno? Si no fuera posible determinar los pesos individuales, ¿qué parejas deben pesarse para encontrar la solución?

$$\left.\begin{array}{l} \text{Arturo} + \text{Berta} = 69 \\ \text{Berta} + \text{Carlos} = 79 \\ \text{Carlos} + \text{Diana} = 74 \\ \text{Diana} + \text{Arturo} = 64 \end{array}\right\}$$

Restando la primera igualdad y la segunda, obtenemos:

Arturo – Carlos = –10

Sumando a éste la tercera obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Arturo} - \text{Carlos} = -10 \\ \text{Carlos} + \text{Diana} = 74 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Arturo} + \text{Diana} = 64$$

Esta igualdad es la misma que la que tenemos en cuarto lugar. Luego no es posible determinar el peso de cada uno ya que nos queda un sistema indeterminado con más incógnitas que ecuaciones.
El sistema tiene una única solución si reemplazamos la tercera igualdad, sustituyéndola por: Carlos + Arturo = 74 kg con lo cual obtenemos que: Arturo pesa 32 kg; Berta pesa 37 kg; Carlos pesa 42 kg y Diana pesa 32 kg.

2. CURIOSA ELECCIÓN. En una clase hacen la elección de delegado de una forma muy original. Se piden tres alumnos voluntarios, que resultan ser Ana, Luis y Clara. Se les venda los ojos a cada uno de ellos y se les coloca en la cabeza una cinta, como la que llevan algunos tenistas. Estas tres cintas se toman de una bolsa que contiene 3 cintas rojas y 2 amarillas. Se les retira la venda de los ojos y de esta forma cada uno puede ver las cintas de sus compañeros pero no la suya propia. Será elegido delegado quien acierte el color de la cinta que lleva. Primero se pregunta a Ana y responde que no puede saberlo, lo mismo sucede con Luis. Por último, Clara dice que su cinta es roja, por lo que resulta elegida delegada. ¿Cómo lo supo?

En la siguiente tabla podemos ver todas las situaciones que se pueden plantear:

ANA	LUIS	CLARA	
R	R	R	(1)
R	R	A	(2)
R	A	R	(3)
A	R	R	(4)
R	A	A	(5)
A	R	A	(6)
A	A	R	(7)

En todos los casos lleva cinta roja excepto en (2), (5) y (6).
- (2) no es posible, pues en esta situación Luis hubiera sabido que su cinta era roja, ya que si hubiera sido amarilla ana hubiera sabido el color de la suya.
- (5) no es posible pues en esta situación Ana hubiese dicho que su cinta era roja.
- (6) no es posible, pues en esta situación Luis hubiera dicho que su cinta era roja. Por tanto en todos los demás casos la de Clara es roja.

3. SUMA DE CUBOS. ¿Cuántos suman los cubos de los n primeros números naturales?

$1^3 = 1 = 1^2$
$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2$
...

1, 3, 6, 10, 15, ... Es una progresión aritmética de 2.º orden y su término general es $\frac{n^2 + n}{2}$, por tanto:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n^2 + n}{2}\right)^2$$

Vamos a probarlo por inducción:
Suponemos que es cierto para $n = 1$, n = 2, ... $n = n$ y veamos si es cierto para $n = n + 1$.

$$\left.\begin{array}{l} 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n^2 + n}{2}\right)^2 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1) + n + 1}{2}\right]^2 \end{array}\right\}$$

Restando $\Rightarrow$ $(n+1)^3 = \left[\frac{(n+1) + n + 1}{2}\right]^2 - \left(\frac{n^2 + n}{2}\right)^2$

Hay que ver si esta igualdad es cierta. Operando el segundo miembro $\Rightarrow$

$(n+1)^3 = \frac{4n^3 + 12n^2 + 12n + 4}{4}$. Es cierta la igualdad.

Por tanto queda probado que para «n» se cumple:

$$1^3 + 2^2 + 3^3 + 4^3 + ... + h^3 = \left(\frac{n^2 + n}{2}\right)^2$$