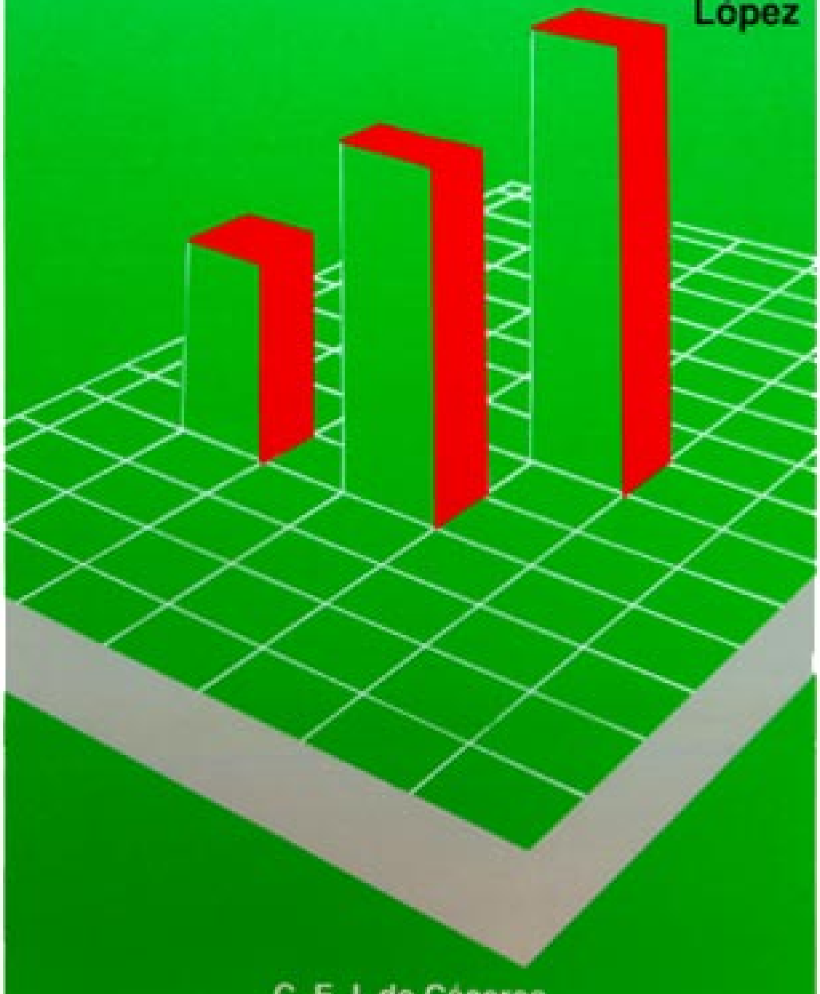
C. O. U.

MATEMÁTICAS I

OPCIONES A y B

Juan Luis Corcobado Cartes

Javier Marijuán López



C. E. I. de Cáceres

MATEMÁTICAS I
COU

OPCIONES A y B

Juan Luis Corcobado Cartes
Javier Marijuán López

Profesores de Matemáticas
C.E.I. de Cáceres

Versión electrónica del libro del mismo título.

I.S.B.N. 84-404-6841-5

Las diferencias de paginación entre la versión impresa y la electrónica de este libro obedecen a la supresión de algunas páginas en blanco de la versión sobre papel.

PRÓLOGO

Querido lector/a:

Al igual que hicimos al prologar la edición anterior de este libro, nos resulta grato expresar en primer lugar nuestro reconocimiento al I.C.E. de la Universidad de Extremadura porque haya considerado interesante para sus objetivos de coordinación del Curso de Orientación Universitaria la publicación de las presentes páginas. Atribuye sus posibles deficiencias a los propios autores y no a la generosidad para con ellos del citado instituto.

La única finalidad que nos ha motivado a preparar esta nueva edición, como sucedió en su día cuando redactamos la primera, ha sido la de facilitar tu tarea como estudiante y la nuestra como profesores. Hemos querido escribir exclusivamente lo que procuramos hacer en clase, y en este sentido debes entender el librito que tienes en las manos. Deseamos que puedas prestar más atención en el aula a lo que realmente tiene dificultad en matemáticas: demostraciones, modos de razonar, aspectos filosóficos inmersos en algunos conceptos, problemas... y ocupes en ello el esfuerzo y el tiempo que requiere esa toma *de apuntes que nunca es tarea acabada y siempre es dudosa en cuanto a la seguridad en lo que se ha tomado. Creemos que hemos escrito todo lo que un alumno debe saber después de un buen aprovechamiento del curso, y apenas sólo eso. Tentados en algunas ocasiones por profundizar más en determinados conceptos, hemos terminado por recordar que a veces los libros son más fáciles de escribir que de leer y que el curso sólo tiene ocho meses mal contados.*

La redacción y selección de los contenidos, consideradas las características del par no ordenado *escribidor, no han estado exentas de mutuas concesiones; el acuerdo ha llegado como fruto de nuestro fin último, proporcionarte este material de trabajo, y, aunque esté mal decirlo, de un común entusiamo por las matemáticas y, sobre todo, su enseñanza, que, aunque personal y diferente en cada uno de nosotros, hemos querido transmitir en las páginas que siguen. Porque estamos convencidos de que en la medida en que sepamos comunicarte nuestra ilusión por lo que hacemos y nuestra creencia no dogmática en lo que enseñamos, en la misma medida, insistimos, lograremos que encuentres satisfacción e ilusión por lo que estudias.*

Y como en ocasión precedente, suscribiremos las palabras de otro *insigne matemático, Rolf Nevanlinna:*

> "No es muy difícil hacer y escribir programas para la enseñanza de las matemáticas, lo es mucho más llevarlos a la práctica. Puede enseñarse bien de muchas maneras, hacerse mal de muchísimas, pero lo peor es hacerlo de un modo aburrido."

¿Será pretencioso decir que confiamos en hacerlo bien y no aburrirte más de lo indispensable?

Los autores.

TEMA 1

ESPACIOS VECTORIALES

1. INTRODUCCIÓN

Empezar las matemáticas de COU diciendo que el objetivo de su primera parte son los sistemas de ecuaciones lineales puede ser sorprendente para quien, como tú, hace ya algún tiempo que los sabe resolver. Si es así, no importa, o incluso mejor: será señal de que no partiremos de cero. Lo que ocurre, como puedes suponer, es que en este curso aprenderemos cosas nuevas y, con los sistemas de ecuaciones, siguiendo un método habitual en matemáticas, procederemos intentando encontrar lo que de común puedan tener todos ellos para, analizada convenientemente esa estructura común, estar en condiciones de resolver cualquier problema particular que se nos pueda presentar.

De modo que, efectivamente, estudiaremos sistemas de ecuaciones, pero en lugar de limitarnos a trabajar con ejemplos concretos, veremos cómo hay que proceder ante un sistema de **m** (es decir, cualquier número) ecuaciones lineales (de primer grado) con **n** (esto es, cualquier otro número, igual o no a **m**) incógnitas; y aunque ante un sistema en particular nos podríamos apañar con lo que ya sabemos, intentaremos asegurarnos de que nos enfrentaremos con éxito a cualquier sistema, por difícil que parezca.

Antes de entrar en el análisis de los sistemas de ecuaciones -cosa que haremos en el capítulo tercero-, dedicaremos este tema y el siguiente a proveernos de los instrumentos necesarios para nuestro fin, esto es, a los espacios vectoriales (de los que ya has oído hablar), las matrices y los determinantes; pero si cuando concluyamos nuestra tarea alguien dijera que lo del estudio de los sistemas no ha sido sino una excusa para hablar de lo que en realidad queríamos, o sea, de espacios vectoriales, matrices y determinantes, a lo mejor, y a fuer de ser sinceros, no nos quedaría más remedio que concederle parte de razón. Desearíamos, en todo caso, que al terminar esta parte del curso quedaras convencido de que gracias a lo que para entonces habremos estudiado -y a algo más, ciertamente-, una maquinita puede resolver sistemas de, por ejemplo, mil ecuaciones con mil incógnitas como si tal cosa.

¿De acuerdo? Pues ya, sin más, empezamos.

2. LEYES DE COMPOSICIÓN

Ejemplo

Consideremos los dos conjuntos siguientes: $\mathbf{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$; $\mathbf{B} = \{b_1, b_2\}$. Si quisiéramos emparejar de todas las formas posibles los elementos de **A** con los de **B**, escribiendo en primer lugar los elementos de **A** y, después, los de **B**, tendríamos las siguientes posibilidades:

$$(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2)$$

Pues bien, a cada pareja anterior le llamaremos *par ordenado* y, al conjunto de todas ellas, *producto cartesiano* de **A** por **B**, al que representaremos así: $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$.

(Observa que como los pares son ordenados, para que dos de ellos sean iguales no sólo han de tener los mismos elementos, sino que éstos han de aparecer en el mismo orden).

Definición (de producto cartesiano)

Dados dos conjuntos cualesquiera, **A** y **B**, llamaremos *producto cartesiano* de **A** por **B**, y lo representaremos por $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$, al conjunto:

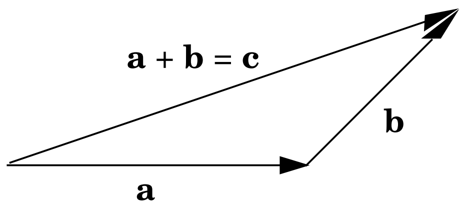
$$\boxed{\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \{ (a, b), \text{ donde } a \in \mathbf{A},\ b \in \mathbf{B} \}}$$

Ejemplos (de otra cosa)

☞ Cuando en la escuela aprendimos que $2 + 3 = 5$, lo que estábamos haciendo era establecer un criterio, la suma, que permitía asociar al par de números (2, 3) otro número, el 5. Si con el símbolo **R** representásemos el conjunto de los números reales, la operación anterior no sería sino una aplicación del producto cartesiano $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ en **R**. En este caso, al par (2, 3) correspondería la misma imagen, 5, que al par (3, 2).

☞ Cuando escribíamos $2^3 = 8$, también lo hacíamos en virtud de una aplicación $\mathbf{R}\times\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ a la que llamábamos potenciación. Pero en este caso, al contrario de lo que sucedía en el anterior, mientras que al par (2, 3) le correspondería como imagen 8, al par (3, 2) le correspondería 3^2, es decir, 9.

☞ Cuando en el plano vectorial, V^2, sumábamos vectores libres mediante el criterio reflejado en la figura, lo que estábamos estableciendo era una aplicación de $V^2\times V^2$ en V^2 que a cada par ordenado de vectores hacía corresponder otro vector.



Definición (de ley de composición interna)

➪ Se llama *ley de composición interna* en un conjunto **C** a cualquier aplicación:

$$\boxed{\mathbf{C} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}}$$

es decir, a cualquier criterio que a todo par ordenado de elementos de **C** le haga corresponder un único elemento de **C**.

Más ejemplos

☞ Considera ahora el conjunto $\mathbf{R}_2[x]$ de todos los polinomios en la indeterminada x, con coeficientes reales, de grado menor o igual a 2. Es decir:

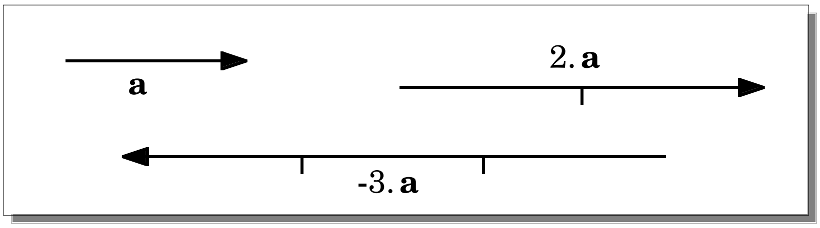
$$\mathbf{R}_2[x] = \{ ax^2 + bx + c \;/\; a, b, c \in \mathbf{R} \}$$

Recordarás que si α era un número real cualquiera, el producto de α por un polinomio $ax^2 + bx + c$ de $\mathbf{R}_2[x]$ se definía así:

$$\underbrace{\boxed{\alpha}}_{\text{Pertenece a } \mathbf{R}} . \underbrace{\boxed{(ax^2 + bx + c)}}_{\text{Pertenece a } \mathbf{R}_2[x]} = \underbrace{\boxed{(\alpha a)x^2 + (\alpha b)x + (\alpha c)}}_{\text{Pertenece a } \mathbf{R}_2[x]}$$

Por ello, escribías $2.(3x^2 + 2x + 1) = 6x^2 + 4x + 2$ ó $3.(x^2 - 1x + 3) = 3x^2 - 3x + 9$, etc. Es decir, la multiplicación de un número real por un polinomio de grado menor o igual que 2, permitía asociar a cada elemento $(\alpha, p(x))$ del producto cartesiano $\mathbf{R}\times\mathbf{R}_2[x]$ otro polinomio $q(x)$, perteneciente al conjunto $\mathbf{R}_2[x]$.

☞ Recordarás que la multiplicación de un número real por un vector libre del plano V^2 se efectuaba como se indica en la figura:



La multiplicación de un número por un vector libre era, pues, un criterio que nos permitía hacer corresponder a todo par de $\mathbf{R}\times V^2$ otro elemento de V^2.

Definición (ley de composición externa)

Llamaremos *ley de composición externa* definida en un conjunto **C** con operadores en otro conjunto **A** a cualquier aplicación:

$$\boxed{\mathbf{A} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}}$$

es decir, a cualquier criterio que a todo par formado por un elemento de **A** y otro de **C** le hace corresponder un único elemento de **C**.

3. EL CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL

Ejemplo ya conocido

Consideremos el conjunto $\mathbf{R}^2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \,/\, x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$ y definamos las dos operaciones siguientes:

① ➩	$(x_1, x_2) + (y_1, y_2)$	$=$	$(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2)$,	$\forall\ (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$
② ➩	$\alpha . (x_1, x_2)$	$=$	$(\alpha x_1, \alpha x_2)$,	$\forall\ \alpha \in \mathbf{R},\ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$

Tenemos así que la operación (+) es una ley de composición interna en $\mathbf{R}_2$, a la que llamaremos *suma,* y la operación (.), a la que llamaremos *multiplicación por un número o por un escalar,* una ley de composición externa en $\mathbf{R}^2$ con operadores en **R**. Dichas operaciones, como es fácil de comprobar, cumplen las siguientes propiedades:

La suma:

1.1)	$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$,	$\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$
1.2)	$\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$,	$\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^2$
1.3)	$\mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{x}$,	$\forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, siendo $\mathbf{0} = (0, 0)$
1.4)	$\mathbf{x}+(\mathbf{-x}) = \mathbf{0}$	$\forall\ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, siendo $\mathbf{-x} = (-x_1 , -x_2)$

La multiplicación por un número:

2.1)	$\alpha.(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha.\mathbf{x} + \alpha.\mathbf{y}$,	$\forall\ \alpha \in \mathbf{R} ; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$
2.2)	$(\alpha+\beta).\mathbf{x} = \alpha.\mathbf{x} + \beta.\mathbf{x}$,	$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$
2.3)	$(\alpha.\beta).\mathbf{x} = \alpha.(\beta.\mathbf{x})$,	$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$
2.4)	$1.\mathbf{x} = \mathbf{x}$,	$\forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$

☞ Por todo ello, se dice que la terna ($\mathbf{R}^2$, +, .) es un espacio vectorial sobre **R**.

Definición (de espacio vectorial)

Llamaremos ***espacio vectorial sobre*** **R** a una terna (V, +, **.**), donde:

➟ V = { **a** , **b** , **c** ... } es un conjunto a cuyos elementos llamaremos vectores.
➟ + es una ley de composición interna en V.
➟ **.** es una ley de composición externa en V con operadores en **R**.

cumpliéndose, cualesquiera que sean **a** , **b** , **c** ∈ V; α , β ∈ **R**:

1.1)	$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$	2.1)	$\alpha.(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha.\mathbf{a} + \alpha.\mathbf{b}$
1.2)	$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$	2.2)	$(\alpha+\beta).\mathbf{a} = \alpha.\mathbf{a} + \beta.\mathbf{a}$
1.3)	$\exists\ \mathbf{0} \in$ V tal que $\mathbf{a}+\mathbf{0} = \mathbf{a}$	2.3)	$(\alpha.\beta).\mathbf{a} = \alpha.(\beta.\mathbf{a})$
1.4)	$\exists\ \mathbf{-a} \in$ V tal que $\mathbf{a}+(\mathbf{-a}) = \mathbf{0}$	2.4)	$1.\mathbf{a} = \mathbf{a}$

Al vector **0** le llamaremos *vector nulo*; al vector **-a**, *opuesto de* **a**, y a los elementos α, β, ... de **R**, *escalares*.

Ejemplo importante

Considerado el conjunto $\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in \mathbf{R}\}$ y definidas las operaciones:

① $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$
② $\alpha.(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$, con $\alpha \in \mathbf{R}$,

es fácil demostrar que ($\mathbf{R}^n$, +, .) es un espacio vectorial sobre **R**. Es *el espacio vectorial de las n-tuplas de números reales*. Siendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, de los x_i se dice que son las *componentes* del vector **x**.

Consecuencias de la definición

Si (V, +, .) es un espacio vectorial sobre **R**, se verifican las siguientes proposiciones, para todo **a**, **b** de V y todo α, β de **R**:

---

① $\alpha.\mathbf{0} = 0.\mathbf{a} = \mathbf{0}$	② $(-\alpha).\mathbf{a} = \alpha.(-\mathbf{a}) = -(\alpha.\mathbf{a})$
③ $(\alpha-\beta).\mathbf{a} = \alpha.\mathbf{a} - \beta.\mathbf{a}$	④ $\alpha.(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \alpha.\mathbf{a} - \alpha.\mathbf{b}$
⑤ $\alpha.\mathbf{a} = \mathbf{0} \Leftrightarrow [\,(\alpha = 0)$ ó $(\mathbf{a} = \mathbf{0})\,]$	⑥ $\alpha.\mathbf{a} = \alpha.\mathbf{b}$, con $\alpha \neq 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$
⑦ $\alpha.\mathbf{a} = \beta.\mathbf{a}$, con $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \alpha=\beta$	

Demostraremos, a título de ejemplo, la primera:

$\alpha.\mathbf{a} = \alpha.(\mathbf{a} + \mathbf{0}) = \alpha.\mathbf{a} + \alpha.\mathbf{0}$, luego $\alpha.\mathbf{0} = \mathbf{0}$

$\alpha.\mathbf{a} = (\alpha + 0).\mathbf{a} = \alpha.\mathbf{a} + 0.\mathbf{a}$, luego $0.\mathbf{a} = \mathbf{0}$

Demuestra tú alguna otra.

4. SUBESPACIOS VECTORIALES

Ejemplo

Considera el conjunto S = {(x, 0) / x ∈ **R**}, que, como ves, es un subconjunto de $\mathbf{R}^2$, y las operaciones siguientes:

① ☞ $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$

② ☞ $\alpha.(x, 0) = (\alpha x, 0)$, con $\alpha \in \mathbf{R}$

Como observarás, la "suma" y la "multiplicación por un número" en S, son las mismas que se establecían en $\mathbf{R}^2$. Pero, además:

1º) La suma de elementos de S (caracterizados por tener su segunda componente nula) da como resultado otro elemento de S. Se trata, pues, de una ley de composición interna en S.

2º) La multiplicación de un número real por un elemento de S da como resultado otro elemento de S. Se trata de una ley de composición externa en S con operadores en **R**.

3º) Es fácil demostrar, y te lo dejamos como ejercicio, que las operaciones anteriores cumplen las propiedades requeridas para que (S, +, .) sea espacio vectorial sobre **R**.

☞ Pues bien, por ser S un subconjunto de $\mathbf{R}^2$ y (S, +, .) un espacio vectorial, diremos que (S, +, .) es un *subespacio vectorial* de ($\mathbf{R}^2$, +, .).

Definición (de subespacio vectorial)

➪ Dado un espacio vectorial (V, +, .), llamaremos *subespacio vectorial* de V a cualquier subconjunto no vacío S de V tal que la terna (S, +, .) sea espacio vectorial.

Observación

Según la definición anterior, si dado un subconjunto S de un espacio vectorial V quisiéramos averiguar si es o no subespacio vectorial de V, no nos quedaría más remedio que comprobar si, a fin de cuentas, (S, +, .) es o no espacio vectorial, con lo que poca ayuda encontraríamos en el hecho de saber que (V, +, .) sí lo es. ¿No habrá, por tanto, una forma más sencilla de caracterizar los subespacios vectoriales?

Teorema (caracterización de un subespacio vectorial)

Sean $(V,+,.)$ un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$ y S un subconjunto no vacío de V. Entonces:

$$\boxed{\begin{array}{c}(S,+,.) \text{ es subespacio}\\ \text{vectorial de } (V,+,.)\end{array}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\left.\begin{array}{l}\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{b}\in S\\ \alpha\ ,\ \beta\in \mathbf{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\,.\,\mathbf{a} + \beta\,.\,\mathbf{b} \in S}$$

Este símbolo, de equivalencia,
se lee "si y sólo si"

En efecto:

① La demostración del teorema en el sentido $\Rightarrow$) es fácil:

Si suponemos que (S, +, .) es subespacio vectorial, es espacio vectorial, luego si los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ pertenecen a S y los números α, β a $\mathbf{R}$, entonces tanto $\alpha.\mathbf{a}$ como $\beta.\mathbf{b}$ pertenecerán a S y, por ello, también su suma.

② En sentido recíproco:

Veamos, primero, que si cualesquiera que sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ de S y α, β de $\mathbf{R}$, se cumple que $\alpha.\mathbf{a} + \beta.b \in S$, entonces la operación (+) cumple las propiedades exigidas:

- Es interna en S, pues tomando $\alpha=\beta= 1$ se tendrá, si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in S$, que $1.\mathbf{a} + 1.\mathbf{b} \in S$, es decir, $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in S$.
- Es asociativa $[\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}]$, por serlo en V (¿Por qué lo es en V?).
- El vector nulo, $\mathbf{0}$, pertenece a S; para demostrarlo, basta tomar $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in S$; $\alpha=\beta=0$.
- Todo $\mathbf{a} \in S$ tiene su opuesto, $-\mathbf{a}$, en S; toma, para comprobarlo, $\mathbf{a},\mathbf{b}\in S$; $\alpha=-1, \beta=0$.
- Es conmutativa $[\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}]$, por serlo en V.

Por otra parte, la segunda ley, la (.), también cumple las condiciones requeridas:

- Que se trata de una aplicación $\mathbf{R} \times S \longrightarrow S$ se deduce del hecho de que tomados $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in S$; $\alpha, 0 \in \mathbf{R}$, se tendrá $\alpha.\mathbf{a}+0.\mathbf{b} \in S$, o sea, $\alpha.\mathbf{a} \in S$.
- Las demás propiedades se cumplían en V, luego también en S.

Ejemplo

Para demostrar que, por ejemplo, $S = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,/\, x + 2y = z \}$ es subespacio vectorial de $(\mathbf{R}^3, +,.)$, como S no es vacío, pues $(0, 0, 0) \in S$, bastará con tomar:

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in S\ ; \qquad \alpha,\beta\in \mathbf{R}\ ,$$

y ver que $\alpha.(x_1, y_1, z_1) + \beta.(x_2, y_2, z_2) = (\alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2, \alpha z_1+\beta z_2) \in S$, ya que:

$$\alpha z_1 + \beta z_2 = \alpha (x_1 + 2 y_1) + \beta (x_2 + 2 y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2) + 2 (\alpha y_1 + \beta y_2).$$

Observación importante

La ecuación $x + 2y = z$, que determina cuáles son los vectores pertenecientes al subespacio S del ejemplo anterior, se dice que es la *ecuación implícita* de S. Como veremos en el apartado de ejercicios, al final del capítulo, un subespacio vectorial puede quedar definido por más de una ecuación implícita.

Más ejemplos

① Demuestra que si (S, +, .) y (T, +, .) son dos subespacios vectoriales de (V, +, **.**), entonces ($S \cap T$, +, .) también lo es.

② Demuestra que $S = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x + 2y = z + 1 \}$ **no** es subespacio vectorial de ($\mathbf{R}^3$, +, **.**).

5. SISTEMA GENERADOR

Ejemplo

Considera en $\mathbf{R}^3$ los vectores $\mathbf{a}_1 = (2, 1, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 2, 3)$. Es inmediato que, por ejemplo, $2.\mathbf{a}_1 + 3.\mathbf{a}_2 = (4, 8, 7)$, o que $-1.\mathbf{a}_1 + 2.\mathbf{a}_2 = (-2, 3, 7)$. Pues bien, tanto del vector (4, 8, 7) como del (-2,3,7) diremos que son **una** combinación lineal de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$.

Definición (de combinación lineal)

Dados p vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$ de un espacio vectorial (V, +, .) sobre **R**, diremos que otro vector $\mathbf{a} \in V$ es *combinación lineal* de los anteriores si existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbf{R}$, que llamaremos *coeficientes* de la combinación lineal, tales que:

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_p \mathbf{a}_p$$

☞ Observa que, en particular, como cualesquiera que sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p \in V$:

$$\mathbf{0} = 0.\mathbf{a}_1 + 0.\mathbf{a}_2 + \dots + 0.\mathbf{a}_p$$

el vector nulo es combinación lineal de cualesquiera otros.

Ejemplo (de otra cosa)

Considera el conjunto $S = \{ (x, y, x+y) / x, y \in \mathbf{R} \}$ que, como puedes comprobar si lo deseas, es subespacio vectorial de ($\mathbf{R}^3$, +, .). Al suceder que:

$$(x, y, x+ y) = x.(1,0,1) + y.(0,1,1)$$

resulta que cualquier vector de S se puede escribir como combinación lineal de los vectores (1,0,1) y (0,1,1), ¿no? Pues bien:

Definición (sistema generador)

De una familia de vectores $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p\}$ de un espacio vectorial (V, +, .) diremos que es ***un*** *sistema generador* de un subespacio vectorial (S, +, .) si y sólo si todo vector $\mathbf{a} \in S$ puede expresarse como combinación lineal de $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$. Es decir:

$$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p \;/\; \mathbf{a}_i \in V\} \text{ es un sistema generador de } (S, +, .) \Leftrightarrow$$
$$\forall \mathbf{a} \in S \text{ existen } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbf{R} \text{ tales que } \mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_p \mathbf{a}_p$$

Ejemplos

1º) En el caso del subespacio de $\mathbf{R}^3$ que vimos antes, $S = \{(x, y, x+y) / x,y \in \mathbf{R}\}$, se tenía que $(x, y, x + y) = x.(1, 0, 1) + y.(0, 1, 1)$, luego $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$ forman un sistema generador de S.

2º) Obtén un sistema generador del subespacio vectorial de $\mathbf{R}^4$:

$$S = \{(x - 2y, y, x - y, 0) / x, y \in \mathbf{R}\}$$

Sugerencia: Escribe $(x - 2y, y, x - y, 0) = (x, 0, x, 0) + (-2y, y, -y, 0)$

Comentario

En lo anterior hemos partido de la existencia de un subespacio y hemos buscado algún sistema generador de él. Ha sido algo así como buscar los *padres de las criaturas*. Pero, ¿qué ocurrirá si combinamos de todas las maneras posibles unos vectores dados? ¿Qué formarán las *criaturas* que obtengamos?

Teorema (de la clausura lineal)

☞ Dada una familia de vectores $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p\}$ de un espacio vectorial (V, +, .), el conjunto:

$$\mathbf{R}[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p] = \{\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_p \mathbf{a}_p / \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbf{R}\}$$

de todas las combinaciones lineales que se pueden formar con ellos es un subespacio vectorial de (V, +, .).

En vez de escribirte la demostración completa, te la vamos a insinuar:

1º) Lee el teorema de caracterización de los subespacios vectoriales.
2º) Toma $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p]$. ¿Qué significa eso?
3º) Siendo $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, calcula $\alpha.\mathbf{a} + \beta.\mathbf{b}$, simplificando todo lo que puedas.
4º) ¿Has llegado a la conclusión?, o sea, ¿has visto que $\alpha.\mathbf{a} + \beta.\mathbf{b}$ también es una combinación lineal de $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$? ¿Sí? Pues, ✌ , ya tienes demostrado el teorema.

Por cierto: al subespacio anterior le llamaremos *clausura lineal* de $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$, diciéndose también que dicho subespacio ha sido *engendrado* por $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$.

Otro comentario

Posiblemente hayas observado ya que un espacio vectorial puede tener más de un sistema generador. Pero no sólo es eso, sino que incluso puede suceder que haya sistemas generadores de un mismo espacio vectorial que estén formados por distinto número de vectores. Así, por ejemplo, antes vimos que los vectores (1,0,1) y (0,1,1) constituían un sistema generador del subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$:

$$S = \{ (x, y, x + y) / x, y \in \mathbf{R} \}$$

Pero, dado que:

$$(x, y, x + y) = x.(1, 0, 0) + y.(0, 1, 0) + (x + y).(0, 0, 1)$$

los vectores (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) también forman un sistema generador de S. Y se trata de sólo un ejemplo entre otros muchos.

Entonces, ¿habrá entre todos los sistemas generadores de un mismo subespacio vectorial algunos especialmente recomendables? ¿Habrá, en concreto, sistemas generadores que estén formados por el **mínimo número posible** de vectores? Sin que olvidemos que nuestro objetivo último no son los espacios vectoriales, de los que quizás en el futuro tengas que estudiar bastante más de lo que hacemos aquí, te adelantamos que la respuesta es afirmativa. Efectivamente, existen sistemas generadores formados por el menor número posible de vectores. Son los que llamaremos *bases*. Pero antes de entrar en ello, recordemos algo que, en parte, has estudiado ya en cursos anteriores.

6. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Ejemplos

①☞ Considera, en $(\mathbf{R}^2, +, .)$, los vectores $\mathbf{a}_1 = (2, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 3)$.

Supón que se tuviera $\alpha_1.\mathbf{a}_1 + \alpha_2.\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$. ¿A qué conclusión llegarías respecto a los valores que habrían de tomar α_1 y α_2?

②☞ Toma ahora $\mathbf{a}_1 = (2, 4)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2)$.

Si de nuevo se tuviera $\alpha_1.\mathbf{a}_1 + \alpha_2.\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$, ¿llegarías a la misma conclusión que antes respecto a α_1 y α_2 o, por el contrario, ya no sería necesario que ambos coeficientes fueran iguales a cero? ¿Qué sucedería si, por ejemplo, tomaras $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -2$?

Definiciones (de independencia y dependencia lineal)

①☞ Se dice que una familia $\{ \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \dots , \mathbf{a}_p \}$ de vectores es *libre,* o que los vectores que la forman son *linealmente independientes,* si la única combinación lineal de ellos que es igual al vector nulo es aquella en la que todos los coeficientes son iguales a cero. O sea, si:

Definición de "vectores linealmente independientes"

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_p \mathbf{a}_p = \mathbf{0} \ \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$$

②☞ En caso contrario, o sea, si existe alguna combinación lineal de $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$ que, pese a tener algún coeficiente distinto de cero, sea igual al vector nulo, se dice que dichos vectores son *linealmente dependientes,* o que forman una familia *ligada*.

Ejemplo (sencillo e importante)

Siendo $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ pertenecientes a un espacio vectorial (V, +, .), consideremos la siguiente combinación lineal: $0.\mathbf{a}_1 + 0.\mathbf{a}_2 + 0.\mathbf{a}_3 + 1.\mathbf{0}$

¿A qué es igual? ¿Son nulos todos los coeficientes? Por tanto, ¿qué le sucede a cualquier familia que, como la $\{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{0} \}$, incluya el vector nulo?

Teorema (otra forma de definir la dependencia lineal)

■ Una familia de vectores $\{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p\}$ es ligada si y sólo si uno al menos de los vectores que la forman es combinación lineal de los restantes.

En efecto: Supongamos, en primer lugar, que la familia $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p\}$ fuese ligada. Entonces, como sabes, existiría al menos una combinación lineal:

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_p \mathbf{a}_p = \mathbf{0}$$

con algún coeficiente, α_1, por ejemplo, distinto de 0. Despejando $\mathbf{a}_1$, se tendría:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{a}_2 + \frac{-\alpha_3}{\alpha_1}\mathbf{a}_3 + \dots + \frac{-\alpha_p}{\alpha_1}\mathbf{a}_p$$

luego $\mathbf{a}_1$ sería combinación lineal de los restantes vectores.

Si, recíprocamente, en la familia hubiese al menos un vector, el $\mathbf{a}_1$, por ejemplo, que fuera combinación lineal de los demás: $\mathbf{a}_1 = \beta_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \beta_p \mathbf{a}_p$, se tendría:

$$1.\mathbf{a}_1 + (-\beta_2).\mathbf{a}_2 + \dots + (-\beta_p).\mathbf{a}_p = \mathbf{0}$$

sin que todos los coeficientes fueran nulos, luego $\{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p \}$ sería ligada.

Consecuencia

Supón dados dos vectores de $\mathbf{R}^n$: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. ¿En qué se traduciría, en términos referidos a sus componentes, la dependencia e independencia lineal? ¿Cómo serán los vectores de $\mathbf{R}^3$: $\mathbf{x} = (1, 3, 2)$, $\mathbf{y} = (2, 6, 3)$?

Observación

Siendo necesario que los conceptos anteriores queden bien fijados, te propondremos varios ejercicios sobre ellos al final del tema. Sin embargo, cálculos que ahora nos resultarán engorrosos, cuando manejemos lo que llamaremos rango de una matriz nos resultarán triviales; por tanto, tu forma de proceder con los ejercicios de dependencia lineal deberá ser distinta si te enfrentas a ellos por primera vez o después de haber estudiado el tema 2. Ahora no podemos ser más explícitos, pero no olvides lo que te decimos. Volveremos sobre ello.

7. BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

Definición (de base de un espacio vectorial)

Llamaremos *base* de un espacio vectorial (V, +, .) a cualquier familia de vectores B = $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n / \mathbf{a}_i \in V\}$ tal que:

① B es un sistema generador de V
② B es una familia libre

O sea, tal que :

① $\forall \mathbf{a} \in V,\ \exists\ x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R} / \ \mathbf{a} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$
② $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

Ejemplos

① Demuestra que $\mathbf{a}_1 = (2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 4)$ forman una base de $(\mathbf{R}^2, +, .)$.

Comprueba, en primer lugar, que cualquiera que sea el vector $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, existen $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tales que $(x_1, x_2) = \alpha\,(2, 1) + \beta\,(0, 4)$. Estudia, posteriormente, la dependencia lineal de $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$.

② Es fácil probar que los vectores (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) forman una base del espacio $(\mathbf{R}^3, +, .)$. Por ser la más sencilla, se dice que es la *base canónica* de $(\mathbf{R}^3, +, .)$.

③ Vimos en la página 18 que $S = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x + 2y = z \}$ era un subespacio vectorial de $(\mathbf{R}^3, +, .)$. Comprueba que los vectores (1, 0, 1) y (0, 1, 2) constituyen un sistema generador de S. ¿Forman una base de S?

La familia formada por los vectores (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1) también es un sistema generador de S. Sin embargo, ¿por qué no es una base de S?

Definición (coordenadas de un vector)

Sea $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ una base de un espacio vectorial (V, +, .). Dado $\mathbf{a} \in V$, sabemos que **existen** $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ tales que:

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$$

Ahora bien, ¿son estos x_i los **únicos** coeficientes para los que se cumple lo anterior?

Supongamos que hubiera otros coeficientes, $y_1, y_2, \dots, y_n$, tales que:

$$\mathbf{a} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \dots + y_n\mathbf{a}_n$$

¿Qué ocurrirá si restamos las dos últimas igualdades?

Obtendremos:

$$(x_1 - y_1).\mathbf{a}_1 + (x_2 - y_2).\mathbf{a}_2 + ... + (x_n - y_n).\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

y, por ser los vectores $\mathbf{a}_i$ linealmente independientes, en esta combinación lineal todos los coeficientes habrán de ser nulos, luego $x_i = y_i$, para i = 1, 2, ... , n.

En resumen:

✍ Siendo B = { $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , $\mathbf{a}_n$ } una base de un espacio vectorial (V**,** +, .) sobre **R**, para todo vector $\mathbf{a} \in V$ **existen** unos **únicos** números reales x_1 ,x_2 , ... ,x_n tales que:

$$\mathbf{a} = x_1\,\mathbf{a}_1 + x_2\,\mathbf{a}_2 + ... + x_n\,\mathbf{a}_n.$$

De x_1 , x_2 , ... , x_n se dice que son las *coordenadas* del vector **a** en la base B.

Ejemplos

1º) Determina el vector de $\mathbf{R}^3$ cuyas coordenadas en la base formada por los vectores (2, 0, 1), (1, 1, 2) , (2, 1, 3) son $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

2º) ¿Son iguales las coordenadas de un vector de $\mathbf{R}^n$ que las componentes? ¿Cuándo son iguales?

3º) Halla las coordenadas en la base B = { (2, 1), (1, 4) } del vector de $\mathbf{R}^2$: **a** = (3, 6).

Definición (dimensión de un espacio vectorial)

Ocurre que no siempre es posible encontrar una base de un espacio vectorial con un número **finito** de elementos. (Piensa, por ejemplo, en el conjunto **R** [x] de todos los polinomios con coeficientes reales, que, con la suma y la multiplicación por un número, es espacio vectorial). Sin embargo, puede demostrarse, aunque aquí no lo hagamos, que si en un espacio vectorial (V, +, .) existe una base con **n** vectores, entonces cualquier otra base ha de tener precisamente **n** vectores. De **n** se dice que es la *dimensión* de (**V**, +, .).

En otras palabras:

> la **dimensión** de un espacio vectorial es el número en común de vectores que tienen todas las bases de dicho espacio vectorial

si es que existe al menos una con un número finito de elementos.

¡Ojo!, no hay que confundir dimensión de un espacio vectorial con número de componentes de sus vectores. Así, por ejemplo, S = { (0, x, y) / x, y ∈ **R** } es un subespacio de ($\mathbf{R}^3$, +, .) de dimensión dos, aunque sus vectores tengan tres componentes.

Ejemplo

Obtén la dimensión del subespacio de ($\mathbf{R}^3$, +, .): S = { (x, y, z) / x + z = y }

Un paréntesis (que puedes obviar en una primera lectura)

(Líneas atrás habíamos dicho que de entre todos los sistemas generadores de un espacio vectorial los más "recomendables" son aquellos a los que llamaríamos bases. ¿Por qué? Pues por la sencilla razón de que *no hay ningún sistema generador de un espacio vectorial que tenga menos vectores que los que haya en una base.*

Supón, por ejemplo, que siendo { $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ } una base de cierto espacio vectorial (V, +, .), hubiera un sistema generador de V con sólo tres vectores $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$.

Entonces, o bien $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ serían linealmente independientes, y formarían una base con sólo 3 elementos (imposible, porque todas las bases tienen el mismo número de elementos), o bien serían linealmente dependientes. En tal caso, al ser, por ejemplo, $\mathbf{b}_3 = \beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2$, todo vector que fuera combinación lineal de $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ lo sería de $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, luego { $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ } sería un sistema generador de (V, +, .). De ser libre, sería una base con sólo dos elementos (absurdo) y, de ser ligado, al tenerse, por ejemplo, $\mathbf{b}_2 = \lambda \mathbf{b}_1$, { $\mathbf{b}_1$ } sería una base de V con un solo elemento, lo cual también sería absurdo.)

Una vez cerrado el paréntesis anterior, te diremos que el procedimiento de demostración en él utilizado se llama de *reducción al absurdo*. Lo cual no quiere decir precisamente que el procedimiento sea absurdo, no vayamos a liarla.

8. RANGO DE UNA FAMILIA DE VECTORES

Recapitulemos un poco. En las páginas anteriores hemos definido los conceptos de espacio y subespacio vectorial, que son esencialmente la misma cosa; estudiando vectores, hemos establecido las nociones de dependencia e independencia lineal y de sistema generador; finalmente, hemos definido la dimensión de un subespacio vectorial como el número de vectores de un sistema generador libre (base). Pero, ¿qué ocurrirá cuando una familia de vectores engendre un subespacio y, por no ser libre, no sea base de él? La dimensión del subespacio ya no tiene por qué coincidir con el número de elementos de dicha familia. ¿Con qué coincidirá?

A responder esta cuestión dedicaremos el presente apartado del tema. Empecemos con un ejemplo.

Ejemplo

Supongamos que dada una familia F = { $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ } de vectores de un espacio vectorial (V, +, .), el subespacio S = $\mathbf{R}$ [$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$] por ella engendrado fuera de dimensión **dos**. ¿Podrá ser **tres** el máximo número de vectores linealmente independientes en F?

La respuesta, desde luego, es negativa, porque si fuera afirmativa, F sería un sistema generador libre, y, por tanto, base de S, cuya dimensión no podría ser 2. En consecuencia, al ser F ligada, habrá al menos un vector, por ejemplo $\mathbf{a}_3$, combinación lineal de los otros: $\mathbf{a}_3 = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$. Pero entonces F' = { $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ }, que también será sistema generador de S, habrá de ser libre, porque de ser ligado sería, por ejemplo, $\mathbf{a}_2 = \lambda \mathbf{a}_1$, $\lambda \in \mathbf{R}$, y { $\mathbf{a}_1$ } engendraría todo el subespacio S, que sería de dimensión 1, contra lo supuesto.

➩ En cuanto a que T está contenido a su vez en S, supongamos que

$$\mathbf{a} = \lambda_1\, \mathbf{a}_1 + \lambda_2\, \mathbf{a}_2 + ... + \lambda_r\, \mathbf{a}_r + \lambda_{r+1}\, \mathbf{a}_{r+1} + ... + \lambda_p\, \mathbf{a}_p \in T$$

Como cada uno de los vectores $\mathbf{a}_{r+1}, \mathbf{a}_{r+2}, \mathbf{a}_{r+3}, ..., \mathbf{a}_p$ es combinación lineal de $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, .., \mathbf{a}_r$, se podría escribir:

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_r\mathbf{a}_r + \lambda_{r+1}(\gamma_1\mathbf{a}_1 + \gamma_2\mathbf{a}_2 + ... + \gamma_r\mathbf{a}_r) + ... + \lambda_p(\mu_1\mathbf{a}_1 + \mu_2\mathbf{a}_2 + ... + \mu_r\mathbf{a}_r)$$

y, operando: $\mathbf{a} = \delta_1\mathbf{a}_1 + \delta_2\mathbf{a}_2 + ... + \delta_r\mathbf{a}_r \in S$.

➨ Finalmente, al cumplirse la cadena de igualdades:

rang (F) = r = dimensión S = *dimensión T,*

se concluye lo que queríamos.

Veamos por último tres consecuencias de este teorema, que nos serán de gran utilidad cuando, en el próximo capítulo, aprendamos a calcular lo que llamaremos rango de una matriz.

Corolario (uno)

☞ *El rango de una familia de vectores no se modifica si se prescinde de un vector que sea combinación lineal de los demás.*

En efecto: Acabamos de ver que cuando en una familia de vectores se prescinde de un vector que sea combinación lineal de otros, los subespacios engendrados por una y otra familia coinciden, luego tendrán igual dimensión y, en consecuencia, las familias de vectores que los engendran, igual rango.

Observa que, en particular, siendo el vector nulo combinación lineal de cualesquiera otros, *no se modificará el rango de una familia de vectores si, formando parte de dicha familia el vector nulo, se prescinde de él.*

Corolario (otro)

☞ *El rango de una familia de vectores no se modifica si a uno de los vectores que la forman se le multiplica por un número distinto de cero.*

En efecto: Siendo, por ejemplo, **a**, **b**, **c** tres vectores de un cierto espacio vectorial (V, +, .), y α un número distinto de cero, es fácil comprobar, mediante la doble inclusión, que $\mathbf{R}[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{R}[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$, luego...

Corolario (no hay dos sin tres)

☞ *El rango de una familia de vectores no se modifica si a uno de los vectores que la forman se le suma una combinación lineal de los demás.*

En efecto: Siendo, por ejemplo, $F = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, $F' = \{\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, bastará probar que los subespacios engendrados por F y F' coinciden. Pero a estas alturas del tema, ello no debe resultarte muy difícil.

9. EJERCICIOS

1.- Se considera el conjunto $V = \{ a + b\sqrt{3} \ / \ a, b \in \mathbf{R} \}$ y las operaciones:

$$(a + b\sqrt{3}) + (c + d\sqrt{3}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{3}$$

$$\alpha.(a + b\sqrt{3}) = (\alpha a + \alpha b\sqrt{3}), \ \alpha \in \mathbf{R}.$$

¿Es (V, +, .) espacio vectorial?

2.- Demuestra que en la definición de espacio vectorial podría haberse prescindido de la conmutatividad de la suma, por ser una propiedad que se deduce de las restantes.

3.- Averigua cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbf{R}^4$, son subespacios vectoriales de ($\mathbf{R}^4$, +, .):

$S = \{ (x, y, z, t) \ / \ 2x + y = t \}$ $\qquad$ $T = \{ (x, y, z, t) \ / \ 2x - y = 3) \}$

$U = \{ (x, y, z, t) \ / \ 3y - z = 0, \ 2x + y - 4t = 0) \}$.

4.- Halla, caso de que existan, seis vectores comunes a los subespacios de ($\mathbf{R}^3$, +, .) engendrados por (1,3,2) y (3,1,2), el primero, y por (1,1,0) y (3,3,4), el segundo.

5.- Obtén el valor de x, sabiendo que el vector (8,7,x,6) pertenece al subespacio de ($\mathbf{R}^4$, +, .):

$$S = \mathbf{R}[(1,2,3,0), (2,1,1,2)].$$

6.- Determina un sistema generador de los siguientes subespacios de ($\mathbf{R}^4$, +, .):

$$S = \{ (x, y, z, t) \ / \ x + y = 2z + 3t \}$$

$$T = \{ (x, y, z, t) \ / \ x + y = z \ ; \ x - y = t \}$$

7.- El vector (x, y, -23, -5) pertenece a $\mathbf{R}$ [(1,2,-5,3), (2,-1,4,7)]. Halla x, y.

8.- En ($\mathbf{R}^3$,+,.) se consideran los subespacios $S = \mathbf{R}[(1,0,1), (0,2,1)]$, $T = \mathbf{R}[(1,2,2), (-1,4,1)]$. Demuestra que son el mismo subespacio.

9.- De las siguientes familias de vectores de ($\mathbf{R}^3$,+,.), averigua cuáles son libres:

$A = \{ (0,0,0), (1,1,1) \}$ $\qquad$ $B = \{ (1,2,3), (3,2,1) \}$

$C = \{ (2,3,1) \}$ $\qquad$ $D = \{ (0,2,-4), (1,-2,1), (1,-4,3) \}$

$E = \{ (1,-2,3), (3,-6,9) \}$ $\qquad$ $F = \{ (1,-1,1), (2,3,1), (-1,4,0), (1,1,0) \}$

10.- Demuestra que si **a**, **b**, **c** son vectores linealmente independientes, entonces también son linealmente independientes los vectores **a** + **b**, **a** + **c**, **b** + **c**.

11.- Visto el ejercicio anterior, ¿se deduce que si **a** + **b**, **a** + **c**, **b** + **c** son linealmente dependientes, entonces **a**, **b**, **c** también son linealmente dependientes?

12.- Los vectores (3,-2,-1,3), (1,0,2,4), (7,-4,x,y) son linealmente dependientes. Halla x, y.

13.- Demuestra que los vectores (2,0,1), (2,0,2), (0,4,0) forman una base de ($\mathbf{R}^3$,+,.).

14.- Estudia si el conjunto $S = \{(x_1,x_2,x_3) / 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0\}$ es subespacio vectorial de $(\mathbf{R}^3,+,.)$. En caso afirmativo, obtén una base de S. ¿Cuál es su dimensión?

15.- Demuestra que el conjunto $\mathbf{R}_2[x]$ de todos los polinomios en la indeterminada x, con coeficientes reales, de grado menor o igual que 2, junto con la suma de polinomios y la multiplicación por un número habituales, es un espacio vectorial y comprueba que los polinomios 1, x, x(x - 1) constituyen una base de él.

16.- En $(\mathbf{R}^3, +,.)$ se consideran los dos subespacios vectoriales siguientes:

$$S = \{ (0, x, y) \}, \quad T = \mathbf{R}[(1, 1, 1), (1, 2, 3)].$$

Halla una base del subespacio $(S\cap T, +, .)$.

17.- La unión de dos subespacios vectoriales de un mismo espacio vectorial (V, +, .), ¿es siempre un subespacio vectorial de (V, +, .)?

18.- En el espacio vectorial $(\mathbf{R}_2[x], +, .)$ se consideran los siguientes subconjuntos:

S = { todos los polinomios p(x) tales que p(0) = 0 }

T = { todos los polinomios p(x) tales que p(1) = 0 }

Tienes que hacer lo siguiente:

1º) Demostrar que S y T son subespacios vectoriales.
2º) Hallar una base de S y otra de T.
3º) Calcular la dimensión de $S\cap T$.

19.- Los vectores de $(\mathbf{R}^3, +, .)$: (x, -3, 2), (2, 3, x), (4, 6, -4) engendran un subespacio vectorial de dimensión 1. Halla el valor de x.

20.- Determina una base del subespacio vectorial de $(\mathbf{R}^4, +, .)$ engendrado por los vectores (1, 2,1,0), (3,1,0,2), (5,0,-1,4).

21.- Las coordenadas de un vector **v** de $\mathbf{R}^3$ respecto de la base B = {(1,2,0), (0,2,4), (1,0,4)} son (2,2,3). Halla las coordenadas de **v** en la base B'= {(2,2,0), (1,0,1), (3,2,0)}.

22.- En cierto espacio vectorial (V, +, .) sobre **R** se consideran dos bases:

$$B = \{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}, \qquad B' = \{ \mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_3\}$$

entre cuyos vectores se verifican:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}'_1 + 2\mathbf{a}'_3 ; \qquad \mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}'_1 - \mathbf{a}'_2 + \mathbf{a}'_3 ; \qquad \mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}'_1 - 4\mathbf{a}'_2 .$$

Se pide:

1º) Expresión en la base B' de un vector cuyas coordenadas en B son (1,2,3)
2º) Coordenadas en B de un vector cuyas coordenadas en B' son (3,4,2).
3º) Determinar si existe algún vector cuyas coordenadas en B y B' sean iguales.

23.- Demuestra que si en un espacio vectorial (V, +, .) sobre **R** dos vectores **c** y **d** son combinación lineal de otros dos, **a** y **b**, entonces $\mathbf{R}[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] = \mathbf{R}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

TEMA 2

MATRICES
Y
DETERMINANTES

1. INTRODUCCIÓN

Como ya habrás observado, en cuanto se trabaja con espacios vectoriales de dimensión tres o superior las operaciones se complican bastante y hay que tener mucho cuidado para no confundir unas coordenadas con otras, unos subespacios con otros y, en resumen, no cometer ningún error en los cálculos. Además -no lo olvides-, nuestro objetivo final son los sistemas de **m** ecuaciones con **n** incógnitas, y con ellos, si no se tiene cierto orden, el problema puede ser mayúsculo... Habrá que hacer algo al respecto, ¿no?

Empezaremos el presente capítulo introduciendo el concepto de matriz. Diremos algo, no mucho, sobre operaciones con matrices y, una vez hayamos establecido qué son los determinantes (de los que no tendremos reparos en admitir sin demostración algunas propiedades, preocupándonos más de saber manejarlos), definiremos el concepto de rango de una matriz, que no nos resultará completamente nuevo y sin el cual difícilmente podríamos estudiar los sistemas de ecuaciones. Terminaremos el capítulo viendo un par de procedimientos para el cálculo de dicho rango... Si hemos sobrevivido, estaremos en condiciones de enfrentarnos a nuestro objetivo.

2. MATRIZ DE NÚMEROS REALES

Definición (de matriz)

☞ Llamaremos *matriz de números reales de orden* $\boldsymbol{m \times n}$ a un conjunto ordenado de $\mathbf{m}.\mathbf{n}$ números reales, dispuestos en **m** filas y **n** columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Como ves, con el símbolo $\mathbf{a_{ij}}$ nos referiremos al elemento situado en la fila **i** y la columna **j**, y la matriz se escribirá: $\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})$. Naturalmente, puede ocurrir que $\mathbf{m} = \mathbf{n}$. Se dice, entonces, que la matriz es *cuadrada*.

Consecuencias

A poco que nos fijemos en la matriz A, observaremos que sus **m** filas pueden considerarse como un conjunto de m vectores del espacio vectorial ($\mathbf{R}^n$, +, .) de la forma:

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \ ; \ \mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \ ; \ \ldots\ldots. \ ; \ \mathbf{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$$

así como que las **n** columnas forman un conjunto de n vectores de ($\mathbf{R}^m$, +, .) de la forma:

$$\mathbf{a'}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) \ ; \ \mathbf{a'}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}) \ ; \ \ldots. \ ; \ \mathbf{a'}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots., a_{mn})$$

3. OPERACIONES CON MATRICES

Definición (de suma de matrices)

☞ Dadas dos matrices $\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})$, $\mathbf{B} = (\mathbf{b_{ij}})$, que necesariamente han de ser del mismo orden $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$, se define la *matriz suma* $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ como la matriz de orden $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ dada por $\mathbf{C} = (\mathbf{c_{ij}})$, con $\mathbf{c_{ij}} = \mathbf{a_{ij}} + \mathbf{b_{ij}}$.

(O sea, que para sumar dos matrices, basta con sumar cada elemento de la primera matriz con el que ocupa el mismo lugar en la segunda)

Definición (de producto de un número real por una matriz)

☞ Dada una matriz de orden $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$, $\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})$, y un número $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}$, se define el *producto* $\boldsymbol{\alpha}.\mathbf{A}$ como la matriz de orden $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ dada por $\boldsymbol{\alpha}.\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}.\mathbf{a_{ij}})$.

(O sea, que para multiplicar un número por una matriz, basta con multiplicar cada elemento de la matriz por dicho número)·

Ejemplo

Comprueba que: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

Consecuencia

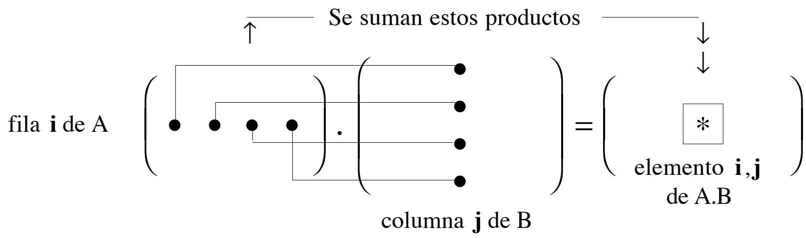
Te será fácil comprobar que el conjunto M($\mathbf{m} \times \mathbf{n}$) de todas las matrices de orden $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ es, con las operaciones anteriores, un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$. Y si lo tuyo es vicio, puedes buscar una base de dicho espacio. ¿Cuál es su dimensión?

Definición (de producto de matrices)

☞ Dadas una matriz $\mathbf{A}$, de orden $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ y otra matriz $\mathbf{B}$, de orden $\mathbf{n} \times \mathbf{p}$ (observa que el número de columnas de A coincide con el de filas de B), se define la matriz producto $\mathbf{C} = \mathbf{A.B}$ como la matriz de orden $\mathbf{m} \times \mathbf{p}$ cuyo elemento $\mathbf{c_{ij}}$ viene dado por:

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \ldots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Traduzcamos: Para obtener el elemento $\mathbf{c_{ij}}$ de la matriz A.B basta con que multipliques uno a uno los elementos de la fila **i** de A por los de la columna **j** de B y sumes todos esos productos como se indica en el siguiente esquema:



Pregunta

Se puede demostrar, a partir de la definición anterior, que la multiplicación de matrices es asociativa; pero, en cuanto a si es conmutativa, ¿tú qué crees?

Ejemplo

Comprueba que: $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 10 \\ 9 & 19 & 11 \end{pmatrix}$$

Algunos comentarios

① Las operaciones anteriores no se sacan de la manga, y dan mucho juego en aplicaciones no estrictamente matemáticas. Lo que ocurre es que aquí se trata exclusivamente de dar noticia de su existencia, sin que, al no sernos de mucha utilidad para nuestro cometido, nos podamos detener con detalle en ellas y en su justificación.

② No obstante lo anterior, parece necesario decir que en el conjunto M(**n**) de las matrices cuadradas de orden n existe una matriz, la:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

a la que se llama *matriz unidad (o identidad)* de orden n, tal que, cualquiera que sea la matriz cuadrada A de orden n:

$$\boxed{A \cdot I_n = I_n \cdot A = A}$$

③ Así mismo, dada una matriz A, cuadrada de orden n, se puede demostrar que si se cumple determinada condición (que veremos en el capítulo siguiente), existe otra matriz A^{-1}, tal que

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n}$$

✎ De A^{-1}, cuando existe, se dice que es la *matriz inversa de A.*

4. DETERMINANTES

Advertencia

Hacemos una pausa en el estudio de las matrices para proveernos de un instrumento fundamental en los cálculos que en el futuro tendremos que hacer: los determinantes. Como ya hemos dicho, no insistiremos en las demostraciones de sus propiedades. Nos preocuparemos, sobre todo, de que al terminar con ellos estés en condiciones de manejarlos sin dificultad.

Definiciones previas

① Llamaremos *permutación principal* de los **n** primeros números naturales a la ordenación $\boxed{\mathbf{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots \quad n}}$

② Formada otra permutación de ellos, $\boxed{\mathbf{i_1 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_4 \quad i_5 \quad \dots \quad i_n}}$, diremos que entre dos de sus elementos se presenta una *inversión* si el orden en el que tales elementos aparecen es distinto del que les corresponde en la permutación principal.

Ejemplo

Considera la ordenación **1 4 2 3** , formada con los cuatro primeros números naturales. Te bastará con observar el esquema:

$$1 < 4 \qquad 1 < 2 \qquad 1 < 3 \qquad \mathbf{4 > 2} \qquad \mathbf{4 > 3} \qquad 2 < 3$$

para concluir que el número de inversiones de la permutación anterior es 2.

Definición (de determinante)

☞ Llamaremos *determinante* de una matriz **cuadrada** de orden n, A = (a_{ij}), y lo representaremos por **det (A)** o $|\mathbf{A}|$ al número que se obtiene sumando todos los productos que se puedan formar con **n** elementos de la matriz, tomando un elemento de cada fila y de cada columna, y adjudicando a cada producto el signo **+** ó **-** según que siendo $a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} \dots a_{ni_n}$ uno de ellos (con sus factores ordenados respecto al primer subíndice), el número de inversiones de la permutación $i_1 i_2 i_3 \dots i_n$ sea par o impar.

En consecuencia, si llamamos **s** al número de inversiones de cada permutación $i_1 i_2 i_3 \dots i_n$, como $(-1)^s$ será igual a **+1** si **s** es par, e igual a **-1** si **s** es impar, se tendrá:

$$\boxed{\det(A) = |A| = \sum (-1)^s a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} \dots a_{ni_n}}$$

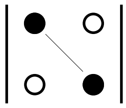
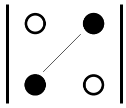
Dos preguntas:

1ª) ¿De cuántos sumandos consta la suma anterior?
2ª) ¿Se te ocurre alguna forma sistemática de escribirlos todos?

Consecuencias

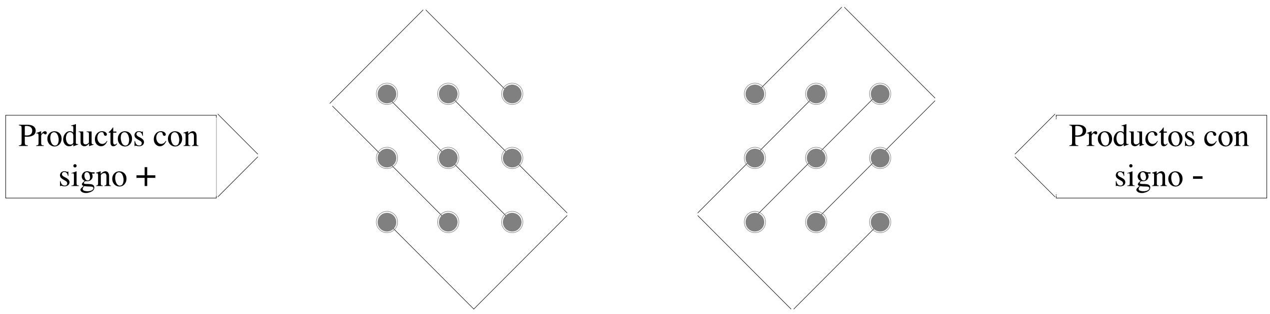
Comprueba, aplicando la definición, que:

① ➠ $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

O sea, que para calcular un determinante de orden dos basta con multiplicar primero así:  y, luego, restar el producto: 

② $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{cases}$$

Desarrollo que puede memorizarse fácilmente haciendo uso del siguiente esquema, conocido como **regla de Sarrus**:



(**¡Ojo!**: La regla de Sarrus sólo es válida para determinantes de orden tres)

Ejemplos

Comprueba que: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 3$; $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 58$

Observación

Como comprenderás, mal asunto sería que, para conocer el valor de un determinante de orden n, tuviéramos que calcular los n! sumandos necesarios. El cálculo de un determinante de orden 4 exigiría calcular 24 productos (y sumarlos); el de uno de orden 5, 120... Para calcular un determinante de orden 10 necesitaríamos calcular la friolera de 3.628.800 productos, cada uno de ellos de 10 factores... ¿Qué hacer llegados a esta situación?

Dos definiciones nuevas nos aportarán un procedimiento para el cálculo de un determinante que resultará mucho más cómodo que la aplicación de la definición anterior.

Definiciones (de menor complementario y adjunto)

1) Llamaremos *menor complementario* del elemento a_{ij} de una matriz A, cuadrada de orden n, y lo representaremos por α_{ij} , al determinante de la matriz cuadrada de orden **n-1** que resulta de prescindir en A de la fila **i** y de la columna **j**.

2) Llamaremos *adjunto* del elemento a_{ij} de A, y lo representaremos por A_{ij}, a:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}}$$

Ejemplos

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, comprueba que: $\begin{cases} \alpha_{11} = -13, & \alpha_{23} = 0. \\ A_{34} = -6, & A_{44} = -13. \end{cases}$

Hasta que no estés seguro de que lo sabes hacer no sigas.

Consecuencia (desarrollo de un determinante por los elementos de una línea)

☞ El valor de un determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) por sus adjuntos respectivos.

O sea :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \\ = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \end{cases}$$

Para tu alegría, lo admitimos sin demostración. ¿O tienes inconveniente?

Ejemplo

Supongamos que se deseara calcular el valor de: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Como en la cuarta columna aparecen dos ceros, eligiremos dicha línea para efectuar el desarrollo y tendremos:

$$|A| = -2 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2.0 + 1.(-28) = -28$$

¿Observas qué bueno es que aparezcan esos ceros en los lugares (2,4) y (3,4)? ¿Y si no los hubiera?

Observación

Vemos, pues, que aunque el desarrollo de un determinante por los elementos de una línea permite un cálculo más rápido de éste, si en dicha línea no aparecieran varios ceros, aún resultaría tarea excesivamente prolija. El problema se resolverá, definitivamente, con lo que sigue.

Teorema (transformaciones en un determinante)

☞ Dada una matriz cuadrada A de orden n, se verifican las siguientes proposiciones, sobre cuyas demostraciones te ofrecemos algunas sugerencias:

① **El valor de |A| no varía si se intercambian filas por columnas.**

Es difícil de demostrar, pues habría que ver que los productos cuya suma es igual a $|A|$ aparecen con el mismo signo, sin que sobre ni falte ninguno, en el desarrollo del nuevo determinante. Compruébala, si quieres, para un determinante de orden 3.

② **Si todos los elementos de una fila (columna) de A son nulos, entonces $|A| = 0$.**

Todos los sumandos de $|A|$ (que, a su vez, son productos) contendrán un elemento de tal fila, luego serán nulos.

③ **Si en A si se intercambian dos filas (columnas), entonces |A| cambia de signo.**

Es muy liosa de demostrar. Compruébala, si acaso, para un determinante de orden 3.

④ **Si en A existen dos filas (columnas) iguales, entonces $|A| = 0$.**

Según la propiedad anterior, al intercambiarse tales filas (columnas) se obtendrá otra matriz, B, tal que $|B| = -|A|$, pero como B = A, se tendrá $|A| = 0$.

⑤ **Si se multiplican todos los elementos de una fila (columna) de A por un mismo número k, el |A| también queda multiplicado por dicho número.**

Si, por ejemplo, hubiéramos multiplicado la 2ª fila de A por k, obteniendo la matriz B, sería: $|B| = \sum(-1)^s a_{1i_1}(k\,a_{2i_2}) \ldots a_{ni_n} = k \sum(-1)^s a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n} = k \,.\, |A|$

⑥ **Si en A existen dos filas (columnas) proporcionales, entonces $|A| = 0$.**

Utilizando las propiedades 4ª y 5ª es fácil. Así: $\begin{vmatrix} a_{11} & k.a_{11} \\ a_{21} & k.a_{21} \end{vmatrix} = k \,.\, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = 0$

⑦ **El valor de |A| no se modifica si a una fila (columna) se le suma otra fila (columna) multiplicada por un número.**

Si, efectuada esa suma, se desarrolla el determinante por los adjuntos de la nueva línea, tal determinante puede descomponerse en suma de otros dos: uno que coincide con el inicial y otro que, por tener dos líneas paralelas iguales, será nulo.

⑧ **Si en A existe una fila (columna) combinación lineal de otras, entonces $|A| = 0$.**

Por ejemplo: $\begin{vmatrix} a & b & \alpha a + \beta b \\ c & d & \alpha c + \beta d \\ e & f & \alpha e + \beta f \end{vmatrix} = (\text{por propiedad } 7) = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{vmatrix} = 0$

⑨ **La suma de los productos de los elementos de una fila (columna) de A por los adjuntos de otra fila (columna) es igual a cero.**

La suma en cuestión coincidiría con el desarrollo por adjuntos de un determinante con dos líneas paralelas iguales, que sería nulo por la propiedad 4ª.

Observación

Ahora se trata de ver cómo se aplican las propiedades anteriores al cálculo de determinantes, especialmente para lograr cuantos más ceros mejor en una línea, lo cual nos permitirá un cómodo desarrollo del determinante por los adjuntos de tal línea.

Supongamos, por ejemplo, que deseáramos calcular: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 7 & 6 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix}$

Aplicando reiteradamente la propiedad 7ª anterior, a la segunda fila le podemos restar la primera multiplicada por 2; a la tercera, la primera multiplicada por 5; y, a la última, la primera multiplicada por 3. Llegados aquí, la primera columna tendría todos sus elementos, salvo uno, nulos, y bastaría con desarrollar por ella para calcular el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -6 \\ 0 & -7 & -3 & -19 \\ 0 & -1 & 3 & -13 \end{vmatrix} = 1 . \begin{vmatrix} -5 & -1 & -6 \\ -7 & -3 & -19 \\ -1 & 3 & -13 \end{vmatrix} = -264$$

Un **error fácil de cometer** consiste en pensar que para conseguir un cero en el lugar $(2,2)$, por ejemplo, se puede multiplicar por 3 la segunda fila y restarle la primera. Efectivamente, obtendríamos un cero en dicho lugar, pero el valor del determinante, de acuerdo con la propiedad 5ª, ya no sería el mismo.

Ejemplos

Comprueba que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1.101 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)\,(c-a)\,(c-b)$$

Ya que surge la ocasión, te diremos que el último determinante es un caso particular del llamado *determinante de Vandermonde*. Volveremos a encontrárnoslo.

5. RANGO DE UNA MATRIZ

Poquito a poco nos vamos acercando a nuestro objetivo, o sea, a los sistemas de ecuaciones. Pieza básica para su estudio es el concepto de rango de una matriz, que, en gran medida, te resultará familiar. Empezaremos dando su definición y, posteriormente, veremos un par de procedimientos para calcularlo.

Definición (de rango de una matriz)

Dada la matriz: ☞ $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

cada una de sus **m** filas $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , $\mathbf{a}_m$ puede considerarse, como sabes, como un vector del espacio vectorial ($\mathbf{R}^n$, +, .).

➔ Pues bien, llamaremos *rango de A* al rango de la familia F = {$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , $\mathbf{a}_m$} o, si prefieres, al máximo número de filas de A que, como vectores de $\mathbf{R}^n$, son linealmente independientes.

O sea, que el concepto de rango de una matriz no difiere esencialmente en nada del de rango de una familia de vectores. Los resultados que vimos cuando estudiábamos tal asunto, en la página 27 -que debes releer-, son los que traducimos a continuación.

Consecuencias (transformaciones que no modifican el rango de una matriz)

El rango de una matriz A no se modifica si:

①	Se altera el orden de las filas de A.
②	Se prescinde, en A, de una fila que sea combinación lineal de otras (en particular, si se elimina una fila de ceros).
③	Se multiplica una fila de A por un número distinto de cero.
④	Se suma a una fila de A una combinación lineal de otras.

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Si restamos a la tercera fila la suma de la primera y la segunda, quedándonos: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, las matrices A y A* tendrán igual rango.

Como en A* la última fila tiene todos sus elementos nulos, se podrá prescindir de ella sin que se modifique el rango, luego:

$$\text{rango } A = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2$$ (ya que las dos filas **no** son proporcionales)

Naturalmente, habrá que sistematizar estas transformaciones, para asegurarnos de que siempre, con independencia de la *vista* de cada cual, podremos calcular el rango. Ya llegaremos a ello.

Ejemplo (de otra cosa)

Si observas la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 6 & 7 \\ 4 & \boxed{2} & 1 & \boxed{8} & 9 \\ 0 & \boxed{8} & 4 & \boxed{1} & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, verás que en ella se ha señalado la intersección de las filas segunda y tercera con las columnas segunda y cuarta. Pues bien, el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}$ es un ejemplo de lo que llamaremos *menor* de la matriz A. Menor de orden dos, en este caso.

Definición (de menor de orden r en una matriz)

Si en una matriz $A = (a_{ij})$, de orden $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$ sobre $\mathbf{R}$, se eligen las $\mathbf{r}$ filas $i_1, i_2, \ldots, i_r$ (en el orden natural) y las $\mathbf{r}$ columnas $j_1, j_2, \ldots, j_r$ (en igual orden), del determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} & \cdots & a_{i_2 j_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & a_{i_r j_3} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix}$$

diremos que es el *menor de orden r* correspondiente a tales filas y columnas.

(Pregunta capciosa: ¿Cuántos menores de orden r tiene A?).

Teorema

Las filas de una matriz $A = (a_{ij})$ *con las que se pueda formar un menor no nulo son linealmente independientes.*

En efecto: Supongamos, por ejemplo, que el menor formado por los elementos comunes a las $\mathbf{r}$ primeras filas y $\mathbf{r}$ primeras columnas de A, es distinto de cero. O sea:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces, los $\mathbf{r}$ vectores de $\mathbf{R}^n$: $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1r}, a_{1,r+1}, \ldots, a_{1n}) \\ \mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2r}, a_{2,r+1}, \ldots, a_{2n}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{a}_r = (a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rr}, a_{r,r+1}, \ldots, a_{rn}) \end{array} \right.$

son linealmente independientes, porque en caso contrario se podría escribir:

$$\alpha_1 (a_{11}, a_{12}, \dots , a_{1r}, a_{1,r+1}, \dots , a_{1n}) + \alpha_2 (a_{21}, a_{22}, \dots , a_{2r}, a_{2,r+1}, \dots , a_{2n}) + \\ + \dots\dots\dots + \alpha_r (a_{r1}, a_{r2}, \dots , a_{rr}, a_{r,r+1}, \dots , a_{rn}) = (0, 0, \dots , 0, 0, \dots , 0)$$

con algún coeficiente $\alpha_i \neq 0$, luego también sería:

$$\alpha_1 (a_{11}, a_{12}, \dots , a_{1r}) + \alpha_2 (a_{21}, a_{22}, \dots , a_{2r}) + \dots + \alpha_r (a_{r1}, a_{r2}, \dots , a_{rr}) = (0, 0, \dots , 0)$$

con algún $\alpha_i \neq 0$, y, en ese caso, al ser las **r** filas del menor que hemos considerado linealmente dependientes y haber, por tanto, una al menos combinación lineal de las demás, tal menor tendría que ser nulo (propiedad 8ª de los determinantes), y no distinto de cero como hemos supuesto que era.

Teorema (otra forma de definir el rango de una matriz)

☞ Si en la matriz $A = (a_{ij})$ existe un menor de orden **r** distinto de cero, mientras que todos los de orden superior a r son nulos, entonces rango A = **r**.

En efecto. Supón que $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$

fuera uno de los menores de orden **r** no nulo (si no fuera así, un oportuno cambio en el orden de las filas y columnas de A resolvería la cuestión), mientras que todos los de orden superior a **r** fueran iguales a cero.

Entonces, considerada la fila **k** de A, cualquiera que ésta sea, desde la (**r+1**) hasta la **m**, se tendría, para todo valor de j, desde j = 1 hasta j = n:

$$|M| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kr} & a_{kj} \end{vmatrix} = 0$$

(Sí: Cuando j tome los valores 1, 2, ... , r en el determinante anterior habrá dos columnas iguales; cuando j tome valores desde (r+1) hasta n, $|M|$ será un menor de A de orden (r+1) > r, nulo por hipótesis).

Desarrollando $|M|$ por la última columna y designando por $A_1, A_2, \dots, A_r$ los adjuntos de $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{rj}$ (que no variarán aunque varíe el valor de j), se tendrá:

$$a_{1j} A_1 + a_{2j} A_2 + \dots + a_{rj} A_r + \Delta a_{kj} = 0$$

y como $\Delta \neq 0$: $\quad a_{kj} = \dfrac{-A_1}{\Delta} a_{1j} + \dfrac{-A_2}{\Delta} a_{2j} + \dots\dots + \dfrac{-A_r}{\Delta} a_{rj}$

O sea, más claramente (recuerda que la igualdad anterior se cumple para cualquier valor de j, desde 1 hasta n):

$$\begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ a_{k3} \\ \vdots \\ a_{km} \end{pmatrix} = \frac{-A_1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ \vdots \\ a_{1m} \end{pmatrix} + \frac{-A_2}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{2m} \end{pmatrix} + \cdots\cdots + \frac{-A_r}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{r1} \\ a_{r2} \\ a_{r3} \\ \vdots \\ a_{rm} \end{pmatrix}$$

lo cual significa que la fila **k** de A es combinación lineal de las **r** primeras y, por tanto, se puede prescindir de ella sin que el rango de A se modifique.

Finalmente, como eso ocurre para las (m-r) últimas filas de A, se tendrá, prescindiendo de todas ellas:

$$\text{rango } A = \text{rango}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} = r$$

igualdad ésta última que se puede escribir debido a que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

y ello, según el teorema anterior, hace que las r primeras filas de A sean linealmente independientes.

➠ **Observa**, por tanto, que dado un menor no nulo de A, de orden **r**, para ver si otra fila de A es combinación lineal de aquéllas con parte de cuyos elementos se ha formado tal menor, basta con calcular todos los menores de orden (r+1) que se puedan escribir completando el inicial con los elementos de esa nueva fila. (Se dice que tales menores de orden (r+1) se han obtenido ***orlando*** el menor inicial con tal fila). Si hubiera alguno no nulo, el rango de A sería como mínimo (r+1) y partiríamos de él para formar, ahora, menores de orden (r+2). Si, por el contrario, todos los menores de orden (r+1) obtenidos orlando el inicial de orden r con dicha fila fueran nulos, eso nos permitiría prescindir de ella sin que el rango de A se modificara, pues la fila en cuestión sería combinación lineal de las que intervienen en el menor de orden r.

Lo entenderás mejor examinando el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Supongamos que se deseara calcular el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -2 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, las dos primeras filas de A son linealmente independientes y el rango de A, como mínimo, será 2. Orlando el menor anterior con la tercera fila, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

luego dicha fila es combinación lineal de las dos primeras y, en consecuencia, puede prescindirse de ella sin que el rango de A varíe. Es decir:

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Partiendo, de nuevo, de que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, si orlamos dicho menor con la tercera fila de la nueva matriz, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

y, sin necesidad de considerar el tercer menor que se podría formar (pues ya hemos encontrado uno no nulo), concluiríamos que el rango de A es 3.

Advertencia importante

Si hubiéramos definido el rango A como el máximo número de columnas, y no filas, de A linealmente independientes, habríamos visto que también en ese caso el rango A coincidiría con el orden del menor de A de mayor orden no nulo, luego:

> da lo mismo definir el rango de A como máximo número de *filas* linealmente independientes que como máximo número de *columnas* linealmente independientes.

Y al igual que vimos transformaciones entre filas de A que no modificaban el rango, también podríamos haber demostrado que el *rango de A no se modifica si:*

- ➔ *Alteramos el orden de las columnas.*
- ➔ *Prescindimos de una columna combinación lineal de otras.*
- ➔ *Multiplicamos una columna por un número distinto de cero.*
- ➔ *Sumamos a una columna una combinación lineal de otras.*

6. MÉTODO DE GAUSS PARA CALCULAR EL RANGO

Las transformaciones entre filas de una matriz vistas en la página 41 son las que realmente, aplicadas de forma sistemática, se utilizan para calcular el rango, sin necesidad de recurrir a los menores; procedimiento que, cuando la matriz es de orden elevado, resulta bastante engorroso. El método de Gauss, junto a lo anterior, se basa en el siguiente teorema.

Teorema (rango de una matriz triangular)

Si en la matriz: $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3r} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

todos los términos de la forma a_{ii} (es decir, los situados en la *diagonal principal)* son distintos de cero, entonces rango A = r.

En efecto: El menor de orden r formado por las r primeras filas y r primeras columnas de A es igual al producto $a_{11}.a_{22}.a_{33}. \ldots . a_{rr}$, luego distinto de cero. Como no hay ningún menor de A de orden mayor que r, se concluye lo dicho.

Explicación del método

Veamos, mediante un ejemplo, en qué consiste el método de Gauss. A tal fin, supongamos dada la matriz: $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de A no se modificará si:

① multiplicamos la 2ª fila por 2 y le restamos la 1ª multiplicada por 3.

② multiplicamos la 3ª fila por 2 y le restamos la 1ª multiplicada por 7.

③ restamos a la 4ª fila la 1ª.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{rango}]{\text{igual}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{tercera fila}]{\text{quitamos}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si, ahora, multiplicamos por -7 la 3ª fila y le restamos la 2ª multiplicada por -2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{rango}]{\text{igual}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -20 & 18 & 1 \end{pmatrix}$$

Y, en consecuencia, visto el teorema anterior, rango A = 3.

Observaciones finales (y no por eso menos importantes)

①➠ Después de todo lo anterior, parece innecesario decir que dados **m** vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (a_{11} , a_{12} , \ldots\ldots , a_{1n}) \\ \mathbf{a}_2 &= (a_{21} , a_{22} , \ldots\ldots , a_{2n}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{a}_m &= (a_{m1} , a_{m2} , \ldots\ldots , a_{mn}) \end{aligned}$$

del espacio vectorial ($\mathbf{R}^n$, +, .), para saber si son linealmente independientes o dependientes bastará calcular el rango de:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si tal rango es igual a m, los vectores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , $\mathbf{a}_m$ serán linealmente independientes. Si, por el contrario, rango $A < m$, la familia $\{\mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \ldots\ldots , \mathbf{a}_m\}$ será ligada.

②➠ En particular, una condición necesaria y suficiente para que **n** vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (a_{11} , a_{12} , \ldots\ldots , a_{1n}) \\ \mathbf{a}_2 &= (a_{21} , a_{22} , \ldots\ldots , a_{2n}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{a}_n &= (a_{n1} , a_{n2} , \ldots\ldots , a_{nn}) \end{aligned}$$

del espacio vectorial ($\mathbf{R}^n$, +, .) sean linealmente independientes, será:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

③➠ Por último, ¿habrá que decir que si $m > n$, entonces el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nunca podrá ser superior a **n** (pues sólo hay n columnas) y, en consecuencia, que *más de n vectores del espacio vectorial (**R**^{n}, +, .) formarán siempre una familia ligada?* Por si las moscas, lo decimos.

7. EJERCICIOS

1.- Se tienen las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calcula $(A + B) . C$, $(2.A - 3.B) . C$

2.- Calcula $A^2 + B \cdot C$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

3.- Siendo $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^2, A^3, ... , A^n

4.- Calcula los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ b.c & a.c & a.b \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

5.- Resuelve las ecuaciones siguientes:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2-x & 3-x \\ 2-x & 3-x & 4-x \\ 3-x & 4-x & 5-x \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^4 & x^6 \\ 1 & x^3 & x^6 & x^9 \end{vmatrix} = 0$$

6.- Expresa en forma de producto los determinantes siguientes:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a & a \\ a & b & b & b & b \\ a & b & c & c & c \\ a & b & c & d & d \\ a & b & c & d & e \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix}$$

7.- Calcula el valor de los determinantes de orden n siguientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & a & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & a \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n & 2 & 1 & \dots & 1 \\ n & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$$

8.- Si el determinante de una matriz A, cuadrada de orden 6, es igual a 2, ¿cuál es el valor del determinante de la matriz $3 \cdot A$?

9.- Demuestra que si una matriz cuadrada de orden n, A, verifica $A^2 + 3.A - 3.I_n = (0)$, donde (0) es la matriz cuadrada de orden n todos cuyos términos son nulos, entonces dicha matriz tiene inversa.

10.- Halla el rango de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & -3 \\ 6 & -3 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & 3 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ -8 & 13 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

11.- Las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & x \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ tienen igual rango. Halla el valor de x.

12.- Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$, con rango A $\neq$ rango B. ¿Cuál es el valor de rango B - rango A?

13.- Si rango $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = 2$, ¿puede ser rango $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d-a & e+b & f+c \\ d & e & f \end{pmatrix} = 2$?

14.- Los vectores de ($\mathbf{R}^3$, +, .): (2, 1, -3), (1, 3, 2), (5, x, -4) son linealmente dependientes. Halla el valor de x.

15.- Analiza si los vectores de ($\mathbf{R}^4$, +, .) : (6, 3, -3, 9), (0, 4, 2, 8), (3, 1, 0,-2), (5, 4, 0, 5) son linealmente independientes.

16.- Estudia si las siguientes familias de vectores son libres o ligadas:

$$\begin{aligned} F &= \{ (3, 1, 2), (0, 2, 4), (7, 1, 2) \} \\ F' &= \{ (2, 1, 0, 3), (3, 1, 4, 2), (0, 7, 2, 8), (3, 1, 0, 3) \} \\ F'' &= \{ (1, 2, 0, 3, 4), (2, 1, 3, 2, -1), (5, 4, 6, 7, 2) \} \end{aligned}$$

17.- Estudia, según los valores de los parámetros, los rangos de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} ;\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & 1 & -a \end{pmatrix} ;\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} m^2-1 & (m+1)^2 \\ m+1 & m-1 \end{pmatrix} ;\ E = \begin{pmatrix} m^2-1 & (m+1)^2 & m+1 \\ m+1 & m-1 & m+1 \end{pmatrix} ;\ F = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a.b & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$$

18.- Escribe una matriz de orden 4×5 cuyo rango sea 4.

TEMA 3

SISTEMAS DE ECUACIONES

1. INTRODUCCIÓN

Llega, por fin, el momento de dar utilidad a lo visto en los capítulos anteriores. En este tema vamos a estudiar cómo hay que proceder ante un sistema ecuaciones lineales para saber si tiene o no solución(es) y, en caso afirmativo, obtenerla(s). Veremos que existen un par de procedimientos distintos de trabajo -de modo que, cuando dependa de ti, puedas elegir el que más te guste-, y terminaremos diciendo alguna cosilla sobre algo que ya hemos mencionado en el capítulo anterior: la matriz inversa.

Antes, permítenos una reflexión: Si en algún momento te sientes desorientado al estudiar estas cuestiones, no te preocupes en exceso: es algo que al principio le pasa a todo el mundo y no sólo a ti. De lo que se trata es de que, al tenerlo *todo* por escrito, puedas trabajar a tu aire, que no tiene por qué ser el de los demás, y termines por encontrar el hilo conductor; existe, ya lo verás.

2. DEFINICIONES Y CLASIFICACIÓN

Definiciones (vocabulario)

☞ Llamaremos *sistema de **m** ecuaciones lineales con **n** incógnitas* a un conjunto de **m** expresiones algebraicas de primer grado:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} (S)$$

donde $\mathbf{a_{ij}}, \mathbf{b_i}$ son números reales fijos, llamados *coeficientes y términos independientes,* respectivamente, y $\mathbf{x_j}$ números reales sin determinar, llamados *incógnitas*. En el caso particular en que $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$, el sistema se llama *homogéneo.*

☞ Con el símbolo E_i representaremos la ecuación:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots + a_{in}x_n = b_i$$

☞ Si $\alpha \in \mathbf{R}$, con la notación αE_i nos referiremos a:

$$(\alpha a_{i1})x_1 + (\alpha a_{i2})x_2 + \dots\dots + (\alpha a_{in})x_n = (\alpha b_i)$$

☞ De las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \ A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

diremos que son *la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada con los términos independientes*, respectivamente.

☞ Observa, por último, que escritas las matrices: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

el sistema (S) puede expresarse en forma matricial así: → $\boxed{A \cdot X = B}$

Otras definiciones (más vocabulario)

➯ Diremos que **n** números reales $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ (o, con más propiedad, un vector de $\mathbf{R}^n$) constituyen ***una*** *solución* del sistema (S) si al sustituir x_j por α_j en todas las ecuaciones, los dos miembros de cada una toman el mismo valor.

➯ *Discutir un sistema* consiste en averiguar si posee alguna solución y, en caso afirmativo, cuántas.

➯ Diremos que un sistema es *compatible* si tiene alguna solución. Como veremos, un sistema compatible en **R** o bien admite una solución única (diremos que es compatible *determinado)* o bien infinitas (se dice, en expresión no muy atinada, que es compatible *indeterminado).* Si un sistema no tiene solución, diremos que es *incompatible.*

➯ *Resolver* un sistema compatible es, como te puedes suponer, encontrar **todas** sus soluciones.

Ejemplo

Considera el sistema: $\left.\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 6 \\ 4x & - & 5y & = & 8 \end{array}\right\}$

Escribe la matriz de los coeficientes y la ampliada, exprésalo en forma matricial y, si es compatible, resuélvelo por los procedimientos que conoces de cursos anteriores.

3. SISTEMAS EQUIVALENTES

Definición (de sistemas equivalentes)

☞ De dos sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número de incógnitas (aunque no tengan el mismo número de ecuaciones) se dice que son *equivalentes* si tienen las mismas soluciones; es decir, si toda solución del primero es solución del segundo y viceversa.

Observación

Hasta ahora, cuando resolvías un sistema de ecuaciones, lo que hacías eran transformaciones con las ecuaciones hasta llegar a otro sistema equivalente al dado, pero más sencillo de resolver. En el fondo, eso es lo que vamos a hacer aquí. Lo que ocurre es que quizás convenga justificar un poco las cosas. Por eso (y por algo más) incluimos los dos siguientes teoremas.

Teorema

☞ *Si (α_1 , α_2 , α_3 , ... , α_n) es una solución del sistema S, también lo es de cualquier ecuación que sea "combinación lineal" de las que forman dicho sistema.*

La demostración, de sencilla que resulta, casi no merece ese nombre. Supongamos formada la siguiente ecuación, combinación lineal de las de (S):

$$\lambda_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + \lambda_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) + \dots +$$
$$+ \lambda_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_m b_m \ ; \ \lambda_i \in \mathbf{R}$$

Al sustituir x_j por α_j el primer paréntesis anterior tomará el valor b_1; el segundo, b_2, ... y, el último, b_m. Por consiguiente, los dos miembros de la igualdad coincidirán.

Teorema (paso de un sistema a otro equivalente)

Se obtiene un sistema de ecuaciones equivalente a otro dado si:

① Se altera el orden de las ecuaciones.
② Se prescinde de una ecuación que sea combinación lineal de otras.
③ Se sustituye una ecuación por la que resulta de multiplicarla por un número distinto de cero.
④ Se sustituye una ecuación por la que resulta de sumarle una combinación lineal de otras.

Las demostraciones son fáciles. Veamos, por ejemplo, la de la cuarta proposición:

Supongamos que $S = \begin{cases} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_{m-1} \\ E_m \end{cases}$ y $T = \begin{cases} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_{m-1} \\ \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_{m-1} E_{m-1} + E_m \end{cases}$

son el sistema dado y el que resulta de cambiar su última ecuación por la que se obtiene al sumar a dicha ecuación una combinación lineal de las restantes.

Entonces, si (α_1 , α_2 , α_3 , ... , α_n) es una solución del sistema S, también lo es de E_1 , E_2 , E_3 , ... , E_{m-1} (por definición) y de $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_{m-1} E_{m-1} + E_m$ (por el teorema anterior), es decir, de T.

Recíprocamente, toda solución de T lo es de E_1 , E_2 , E_3 , ... , E_{m-1}, así como de: $(\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_{m-1} E_{m-1} + E_m) - \lambda_1 E_1 - \lambda_2 E_2 - \dots - \lambda_{m-1} E_{m-1}$, es decir, de E_m, luego también de S.

4. REGLA DE CRAMER

Definición (de sistemas de Cramer)

Llamaremos *sistema de Cramer* a todo sistema de **n** ecuaciones lineales con **n** incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} (S')$$

en el que la matriz de los coeficientes, A, tenga determinante no nulo: $|A| \neq 0$.

Teorema (de Cramer)

Enunciado:

> El sistema de Cramer anterior es compatible determinado y su única solución es:
> $$\left(\frac{|A_1|}{|A|}, \frac{|A_2|}{|A|}, \frac{|A_3|}{|A|}, \dots, \frac{|A_n|}{|A|}\right)$$
> donde A_j representa la matriz obtenida al sustituir la columna j de la matriz de los coeficientes del sistema, A, por la formada por los términos independientes.

Demostración:

➨ Primer paso:

① Vamos a obtener unas ecuaciones, combinaciones lineales de las de S', de las que hallaremos las soluciones. A tal efecto, multiplicando la primera ecuación de S' por el adjunto del elemento a_{11} de la matriz A, A_{11}; la segunda por A_{21}, y así sucesivamente hasta multiplicar la última ecuación por A_{n1}, y sumando posteriormente, se obtiene la ecuación $\mathbf{E'}_1$:

$$A_{11}(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) + A_{21}(a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n) + \dots + A_{n1}(a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n) =$$

$$= b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1}$$

Es decir:

$$(A_{11}a_{11} + \dots + A_{n1}a_{n1})x_1 + (A_{11}a_{12} + \dots + A_{n1}a_{n2})x_2 + \dots +$$
$$+ \dots + (A_{11}a_{1n} + \dots + A_{n1}a_{nn})x_n = b_1A_{11} + \dots + b_nA_{n1}$$

Esto es: $\qquad \mathbf{E'}_1\!: \; |A| . x_1 + 0 . x_2 + \dots + 0 . x_n = |A_1|$

(Recuerda lo que vimos en la pág. 39 sobre el desarrollo de un determinante por los elementos de una línea y sobre la suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de una paralela.)

Observa que cualquier solución (α_1 , α_2 , α_3 , ... , α_n) de $\mathbf{E}'_1$ ha de verificar:

$\alpha_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|}$, cualesquiera que sean α_2 , α_3 , ... , α_n.

② Si en lugar de multiplicar las ecuaciones del sistema S' por los adjuntos A_{11} , A_{21} , ... , A_{n1} de los elementos de la primera columna de A lo hubiéramos hecho por A_{12} , A_{22} , ... , A_{n2} , o sea, por los adjuntos de los elementos de la segunda columna de A, habríamos llegado a la ecuación:

$$\mathbf{E}'_2 :\ 0 \,.\, x_1 + |A| \,.\, x_2 + \ \ldots + \ 0 \,.\, x_n \ = |A_2|$$

de la que toda solución (α_1 , α_2 , α_3 , ... , α_n) habría de verificar: $\alpha_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|}$, cualesquiera que fueran los valores de α_1 , α_3 , ... , α_n.

③ Procediendo sucesivamente de forma semejante, multiplicando las ecuaciones de S ' por los adjuntos de los elementos de la tercera, cuarta... columnas de A, llegaríamos finalmente a la ecuación:

$$\mathbf{E}'_n :\ 0 \,.\, x_1 + 0.\, x_2 + \ \ldots + \ |A| \,.\, x_n \ = |A_n|$$

de la que toda solución (α_1 , α_2 , α_3 , ... , α_n) habría de verificar: $\alpha_n = \dfrac{|A_n|}{|A|}$.

➨ Segundo paso:

Como consecuencia de todo lo anterior y de que, según vimos en el primer teorema de la página 55, toda solución de S', si es que existe, ha de serlo de $\mathbf{E}'_1$, $\mathbf{E}'_2$, ... , $\mathbf{E}'_n$ (pues son combinación lineal de las que forman S'), resulta que la *única* solución que, en todo caso, podrá tener S' es:

$$\left(\frac{|A_1|}{|A|} \ , \ \frac{|A_2|}{|A|} \ , \ \frac{|A_3|}{|A|} \ , \ \ldots \ , \ \frac{|A_n|}{|A|} \right)$$

pues éste es el único vector (α_1 , α_2 , α_3 , ... , α_n) que cumple las condiciones requeridas.

➨ Tercer paso:

Así pues, si S' posee solución, es única y sólo puede ser la anterior. Pero, ¿cómo confirmar que, efectivamente, es solución de S'? Pues comprobando que al sustituir en las **n** ecuaciones x_j por $\dfrac{|A_j|}{|A|}$ los dos miembros de las ecuaciones toman el mismo valor.

Sustituyendo en la ecuación $\mathbf{E}_i$ cada x_j por $\dfrac{|A_j|}{|A|}$, o sea, por $\dfrac{\sum_{h=1}^{n} b_h A_{hj}}{|A|}$, resulta:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \frac{1}{|A|}\left[a_{i1}\sum_{h=1}^{n} b_h A_{h1} + a_{i2}\sum_{h=1}^{n} b_h A_{h2} + \ldots + a_{in}\sum_{h=1}^{n} b_h A_{hn}\right] =$$

$$= \frac{1}{|A|}\left[a_{i1}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}) + a_{i2}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2}) + \cdots + \right.$$
$$\left. + \cdots + a_{in}(b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn})\right]$$

$$= \frac{1}{|A|}\cdot\left[b_1.(a_{i1}A_{11} + \ldots + a_{in}A_{1n}) + \ldots + b_i.(a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in}) + \ldots + \right.$$
$$\left. + \ldots + b_n.(a_{i1}A_{n1} + \ldots + a_{in}A_{nn})\right]$$

$$= \frac{1}{|A|}\left[b_1.0 + b_2.0 + \ldots + b_i|A| + \ldots + b_{n-1}.0 + b_n.0 \right] = b_i$$

luego, como queríamos demostrar, $\left(\frac{|A_1|}{|A|}, \frac{|A_2|}{|A|}, \frac{|A_3|}{|A|}, \ldots, \frac{|A_n|}{|A|}\right)$, es solución de la ecuación $\mathbf{E}_i$ de S', es decir, de todas las que forman el sistema, luego también de éste.

Ejemplo

Supongamos que se desea resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 5 \\ 3x & - & y & + & 5z & = & 20 \\ 5x & + & y & - & 6z & = & 2 \end{array}\right\}$$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 139 \neq 0$, se tratará de un sistema de Cramer, luego:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 20 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -6 \end{vmatrix}}{139} = 3\ ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 20 & 5 \\ 5 & 2 & -6 \end{vmatrix}}{139} = -1\ ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 20 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{139} = 2$$

Observación

En general, nada obliga a que un sistema de ecuaciones lineales haya de tener necesariamente igual número de ecuaciones que de incógnitas; o, incluso, siendo dicho número coincidente, la matriz de los coeficientes no siempre tendrá determinante distinto de cero y la regla de Cramer será, al menos en principio, inaplicable. A estudiar cómo proceder en tales casos, es a lo que dedicaremos el siguiente -y fundamental- apartado de este capítulo.

5. TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS

Enunciado:

Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} (S)$$

y consideradas las matrices A, de los coeficientes, y A*, la ampliada con los términos independientes, se verifica:

¡Muy importante!

① S es compatible ⇔ rango A = rango A*

② rango A = rango A* $\begin{cases} < n \Rightarrow \text{S es compatible indeterminado.} \\ = n \Rightarrow \text{S es compatible determinado.} \end{cases}$

(Lee dos o tres veces el enunciado antes de entrar en la demostración)

Demostración:

➨ Primer paso:

Supongamos que el sistema S fuera compatible. Eso, como sabes, significa que existirían números reales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ tales que:

$$\alpha_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots\dots + \alpha_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

luego la última columna de A* sería combinación lineal de las restantes y aunque se prescindiera de ella, quedándonos entonces la matriz A, el rango no se modificaría; es decir, rango A = rango A*

➨ Segundo paso:

Supongamos ahora que rango A = rango A* = r. Eso significa que en A (y en A*) existe al menos un menor de orden **r** no nulo y que no hay ninguno de orden superior a **r** que sea distinto de cero.

Si uno de tales menores de orden **r** no nulo fuera el formado por los elementos comunes a las **r** primeras filas y **r** primeras columnas de A:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

(si no fuera así, un cambio en el orden de las ecuaciones y/o en el de las incógnitas, permitiría suponerlo), el sistema dado será equivalente al:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}x_1 & + & a_{r2}x_2 & + & \dots & + & a_{rn}x_n & = & b_r \end{array}\right\} (S')$$

obtenido suprimiendo, si es que existían, las **(m–r)** últimas ecuaciones de S, ya que al ser las correspondientes filas de A* combinación lineal de las r primeras –recuerda la observación hecha al final de la página 44–, también lo serán tales ecuaciones de las r primeras de S.

Llegados aquí, pueden presentarse dos posibilidades:

① ☞ Que **r** = **n**. Entonces, el sistema S' es de Cramer y tendrá solución única. S, equivalente a S' por lo visto en la página 55, será compatible **determinado.**

② ☞ Que **r** < **n**. Dejando, entonces, en los primeros miembros de S' las **r** primeras incógnitas *(principales)* y pasando a los segundos miembros las (**n-r**) restantes *(auxiliares)*, el sistema quedaría así:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1r}x_r & = & b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2r}x_r & = & b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ a_{r1}x_1 & + & a_{r2}x_2 & + & \dots & + & a_{rr}x_r & = & b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{array}\right\} (S')$$

Y una vez dados valores cualesquiera en él a $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$, (y convertido en un sistema de Cramer), obtendríamos unos valores para $x_1, x_2, \dots, x_r$ que, junto a los dados a $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$, constituirían una solución de S. Pero como a las incógnitas auxiliares $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ les podemos dar tantos valores como queramos, el sistema tendrá infinitas soluciones. Será compatible **indeterminado.**

Ejemplos

①☞ Supongamos que se desea discutir y, en su caso, resolver, el sistema:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & 4 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 7 \\ 5x & - & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & - & y & - & 7z & = & 1 \end{array}\right\}$$

En primer lugar, procederemos a calcular los rangos de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, si orlamos ese menor de orden 2 de la matriz A con la tercera fila, nos encontramos con que el menor de orden 3 correspondiente a las tres primeras filas de A es distinto de cero: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 17 \neq 0$, luego rango A = 3.

Partiendo en A* del menor anterior de orden 3 no nulo, para ver si el rango de A* es 3 ó 4, el único menor que se puede formar, orlando el anterior con la cuarta fila es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

En consecuencia, la cuarta fila de A* es combinación lineal de las tres primeras y, si en el sistema prescindimos de la última ecuación, el nuevo sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 4 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 7 \\ 5x & - & 2y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right\}$$

en el que la matriz de los coeficientes y la ampliada tienen rango igual a 3, sería equivalente al inicial y, ambos, compatibles determinados. Bastaría aplicar la regla de Cramer para obtener su única solución: **x = 1**; **y = 2**; **z = 0**.

②☞ Supongamos dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 5z & = & 7 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 9 \\ 4x & - & 5y & + & 9z & = & 11 \end{array}\right\}$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 9 \end{vmatrix} = 0$, el rango de A es 2.

Para calcular el rango de A*, el único menor a considerar es: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 9 \\ 4 & -5 & 11 \end{vmatrix}$, pues el primero que se obtendría orlando $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ ya hemos visto que es nulo.

Ahora bien, como $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 9 \\ 4 & -5 & 11 \end{vmatrix} = 0$, resulta que la tercera fila de A* y, por consiguiente, la tercera ecuación del sistema, es combinación lineal de las dos primeras.

Se tendrá rango A = rango A* = 2 y el sistema, compatible indeterminado en virtud del teorema de Rouché-Fröbenius, será equivalente a:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 5z & = & 7 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 9 \end{array}\right\}$$

Para resolverlo, ya que $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, tomaremos como incógnitas principales **x**, **y**, considerando la **z** como auxiliar. Escribiendo, pues:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 7+5z \\ 3x & - & y & = & 9-2z \end{array}\right\}$$

y aplicando la regla de Cramer, se tendría:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7+5z & 3 \\ 9-2z & -1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{34-z}{11} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7+5z \\ 3 & 9-2z \end{vmatrix}}{-11} = \frac{3+19z}{11}$$

En resumen, las infinitas soluciones del sistema formarían el conjunto:

$$\left\{ \left(\frac{34-z}{11} , \frac{3+19z}{11} , z \right) / \ z \in \mathbf{R} \right\}$$

③☞ Comprueba que el siguiente sistema es incompatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 2 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ x & - & 9y & + & 10z & = & 1 \end{array}\right\}$$

Sistemas homogéneos

Como un sistema homogéneo tiene todos los términos independientes nulos, la última columna de A* estará formada exclusivamente por ceros y, en consecuencia, rango A = rango A*.

☐ ➔ Si dicho rango coincide con **n** (número de incógnitas), la única solución será la trivial, es decir, $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

➔ Si rango A < n, se procederá como hemos visto en el segundo ejemplo anterior, expresando las **r** incógnitas principales en función de las (**n–r**) restantes.

Ejemplos

①☞ Dado el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right\}$$

se verifica que $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, luego rango A < 3 (número de incógnitas) y, en consecuencia, la única solución será la trivial: **x = 0**, **y = 0**, **z = 0**.

②☞ Comprueba que el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & 5z & + & t & = & 0 \\ 3x & - & y & - & 5z & - & 6t & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 4z & + & 5t & = & 0 \\ -x & + & 3y & - & z & + & 10t & = & 0 \end{array}\right\}$$

tiene infinitas soluciones, que forman el conjunto: $\{(2z + t\ ,\ z - 3t,\ z\ ,\ t)\ /\ z\ ,\ t \in \mathbf{R}\}$

6. MÉTODO DE GAUSS

Observación

Como comprenderás, la regla de Cramer puede ser útil para resolver sistemas en los que el número de ecuaciones y/o incógnitas sea 2, 3 ó, a lo sumo, 4. Pero para valores superiores, su aplicación es poco recomendable, por la cantidad de determinantes de orden elevado que hay que calcular. El método que vamos a ver, llamado de Gauss, o de los *pivotes,* tiene entre otras ventajas la de ser fácilmente programable para que un ordenador lo aplique. Y sólo con un ordenador pueden resolverse sistemas de los que aparecen en ocasiones en Economía, Astronáutica... con centenares o miles de ecuaciones.

El método de Gauss consiste en la aplicación reiterada, al sistema que se trate de resolver, de transformaciones de las que mencionamos en la pág. 55, hasta que se llega a otro sistema equivalente, pero lo más sencillo posible; por otra parte, como lo que realmente caracteriza a un sistema son sus coeficientes y términos independientes, y no las letras con las que representemos las incógnitas, suele trabajarse directamente con su matriz ampliada. El método de Gauss, en resumen, consiste en transformar la matriz del sistema inicial en otra que tenga nulos todos los elementos situados por debajo de la *diagonal principal,* es decir, todos los elementos a_{ij} en los que $i > j$. Como puedes figurarte, se trata de algo semejante a lo que hacíamos para calcular el rango de una matriz.

Entenderás mejor cómo funciona tal metodo estudiando los siguientes ejemplos, correspondientes a los tres casos posibles:

Primer ejemplo

Discutir y resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & + & z & + & t & = & 7 \\ x & - & 2y & + & z & + & 2t & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & 3z & - & t & = & 0 \\ 5x & - & y & + & z & + & 4t & = & 8 \end{array}\right\}$$

Como decimos, nos limitaremos a ir escribiendo la matriz del sistema sin necesidad de escribir éste completamente. Con ese convenio, y representando con el símbolo $\rightarrow$ el paso de un sistema a otro equivalente, el esquema de la discusión-resolución es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -9 & -5 & -21 \\ 0 & -7 & -3 & 3 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

$$\xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 44 & 22 & 110 \\ 0 & 0 & 22 & 6 & 60 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 44 & 22 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & -220 & 220 \end{pmatrix}$$

paso (1): resta a la 2^a fila, después de multiplicarla por 2, la 1^a (multiplicada por 1).
resta a la 3^a fila, después de multiplicarla por 2, la 1^a multiplicada por 3.
resta a la 4^a fila, después de multiplicarla por 2, la 1^a multiplicada por 5.

paso (2): resta a la 3^a fila, después de multiplicarla por -5, la 2^a (multiplicada por 1).
resta a la 4^a fila, después de multiplicarla por -5, la 2^a multiplicada por -7.

paso (3): resta a la 4^a fila, después de multiplicarla por 44, la 3^a multiplicada por 22.

Lo anterior significa que el sistema dado es equivalente al:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & + & z & + & t & = & 7 \\ & - & 5y & + & z & + & 3t & = & -5 \\ & & & & 44z & + & 2t & = & 110 \\ & & & & & - & 220t & = & 220 \end{array}\right\}$$

que se resuelve fácilmente empezando por la última ecuación, de la que se obtiene: **t = -1**; llevando después ese valor a la tercera: **z = 3**; llevando ambos valores a la segunda: **y = 1**; finalmente, sustituyendo en la primera: **x = 2**. El sistema, naturalmente, es compatible determinado.

Segundo ejemplo

Discutir y resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 17 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & -2 \\ 4x & - & y & + & 5z & = & 13 \end{array}\right\}$$

El esquema es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 17 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 5 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 17 \\ 0 & -7 & 7 & -21 \\ 0 & -14 & 14 & -42 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 17 \\ 0 & -7 & 7 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 17 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(En el último paso se ha simplificado la segunda fila, dividiendo entre -7, y se ha prescindido de la tercera, por corresponder a la ecuación $0x + 0y + 0z = 0$, que, además de ser combinación lineal de las anteriores, se verifica para cualquier valor de las incógnitas).

Por tanto, el sistema inicial es equivalente al:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 17 \\ & - & y & + & z & = & -3 \end{array}\right\}$$

cuyas soluciones, $\left\{\begin{array}{rcrcr} y & = & 3 & + & z \\ x & = & 4 & - & z \end{array}\right.$, forman el conjunto: $\{(4 - z,\ 3 + z,\ z) / z \in \mathbf{R}\}$.

(En otras palabras, que si, por ejemplo, haces $z = 2$, los valores $x = 2$, $y = 5$, $z = 2$ son una solución; si tomas $z = 1$, los valores $x = 3$, $y = 4$, $z = 1$ también son solución, y así tantas veces como quieras.)

El sistema tiene infinitas soluciones: es compatible indeterminado.

Tercer ejemplo

Discutir y resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 3z & = & 8 \\ 3x & - & y & + & 4z & = & 11 \\ 4x & - & 3y & + & 5z & = & 3 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 5 \end{array}\right\}$$

El esquema es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 3 & -1 & 4 & 11 \\ 4 & -3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & -10 & -2 & -26 \\ 0 & -5 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 110 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el sistema dado es equivalente al:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 3z & = & 8 \\ & - & 5y & - & z & = & -2 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 110 \end{array}\right\}$$

cuya última ecuación no tiene solución. El sistema es incompatible.

7. MATRIZ INVERSA

Definiciones (de matriz unidad y matriz inversa de otra)

Como dijimos en el capítulo anterior, en el conjunto **M(n)** de las matrices cuadradas de orden **n** existía una matriz, la:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

a la que llamábamos *matriz unidad (o identidad)* de orden n, tal que, cualquiera que fuera la matriz cuadrada A de orden n, se verificaba:

$$\boxed{A \,.\, I_n = I_n \,.\, A = A}$$

También anunciábamos que dada una matriz A, cuadrada de orden n, si se cumplía determinada condición, existiría otra matriz A^{-1}, la matriz *inversa* de A, tal que:

$$\boxed{A \,.\, A^{-1} = A^{-1} \,.\, A = I_n}$$

Veamos, ahora, qué condición es ésa y cómo calcular A^{-1} cuando exista.

Cuestión previa (unicidad de la matriz inversa)

De la definición de matriz inversa se desprende que A^{-1}, si existe, es *única,* pues si A poseyera dos inversas, A^{-1}, A^{I}, se tendría:

$$A^{I} = A^{I} . I_n = A^{I} . A . A^{-1} = I_n . A^{-1} = A^{-1}$$

Teorema (condición para la existencia de A^{-1} y forma de calcularla)

☞ La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ posea inversa es que det (A) ≠ 0. En tal caso:

$$\boxed{A^{-1} = (x_{ij}) = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ji})}$$

es decir, que A^{-1} es la matriz cuyo elemento (x_{ij}) es el cociente entre el adjunto, en A, de (a_{ji}), y el determinante de A.

Vamos a indicarte cómo se demostraría el teorema anterior para una matriz cuadrada de orden 3 (la demostración en el caso general sería semejante):

Dada, pues, la matriz: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, se trataría de determinar si existen valores (x_{ij}) tales que:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Formados los tres sistemas de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas en que se descompone la igualdad precedente:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + a_{13}x_{3j} = \delta_{1j} \\ a_{21}x_{1j} + a_{22}x_{2j} + a_{23}x_{3j} = \delta_{2j} \\ a_{31}x_{1j} + a_{32}x_{2j} + a_{33}x_{3j} = \delta_{3j} \end{array}\right\} \quad \left(j = 1, 2, 3; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ , si } i = j \\ 0 \text{ , si } i \neq j \end{cases} \right)$$

tales sistemas tendrían solución (que, vista la cuestión previa anterior, de existir habrá de ser única) si y sólo si en cada uno de ellos es rango A = rango A* = 3. Ello, como sabes, ocurre si y sólo si $|A| \neq 0$.

En ese supuesto, bastaría aplicar a cada sistema la regla de Cramer para concluir que, efectivamente:

$$A^{-1} = (x_{ij}) = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ji})$$

Ejemplos

①☞ Obtén la matriz inversa de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

②☞ Obtén la matriz inversa de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

(Hay otro método para calcular A^{-1} -el metodo de Gauss-, pero lo dejamos, ¿no?)

8. EJERCICIOS

1.- Discute, aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius y, en su caso, resuelve por la regla de Cramer, los sistemas:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y+z=0 \\ x-y+2z=2 \\ 4x+y+3z=5 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x-y+z=1 \\ x+y+z=5 \\ 2x-y+3z=5 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 3x+2y+z=0 \\ x-y+2z=2 \\ 4x+y+3z=2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ x+2y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x-y-2z=5 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x-2y-z+w=-2 \\ x+y+2z-w=3 \\ x+y+w=9 \\ x+z=3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x+y-3z=0 \\ x-z=0 \\ x+z-2w=0 \\ 3x+y-3z-2w=0 \end{array}\right\}$$

2.- La matriz ampliada de cierto sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas tiene de rango 3. ¿Puede asegurarse que el sistema es compatible?

3.- Dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas sólo se distinguen en los términos independientes. Si el primero es compatible indeterminado, ¿puede ser el segundo compatible determinado?

4.- Halla el valor de **m** que hace compatible cada uno de los siguientes sistemas y, en los casos en que sean compatibles, resuélvelos:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+10y+4z=0 \\ mx+y-z=0 \\ x+3y+z=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 2x+3y-z=5 \\ 4x-5y+6z=-7 \\ 3x-4y+3z=-9 \\ mx+5y-3z=7 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=m^2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x+my+z=m+2 \\ x+y+mz=-2(m+1) \\ mx+y+z=m \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} (m^2-1)x-(m+1)^2y=m+1 \\ (m+1)x+(m-1)y=m+1 \end{array}\right\}$$

5.- Discute, aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{l} mx+2y=2 \\ 2x+my=m \\ x-y=-1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 2x+y-z=a \\ x+my+z=b \\ 3x+y-mz=c \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{array}\right\}$$

6.- En el primer capítulo hemos estudiado cómo hallar un sistema generador de un subespacio vectorial que haya sido definido a través de unas ecuaciones implícitas. Halla, ahora, unas ecuaciones implícitas del subespacio vectorial, S, de ($\mathbf{R}^4$, +, .), engendrado por los vectores (1,1,2,1), (3,2,1,5).

Sugerencia: Piensa que $S = \{ (x, y, z, t) / (x, y, z, t) = \alpha.(1,1,2,1) + \beta.(3,2,1,5)$, con $\alpha,\beta \in \mathbf{R} \}$ y obtén las relaciones que han de cumplir x , y , z , t para que, cualesquiera que sean sus valores, existan valores de α,β para los que se verifique la igualdad anterior.

7.- El proceso sugerido en el ejercicio anterior para encontrar las ecuaciones implícitas del subespacio S se conoce como *eliminación de parámetros*. Elimina, ahora, los parámetros del siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & = & 4 & + & 6\alpha & - & 2\beta & + & 4\gamma \\ y & = & 1 & - & \alpha & - & \beta & - & 2\gamma \\ z & = & -2 & - & \alpha & + & 2\beta & + & \gamma \\ t & = & -5 & - & 2\alpha & + & 3\beta & + & \gamma \end{array}\right\}$$

8.- Como sabes, un sistema de ecuaciones lineales puede escribirse en forma matricial como: A.X = B, donde las matrices A, X y B tienen el significado que vimos en las páginas 53 y 54. Utiliza la notación anterior para obtener una condición para que la suma de dos soluciones de un sistema de ecuaciones también sea solución del mismo. ¿Es condición necesaria y suficiente?

9.- Estudia y resuelve en caso de compatibilidad, por el método de Gauss, los sistemas:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 5x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ 7x - 8y - 7z = -1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ -2x - y + 5z = 6 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y - 5z = 4 \\ 5x - 2y + z = -1 \\ 3x + y + 5z = -5 \\ 5x + y + 4z = 2 \\ 8x + 5y + 13z = 0 \\ 3x + 4y + 8z = -2 \\ 4x - 3y - z = 11 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 2x - 5y + 4z + v - w = -3 \\ x - 2y + z - v + 5w = 5 \\ 4x - 13y + 16z + 5v + w = 23 \\ x - 4y + 6z + 2v + w = 10 \\ 2x - 5y + 4z + v - w = 3 \end{array}\right\}$$

10.- Sean A, B dos matrices cuadradas de orden n, con $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$. Demuestra que la matriz inversa de A.B es $B^{-1}.\ A^{-1}$.

11.- Halla, caso de que sea posible, las inversas de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \ ; \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \ ; \ D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

12.- Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + 2z = 7 \\ x + 3y + z = 7 \\ 3x + 4y - 2z = 8 \end{array}\right\}$$

Resuélvelo por el método que prefieras, escríbelo en forma matricial, A.X = B, calcula la matriz inversa de A, A^{-1}, y mira qué se obtiene cuando se calcula el producto $A^{-1}.B$.

TEMA 4

EL ESPACIO AFÍN

1. INTRODUCCIÓN

En cursos anteriores hemos estudiado geometría del plano. Los elementos con los que trabajábamos, recuerda, eran puntos y rectas. Este año vamos a dar un pequeño avance: nos *moveremos* en el espacio, y en él manejaremos no sólo puntos y rectas, sino puntos, rectas... y planos. El método que seguiremos no diferirá mucho del que ya conoces de 2º y 3º de BUP, pues entonces establecimos las bases teóricas que nos van a permitir, ahora, progresar en nuestro estudio.

Iniciaremos este capítulo hablando de vectores fijos y libres; veremos después distintas ecuaciones de la recta y el plano y terminaremos estudiando los que se han dado en llamar problemas de incidencia, o sea, problemas de paralelismo, intersecciones... En el capítulo próximo, con el producto escalar, trataremos las cuestiones métricas, es decir, aquellas relativas a perpendicularidad, medida de ángulos y distancias, y daremos unas definiciones que nos permitirán multiplicar vectores, además de escalarmente, de otras formas; formas útiles para trabajar no sólo en matemáticas, sino también y especialmente en física.

Y recuerda lo que decía Platón -¿era él?- respecto al ingreso en su *Academia:* "¡Que no entre aquí nadie que no sepa Geometría!". Podríamos imitarle, diciendo: ¡Que no salga nadie de aquí sin saber Geometría!

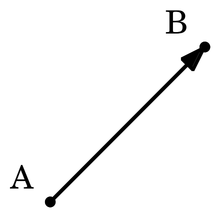
2. VECTORES EN EL ESPACIO

Cuestión previa

Piensa en un punto en el espacio..., en una recta..., en un plano... ¿Has sido capaz de imaginarlos? Podemos suponer, pues, que los conceptos de *punto, recta, plano y espacio* son intuitivos y, por consiguiente, los utilizaremos en lo que sigue sin necesidad de definirlos previamente.

Definición (de vector fijo)

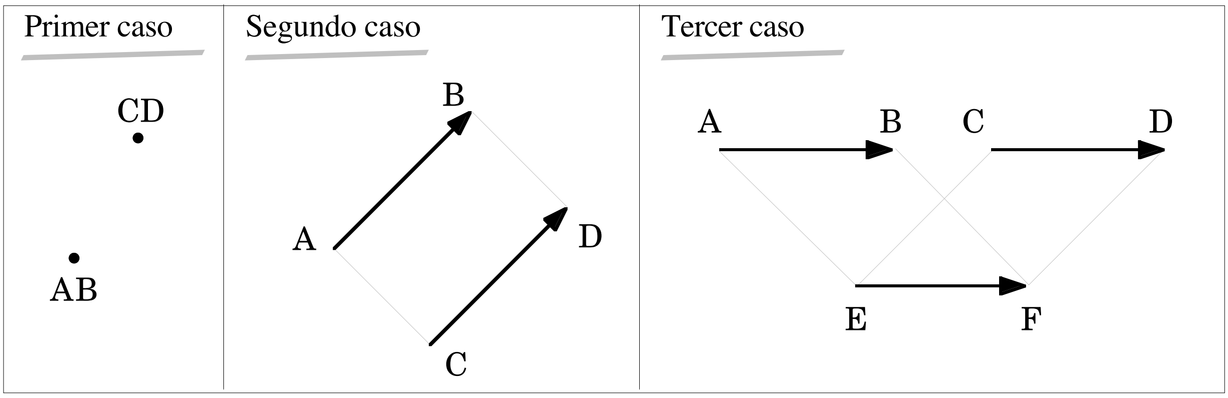
Llamaremos *vector fijo* a un par ordenado (A, B) de puntos del espacio ordinario, E, no excluyendo la posibilidad de que ambos sean coincidentes, caso en el que hablaremos de *vector nulo.* Con el símbolo **AB** designaremos el vector definido por los puntos A y B, en ese orden, y diremos que el vector **AB** tiene por *origen* A y por *extremo* B.



Observa que el vector **AB** está definido exclusivamente por los puntos A y B. Dibujar la flecha obedece a la necesidad de indicar, en la figura, un orden.

Definición (relación de equipolencia)

Con objeto de establecer una relación entre vectores fijos, considera las figuras que encabezan la página siguiente:



En las tres figuras aparecen los vectores **AB** y **CD**. En la última, aparece además un tercer vector, el **EF**.

➠ En el primer caso, los vectores **AB** y **CD** son nulos, es decir, A = B y C = D.

➠ En el segundo caso, en el que los puntos A, B, C y D no están alineados, la figura ABDC (¡Atención al orden de los vértices!) es un paralelogramo.

➠ En el tercer caso, en el que los puntos A, B, C y D están alineados, existe otro vector **EF** tal que las figuras ABFE, CDFE son paralelogramos.

☞ Pues bien, cuando ocurra uno cualquiera de los tres casos anteriores (o, lo que es lo mismo: cuando trasladando **AB** paralelamente a sí mismo se pueda superponer con **CD**), diremos que los vectores fijos **AB** y **CD** son *equipolentes* y escribiremos **AB** ≡ **CD**.

Definiciones (de vector libre y V^3)

Aunque sea en el "plano" de un papel, dibuja un vector fijo **AB**... Ahora, dibuja cuatro vectores equipolentes a él... ¿Hay más? ¿Cuántos? Al conjunto formado por todos ellos le vamos a llamar vector libre. Es decir:

☞ Dado un vector fijo **AB**, llamaremos *vector libre* [**AB**] al conjunto de todos los vectores fijos equipolentes a él:

$$[\mathbf{AB}] = \{\mathbf{XY} \,/\, \mathbf{XY} \equiv \mathbf{AB}\}$$

Cuando no haya posibilidad de error, escribiremos **AB** en lugar de [**AB**] y utilizaremos los símbolos **a** , **b** , **c** ... para designar vectores libres cualesquiera. En particular, designaremos por **0** el *vector libre nulo,* es decir, el formado por todos los vectores fijos nulos. Para mostrar en las figuras un vector libre, dibujaremos uno cualquiera de sus representantes o vectores fijos equipolentes que lo formen.

☞ Con el símbolo V^3 designaremos el conjunto de todos los vectores libres del espacio. Este conjunto juega un papel muy importante en matemáticas y, sobre todo, en física (por lo de las magnitudes vectoriales). En él se dio origen al concepto de espacio vectorial, y en su honor los elementos de cualquier conjunto que esté dotado de esa estructura reciben el nombre de vectores, sean dichos elementos polinomios, funciones o lo que sea, siempre que el conjunto tenga estructura de espacio vectorial.

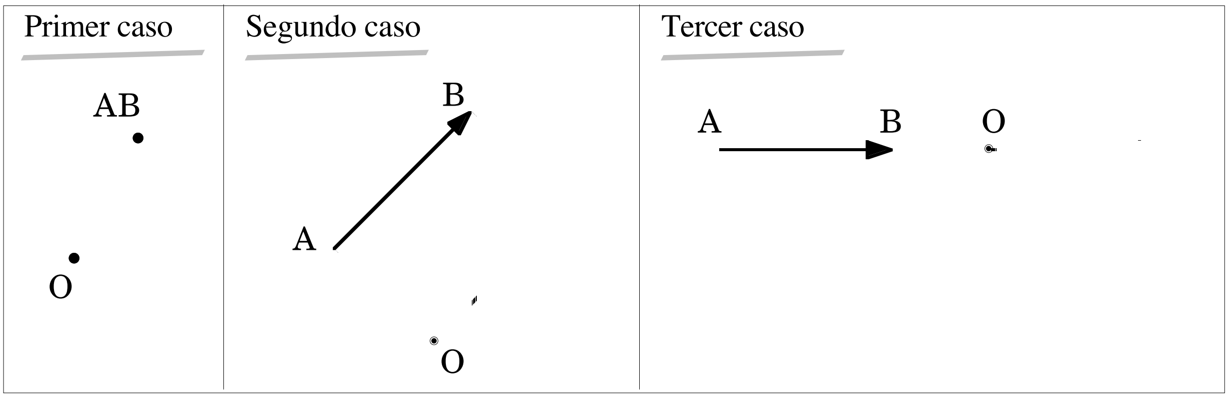
3. EL ESPACIO VECTORIAL V^3

Establecido, pues, qué son los vectores libres, vamos a definir algunas operaciones que se pueden efectuar con ellos. Antes, necesitamos un sencillo teorema.

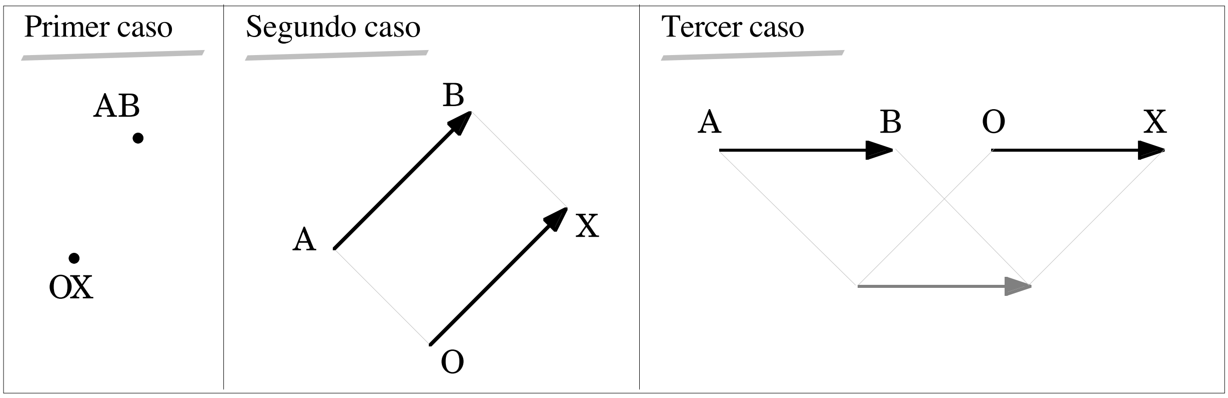
Teorema

➠ *Fijado un punto O del espacio, es posible encontrar para todo vector libre* [**AB**] *un único representante de origen O.*

La demostración es sencilla. Fijado el punto O, la situación de los puntos O, A y B puede ser una de las siguientes:



Entonces, el representante de [**AB**] con origen en O cuya existencia asegura el teorema sería en cada caso el que se indica a continuación:

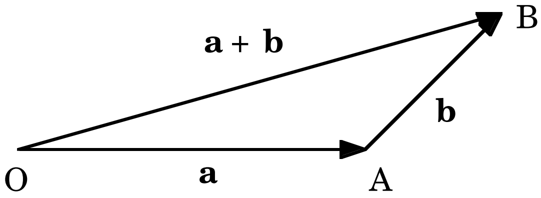


Definición (de suma de vectores libres)

Estamos ahora en condiciones de definir una operación entre vectores libres a la que, convencionalmente, llamaremos *suma*. A tal fin, sean **a** y **b** dos vectores libres del espacio. Como hemos dibujado en la figura siguiente, tomado un punto cualquiera, O, existirá un único punto A tal que **OA** sea representante del vector libre **a** y, considerado este punto A, otro único punto B tal que **AB** sea representante de **b**:

Se define entonces la suma **a** + **b** como el vector libre del cual **OB** es un representante.

☞



(En rigor, aunque aquí lo omitamos, es necesario demostrar que la suma **a** + **b** no depende de los representantes de **a** y **b** elegidos.)

Propiedades de la suma de vectores libres

Es fácil demostrar que la suma de vectores libres es una ley de composición interna en V^3 que cumple las propiedades propias de la ley interna de un espacio vectorial: asociativa, conmutativa, poseedora de elemento neutro y tal que todo elemento tiene opuesto.

Otras definiciones (módulo, dirección y sentido)

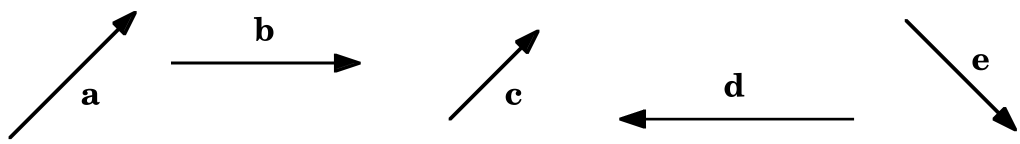
① Según definimos la relación de equipolencia, si **AB** y **CD** son dos representantes cualesquiera de un mismo vector libre **a**, entonces la longitud de AB es igual a la de CD. A dicha longitud, común a todos los representantes de **a**, la representaremos por |**a**| y la llamaremos *módulo* de **a**.

② Diremos que dos vectores libres **a** y **b** tienen *igual dirección,* en cuyo caso escribiremos **a** // **b**, cuando considerados representantes suyos con el mismo origen, **OA** y **OB**, respectivamente, los puntos O, A y B estén alineados (O sea, que dos vectores libres **a** y **b** tienen la misma dirección cuando... eso, tienen la misma dirección, son "paralelos".)

③ Dados dos vectores libres no nulos **a** y **b** de igual dirección, diremos que tienen el *mismo sentido* cuando elegidos representantes suyos con el mismo origen, **OA** y **OB**, respectivamente, los extremos A y B estén en la misma semirrecta de origen O. En caso contrario, se dirá que **a** y **b** tienen distinto sentido (Siempre manteniendo la misma dirección).

Ejemplos

Los vectores **a** y **c** de la figura siguiente tienen igual dirección y sentido. Los vectores **b** y **d** tienen igual dirección, pero sentidos opuestos. En cambio, no hay en la figura ningún vector que tenga igual dirección que el **e**.



Consecuencia

➠ De lo anterior se deduce que *dos vectores libres no nulos son iguales si y sólo si tienen igual módulo, dirección y sentido.* Demuéstralo.

Definición (de producto de un número real por un vector libre)

☞ Sea **a** un vector libre no nulo y sea $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$. Se define $\lambda.\mathbf{a}$ como el vector libre de igual dirección que **a**, cuyo módulo es $|\lambda|.|\mathbf{a}|$ y cuyo sentido es el de **a** si $\lambda > 0$ y el opuesto si $\lambda < 0$. Si $\lambda = 0$ ó $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, se define $\lambda.\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Consecuencia ((V^3, +, .) es espacio vectorial)

Comprobar que el producto de un número por un vector libre es una aplicación de $\mathbf{R} \times V^3$ en V^3 que cumple las cuatro propiedades exigidas a la ley de composición externa de un espacio vectorial es relativamente sencillo, aunque no nos detendremos en ello. Como, por otra parte, la suma de vectores libres también cumplía las oportunas propiedades, concluiremos que (V^3, +, .) es un espacio vectorial.

De tal espacio estudiaremos a continuación algunos asuntos referidos a la dependencia lineal y terminaremos esta parte del tema viendo que (V^3, +, .) es de dimensión 3.

Teorema (dependencia lineal de dos vectores libres)

Sean **a** y **b** dos vectores libres no nulos. Entonces, las proposiciones siguientes son equivalentes:

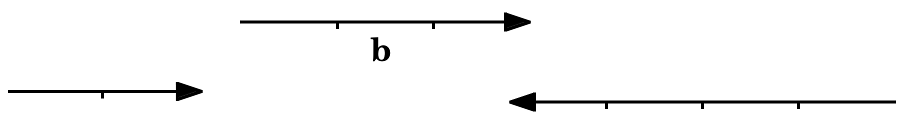
☞

1ª.- **a** y **b** son linealmente dependientes.
2ª.- Existe un número real λ tal que $\mathbf{a} = \lambda.\mathbf{b}$
3ª.- **a** y **b** tienen igual dirección.

En efecto, como la equivalencia entre las dos primeras proposiciones debe resultarte inmediata, veamos la equivalencia entre la 2ª y la 3ª:

Si se verifica la 2ª, y existe un número λ tal que $\mathbf{a} = \lambda.\mathbf{b}$, es obvio que **a** y **b** tendrán igual dirección.

Si se verifica la 3ª, **a** y **b** diferirán, a lo sumo, en módulo y sentido, luego tomando $\lambda = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$, será $\mathbf{a} = \lambda.\mathbf{b}$ ó $\mathbf{a} = -\lambda.\mathbf{b}$. (Observa la figura siguiente para cerciorarte.)



$\mathbf{a} = \frac{2}{3}\mathbf{b}$ $\qquad$ $\mathbf{a'} = -\frac{4}{3}\mathbf{b}$

Observa, pues, que la dependencia lineal de dos vectores libres no nulos equivale a que ambos (o representantes suyos, para ser más precisos), se hallen en una misma recta.

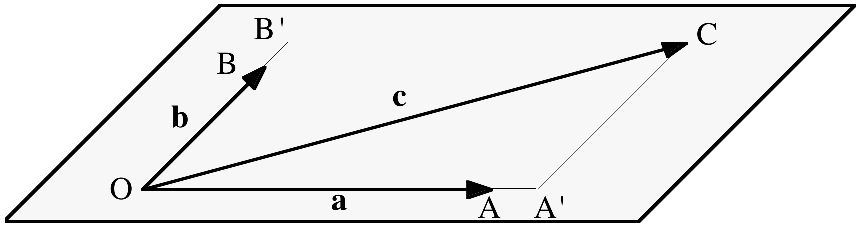
Teorema (dependencia lineal de tres vectores libres)

Tres vectores libres no nulos **a**, **b** y **c** de V^3 son linealmente dependientes si y sólo si están en un mismo plano.

(Cuando decimos que los vectores libres están en un *mismo* plano, queremos decir que se pueden elegir representantes suyos contenidos en él, ¿vale?)

En efecto:

① Supongamos en primer lugar que **OA**, **OB** y **OC**, representantes de **a**, **b** y **c** con igual origen, están en el mismo plano, como se indica en la figura:



Se tendrá: $\mathbf{OC} = \mathbf{OA'} + \mathbf{OB'}$

y como existen números λ, μ tales que:

$$\mathbf{OA'} = \lambda.\mathbf{OA},\ \mathbf{OB'} = \mu.\mathbf{OB},$$

se concluirá:

$$\mathbf{OC} = \lambda.\mathbf{OA} + \mu.\mathbf{OB}, \text{ o sea: } \mathbf{c} = \lambda.\mathbf{a} + \mu.\mathbf{b}$$

luego **a**, **b**, **c** son linealmente dependientes.

② Supongamos ahora que **a**, **b** y **c** son linealmente dependientes: Al menos uno de ellos será combinación lineal de los otros dos, por ejemplo $\mathbf{c} = \lambda.\mathbf{a} + \mu.\mathbf{b}$, y tomando representantes con el mismo origen O, podremos escribir:

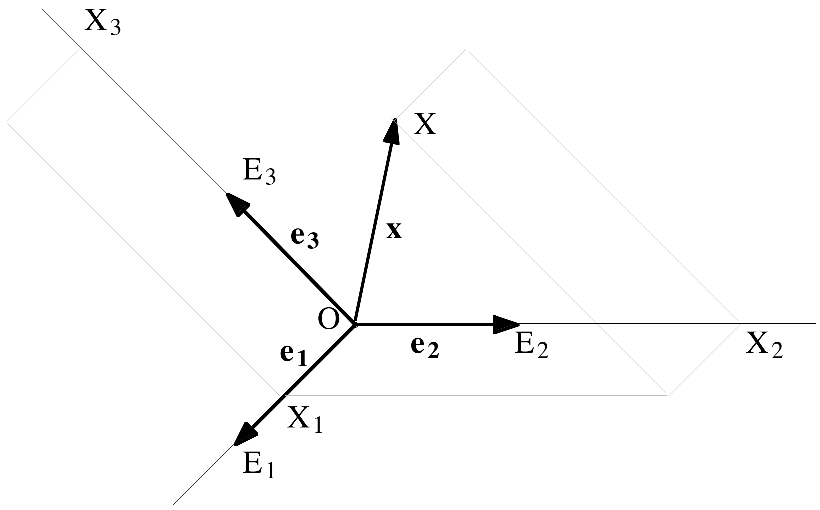
$$\mathbf{OC} = \lambda.\mathbf{OA} + \mu.\mathbf{OB}$$

que indica que **OC** está en el mismo plano que **OA** y **OB**.

➠ De lo anterior, se deduce que *para conseguir tres vectores libres linealmente independientes bastará con tomarlos de forma que no estén en el mismo plano,* ¿no? Pero... ¿existirán cuatro vectores libres linealmente independientes? Lo que veremos a continuación te dará la respuesta.

Definición (de bases en V^3 y de coordenadas de un vector)

Supongamos que $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ son tres vectores libres que, como los de la siguiente figura, no están en un mismo plano. Sabido ya que serán linealmente independientes, veamos que constituyen un sistema generador del espacio vectorial V^3:



A tal fin, sean:

➠ **x** un vector cualquiera de V^3, cuyo representante con origen O es **OX**.

➠ $\mathbf{OE}_1$, $\mathbf{OE}_2$ y $\mathbf{OE}_3$ los representantes con origen O de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Entonces, siendo x_i (i = 1,2,3) los números reales que cumplen: $\mathbf{OX}_i = x_i.\mathbf{OE}_i$, podremos escribir:

$$\mathbf{x} = \mathbf{OX} = \mathbf{OX}_1 + \mathbf{OX}_2 + \mathbf{OX}_3 = x_1.\mathbf{OE}_1 + x_2.\mathbf{OE}_2 + x_3.\mathbf{OE}_3 = x_1.\mathbf{e}_1 + x_2.\mathbf{e}_2 + x_3.\mathbf{e}_3 \ ,$$

luego **x** es combinación lineal de los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ que, por tanto, forman una base de V^3 (pues son linealmente independientes y constituyen un sistema generador).

☞ Como es normal, de (x_1, x_2, x_3) se dirá que son las coordenadas del vector **x** en la base $\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \}$, y cuando no haya dudas sobre cuál es la base utilizada se escribirá simplemente: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Consecuencia

Más adelante nos será útil tener en cuenta que si se conocen las coordenadas de dos vectores libres:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)\ , \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3),$$

entonces se cumple:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1 , x_2 + y_2 , x_3 + y_3)$$

$$\lambda.\mathbf{x} = (\lambda x_1 , \lambda x_2 , \lambda x_3), \lambda \in \mathbf{R},$$

como puedes comprobar sin más que expresar **x** e **y** en función de la correspondiente base y aplicar las propiedades de la suma de vectores libres y de la multiplicación de un número real por un vector. No te resultará difícil.

4. EL ESPACIO AFÍN E^3

Hasta ahora, y a partir de los puntos del espacio, hemos definido unas *cosas* a las que hemos llamado vectores libres; pero, ¿qué utilidad tienen los vectores libres para el estudio de las rectas y los planos? ¿Qué relación existe entre el espacio vectorial V^3, y el conjunto de puntos del espacio, E, del que las rectas y planos son subconjuntos? ¿Cómo podremos establecer una correspondencia entre vectores y puntos, de tal forma que las operaciones que conocemos entre aquéllos las podamos *trasladar* a éstos?

El espacio afín E^3, cuyo estudio nos permitirá responder las cuestiones anteriores, no será otra cosa que el habitual conjunto de *puntos* del espacio en el que, mediante esa correspondencia de la que hablamos, se habrá *sumergido* el espacio vectorial V^3. Precisaremos más estas ideas en lo que sigue.

Definiciones (de vector de posición de un punto y espacio afín)

Siendo O un punto fijo del espacio E, consideremos la aplicación:

$$\Phi : E \longrightarrow V^3$$

que a cada punto X, le hace corresponder como imagen, $\Phi(X)$, el vector libre **OX**.

Tal aplicación en biyectiva, es decir, a cada punto X le corresponde un único vector libre $\mathbf{x} = \mathbf{OX}$ y, recíprocamente, dado un vector libre $\mathbf{x}$, como sólo hay un representante de él con origen en O, **OX**, a $\mathbf{x}$ le corresponde un único punto X. En esas condiciones:

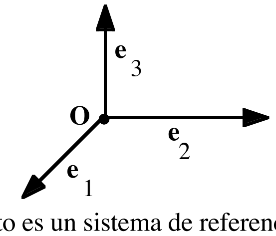
☞ Del vector libre **OX** diremos que es el *vector de posición* del punto X.

☞ Llamaremos *espacio afín*, y lo representaremos por E^3, al conjunto de puntos E dotado de la aplicación Φ anterior.

Definiciones (de sistema de referencia afín y coordenadas de un punto)

① El concepto de sistema de referencia es, podríamos decir, la extensión a E^3 del concepto de base en el espacio vectorial V^3:

> Llamaremos *sistema de referencia afín* en el espacio a cualquier conjunto $S = \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, donde O es un punto fijo del espacio y $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base de V^3.



Esto es un sistema de referencia

✍ Al punto O se le llama *origen* del sistema de referencia y a las rectas que pasan por el origen y contienen los representantes de los vectores de la base, *ejes* del sistema de referencia o ejes de coordenadas.

❏ La importancia de establecer un sistema de referencia, S, estriba en que a cada punto X del espacio se le puede hacer corresponder una única terna de números reales, y recíprocamente. ¿Cuál? la formada por las coordenadas, en la base que forma parte de S, del vector de posición del punto. El esquema del proceso es éste:

Punto		Vector de posición		Terna de números
X	$\longleftrightarrow$	$\mathbf{OX} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$	$\longleftrightarrow$	(x_1, x_2, x_3)

② De (x_1, x_2, x_3) se dice que son las *coordenadas* del punto X en el sistema de referencia S.

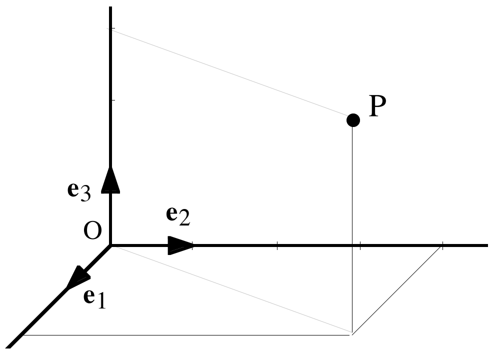
Ejemplos

① Te resultará inmediato que las coordenadas del origen del sistema son (0,0,0) y las de los puntos situados en los ejes, $(x_1, 0, 0)$, $(0, x_2, 0)$, $(0, 0, x_3)$, respectivamente.

② Las coordenadas del punto P de la figura de la derecha, respecto del sistema que en ella aparece dibujado, son (2, 4, 3), pues:

$$\mathbf{OP} = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$$

③ Sitúa tú en el dibujo el punto Q de coordenadas (1, 2, 0).



Coordenadas de un vector definido por dos puntos

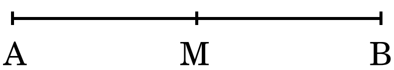
Con frecuencia es necesario, dados dos puntos A y B de coordenadas (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3), respecto de un sistema de referencia $S = \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, conocer las coordenadas respecto de la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ del vector libre **AB**. Te bastará con observar que:

$$\mathbf{OA} + \mathbf{AB} = \mathbf{OB},$$

para concluir que ➟ las coordenadas de **AB** serán $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Coordenadas del punto medio de un segmento

Otras veces se necesita conocer las coordenadas del punto medio, M, del segmento AB:



Como **AM** = **MB**, llamando (m_1, m_2, m_3) a las coordenadas del punto M, se tendrá: $(m_1 - a_1, m_2 - a_2, m_3 - a_3) = (b_1 - m_1, b_2 - m_2, b_3 - m_3)$, de donde:

$$\boxed{m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \quad m_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}}$$

Cambio de sistema de referencia

Como puedes suponer, las coordenadas de un punto X dependen de cuál sea el sistema de referencia elegido, de tal manera que aquéllas cambian cuando lo hace éste. En este apartado veremos precisamente qué relaciones existen entre las coordenadas de un mismo punto en dos sistemas distintos.

Sean, pues, $S = \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $S' = \{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ dos sistemas de referencia en los que las coordenadas de un mismo punto X son (x_1, x_2, x_3) y (x'_1, x'_2, x'_3), respectivamente. Supongamos, además, que (a_1, a_2, a_3) son las coordenadas del punto O' en S y

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{23}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = a_{31}\mathbf{e}_1 + a_{32}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

las relaciones entre los vectores de una y otra base.

Puesto que se verifica $\mathbf{OX} = \mathbf{OO'} + \mathbf{O'X}$, se tendrá:

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 + x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + x'_3\mathbf{e}'_3$$

de donde, sin más que sustituir los $\mathbf{e}'_i$ en función de los $\mathbf{e}_i$, se llega sin dificultad a:

Ecuaciones del cambio de coordenadas ➪

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = a_1 + a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + a_{31}x'_3 \\ x_2 = a_2 + a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{32}x'_3 \\ x_3 = a_3 + a_{13}x'_1 + a_{23}x'_2 + a_{33}x'_3 \end{array}}$$

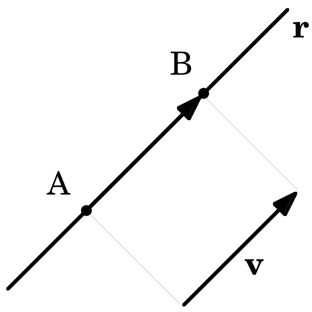
ecuaciones que relacionan las coordenadas del punto X en ambos sistemas.

5. LA RECTA EN EL ESPACIO

Llegados a este punto, parece obligado comentar que de rectas y planos los griegos de "antes" sabían mucho, a pesar de que no conocían los vectores. Euclides, al menos, no los necesitó para escribir en el siglo III a. de C. sus *Elementos*, obra cumbre en la historia de las matemáticas. Esto significa, pues, que se podría estudiar la recta sin utilizar vectores: sería un estudio puramente geométrico, a base de figuras y representaciones. Pero manejar rectas y planos y conocer sus posiciones relativas sin necesidad de acudir continuamente a gráficos, requiere la utilización de expresiones algebraicas o ecuaciones; que se obtienen fácil y rápidamente con el recurso del cálculo vectorial. Aquí, pues, vamos a estudiar la recta y el plano desde un punto de vista *analítico* (a través de sus ecuaciones), pero no olvidándonos -y ello nos será de gran ayuda- de la interpretación geométrica de lo que vayamos haciendo. Así que si no estás muy *puesto* en el dibujo lineal, vas a tener ocasion de practicarlo.

Veremos, como decimos, que no es difícil expresar en términos de puntos y vectores lo *esencial* de rectas y planos y, en tal sentido, comprobaremos que el que tres puntos estén en una misma recta se corresponderá con que haya dos vectores linealmente dependientes, y el que cuatro puntos estén en el mismo plano, con que tres vectores sean linealmente dependientes... A partir de ahí saldrá todo lo demás.

Definición (de vector de dirección de una recta)



Sea **r** una recta en el espacio. Tomados en ella dos puntos A y B, podemos considerar el vector libre **AB**. De él diremos que es un *vector de dirección* de **r**.

O, si quieres, más general: Llamaremos vector de dirección de una recta **r** a cualquier vector libre no nulo, **v**, del que exista un representante contenido en ella.

Observa que, en consecuencia:

Dos vectores, **v** y **w** son vectores de dirección de una misma recta	$\Leftrightarrow$	Existe un número real, λ, tal que $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}$

Dos preguntas: ¿Cuántos vectores de dirección tiene una recta? ¿Podrías dar las coordenadas de los más sencillos vectores de dirección de los ejes de un sistema de referencia?

Ecuaciones de una recta

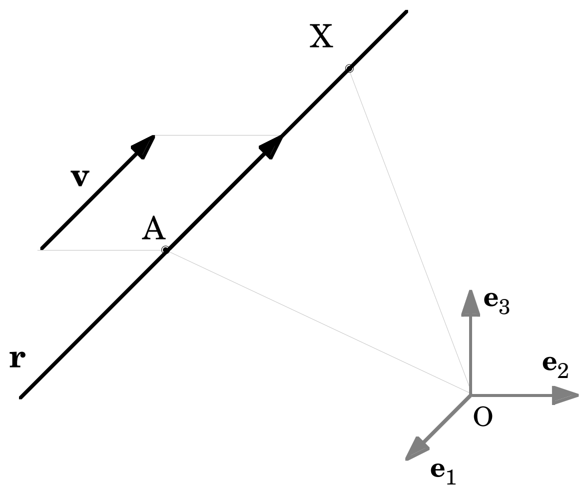
Ya sabes desde hace tiempo que se llama *ecuación de una recta,* de un plano o de cualquier otra curva o superficie a una ecuación que sea satisfecha por *todos* los puntos que la/lo forman (o por sus coordenadas, que es lo mismo) y sólo por ellos.

Supongamos inicialmente que la recta **r**, cuya ecuación queremos obtener, es la que pasa por un punto A, conocido, y tiene a **v**, también conocido, por vector de dirección.

Un punto X pertenecerá a la recta si y sólo si los vectores **AX** y **v** tienen la misma dirección, es decir:

$$\boxed{X \in \mathbf{r} \Leftrightarrow \mathbf{AX} = \lambda.\mathbf{v}, \text{ para algún } \lambda \in \mathbf{R}}$$

Pues ya está, de aquí saldrá todo .



Ecuación vectorial de una recta

Fijado un punto O de E^3, se cumplirá: **OA** + **AX** = **OX**, luego tendremos que un punto X pertenecerá a la recta **r** si y sólo si:

$$\boxed{\mathbf{OX} = \mathbf{OA} + \lambda.\mathbf{v}}$$ ☜ Ecuación vectorial de la recta **r**

Ecuaciones paramétricas de una recta

Fijemos ahora un sistema de referencia S = { O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ } y sean (a_1, a_2, a_3) las coordenadas del punto A, respecto de S, y (v_1, v_2, v_3) las coordenadas del vector **v,** respecto de la base { $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ }.

Si llamamos (x_1, x_2, x_3) a las coordenadas del punto genérico X, la ecuación vectorial anterior se transforma en:

$$x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2 + x_3\,\mathbf{e}_3 = a_1\,\mathbf{e}_1 + a_2\,\mathbf{e}_2 + a_3\,\mathbf{e}_3 + \lambda.(\,v_1\,\mathbf{e}_1 + v_2\,\mathbf{e}_2 + v_3\,\mathbf{e}_3\,)$$

o también:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda v_1 \\ x_2 &= a_2 + \lambda v_2 \\ x_3 &= a_3 + \lambda v_3 \end{aligned}$$

Ecuaciones *paramétricas* de la recta

Ecuación continua de una recta

En el supuesto de que todas las coordenadas v_i sean distintas de cero (lo cual no siempre ocurre), eliminando el parámetro λ de las tres ecuaciones anteriores se llega a:

$$\frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \frac{x_3 - a_3}{v_3}$$

Ecuación *continua* de la recta

Ejemplo

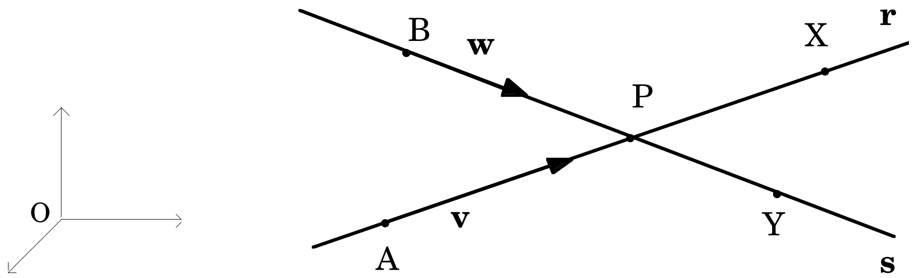
Supongamos que se desea obtener unas ecuaciones vectorial, paramétricas y continua de la recta que pasa por los puntos A(2, 0, 1) y B(4, 5, 4). Como el vector **AB**, cuyas coordenadas son (2, 5, 3), es un vector de dirección de tal recta, se tendrá:

$(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 1) + \lambda\,(2, 5, 3)$	$\begin{aligned} x_1 &= 2 + 2\lambda \\ x_2 &= 5\lambda \\ x_3 &= 1 + 3\lambda \end{aligned}$	$\frac{x_1 - 2}{2} = \frac{x_2}{5} = \frac{x_3 - 1}{3}$
Ecuación vectorial	Ecuac. paramétricas	Ecuación continua

Posición relativa de dos rectas en el espacio

Cuando en cursos anteriores estudiabas la recta en el plano veías que dos rectas, o se cortaban en un punto o eran paralelas o eran coincidentes. Ahora, además, se presenta una cuarta posibilidad: que se crucen sin cortarse. Hay que imaginar la situación en el espacio, porque el dibujo en el plano puede prestarse a confusiones.

Supón que tenemos dos rectas en el espacio, **r** y **s**. (En la figura se ha supuesto que tienen un punto en común, pero su posición relativa podría ser cualquier otra). La recta **r** queda determinada, como ves, por el punto A y el vector **v**; la recta **s**, por el punto B y el vector **w**.



Las ecuaciones vectoriales de **r** y **s**, respectivamente, serán:

$$\mathbf{OX} = \mathbf{OA} + \lambda\, \mathbf{v}\ , \qquad \mathbf{OY} = \mathbf{OB} + \mu\, \mathbf{w}$$

¿De qué dependerá que **r** y **s** se corten, se crucen, coincidan, sean paralelas...? Pues, evidentemente, de que tengan o no puntos en común y de cuántos sean éstos. ¿Que son infinitos los puntos en común? Las rectas son coincidentes. ¿Que sólo tienen un punto en común? Se cortan. ¿Ninguno? O se cruzan o son paralelas.

En términos de vectores, habrá algún punto común cuando algún **OX**, vector de posición de los puntos de **r**, coincida con algún **OY**, vector de posición de los puntos de **s**.

Y en términos de ecuaciones, habrá algún punto común cuando existan valores de los parámetros λ, μ tales que:

$$\mathbf{OA} + \lambda\, \mathbf{v} = \mathbf{OB} + \mu\, \mathbf{w}.$$

Es decir, cuando tenga solución el sistema de tres ecuaciones lineales en las incógnitas λ, μ:

$$\left.\begin{array}{l} v_1\lambda - w_1\mu = b_1 - a_1 \\ v_2\lambda - w_2\mu = b_2 - a_2 \\ v_3\lambda - w_3\mu = b_3 - a_3 \end{array}\right\}$$

Pero, aplicando al sistema anterior el teorema de Rouché, y considerando la matriz de los coeficientes y la ampliada con los términos independientes:

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & -w_1 \\ v_2 & -w_2 \\ v_3 & -w_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^* = \begin{pmatrix} v_1 & -w_1 & b_1 - a_1 \\ v_2 & -w_2 & b_2 - a_2 \\ v_3 & -w_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

los casos que pueden presentarse en la discusión son los siguientes:

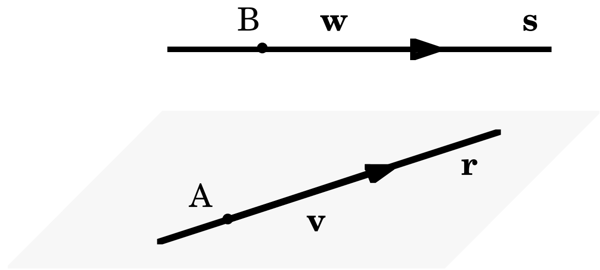
1.- Rango de A* = 3

1.1 Rango de A = 1

Este caso en realidad no puede presentarse, pues al ser rango A = 1, las dos primeras columnas de A* serán proporcionales y su rango no podrá ser 3.

1.2 Rango de A = 2

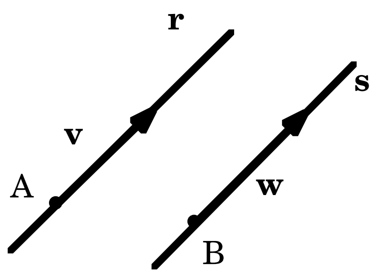
El sistema es incompatible y las rectas no tienen ningún punto común. Además, al ser rango A = 2, los vectores **v**, **w** no tienen igual dirección. Por tanto, las rectas *se cruzan*.



2.- Rango de A* = 2

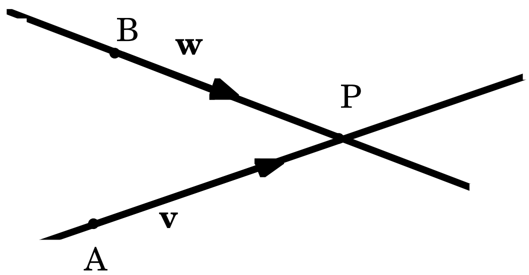
2.1 Rango de A = 1

El sistema es incompatible y las rectas no tienen ningún punto común. Además, al ser rango A = 1, los vectores **v** y **w** tienen igual dirección. Las rectas *son paralelas*.



2.2 Rango de A = 2

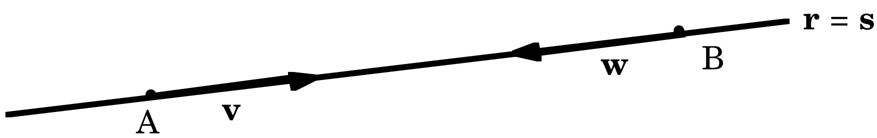
El sistema es compatible determinado, con solución única. Las rectas *se cortan en un punto,* cuyas coordenadas podremos obtener resolviendo el sistema.



3.- Rango de A* = 1

3.1 Rango de A = 1

El sistema es compatible indeterminado, con infinitas soluciones. Las dos rectas tienen infinitos puntos en común y *son coincidentes*.



(Se acabó. Queda bonito, ¿verdad? Pues no se te ocurra ni por un momento memorizarlo: aunque el procedimiento seguido es el más conveniente para un estudio general del problema, ante casos concretos, como veremos en el siguiente ejemplo, la *cosa* se simplifica bastante.)

Ejemplo

Supongamos que se desea conocer la posición relativa de las rectas, **r** y **s**, cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\mathbf{r}:\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad ; \quad \mathbf{s}:\begin{cases} x = 1 + 3p \\ y = 4 - p \\ z = 5 + 2p \end{cases}$$

(Con frecuencia se utilizan las letras *x, y, z* en lugar de los símbolos x_1, x_2, x_3)

Como sabes, las rectas **r** y **s** tendrán algún punto común si y sólo si existen valores de t, p tales que:

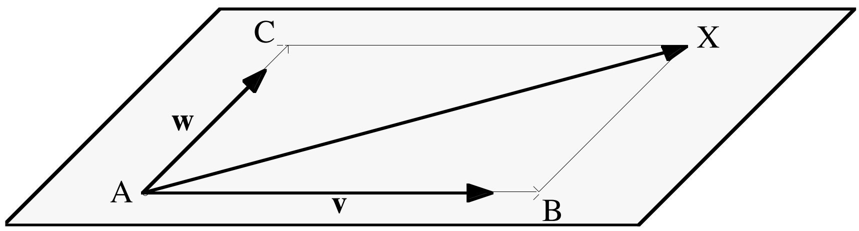
$$\left.\begin{array}{l} 2 + t = 1 + 3p \\ 3 + 2t = 4 - p \\ 1 + t = 5 + 2p \end{array}\right\}$$

es decir, si y sólo si existen valores de t, p tales que: $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} t - 3p = -1 \\ 2t + p = 1 \\ t - 2p = 4 \end{array}\right\}$

Pero como el sistema anterior es incompatible -compruébalo-, las dos rectas no tienen ningún punto común. Descartado que sean paralelas (los vectores (1,2,1), (3,-1,2), cuyas coordenadas no son proporcionales, son de distinta dirección), se concluye que **r** y **s** se cruzan.

6. EL PLANO EN EL ESPACIO

Hay varias formas de determinar un plano, empezando por la que consiste en dar tres puntos no alineados (¿Por qué, si no, los fotógrafos utilizan trípode?). Sin embargo, con objeto de presentar la ecuación del plano como una generalización de la de la recta, supondremos que el plano π que vamos a considerar es el definido por un punto A, perteneciente a él, y dos vectores libres **v** y **w**, de distinta dirección, contenidos en π. (Ya sabes lo que quería decir que un vector libre esté contenido en un plano, ¿no?)



Ecuación vectorial de un plano

Sea π el plano de la figura anterior, definido por el punto A y los vectores **v**, **w**. Un punto X pertenecerá a π si y sólo si existen números reales λ, μ tales que:

$$\boxed{\mathbf{AX} = \lambda.\mathbf{v} + \mu.\mathbf{w}}$$

Si fijamos un punto O de E^3, al cumplirse que **OA** + **AX** = **OX**, se tendrá que X pertenecerá al plano π si y sólo si:

$$\mathbf{OX} = \mathbf{OA} + \lambda.\mathbf{v} + \mu.\mathbf{w}$$ ☜ Ecuación *vectorial* del plano π

Ecuaciones paramétricas de un plano

Fijemos ahora un sistema de referencia S = {O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$} y sean (a_1, a_2, a_3) las coordenadas del punto A, respecto de S, y (v_1, v_2, v_3), (w_1, w_2, w_3) las coordenadas de los vectores **v**, **w**, respecto de la base {$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$}. Si llamamos (x_1, x_2, x_3) a las coordenadas del punto genérico X, la ecuación vectorial anterior equivale a:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & a_1 & + & \lambda v_1 & + & \mu w_1 \\ x_2 & = & a_2 & + & \lambda v_2 & + & \mu w_2 \\ x_3 & = & a_3 & + & \lambda v_3 & + & \mu w_3 \end{array}$$

Ecuaciones *paramétricas* del plano

Ecuación general o cartesiana de un plano

Veamos que eliminando los parámetros λ y μ de las ecuaciones anteriores se llega a una expresión del tipo:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 = 0$$

a la que llamaremos ecuación *general o cartesiana* del plano.

En efecto: Escritas las ecuaciones paramétricas en la forma:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} \lambda v_1 & + & \mu w_1 & = & x_1 & - & a_1 \\ \lambda v_2 & + & \mu w_2 & = & x_2 & - & a_2 \\ \lambda v_3 & + & \mu w_3 & = & x_3 & - & a_3 \end{array}\right\}$$

un punto de coordenadas (x_1, x_2, x_3) pertenecerá al plano si y sólo si existen valores de λ y μ que cumplen estas igualdades; o sea, si el sistema de tres ecuaciones en las incógnitas λ y μ anterior es compatible. Pero como el rango de la matriz de los coeficientes es 2, tal cosa sucederá si y sólo si el rango de la matriz ampliada es también 2, es decir, si y sólo si su determinante es nulo:

$$\begin{vmatrix} v_1 & w_1 & x_1 - a_1 \\ v_2 & w_2 & x_2 - a_2 \\ v_3 & w_3 & x_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$, o lo que es lo mismo: ➟ $$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

✍ Observa que la ecuación anterior, que desarrollada nos conducirá a la ecuación general, *constituye ya una ecuación del plano.*

Desarrollando el último determinante por los elementos de la primera fila y llamando A_1 , A_2 , A_3 a los adjuntos:

$$A_1 = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad ; \quad A_2 = -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \quad ; \quad A_3 = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

resulta: $A_1 (x_1 - a_1) + A_2 (x_2 - a_2) + A_3 (x_3 - a_3) = 0$; o, también:

$$\boxed{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 = 0}$$

☜ Ecuación *general o cartesiana* del plano π

Dos observaciones antes de seguir

1ª: Ni se te ocurra memorizar los valores de los coeficientes y él término independiente de la ecuación anterior; ya verás en un próximo ejemplo cómo proceder en la práctica.

2ª: Si en la ecuación de una recta no pueden ser nulos todos los v_i, porque ello supondría que habríamos tomado el vector nulo como vector de dirección, aquí nos encontramos con que no pueden ser nulos todos los A_i. ¿Por qué?

Recíprocamente, ¿formarán un plano todos los puntos cuyas coordenadas verifiquen una ecuación como la anterior? Pues sí. Supón (por suponer algo) que $A_1 \neq 0$. Entonces, $A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 = 0$ equivale a:

$$x_1 = -\frac{A_4}{A_1} - \frac{A_2}{A_1} x_2 - \frac{A_3}{A_1} x_3$$

que también se puede escribir:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{A_4}{A_1} - \dfrac{A_2}{A_1}\lambda - \dfrac{A_3}{A_1}\mu \\ x_2 = 0 + \lambda + 0 \\ x_1 = 0 + 0 + \mu \end{cases}$$

lo que significa que tales puntos forman el plano definido por el punto A de coordenadas $(-\frac{A_4}{A_1}, 0, 0)$ y los vectores $\mathbf{v} = (-\frac{A_2}{A_1}, 1, 0)$ y $\mathbf{w} = (-\frac{A_3}{A_1}, 0, 1)$.

Ejemplo

El plano definido por el punto A(2, 3, 1) y los vectores $\mathbf{v}(2, 0, 3)$, $\mathbf{w}(1, 4, 5)$ tendrá las siguientes ecuaciones:

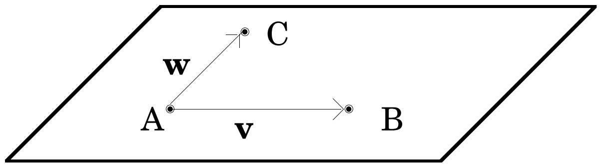
Vectorial: ➟ $(x, y, z) = (2,3,1) + \lambda\,(2,0,3) + \mu\,(1,4,5)$

Paramétricas: ➟ $\begin{cases} x = 2 + 2\lambda + \mu \\ y = 3 + 4\mu \\ z = 1 + 3\lambda + 5\mu \end{cases}$

General: ➟ $\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$, es decir: $12x + 7y - 8z - 37 = 0$

Plano definido por tres puntos

Como dijimos, un plano π también queda determinado por tres puntos no alineados A, B y C. Para obtener su ecuación vectorial bastará con pensar que π es el plano definido, por ejemplo, por el punto A y los vectores **AB**, **AC**.



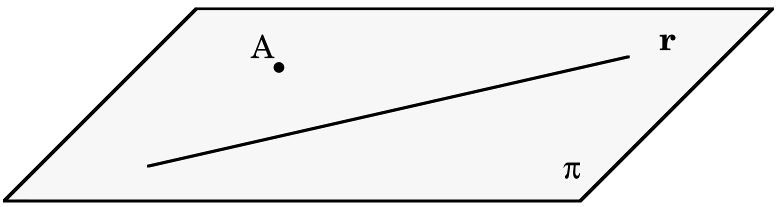
Se tendrá, pues: ➟ **OX** = **OA** + λ **AB** + μ **AC**

La ecuación general, conocidas las coordenadas de A, B y C, la podrás obtener desarrollando la igualdad:

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Observación

No es por apabullarte, pero la verdad es que existen varias formas más de determinar un plano. Así, por ejemplo, aunque más adelante volveremos sobre ello, ¿cómo te apañarías, ahorita mismo, para obtener la ecuación del plano de la siguiente figura, determinado por la recta **r** y un punto A que no pertenece a **r** ?



Te ofrecemos uno de los varios procedimientos, para que no digas: Si la recta está dada por unas ecuaciones paramétricas o continuas, te será inmediato obtener dos puntos de ella. Esos dos puntos, con el punto A, te permitirán aplicar lo visto antes.

Posición relativa de dos planos

Para estudiar las posiciones relativas de dos planos haremos un estudio similar, utilizando el teorema de Rouché, al que hicimos en el caso de dos rectas, pues el que dos planos π , π', de ecuaciones $A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 = 0$, $A'_1 x_1 + A'_2 x_2 + A'_3 x_3 + A'_4 = 0$, respectivamente, tengan una u otra posición relativa dependerá de que ambos posean o no puntos en común; y, en el primer caso, de cuántos sean éstos. Lo cual se analiza, como sabes, estudiando el sistema

$$\left.\begin{array}{l} A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 = 0 \\ A'_1 x_1 + A'_2 x_2 + A'_3 x_3 + A'_4 = 0 \end{array}\right\}$$

En consecuencia, siendo:

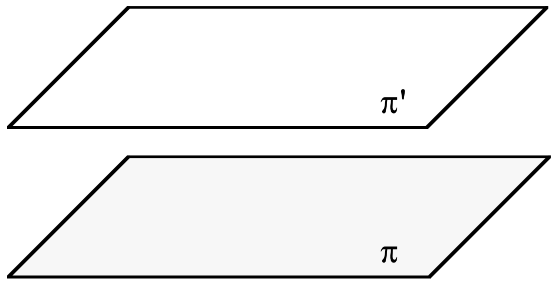
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & -A_4 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 & -A'_4 \end{pmatrix}$$

los casos posibles son:

1.- Rango de A* = 2

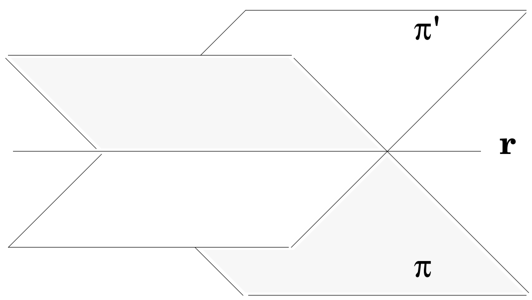
1.1 Rango de A = 1

El sistema es incompatible y los planos son *paralelos,* no tienen ningún punto común. Observa que los coeficientes de las x_i en las dos ecuaciones son proporcionales; cosa que no ocurre con los términos independientes.



1.2 Rango de A = 2

Sistema compatible indeterminado. Los dos planos *se cortan en una recta,* pues tienen infinitos puntos comunes y son planos distintos. (Si piensas que dos planos distintos pueden tener infinitos puntos comunes sin cortarse en una recta, espera a algo que haremos más adelante .)



2.- Rango de A* = 1

2.1 Rango de A = 1

El sistema es compatible indeterminado y ambas ecuaciones (cuyos coeficientes y términos independientes son proporcionales) son equivalentes. Los planos son *coincidentes*.

Observaciones

El caso en el que los planos π y π' se cortan según una recta tiene un interés especial, ya que una nueva forma de *dar* una recta consistirá en escribir las ecuaciones de dos planos que se corten en ella. En ese supuesto, es decir, dada una recta **r** como intersección de los planos, se pueden plantear dos preguntas:

① *¿Cómo obtener una ecuación continua de **r**?*

② *¿De qué forma será la ecuación de cualquier otro plano que contenga a **r**?*

Veamos cuáles son las respuestas.

Ecuación continua de una recta dada como intersección de dos planos

Supongamos que una recta **r** viniera dada como intersección de dos planos:

$$\mathbf{r}:\begin{cases} \pi: & A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0 \\ \pi': & A'_1x_1 + A'_2x_2 + A'_3x_3 + A'_4 = 0 \end{cases}$$

Como algún menor de orden 2 de la matriz de los coeficientes del sistema anterior ha de ser no nulo (pues el rango de tal matriz es 2), podremos asegurar que, por ejemplo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A'_1 & A'_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Resolviendo el sistema se llega, tras algunos cálculos, a que sus soluciones están constituidas por todos los puntos (x_1, x_2, x_3) tales que:

$$\frac{x_1 - a_1}{\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ A'_2 & A'_3 \end{vmatrix}} = \frac{x_2 - a_2}{-\begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ A'_1 & A'_3 \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A'_1 & A'_2 \end{vmatrix}}$$

donde $a_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} A_2 & A_4 \\ A'_2 & A'_4 \end{vmatrix}}{\Delta}$; $a_2 = \dfrac{-\begin{vmatrix} A_1 & A_4 \\ A'_1 & A'_4 \end{vmatrix}}{\Delta}$, respectivamente.

O sea, que las soluciones del sistema (los puntos comunes a los dos planos) forman una recta, como sabíamos, de la cual tendremos una ecuación continua.

✍ Te recomendamos que en la práctica, para hallar una ecuación continua de **r**, en lugar de memorizar las formulitas anteriores, obtengas un punto arbitrario de ella -basta con dar un valor cualquiera a una de las x_i en las ecuaciones de π y π' y obtener el valor de las otras dos- y utilices, de lo que hemos hecho, las coordenadas de un vector de dirección. Mira el siguiente ejemplo.

Ejemplos

① Para hallar una ecuación continua de la recta:

$$\mathbf{r}: \begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y + z - 8 = 0 \end{cases}$$

bastará con obtener un punto de ella, ya que el vector:

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right),$$

o sea, el (4, -3, 5), es uno de sus vectores de dirección.

Pero dado que en la recta **r** se hallan todos los puntos cuyas coordenadas (x, y, z) son solución del sistema:

$$\left. \begin{matrix} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y + z - 8 = 0 \end{matrix} \right\}$$

si damos a x un valor arbitrario, x = 2, por ejemplo, obtendremos y = 1, z = 3, lo cual indica que el punto (2, 1, 3) pertenecerá a **r**.

En consecuencia, la ecuación:

☞ $$\boxed{\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{5}}$$

será una ecuación continua de **r**.

Advertencia: Si el menor correspondiente a las incógnitas y, z del sistema anterior hubiera sido nulo, no habríamos podido obtener los valores de y, z a partir de un valor arbitrario de x. Para hallar, en tal caso, un punto de **r**, tendríamos que haber partido de un valor cualquiera de y o de z.

② El problema recíproco del anterior, es decir, la obtención de las ecuaciones de dos planos que se corten en una recta de la que se conozca una ecuación continua, es muy fácil de resolver. Así, supongamos que se desea hallar dos planos cuya intersección sea la recta de ecuación continua:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-6}{5}$$

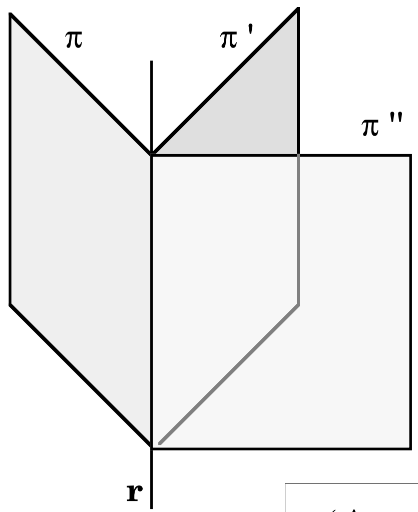
Bastará con descomponer las igualdades precedentes en éstas: $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{3} \\ \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{z-6}{5} \end{cases}$

es decir, en: $\begin{cases} 3x - 2y - 11 = 0 \\ 5x - 2z - 3 = 0 \end{cases},$

para tener resuelta la cuestión.

Haz de planos

Habíamos planteado, líneas atrás, otra cuestión: Cuál sería la ecuación de cualquier otro plano π'' que, como el de la figura, contuviera a una recta **r**, dada como intersección de dos planos π y π'.



$$\mathbf{r}:\begin{cases} \boldsymbol{\pi}: \; A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0 \\ \boldsymbol{\pi}': \; A'_1x_1 + A'_2x_2 + A'_3x_3 + A'_4 = 0 \end{cases}$$

Observa que π'' habrá de poseer una ecuación que añadida a las del sistema precedente, dé lugar a un sistema con las mismas soluciones; es decir, una ecuación que sea combinación lineal de las de π y π'.

Por consiguiente, todo plano que contenga la recta en la que se cortan π y π' tendrá una ecuación de la forma:

$$\boxed{\alpha(A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4) + \beta(A'_1x_1 + A'_2x_2 + A'_3x_3 + A'_4) = 0}$$

Naturalmente, al ir variando α y β se van obteniendo los infinitos planos que contienen a **r**. El conjunto de todos ellos se llama *haz de planos* definido por la recta **r**.

Ejemplos

① Para hallar la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$\mathbf{r}:\begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y + z - 8 = 0 \end{cases}$$

y pasa por el punto A(2, 0,1), bastará con pensar que tal plano, por pertenecer al haz definido por los dos anteriores, tendrá una ecuación de la forma:

$$\alpha.(2x + y - z) + \beta.(x + 3y + z - 8) = 0,$$

habiendo de tomar α, β valores para los que la correspondiente ecuación sea satisfecha por las coordenadas, (2, 0,1), del punto A.

Habrá de ser, por tanto, $\alpha - 5\beta = 0$.

Todos los α, β que cumplan $\alpha = 5\beta$ proporcionarán la ecuación buscada. Haciendo $\beta = 1$, por ejemplo, será $\alpha = 5$, y sustituyendo tales valores en la ecuación anterior, se tendrá que el plano buscado es el:

$$11x + 8y - 4z - 18 = 0.$$

② Comprueba, aplicando el procedimiento anterior, que la ecuación del plano que contiene al eje OX y al punto (3, 1, 2) es $2y - z = 0$.

Posiciones relativas de una recta y un plano

Para estudiar las posiciones relativas de una recta **r** y un plano π, ya puedes imaginarte lo que habrá que hacer. Supuesta dada **r** en la forma:

$$\begin{cases} A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0 \\ A'_1x_1 + A'_2x_2 + A'_3x_3 + A'_4 = 0 \end{cases}$$

y siendo el plano π: $$A''_1x_1 + A''_2x_2 + A''_3x_3 + A''_4 = 0$$

bastará con estudiar el sistema formado por las tres ecuaciones anteriores. Pero consideradas las matrices:

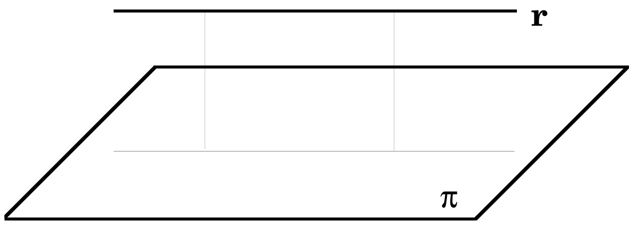
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 \\ A''_1 & A''_2 & A''_3 \end{pmatrix} \quad , \quad A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 & A'_4 \\ A''_1 & A''_2 & A''_3 & A''_4 \end{pmatrix}$$

y no poder ser igual a 1 ni el rango de A* ni el de A (¿por qué?), los casos posibles son:

1.- Rango de A* = 3

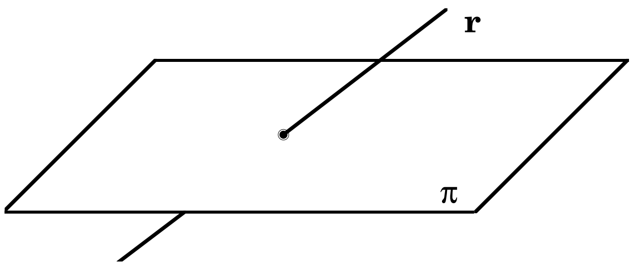
1.1 Rango de A = 2

El sistema de ecuaciones es incompatible y la recta y el plano, que no tienen ningún punto común, son *paralelos*.



1.2 Rango de A = 3

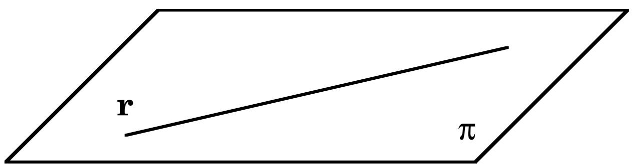
El sistema es compatible determinado. La recta y el plano *se cortan en un punto,* cuyas coordenadas pueden obtenerse resolviendo el sistema.



2.- Rango de A* = 2

2.1 Rango de A = 2

El sistema es compatible indeterminado y la recta y el plano tienen infinitos puntos comunes. *La recta está contenida en el plano.*



Ejemplo

Cuando la recta **r** venga dada en la forma paramétrica la discusión se simplifica bastante. Así, por ejemplo, si se desea conocer la posición relativa de la recta **r**:

$$\mathbf{r}:\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

y el plano: $\pi : 2x + y - z - 4 = 0,$

la cuestión se reducirá a averiguar si existe algún valor del parámetro t para el que los valores de x, y, z de la ecuación de **r**, verifiquen la de π. Esto es, tal que:

$$2(1 + 2t) + (2 + t) - (3 + 2t) - 4 = 0$$

ecuación que se cumple para t = 1, y sólo para ese valor. La recta y el plano se cortarán en el punto de coordenadas (3, 3, 5).

(Si la última ecuación no hubiera tenido solución, la recta y el plano habrían sido paralelos; si hubiera tenido infinitas, la recta habría estado contenida en el plano)

Comentario final

Antes de terminar nos gustaría que reflexionaras sobre la relación existente entre los conceptos geométricos estudiados y los espacios vectoriales; que vieras en su conjunto todo lo que hemos analizado.

La ecuación de una recta en el plano (espacio afín de dimensión 2) es del tipo: $A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 = 0$. La ecuación de un plano en el espacio (espacio afín de dimensión 3) es del tipo: $A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 = 0$. Ambas ecuaciones tienen la misma característica: Constituyen una relación lineal entre las coordenadas (2 en el primer caso; 3 en el segundo) de los puntos del espacio afín que forman dichos conjuntos. Un punto en el plano viene determinado por la intersección de 2 rectas no paralelas; y una recta en el espacio, por la intersección de 2 planos no paralelos. En el espacio, un punto puede darse como intersección de 3 planos.

Recordarás que los subespacios vectoriales se definen frecuentemente a través de relaciones lineales entre las coordenadas de sus vectores. Si aparece una relación, la dimensión del subespacio es una unidad menor que la del espacio en el que esté contenido; si son dos las relaciones, la dimensión del subespacio disminuye en dos unidades; y si en tres, en tres, y así sucesivamente. Por otra parte, la recta y el plano se pueden considerar espacios vectoriales de dimensión 1 y 2 respectivamente y no hay problema en considerar un punto (aunque en rigor sólo lo sea el origen de coordenadas) como un espacio vectorial de dimensión 0. Con todo lo cual, el paralelismo de los conceptos queda más que justificado.

Avanzando un "pelín" más, podríamos establecer las siguientes conclusiones:

1ª) Tanto desde el punto de vista geométrico como desde el algebraico o analítico, la recta juega, respecto del plano el mismo papel que el plano respecto del espacio. Papel que queda claramente reflejado en la definición algebraica (**una** ecuación) de una y otro.

2ª) Teniendo en cuenta la conclusión anterior y el hecho de que los puntos aparecen como intersección de 2 rectas (2 ecuaciones) en el caso del plano (dimensión 2) y de 3 planos (3 ecuaciones) en el caso del espacio (dimensión 3), generalizamos estos resultados de la siguiente forma:

En un espacio de dimensión **n** ($\mathbf{R}^n$, por ejemplo), **una** relación lineal entre las coordenadas de los puntos del tipo $A_1 x_1 + A_1 x_1 + ... + A_n x_n + A_{n+1} = 0$ constituye lo que se llama un *hiperplano,* espacio de dimensión n-1. Sus puntos vendrán dados como intersección de n hiperplanos, y así sucesivamente. *Nuestras rectas y planos no son otra cosa que hiperplanos en los espacios de dimensión 2 y 3, respectivamente.*

7. EJERCICIOS

1.- En el espacio afín E^3 se considera un sistema de referencia $S = \{O, \mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC}\}$. Obtén las coordenadas de los vectores **AB**, **AC** y **BC** en la base que forma parte de S.

2.- Siendo A, B, C y D cuatro puntos no coplanarios, se considera el sistema de referencia $S = \{A, \mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD}\}$ y el punto M de coordenadas (x, y, z) en S. Obtén las coordenadas de M respecto del sistema $S' = \{B, \mathbf{BA}, \mathbf{BC}, \mathbf{BD}\}$.

3.- De un paralelogramo ABCD se conocen los vértices A(3, 5, 2), B(4, 2, 0) y C(7, 6, 5). Halla las coordenadas del cuarto vértice.

4.- Halla los vértices C y D de un paralelogramo del que A(1, -1, 2), B(2, 3, -4) son dos vértices consecutivos y M(3, 1, 0) el centro.

5.- Halla las coordenadas de los puntos que dividen un segmento AB en 3 partes iguales.

6.- Demuestra que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera determinan un paralelogramo.

7.- Sabiendo que el centro de gravedad de un triángulo coincide con el baricentro, o punto donde se cortan las medianas, expresa sus coordenadas en función de las coordenadas de los vértices del triángulo.

8.- Los puntos A(2, -1, -1), B(-1, 3, 2) y C(x, y, 3) están alineados. Calcula x e y.

9.- Escribe unas ecuaciones paramétricas y continua de la recta que contiene los tres puntos del ejercicio anterior.

10.- Se considera el sistema de referencia $S = \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, donde O es el vértice de un cubo de arista unidad y los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ los determinados por las aristas del cubo concurrentes en O. Halla unas ecuaciones paramétricas de:

a) Las diagonales del cubo.

b) Las rectas determinadas por O y los puntos medios de las aristas que concurren en el vértice opuesto a O.

c) Las rectas determinadas por el vértice opuesto a O y los puntos medios de las aristas que concurren en O.

d) Las rectas determinadas por O y los centros de las caras que pasan por O.

11.- Halla el punto simétrico del A(4, -2, 6) respecto del M(2, 3, 5).

12.- Estudia la posición relativa de las rectas de ecuaciones:

$$\mathbf{r}: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{5} \qquad \mathbf{s}: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = 3t \end{cases}$$

13.- Las rectas $\mathbf{r}: \frac{x}{2} = \frac{y}{a} = \frac{z}{4}$; $\mathbf{s}: \frac{x+1}{b} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-7}{2}$ son paralelas. Halla a y b.

14.- Los puntos A(1,2,0), B(5,3,0), C(2,6,0) y D(3,4,3) son los vértices de un tetraedro. Comprueba que los puntos medios de los segmentos AB, BD, DC y CA forman un paralelogramo.

15.- Halla el valor que debe tomar *k* para que se corten las rectas de ecuaciones:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-k}{3}=\frac{z}{-1}\ ;\ \frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{3}$$

y, posteriormente, halla la ecuación del plano definido por ambas.

16.- Halla unas ecuaciones cartesianas de los siguientes planos:

1º) El que pasando por el punto A(2,5,1) contiene a la recta **r** del ejercicio 12.

2º) El que contiene a la recta x = 2t ; y = 7 - t ; z = 3 y es paralelo al eje OY.

17.- Obtén una ecuación continua de la recta determinada por los planos de ecuaciones:

$$x + 2y - z + 7 = 0\ ;\ 4x - y + 2z - 5 = 0.$$

18.- La recta que pasa por el punto P(2,1,0) con vector de dirección **v**(-3,1,2), tiene un segmento comprendido entre los planos x + 2y - z - 2 = 0, x + 2y - z - 6 = 0. Halla los extremos de dicho segmento.

19.- Escribe unas ecuaciones cartesianas de los siguientes planos:

1º) El determinado por la recta x = y = z y el punto A(0,2,3).

2º) El paralelo a las rectas **r**: x = y = z; **s**: x - 6 = 6y = 2z por el punto P(1,1,3).

3º) El que contiene los puntos A(2,3,2), B(-1,3,-4) y es paralelo a la recta **r** de ecuación: x = 3 + 2t ; y = 5 - 6t ; z = 1 + t.

20.- Obtén una ecuación del plano simétrico del π: x + y + z = 0 respecto del punto P(1,1,1)

21.- Halla una ecuación continua de la recta que siendo paralela a la definida por los planos 4x + y + 6z = 7 , x - 3z = 4, pasa por el punto (3,2,6).

22.- Estudia la posición relativa de:

1º) La recta $\mathbf{r}: \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-4}{1}$ y el plano π : 2x + y - 5z = 0

2º) El plano π y la recta **s** : x = 3 - 2t ; y = 1 - t ; z = 2 + t .

3º) Las rectas **r** y **s**.

23.- ¿Existe algún valor de *a* para el cual la recta definida por los planos π : -x + y - 2z = 1, π': -2x - y + 5 z = 1 sea paralela al plano π'': ax + y - z = 2?

24.- ¿Existen valores de *a* y *b* tales que la recta definida por los planos: x = ay ; y + z = 1 esté contenida en el plano 2x - 3 y + z = b ?

25.- Estudia la posición relativa, según los valores de *a* y *b*, del plano π: 2x - 5y + az = -2 y la recta $\mathbf{r}:\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = b \end{cases}$.

26.- Determina las condiciones que han de cumplir *a* y *b* para que los planos de ecuaciones $x - 2z = 0$, $y - z = 1$, $ax + by + z = 1$ se corten en un punto. Halla también el lugar geométrico de los puntos de corte (es decir, el conjunto formado por tales puntos).

27.- Se consideran la recta $\mathbf{r}: \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x + y + mz + n = 0$. Tienes que calcular los valores de *m* y *n* a fin de que:

1º) La recta corte al plano en un punto.

2º) La recta sea paralela al plano

3º) La recta esté contenida en el plano.

28.- Dibuja la recta que pasa por los puntos A y B de coordenadas (5,6,5) y (2,0,2), respecto del sistema del ejercicio 10, y las rectas proyecciones de ella sobre los planos coordenados. Obtén una ecuación de cada una de las cuatro rectas dibujadas.

29.- Obtén una ecuación de la recta que pasa por el punto A(1,-1,0) y se apoya (corta) en las rectas:

$$\mathbf{r}: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}; \quad \mathbf{s}: \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

30.- Obtén una ecuación continua de la recta que cortando al eje OX y a la recta **r** de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$, pasa por el punto A(2,-3,1).

31.- Obtén unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a las rectas **r**: $x = 2y = z - 1$; **s**: $3x = 2y - 2 = 6z$.

32.- Estudia las posiciones relativas de los siguientes grupos de tres planos:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ x - 2y + 2z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ x = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 4x + 5y - 2z = 1 \end{cases}$$

33.- Halla el valor que han de tomar *a* y *b* para que los planos de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + by + z &= 1 \\ 2x + ay - z &= b \\ x - y + z &= a \end{aligned}$$

contengan una misma recta. Determina, así mismo, otro plano que contenga esa recta y el punto A = (1,0,1)

34.- Dadas las rectas: $\mathbf{r}: \begin{cases} x + 3z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$, $\mathbf{s}: x = y = z$, calcula la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos que tienen un extremo en la primera y otro en la segunda. ¿Qué relación hay entre este lugar geométrico y las rectas dadas?

TEMA 5

EL ESPACIO EUCLÍDEO

1. INTRODUCCIÓN

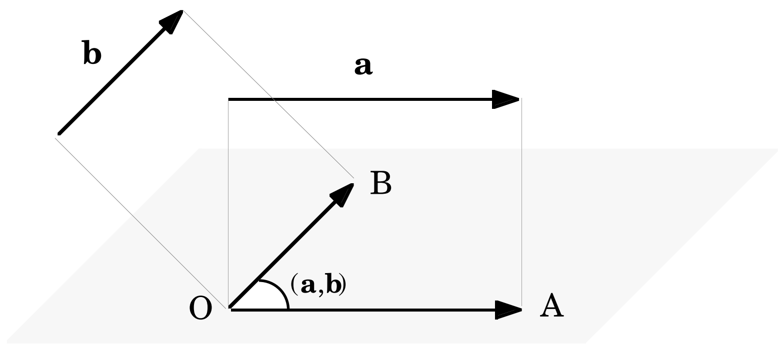
Como decíamos al comienzo del capítulo anterior, en éste vamos a estudiar problemas de los llamados métricos, es decir, problemas relativos a la medición de *cosas:* ángulos entre rectas y planos, distancias entre puntos y rectas, etc.

Empezaremos definiendo la operación que permite resolver tales cuestiones: el producto escalar. Ocurre a menudo en matemáticas que, enfrentados a la necesidad de definir algo nuevo, las posibilidades *a priori* son múltiples; y sólo cuando se quiere llegar a resultados concretos aparecen condiciones que obligan a definir los conceptos de una forma determinada; eso sucede con el producto escalar en el espacio, que no será sino una generalización del que ya conoces en el plano. Terminaremos el tema definiendo los productos vectorial y mixto y viendo algunas de sus aplicaciones.

2. PRODUCTO ESCALAR

Definición (de ángulo de dos vectores)

☞ Se define el *ángulo* formado por dos vectores libres no nulos **a** y **b**, al que designaremos por $(\mathbf{a},\mathbf{b})$, como el ángulo que forman dos representantes **OA** y **OB** de dichos vectores tomados con un mismo origen.



¿Serías capaz de demostrar que el ángulo $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ no se modifica al cambiar de representantes?

Definición (de producto escalar)

☞ Dados dos vectores libres no nulos, **a** y **b**, de V^3, se define el *producto escalar* de **a** y **b**, que representaremos mediante $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}$, como el número que resulta de multiplicar el módulo de **a** por el módulo de **b** por el coseno del ángulo que forman **a** y **b**. O sea:

$$\boxed{\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}|.\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})}$$

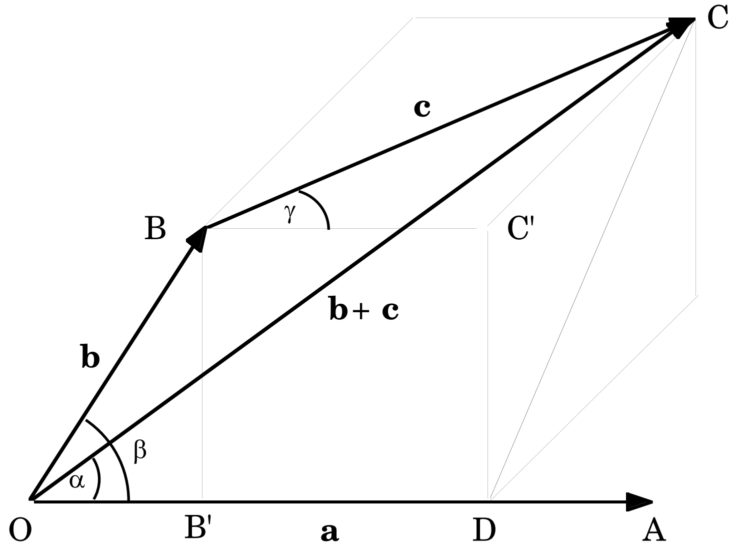
☞ Si **a** ó **b** son nulos, se define $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = 0$

Propiedades del producto escalar

Cualesquiera que sean los vectores libres **a**, **b** de V^3 y el número real λ, se verifican las siguientes propiedades:

①	Conmutativa:	$\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = \mathbf{b}\,.\,\mathbf{a}$
②	Distributiva:	$\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} + \mathbf{a}\,.\,\mathbf{c}$
③	Pseudoasociativa:	$(\lambda.\mathbf{a})\,.\,\mathbf{b} = \lambda.(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}) = \mathbf{a}\,.\,(\lambda.\,\mathbf{b})$
④	Positividad:	$\mathbf{a}\,.\,\mathbf{a} \geq 0$

Para demostrar la propiedad distributiva, única un poco complicada, observa la siguiente figura, que corresponde al caso más general, en el que ninguno de los vectores **a**, **b**, **c**, **b** + **c** es nulo:



Se tendrá:

$$\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}+\mathbf{c}|.\cos\alpha = |\mathbf{a}|.|\mathbf{OD}| = |\mathbf{a}|.(|\mathbf{OB'}|+|\mathbf{BC'}|) =$$
$$= |\mathbf{a}|.|\mathbf{OB'}| + |\mathbf{a}|.|\mathbf{BC'}| = |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}|.\cos\beta + |\mathbf{a}|.|\mathbf{c}|.\cos\gamma = \mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} + \mathbf{a}\,.\,\mathbf{c}$$

Consecuencia

Interesa destacar que de la definición de producto escalar y de la cuarta propiedad anterior se deduce que *el módulo de un vector es la raíz cuadrada del producto escalar de dicho vector por sí mismo:*

$$\boxed{|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\,.\,\mathbf{a}}}$$

Definición (de vectores ortogonales)

☞ Diremos que dos vectores no nulos **a** y **b** son *ortogonales o perpendiculares,* y escribiremos $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, si el ángulo que forman es de 90° ó de 270°.

Te resultará evidente que: ➪ $\boxed{\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \,.\, \mathbf{b} = 0}$

criterio que resultará muy útil para averiguar si dos vectores son ortogonales.

Definición (de base ortonormal)

Como sabes, los vectores se dan habitualmente a través de sus coordenadas respecto de una base, de modo que de poco serviría el producto escalar si no supiéramos calcularlo a partir de ellas, ¿no?

Supongamos dados, pues, una base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ y dos vectores **a** y **b** de coordenadas (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3), respectivamente.

En virtud de las propiedades del producto escalar, podremos escribir:

$$\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b} = (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \,.\, (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) =$$

$$= a_1 b_1 \,.\, \mathbf{e}_1^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1).\mathbf{e}_1 \,.\, \mathbf{e}_2 + (a_1 b_3 + a_3 b_1).\mathbf{e}_1 \,.\, \mathbf{e}_3 + (a_2 b_3 + a_3 b_2).\mathbf{e}_2 \,.\, \mathbf{e}_3 +$$

$$+ a_2 b_2 \,.\, \mathbf{e}_2^2 + a_3 b_3 \,.\, \mathbf{e}_3^2.$$

Y habremos *trasladado* el producto $\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b}$ al producto de los vectores de la base.

Observa que los cálculos se facilitarían bastante si a la hora de elegir tal base:

① Los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ fueran unitarios, o sea, de módulo 1.
② Los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ fueran ortogonales dos a dos.

pues en tal caso los productos $\mathbf{e}_i \,.\, \mathbf{e}_j$ $(i \neq j)$ serían nulos y los $\mathbf{e}_i^2$ iguales a la unidad.

☞ A tal tipo de base la llamaremos base *ortonormal,* y utilizaremos habitualmente los símbolos $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ para designar sus vectores.

Expresión analítica del producto escalar

Si la base utilizada es ortonormal, sustituyendo en la expresión anterior del producto escalar $\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b}$ cada $\mathbf{e}_i^2$ por 1 y cada $\mathbf{e}_i \,.\, \mathbf{e}_j$ $(i \neq j)$ por 0, resulta:

Expresión analítica del producto escalar. ➪ $\boxed{\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$

Cómo calcular un vector perpendicular a otro.

Con frecuencia se presentan situaciones en las que hay que obtener un vector perpendicular a otro previamente dado. Teniendo en cuenta la expresión anterior y el hecho de que para que dos vectores sean ortogonales basta con que su producto escalar sea cero, el problema puede resolverse con un *truco* la mar de fácil:

Si queremos hallar un vector **b** perpendicular al $\mathbf{a} = (3, 2, 5)$, pongamos por caso, basta con que escribamos una de las coordenadas de **b**, la primera por ejemplo, nula. Después, con cambiar el orden de las coordenadas segunda y tercera de **a**, cambiar una de ellas de signo y adjudicárselas a **b**, tendremos el asunto resuelto. El vector (0, -5, 2) es perpendicular al (3, 2, 5).

Cálculo del módulo de un vector

Si **a** es un vector de coordenadas (a_1, a_2, a_3) respecto de una base ortonormal se tendrá:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 ,$$

de donde: ➠

$$\boxed{|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

Cálculo del ángulo de dos vectores

Si, ahora, quisiéramos calcular el ángulo formado por dos vectores **a** y **b** , de coordenadas (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) respecto de una base ortonormal, bastaría recordar que:

$$\cos\,(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| . |\mathbf{b}|}$$

para, en virtud de lo anterior, poder escribir:

$$\boxed{\cos\,(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}}$$

Observación

Como ves, el disponer de una base ortonormal facilita extraordinariamente los cálculos. La única cuestión que quedaría por resolver sería si dada una base cualquiera se podrá construir a partir de ella otra ortonormal. Nos limitaremos a decirte que quizás hayas de estudiar en el futuro el llamado método de Graham-Schmidt, que, efectivamente, permite resolver la cuestión. Por nuestra parte, te advertimos que de ahora en adelante y salvo aviso en contra, *utilizaremos siempre bases ortonormales*.

3. EL ESPACIO EUCLÍDEO

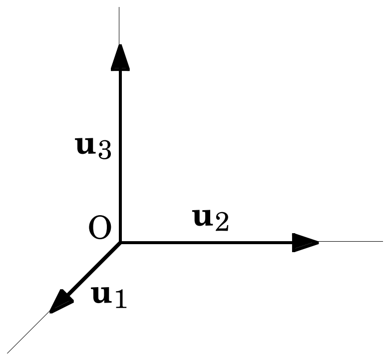
Como recordarás, en el capítulo anterior partimos de un conjunto de puntos, el espacio E, y mediante una sencilla definición construimos el conjunto de vectores V^3; establecimos una correspondencia entre puntos y vectores y a toda la estructura así creada la llamamos espacio afín E^3. Ahora hemos definido en V^3 el producto escalar, y, debido a ello, diremos que V^3 es un espacio vectorial *euclídeo.*

Por otra parte, cuando en el espacio vectorial asociado a un espacio afín se define un producto escalar, el espacio afín se llama espacio afín *euclídeo* o simplemente espacio *euclídeo,* por lo que ésta será la expresión que nosotros utilizaremos de ahora en adelante para referirnos a E^3.

Definición (de sistema de referencia métrico)

☞ Se llama sistema de referencia *métrico,* o simplemente sistema métrico, a todo sistema de referencia $S = \{ O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ en el que la base sea ortonormal.

Así, el sistema representado en la figura de la derecha es un sistema métrico, supuesto que los vectores que en ella aparecen son unitarios.



Distancia entre dos puntos

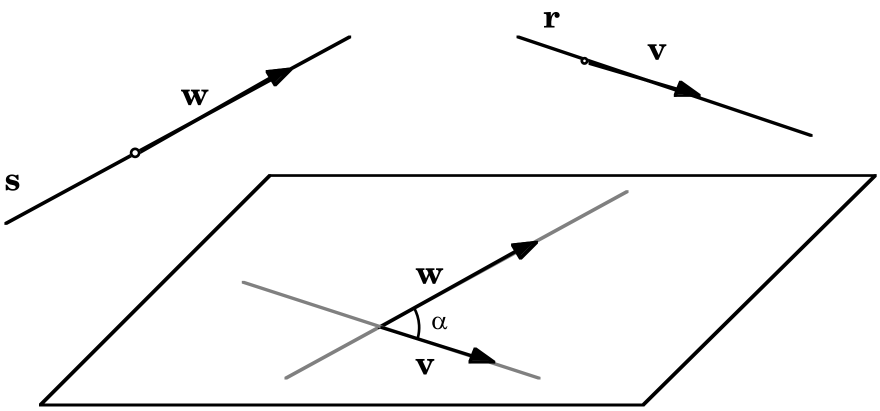
Es el más sencillo de los problemas métricos. Supongamos que se desea calcular la distancia entre dos puntos $A\,(a_1, a_2, a_3)$ y $B\,(b_1, b_2, b_3)$. Como esa distancia coincide con el módulo del vector **AB**, cuyas coordenadas son $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, se tendrá:

$$\boxed{d\,(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}}$$

Ángulo de dos rectas

Al contrario de lo que sucede en el plano, en el espacio dos rectas no paralelas pueden no tener ningún punto común; sin embargo, aun así tiene sentido el concepto de ángulo formado por ellas.

☞ Se define el ángulo α formado por dos rectas como *el menor de los ángulos que forman sus paralelas por un punto cualquiera.*



Si observas la figura, verás que si **v** y **w** son vectores de dirección de **r** y **s** orientados como en ella, entonces α = (**v**, **w**). Pero si el sentido de uno cualquiera de los vectores de dirección fuera el opuesto, entonces sería α = 180° – (**v**, **w**). Tanto en un caso como en otro se tendrá:

$$\cos \alpha = \left| \cos (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \right|$$

es decir:

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{\left| v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \right|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\,\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}}}$$

supuesto que v_i, w_i $(i = 1, 2, 3)$ son las coordenadas de **v** y **w**, respectivamente.

Cosenos directores

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ los ángulos que forma un vector de dirección de una recta **r** con los vectores del sistema de referencia. Si partiendo de una ecuación continua de **r**:

$$\frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \frac{x_3 - a_3}{v_3}$$

dividimos todos los denominadores por $|\mathbf{v}|$, y tenemos en cuenta que $\cos \alpha_i = \dfrac{v_i}{|\mathbf{v}|}$, se llega a que otra ecuación continua de la recta es:

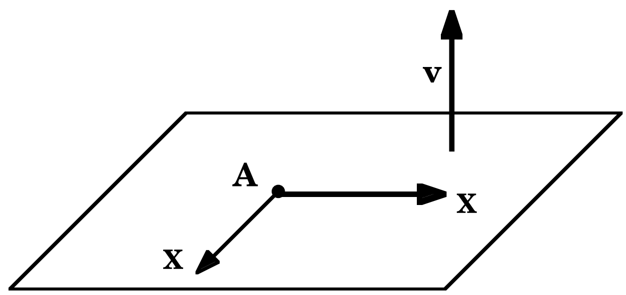
$$\boxed{\frac{x_1 - a_1}{\cos \alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\cos \alpha_2} = \frac{x_3 - a_3}{\cos \alpha_3}}$$

➪ Te *sonará* que en física (y en matemáticas), a estos cosenos se les llama cosenos *directores* de la recta.

Vector característico de un plano

Dado un punto A (a_1, a_2, a_3) y un vector **v** (v_1, v_2, v_3), considera el conjunto de todos los puntos X (x_1, x_2, x_3) tales que **AX** y **v** son ortogonales. Tales puntos verificarán:

$$\mathbf{AX} \cdot \mathbf{v} = 0, \text{ o sea: } v_1(x_1 - a_1) + v_2(x_2 - a_2) + v_3(x_3 - a_3) = 0,$$



relación que constituye la ecuación de un plano π. Diremos que **v** es perpendicular al plano π o que es un vector *característico* de π.

Recíprocamente, ¿se podrán obtener las coordenadas de un vector perpendicular a un plano π a partir de una ecuación general de éste?

Supongamos que la ecuación de π es:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 = 0$$

y que A (a_1, a_2, a_3), B (b_1, b_2, b_3) son dos puntos cualesquiera de él. Se tendrá:

$$A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + A_4 = 0; \qquad A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 + A_4 = 0$$

de donde, restando ambas igualdades:

$$A_1(b_1 - a_1) + A_2(b_2 - a_2) + A_3(b_3 - a_3) = 0$$

lo cual indica que el vector **v** (A_1, A_2, A_3) es perpendicular al **AB** y, por tanto, al plano π.

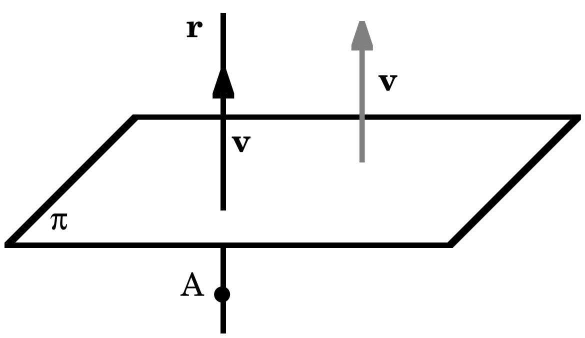
Ejemplo

La ecuación del plano que contiene el punto A(2,-3,1) y es perpendicular al vector **v** (4,5,6) será:

$$4(x - 2) + 5(y + 3) + 6(z - 1) = 0$$

es decir: ➟ $4x + 5y + 6z + 1 = 0.$

Un par de consecuencias



① Para hallar la ecuación de la recta **r** que pasando por un punto es perpendicular a un plano, bastará con tomar como vector director de la recta cualquier vector perpendicular al plano. Así, por ejemplo, si éste tiene por ecuación:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 = 0$$

y el punto es el A (a_1, a_2, a_3), unas ecuaciones paramétricas de la recta **r** serán:

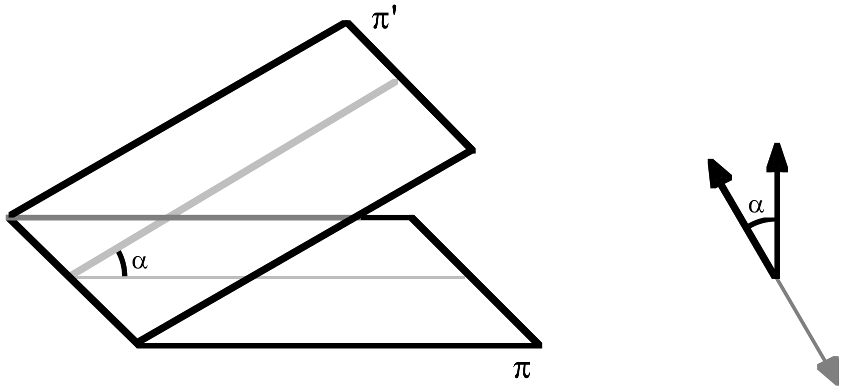
$$x_1 = a_1 + A_1 \lambda, \quad x_2 = a_2 + A_2 \lambda, \quad x_3 = a_3 + A_3 \lambda$$

② También es fácil entender que una recta, de la que **v** (v_1, v_2, v_3) sea un vector de dirección, y un plano, del que **w** (A_1, A_2, A_3) sea un vector característico, serán perpendiculares si y sólo si **v** y **w** tienen la misma dirección, son proporcionales, linealmente dependientes... O sea, si y sólo si:

$$\frac{A_1}{v_1} = \frac{A_2}{v_2} = \frac{A_3}{v_3} \quad (\text{ supuestos los } v_i \neq 0 \text{ }).$$

Ángulo de dos planos

☞ Se entiende por ángulo α formado por dos planos el que forman vectores característicos de ellos **v** y **w**, en el caso de que (**v**, **w**) ≤ 90°, o bien 180° –(**v**, **w**), si (**v**, **w**) > 90°.



El hecho de que, tanto en un caso como en otro, se tenga $\cos\alpha = |\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w})|$, nos permitirá concluir que si los planos tienen por ecuaciones:

$$\begin{aligned} \pi: &\ A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0 \\ \pi': &\ A'_1x_1 + A'_2x_2 + A'_3x_3 + A'_4 = 0 \end{aligned}$$

entonces:

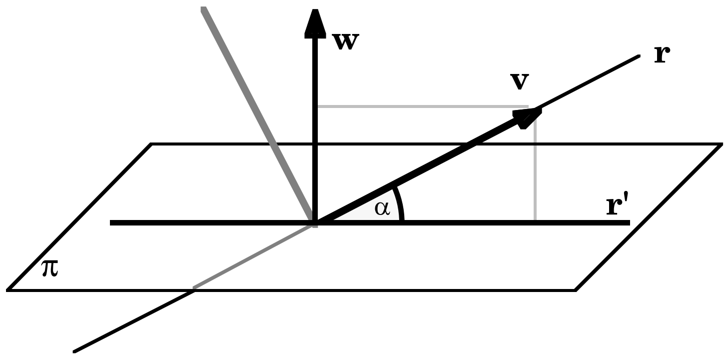
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|A_1A'_1 + A_2A'_2 + A_3A'_3|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}\ \sqrt{A'^2_1 + A'^2_2 + A'^2_3}}}$$

☞ Observa que de lo anterior se desprende que una *condición necesaria y suficiente para que los dos planos sean perpendiculares* es: $A_1A'_1 + A_2A'_2 + A_3A'_3 = 0$.

¿Recuerdas cuál era la condición de perpendicularidad de dos rectas en el plano?

Ángulo de recta y plano

Aunque a la hora de establecerlo podrían considerarse distintas posibilidades, definiremos el ángulo α formado por una recta **r** y un plano π como el que forma la recta dada con su proyección **r'** sobre el plano.



Observa que si **v** es un vector de dirección de la recta y **w** un vector característico del plano, entonces o bien es $\alpha = 90° - (\mathbf{v}, \mathbf{w})$, o bien $\alpha = (\mathbf{v}, \mathbf{w}) - 90°$. Tanto en un caso como en otro, se tendrá $\text{sen}\,\alpha = |\cos(\mathbf{v},\mathbf{w})|$, por lo que si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathbf{w} = (A_1, A_2, A_3)$, será:

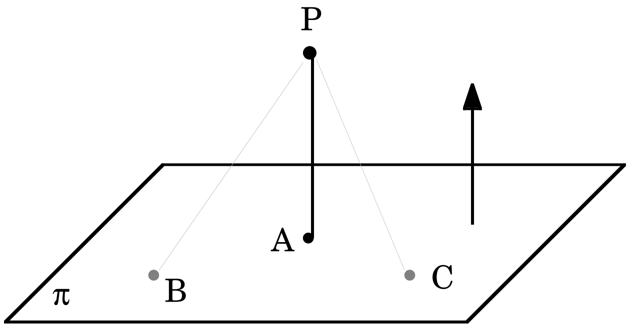
$$\boxed{\text{sen}\ \alpha = \frac{|v_1A_1 + v_2A_2 + v_3A_3|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\ \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}}$$

A la atención del lector

Sería un esfuerzo inútil que memorizaras las fórmulas anteriores. Acabarías mezclando senos, cosenos, vectores directores, característicos... y organizarías un *batiburrillo* digno de un apartado dentro del campo de la Ciencia. Se trata, fundamentalmente, de que manejes correctamente los vectores y su significado geométrico; con ello te bastará para resolver las cuestiones que puedan surgirte.

Distancia de un punto a un plano

Al igual que ocurría en el caso del ángulo entre una recta y un plano, podría pensarse que hay *muchas* distancias entre un punto P (p_1, p_2, p_3) y un plano π: $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$.



Pues bien, definiremos la distancia entre P y π como la existente entre P y el punto A, *pie* de la perpendicular trazada desde P a π.

Llamando (a_1, a_2, a_3) a las coordenadas -desconocidas- del punto A, será:

$$d(P,\pi) = d(P,A) = \sqrt{(a_1 - p_1)^2 + (a_2 - p_2)^2 + (a_3 - p_3)^2}$$

y como el vector **PA** tendrá igual dirección que el (A_1, A_2, A_3), vector característico del plano, se tendrá:

$$a_1 - p_1 = \lambda A_1, \quad a_2 - p_2 = \lambda A_2, \quad a_3 - p_3 = \lambda A_3, \text{ para algún } \lambda \in \mathbf{R}$$

con lo cual:

$$d(P,A) = \lambda \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \qquad (\bullet)$$

Pero A es un punto del plano, luego sus coordenadas satisfarán su ecuación:

$$A_1(p_1 + \lambda A_1) + A_2(p_2 + \lambda A_2) + A_3(p_3 + \lambda A_3) + A_4 = 0$$

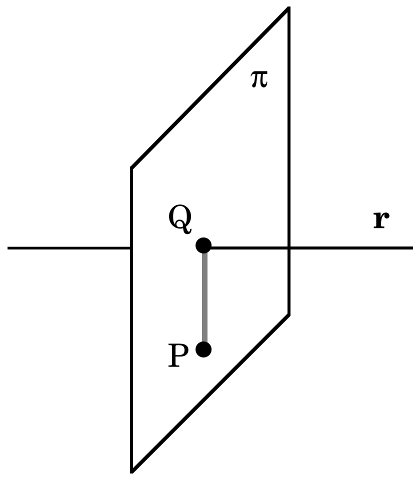
y de ahí, despejando el valor de λ y llevándolo a $(\bullet)$, resulta:

$$\boxed{d(P,\pi) = \frac{|A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}}$$

(El poner las barras de valor absoluto obedece al deseo de evitar que aparezcan distancias negativas, lo cual estaría en contradicción con la idea física que se tiene de *distancia;* sin embargo, y a título de curiosidad, te podemos decir que el signo del numerador anterior, sin las barras, permite saber en cuál de los dos *semiespacios* en los que el plano π divide el espacio E se encuentra el punto P considerado.)

Distancia de un punto a una recta

Entendiendo por distancia entre un punto P y una recta **r** la menor de todas las que resulten de unir P con puntos de **r**, existen varios procedimientos para calcularla. Explicaremos por el momento dos, dejando un tercer método para más adelante.



① El primer procedimiento consiste en obtener el punto Q, intersección de la recta **r** con el plano π que pasa por P y es perpendicular a ella, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de **r** y **π.** La distancia buscada será la que haya entre P y Q. Fácil, como ves.

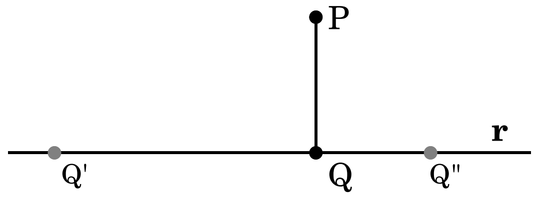
② El segundo procedimiento consiste en partir de unas ecuaciones paramétricas de la recta **r**:

$$x_1 = a_1 + \lambda\, v_1, x_2 = a_2 + \lambda\, v_2, x_3 = a_3 + \lambda\, v_3$$

y fijarse en que el valor de λ correspondiente al punto Q es el único para el que los vectores **PQ** y **v** (v_1, v_2, v_3), vector de dirección de r, son ortogonales; o sea, el único tal que **PQ** . **v** = 0. Obtenido el valor de λ y sustituido en las ecuaciones paramétricas de **r**, se tendrán las coordenadas de Q. La distancia buscada será, como antes, la existente entre P y Q.

Ejemplo

Para hallar la distancia del punto P (7,9,-4) a la recta **r**: $x = 3 + 2\lambda$, $y = 1 + \lambda$, $z = -3\lambda$, obtendremos el único punto Q de **r** tal que **PQ** es ortogonal a **v**(2,1,-3), vector de dirección de **r**.

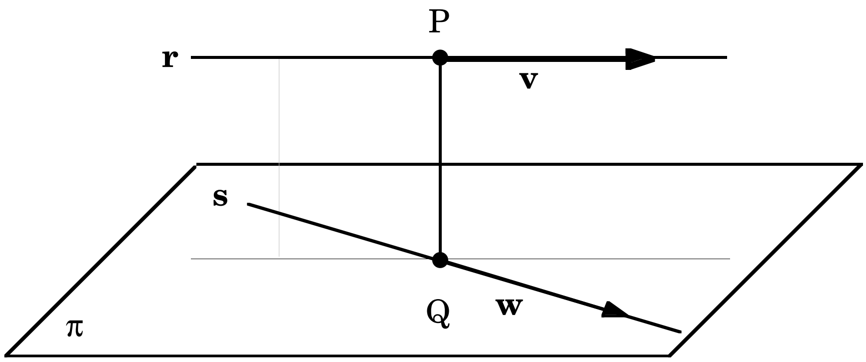


Dado que $Q \in \mathbf{r}$, se tendrá $Q = (3 + 2\lambda, 1 + \lambda, -3\lambda)$, y, por tanto, $\mathbf{PQ} = (2\lambda-4, \lambda-8, -3\lambda+4)$. De $\mathbf{PQ} \perp \mathbf{v}$, se obtiene $\mathbf{PQ} \cdot \mathbf{v} = 2(2\lambda - 4) + 1(\lambda - 8) - 3(-3\lambda + 4) = 0$, es decir, $\lambda = 2$. Por consiguiente, el punto Q es el (7, 3, -6) y la distancia buscada será:

$$d(P, \mathbf{r}) = d(P, Q) = 2\sqrt{10}$$

Distancia entre dos rectas

Con el criterio ya conocido de considerar la mínima posible, definiremos la distancia entre dos rectas **r** y **s** como la longitud del menor de los segmentos que tienen un extremo en una de ellas y el otro en la otra. O, si lo prefieres, como la longitud del único segmento que corta perpendicularmente a las dos, que ambas cosas son equivalentes.



① Una primera forma de calcular dicha distancia consiste en hallar la ecuación del plano π que conteniendo una de las rectas, **s**, por ejemplo, es paralelo a la otra, **r**. Obtenida tal ecuación todo se reduce a calcular la distancia desde cualquier punto de **r** a π.

② Otro procedimiento forma se basa en hallar los únicos puntos puntos P, de **r**, y Q, de **s**, para los que **PQ** es perpendicular tanto a **r** como a **s**. Para ello, basta con expresar las coordenadas de tales puntos mediante las igualdades:

$$p_1 = a_1 + \lambda v_1, \qquad p_2 = a_2 + \lambda v_2, \qquad p_3 = a_3 + \lambda v_3$$
$$q_1 = b_1 + \mu w_1, \qquad q_2 = b_2 + \mu w_2, \qquad q_3 = b_3 + \mu w_3$$

obtenidas de las ecuaciones paramétricas de **r** y **s**, e imponer las condiciones: $\mathbf{PQ} \cdot \mathbf{v} = 0$, $\mathbf{PQ} \cdot \mathbf{w} = 0$. De ellas se obtendrán los valores de λ y μ correspondientes a los puntos P y Q, quedando así resuelto el problema.

Ejemplo

Para calcular la distancia existente entre las rectas:

$$\mathbf{r}: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} \quad ; \quad \mathbf{s}: \begin{cases} x = 5 + 5\beta \\ y = \quad 1 \\ z = 7 - \beta \end{cases}$$

basta hallar los valores de α y β tales que los puntos $P(2+\alpha, 2\alpha, \alpha)$, de **r**, y $Q(5+5\beta, 1, 7-\beta)$, de **s**, dan lugar a un vector **PQ** ortogonal tanto a $\mathbf{v_r}$, vector de dirección de **r**, como a $\mathbf{v_s}$, vector de dirección de **r**. Imponiendo, pues, las condiciones $\mathbf{PQ}\,.\mathbf{v_r} = 0$, $\mathbf{PQ}\,.\mathbf{v_s} = 0$, se obtiene $\alpha = 2$, $\beta = 0$, luego: ⇨ $P = (4, 4, 2)$, $Q = (5, 1, 7)$ y $d(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = d(P, Q) = \sqrt{35}$

4. PRODUCTOS VECTORIAL Y MIXTO

Si bien es cierto que el producto escalar es suficiente para resolver bastantes problemas métricos, también lo es que algunos de tales problemas se simplifican si se establecen otro tipo de operaciones entre vectores, entre ellas el *producto vectorial*. Y como una definición rigurosa del mismo tendría más dificultad que las cuestiones que pretendemos resolver, haremos una pequeña *chapuza* que, sin embargo, podrás presentar en cualquier parte (nosotros, sin ir más lejos, nos atrevemos a presentarla aquí).

Definición (de producto vectorial)

Supongamos fijado en E^3 un sistema de referencia métrico $S = \{O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Si dados dos vectores libres no nulos, de distinta dirección, $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}\,(b_1, b_2, b_3)$, quisiéramos calcular las coordenadas (x_1, x_2, x_3) de otro vector **x** que fuera ortogonal tanto a **a** como a **b**, tendríamos que resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Pero este sistema homogéneo es compatible indeterminado (¿por qué?) y resolviéndolo, se llegaría a que **x** habría de ser necesariamente un vector de la forma:

$$\alpha.\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \quad , \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

En particular, para $\alpha = 1$ se obtiene el vector:

☞ $$\boxed{\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)}$$

al que llamaremos *producto vectorial* de **a** por **b** y representaremos por $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

Consecuencias (módulo, dirección y sentido de a ∧ b)

① A partir de las coordenadas de $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ podemos expresar su *módulo* en función de los módulos de **a** y **b** y del ángulo $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. En efecto, por una parte:

$$(\mathbf{a}.\mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2.|\mathbf{b}|^2.\cos^2(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

y, por otra:
$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2$$

de donde sumando ambas igualdades y efectuando algunos cálculos, se obtiene:

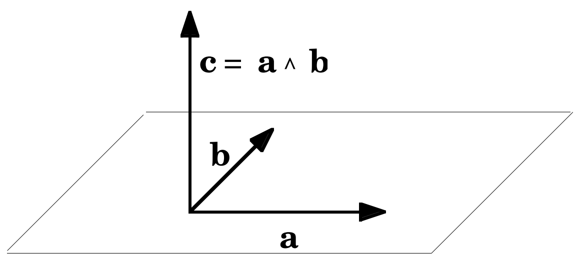
$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}|^2.|\mathbf{b}|^2.\cos^2(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2.|\mathbf{b}|^2 \text{ , es decir :}$$

$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2.|\mathbf{b}|^2.\left[1 - \cos^2(\mathbf{a},\mathbf{b})\right] = |\mathbf{a}|^2.|\mathbf{b}|^2.\ \mathrm{sen}^2(\mathbf{a},\mathbf{b}) \text{ , o sea:}$$

$$\boxed{|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}|.|\ \mathrm{sen}\ (\mathbf{a},\mathbf{b})|}$$

② En cuanto a la *dirección* de $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, poco nuevo hay que decir: del procedimiento que hemos seguido para definir el producto vectorial se desprende que el vector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ es perpendicular tanto a **a** como a **b**.

③ Finalmente, la *chapuza* que antes mencionábamos consiste en que llega el momento de establecer el *sentido* del vector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ y nos vemos en dificultades (la regla del sacacorchos, aun siendo válida, no es muy ortodoxa y además requiere manejar un artilugio que, con la paulatina desaparición del alcornoque, irá poco a poco cayendo en desuso). Pero como el conocimiento de tal sentido nos será innecesario, prescindiremos de él, aunque teniendo muy claro que está implícito en la definición que hemos dado. Y para despejar cualquier duda, si los vectores **a** y **b**, en ese orden, son los representados en la figura, de su observación se desprende cuál es el sentido del producto vectorial.



Algunas aplicaciones del producto vectorial

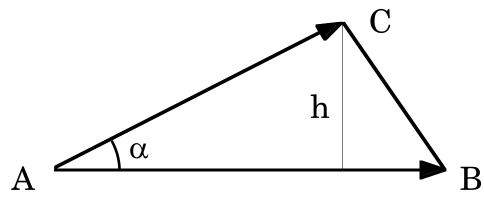
① La primera aplicación es consecuencia del hecho de que el producto vectorial de dos vectores es otro vector perpendicular a ambos: *Como vector característico de un plano* puede tomarse el producto vectorial de dos vectores **v** y **w** contenidos en él.

② Análogamente, como *vector de dirección de una recta perpendicular a otras* dos **r** y **s**, de vectores de dirección $\mathbf{v_r}$ y $\mathbf{v_s}$, podrá ser tomado el vector $\mathbf{v_r} \wedge \mathbf{v_s}$.

③ Designemos por S el *área de un triángulo* de vértices A, B, C.

Será: $S = \frac{1}{2}\,|\mathbf{AB}|\,.\,h = \frac{1}{2}\,|\mathbf{AB}|\,.\,|\mathbf{AC}|\,.\,\operatorname{sen}\alpha$

luego: $$\boxed{S = \frac{1}{2}\,|\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC}|}$$

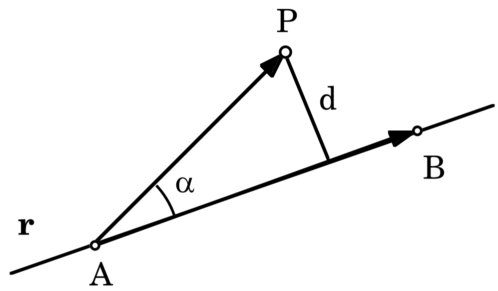


(Para calcular el área de un polígono, bastaría con descomponer éste en triángulos)

④ Por último, si no te agrada ninguna de las formas que vimos para calcular la *distancia de un punto* P *a una recta* **r**, observa la figura y verás que tomados dos puntos cualesquiera, A y B, de la recta **r**, será:

$$|\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AP}| = |\mathbf{AB}|\,.\,|\mathbf{AP}|\,.\,\operatorname{sen}\alpha = |\mathbf{AB}|\,.\,d$$

luego: $$\boxed{d = \frac{|\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AP}|}{|\mathbf{AB}|}}$$



Definición (de producto mixto de tres vectores)

Rizando el rizo de las definiciones, veamos la última, que combina los productos escalar y vectorial:

☞ Dados tres vectores libres **a**, **b** y **c**, se llama *producto mixto* de ellos, en el orden dado, y se representa por $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ al producto escalar de **a** por el vector $(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$; esto es:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$$

Consecuencia (cálculo del producto mixto)

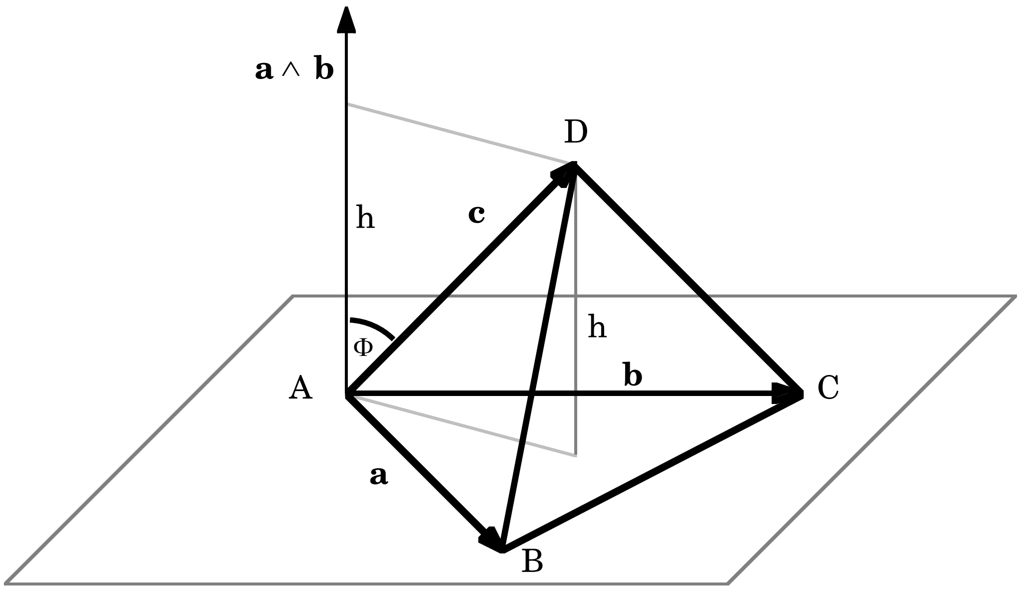
Si las coordenadas de los vectores **a**, **b**, y **c** son (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) y (c_1, c_2, c_3), respectivamente, se tendrá:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

expresión analítica que nos permitirá calcular fácilmente el producto mixto.

Volumen del tetraedro

La principal aplicación, para nosotros, del producto mixto, es que permite calcular volúmenes de forma sencilla. Considera, si te parece, el tetraedro de la figura:



Si llamamos *S* al área de su base y *h* a su altura, se tendrá:

$$V = \frac{1}{3} S . h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| . |\mathbf{c}| . \cos \phi = \frac{1}{6} \mathbf{c} . (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$$

o también, tomando el volumen en valor absoluto:

$$V = \left| \frac{1}{6} [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \right|$$

Si las coordenadas de los vértices del tetraedro son: A (a_1, a_2, a_3) , B (b_1, b_2, b_3), C (c_1, c_2, c_3) y D (d_1, d_2, d_3), tendremos, finalmente:

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \right|$$

Y así podríamos seguir... Podríamos hablar de que para calcular el volumen de un poliedro (sólido determinado por superficies planas poligonales) basta con descomponerlo en tetraedros, de cuál sería el volumen de un paralelepípedo (¿sabes que es tal cosa? Una caja de zapatos es un caso particular). Pero aquí terminamos.

5. EJERCICIOS

1.- Sean **a**, **b**, **c** tres vectores libres del espacio. Demuestra que:

1°) Si **a** y **b** tienen el mismo módulo, entonces **a** + **b** y **a** - **b** son perpendiculares.

2°) Si **a**, **b**, **c** son perpendiculares dos a dos, entonces $(\mathbf{a} + \mathbf{b}).(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \geq 0$.

2.- Averigua si existen valores de *x, y* tales que el vector (2 - x - y, 1 + x - y, 1 - y) sea ortogonal a los vectores (2,1,-1) y (1,0,2).

3.- Demuestra que las alturas de un triángulo son concurrentes, es decir, se cortan en un mismo punto.

4.- Halla los ángulos que la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{6}$ forma con los ejes coordenados.

5.- Calcula los ángulos que la recta de ecuación $x = y = z$ forma con:

1°) Los ejes coordenados

2°) La recta de ecuación $x + 7 = 3y + 5 = 3z - 4$.

6.- Obtén los planos bisectores de los planos: $3x - 4y - 5 = 0$, $2x - y + 2z - 5 = 0$. (Plano bisector de otros dos: que forma iguales ángulos con ellos).

7.- Halla la longitud de la proyección del segmento de extremos P(2,0,3) y Q(0,1,5) sobre el plano de ecuaciones $\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - \mu \end{cases}$.

8.- Calcula las ecuaciones de los siguientes planos:

1°) El que pasa por el punto A(2,3,4) y tiene como vector característico el (5,0,1).

2°) El perpendicular al segmento de extremos P(2,5,3) y Q(4,1,-1), en su punto medio.

3°) El que es perpendicular a la recta en la que se cortan los planos de ecuaciones $2x + y = 5$, $x - z = 2$ y pasa por el punto P del apartado anterior.

4°) El perpendicular a la recta $x = 2$; $y = 3 + t$; $z = 4t$ por el origen.

9.- Demuestra que los tres planos perpendiculares a los lados de un triángulo ABC, en sus puntos medios, pertenecen a un mismo haz. Determina la ecuación de este haz si A(1,3,-5), B(-2,2,0), C(-1,-3,-2).

10.- Halla el punto P equidistante de A(1,3,3), B(2,-1,2), C(5,0,6) y D(4,3,2).

11.- Halla los puntos simétricos del P(1,2,3) respecto a:

1°) El plano que pasa por los puntos A(1,0,0), B(0,2,0) y C(0,0,3)

2°) La recta $x = 2y = z - 3$.

12.- De entre todos los puntos pertenecientes a cierto plano π, el más próximo al origen de coordenadas es el P(1, 2, 5). Halla una ecuación general de π.

13.- Determina qué puntos de la recta $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$ son equidistantes de los planos OYZ y OXZ.

14.- Obtén la ecuación de una cualquiera de las infinitas rectas que estando contenidas en el plano OXY son perpendiculares a la recta $x = y = z$.

15.- Se consideran los planos de ecuaciones $ax + 9y - 3z = 8$, $x + ay - z = 0$. Determina los valores de a para los que:

1º) Los dos planos son paralelos.

2º) Los dos planos son perpendiculares.

3º) La recta determinada por ambos corta al plano OXY en un punto cuya distancia al origen de coordenadas es $\sqrt{2}$.

16.- Halla la distancia del punto P(3, 2, 4) a la recta $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

17.- Calcula unas ecuaciones paramétricas del plano que contiene a la recta: $x = 2 + 3t$, $y = -4 + 5t$, $z = t$; y es perpendicular al plano $2x + y - 7z = 3$.

18.- La recta $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y-1}{a+1} = \dfrac{z}{b}$ y el plano $x + 2y - z = 4$ son perpendiculares. Halla a y b.

19.- Obtén una ecuación de la recta que resulta de proyectar ortogonalmente la de ecuación $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z+1}{5}$ sobre el plano $x + y - z = 1$.

20.- Halla la ecuación de la recta que pasando por el punto P(2, 2, 4) y estando contenida en el plano $x + y - z = 0$ tiene máxima pendiente respecto del plano $z = 0$.

21.- Dadas las rectas **r**: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{2}$; **s**: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = z$ y el punto A(2, 1, 0), se pide:

1º) Distancia entre A y **r**.

2º) Distancia entre **r** y **s**.

3º) Plano paralelo a **r** y **s** pasando por el origen.

4º) Recta que corta perpendicularmente a **r** y **s**.

5º) Recta perpendicular a **r** y **s** pasando por A.

6º) Plano que pasa por A, es paralelo a **r** y perpendicular al plano OYZ.

22.- Halla una ecuación de la recta que pasa por el punto A(3, 4, 2) y corta perpendicularmente al eje OX.

23.- Dada la recta $\mathbf{r}: \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ y el plano π: $2x - y + 2z + 1 = 0$, determina:

1º) Los puntos de **r** que distan $\frac{1}{3}$ de π.

2º) Los puntos de π que distan $\frac{1}{3}$ de los hallados en el apartado anterior.

24.- Halla el punto de la recta de ecuación $\frac{x-4}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ que junto con el origen de coordenadas y el punto $A(2,3,1)$ forma un triángulo rectángulo en A. Halla la longitud de la altura sobre la hipotenusa de dicho triángulo.

25.- Obtén los puntos de la recta $\mathbf{r}: \begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ 2x + y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$ que equidistan de los planos OXY y π: $2x - 6y + 3z = 10$.

26.- Halla la distancia existente entre las siguientes rectas:

$$\mathbf{r}: \begin{cases} z + y = 5 \\ z = 4 \end{cases} \quad ; \quad \mathbf{s}: \begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

27.- Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos en los que los ejes coordenados cortan al plano de ecuación: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1$.

28.- El plano perpendicular al segmento de extremos $P(0,3,8)$ y $Q(2,1,6)$ en su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Halla el área del triángulo ABC.

29.- Las rectas $x = y = z$; $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ son aristas opuestas de un tetraedro. La recta que une los puntos medios de las mismas es perpendicular a ambas, y la distancia entre estos dos puntos es igual a la longitud de ambas aristas. Halla los vértices del tetraedro y su volumen.

30.- Obtén las ecuaciones de los planos que pasando por los puntos $A(1,0,0)$ y $B(0,1,0)$, cortan al eje OZ en puntos C tales que el área de los triángulos ABC es de 10 unidades.

31.- Obtén el lugar geométrico de las rectas que cortando al eje OZ y a la recta $x = y - 1 = z$, se mantienen paralelas al plano $z = 0$.

32.- Dado el tetraedro de vértices $O(0,0,0)$, $A(0,2,0)$, $B(1,0,0)$ y $C(0,0,3)$, calcula su volumen, la altura correspondiente a la cara ABC, la distancia entre las aristas AB y OC y el ángulo que forman las aristas AB y OA.

33.- Existen infinitos planos tangentes a la esfera de centro el origen de coordenadas y radio unidad, pero sólo dos son paralelos al de ecuación $2x + y = 3$. ¿Cuáles son?

34.- Halla los dos planos paralelos al de ecuación $2x + y - 2z = 0$ que cortan a la esfera de centro $C(1,5,3)$ y radio 5 en una circunferencia de radio 4.

TEMA 6

FUNCIONES CONTINUAS

1. INTRODUCCIÓN

Con este tema empezamos la segunda parte del curso. Si dijéramos que en ella nos dedicaremos casi exclusivamente a examinar la tangente a una curva en un punto (en resumen, en eso consiste el cálculo diferencial) y a determinar el área encerrada por tal curva (eso es el cálculo integral), podrías pensar que somos poco ambiciosos. El tiempo se encargaría de demostrarte que no es pequeño el propósito. Permítenos recordarte al respecto que la Humanidad tuvo que esperar a los siglos XVII y XVIII, el llamado *Siglo de las Luces,* para que, dos mil años después de que Arquímedes diera un primer procedimiento para calcular el área encerrada por un segmento parabólico, genios como Newton, Leibniz, los Bernouilli o Euler, entre otros, o Rieman y Cauchy, ya en el XIX, pudieran no sólo plantear tales problemas, sino resolverlos casi definitivamente. No será, pues, tan trivial como pudiera parecer este asunto de las tangentes y las áreas, ¿no crees?

El concepto clave de todo lo que sigue, en el que nunca se detendrá uno tanto como sería necesario, es el de límite. Su dificultad no debe asustarte: A todos nos ha ocurrido que cuando creíamos haber asimilado bien tal idea, nuevos casos nos han sumido en la mayor de las dudas. ¡Que no cunda el pánico! Los conceptos de infinitésimo e infinito, y con ellos el de límite, son posiblemente los más difíciles de las matemáticas, y quienes escribimos esto, que hace tiempo dejamos de creer en la ciencia infusa, pensamos que sólo el trabajo metódico, en ocasiones aparentemente infructuoso, hace posible que un día amanezcamos comprendiendo por qué la suma de *infinitas* cantidades positivas puede ser una cantidad positiva *finita,* por qué Aquiles alcanza a la tortuga, por qué el universo puede ser finito e ilimitado a la vez, o por qué...

Así que con tal espíritu y con el consejo de otra figura del XVIII, D'Alembert, a sus estudiantes: "¡Proseguid; ya llegará la confianza!", empezamos. ¿Quieres seguirnos?

2. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

El conjunto de los números reales

Aunque no sea ésta la ocasión de establecer con rigor qué cosa son los números reales, recordaremos que en el proceso de construcción de conjuntos numéricos, el que aparece en primer lugar es el conjunto **N** de los números naturales. En él es posible sumar y multiplicar, pero no siempre se puede restar o dividir. En **Z**, conjunto de los números enteros, la resta es siempre posible, y en **Q**, conjunto de los números *racionales,* además de las operaciones anteriores, también es siempre posible la división (excepto entre cero). Como sabes, todo número racional puede representarse mediante una fracción decimal finita o infinita periódica. Por otra parte, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$, es decir, todo número natural es entero y todo entero es racional.

Sin embargo, no existe número racional que nos exprese la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado unidad, o el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, o el límite de la sucesión de término general $(1+1/n)^n$...

De este último tipo de números, $\sqrt{2}$, π , e ... , imposibles de representar mediante una expresión decimal finita o infinita periódica, se dice que son *irracionales*.

> El conjunto **R** de los números reales, finalmente, es el formado por los números racionales y los irracionales.

En **R** operaremos como lo hemos hecho *siempre,* sumando, multiplicando, ordenando sus elementos mediante la relación ≤... Descartada aquí, como queda dicho, una construcción rigurosa de **R**, conviene no obstante recordar la propiedad fundamental de los números reales; la propiedad de *continuidad:* Los números reales *llenan la recta.*[1] Es decir, que si sobre una recta representamos el 0 y el 1, a cada número real corresponderá un punto de la recta y a cada punto de la recta, un número real, sin que haya puntos a los que no corresponda un número real. Se podrá, en resumen, efectuar la habitual identificación entre números reales y puntos de una recta.

Vocabulario básico

Cuando se trabaja con números reales suelen utilizarse expresiones y símbolos cuyo significado, aunque ya conocido, conviene recordar:

- Siendo *a, b* dos números reales, con $a < b$, se define el *intervalo abierto* (a, b) mediante la igualdad:

$$(a, b) = \{ x \in \mathbf{R} \,/\, a < x < b \}.$$

- Análogamente se define el *intervalo cerrado* [a, b] mediante:

$$[a, b] = \{ x \in \mathbf{R} \,/\, a \le x \le b \}.$$

- El *valor absoluto,* $|x|$, de un número real x, se define así:

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{ si } x \ge 0 \\ -x & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

- La *distancia* entre dos números reales *a* y *b* es: $d(a, b) = |b - a|$

- El *entorno* E(a; r) de centro un número real *a* y radio $r > 0$, es el conjunto:

$$E(a; r) = \{ x \in \mathbf{R} \,/\, a - r < x < a + r \}$$

- El *entorno reducido* $E'(a; r)$ de centro un número real *a* y radio $r > 0$, es el conjunto que resulta de prescindir en E(a; r) del punto a. Es decir:

$$E'(a; r) = E(a; r) - \{a\}$$

---

[1] Formalmente: Diciéndose que un conjunto **C** de números reales está *acotado superiormente* si existe $\alpha \in \mathbf{R}$, al que se llama cota superior de **C**, tal que $x \le \alpha$, cualquiera que sea $x \in \mathbf{C}$, y llamándose *extremo superior* de un conjunto ordenado a la menor de sus cotas superiores, la propiedad de continuidad de **R** consiste en que *todo conjunto de números reales acotado superiormente tiene extremo superior.*

Funciones reales de variable real

Se llama función real de variable real a toda aplicación:

☞ $f : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{R}$

donde **D** es un subconjunto de **R**. Es decir, a todo criterio que permita asociar a cada número real x de **D** un único numero real y.

• Existen muchas formas de designar simbólicamente las funciones, pero ya que es habitual escribir $f(x)$ para referirse al número real que f hace corresponder a x, la función anterior suele identificarse mediante la notación:

$$y = f(x)$$

diciéndose que x es la variable *independiente* e y la variable *dependiente*.

• Aunque, como decimos, $f(x)$ designe un número real, también se escribe a menudo $f(x)$ para referirse a la función.

Dominio y recorrido de una función

Siendo $y = f(x)$ una función real de variable real, se definen el *dominio* y el *recorrido* de $f(x)$ mediante las igualdades:

Dominio de f = $\mathbf{D}_f = \{x \in \mathbf{R} / \text{ existe } f(x)\}$

Recorrido de f = $\mathbf{R}_f = \{ f(x) / x \in \mathbf{D}_f\}$

Observa que el dominio de f coincide con lo que, en la definición previa, designábamos por **D**.

Dos observaciones

① Si al definir una función, normalmente mediante una expresión algebraica, no se precisa cuál es su dominio, habrá que entender que éste es el más amplio subconjunto de **R** en el que pueda tomar valores la variable independiente x, teniendo sentido $f(x)$.

Así, por ejemplo, considerada la función:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

como la raíz cuadrada anterior sólo tiene sentido en **R** cuando sea $x^2 - 4 \geq 0$, resultará:

$$\mathbf{D}_f = \{ x \;/\; x^2 - 4 \geq 0\} = \mathbf{R} - (-2, 2).$$

② Ya viste en cursos anteriores cuáles eran las funciones más sencillas y de qué forma eran sus gráficas. No estaría de más que echaras un vistazo a tus apuntes de aquella época.

3. EL CONCEPTO DE LÍMITE

Ejemplos previos

① Considera, en primer lugar, la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 3x - 18}{x - 2} = \frac{3(x - 2)(x + 3)}{x - 2}$$

Para x = 2 la función no está definida, pero si calculas f(1'99), f(2'001), f (1'99995), etc., observarás que los valores de f(x) se aproximan a 15, tanto más cuanto más aproximes el valor de x a 2. Y no sólo eso, sino que fijado cualquier número $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea, puedes conseguir que la distancia de f(x) a 15 sea menor que ε, sin más que hacer que la distancia de x a 2 sea menor que otro número $\delta > 0$, que serás capaz de determinar.

Efectivamente, no es difícil comprobar que para lograr:

$$\left| \frac{3x^2 + 3x - 18}{x - 2} - 15 \right| < \varepsilon$$

basta con tomar x tal que:

$$0 < |x - 2| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$$

➜ Diremos que el límite de f(x) cuando x tiende a 2 es 15, y escribiremos:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 15$$

② Considera ahora la función:

$$g(x) = 7x + 1$$

A diferencia de lo que ocurría antes, en este caso sí existe g(2). Pero con independencia de ello, también podrías conseguir que la función tomara valores tan próximos a 15 como quisieras, sin más que aproximar el valor de x a 2 lo suficiente.

➜ Diremos que el límite de g(x) cuando x tiende a 2 es 15, y escribiremos:

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 15$$

➠ En resumen, que aunque una de las funciones anteriores no esté definida en el punto x = 2 y la otra sí (lo cual también tiene su importancia, como veremos más adelante), en las *cercanías* de ese punto se *comportan* de forma semejante: sus valores se aproximan a 15 tanto como se quiera sin más que dar a x valores suficientemente próximos a 2. Por ello diremos que el límite de ambas funciones, cuando x tiende a 2, es 15.

Definición (de límite de una función en un punto)

☞ Dada una función real de variable real $f : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{R}$, diremos que su límite cuando *x* tiende hacia *a* es *L* y escribiremos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si y sólo si:

Fijado cualquier número positivo ε, existe otro número positivo δ, tal que si *x* cumple: $0 < | x - a | < \delta$, entonces se verifica: $| f(x) - L | < \varepsilon$.

Simbólicamente:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon}$$

Observación

La definición anterior puede darse en términos de entornos, de tal manera que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ equivale a que para todo entorno E(L; ε) exista un entorno E(a; δ) tal que baste con tomar x perteneciente a E'(a; δ) para conseguir que f(x) pertenezca a E(L; ε). Piensa un poco en ello.

Consecuencias (límite de la suma, producto y cociente de funciones)

Supongamos ahora que f(x), g(x) son dos funciones para las que existen los límites cuando *x* tiende hacia *a*. ¿Qué ocurrirá con el límite de la suma, el producto y el cociente de ambas funciones? Pues eso, lo que estás pensando:

① *El límite de una suma es igual a la suma de los límites:*

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

② *El límite de un producto es igual al producto de los límites:*

$$\lim_{x \to a} [f(x) . g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x)$$

③ *El límite de un cociente es igual al cociente de los límites:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

(Obviamos las demostraciones, aunque son sencillas. En el caso del límite de un cociente, para que se cumpla lo afirmado, ha de ser $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$.)

Observación (límites infinitos y para $x \to \infty$)

Como sabes de cursos anteriores, existen límites *funcionales* de tipos distintos al precedente. Hay casos en los que, por ejemplo, los valores de la función se aproximan tanto como se quiera a un cierto número *L* sin más que hacer que la variable *x* tome valores suficientemente *grandes,* y tal hecho se simboliza escribiendo:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

En otras ocasiones, para conseguir que la función f(x) tome valores mayores que cualquier numero fijado previamente, basta con que *x* se aproxime lo suficiente a un cierto número real *a,* lo cual se representa escribiendo:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

También puede suceder que baste con que *x* tome valores suficientemente grandes para lograr que la función f(x) tome valores mayores que cualquier numero fijado previamente, lo cual se simboliza mediante:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

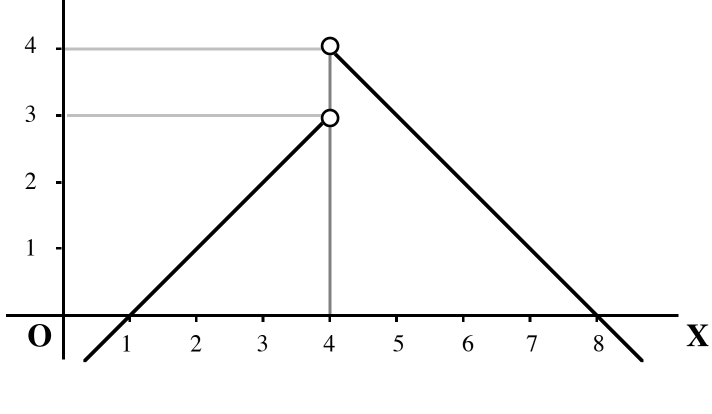
No nos detendremos más en estos casos, conformándonos con esta breve mención por si en el futuro, y aunque sea de forma esporádica, nos aparece alguno de ellos. Sin embargo, sí hay otro tipo de límites que requieren nuestra atención: los límites laterales, que estudiaremos seguidamente.

4. LÍMITES LATERALES

Ejemplo previo

Considera la función $f(x) = \begin{cases} x - 1 & , \text{ si } x < 4 \\ -x + 8 & , \text{ si } x > 4 \end{cases}$, cuya gráfica tienes a la vista.

Como verás, si los valores de *x* se aproximan a 4, por la *izquierda,* los valores de la función se acercan a 3, mientras que cuando los valores de *x* se acercan a 4, pero por la *derecha,* los valores de f (x) se aproximan a 4. Es decir, que según que la aproximación de *x* a *a* se haga con valores menores o mayores que *a,* las consecuencias son unas u otras. Surge así el concepto de límite lateral, que formalizamos a continuación.



Definiciones (de límites laterales)

① Diremos que el límite de una función f(x) cuando *x* tiende hacia *a* por la derecha es *L,* y escribiremos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a, a + \delta)$, entonces $| f(x) - L | < \varepsilon$.

② Diremos que el límite de una función f(x) cuando *x* tiende hacia *a* por la izquierda es *L,* y escribiremos:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a - \delta, a)$, entonces $| f(x) - L | < \varepsilon$.

Consecuencia

Una condición necesaria y suficiente para que exista $\lim_{x \to a} f(x)$ es que existan y tengan el mismo valor los límites laterales:

$$\lim_{x \to a^+} f(x)\ ; \ \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Te dejamos la fácil demostración como ejercicio. No olvides que la demostración de una equivalencia hay que efectuarla en doble sentido.

Ejemplos

1.- Supongamos que se desea calcular el límite, en a = 0, de la función:

$$f(x) = \frac{3x + |x|}{5x - 2|x|}$$

Se tendrá:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{3x - x}{5x + 2x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2x}{7x} = \frac{2}{7}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{3x + x}{5x - 2x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$$

y, en consecuencia, no existirá el límite de f(x) en el punto a = 0.

2.- Comprueba que, siendo $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{, si } x \leq 3 \\ ax - 6 & \text{, si } x > 3 \end{cases}$, el valor que debe tomar a para que exista $\lim_{x \to 3} f(x)$ es 5.

5. INFINITÉSIMOS

Observación

Es probable que en más de una ocasión hayas oído decir que un número es infinitamente pequeño, o que una variable es un infinitésimo. Ahora bien, decir que una variable (o una función, que para el caso es lo mismo) toma valores *muy pequeños* es no decir prácticamente nada de ella. Si una función alcanza el valor 0'001, por ejemplo, ¿esto significa que tome un valor muy pequeño? Si ese valor es el de la distancia en años luz entre dos puntos del universo, ¿calificarías de pequeño el tiempo que tardaría en recorrerla un cohete que viajara a 20.000 Km./h.? ¿Se podrá decir, entonces, que un infinitésimo es una variable que toma valores *muy pequeños?* Piensa lo que quieras: La definición formal la tienes a continuación.

Definiciones (sobre infinitésimos)

① Se dice que una función f(x) es un *infinitésimo* para *x* tendiendo hacia *a* si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Es decir, si f(x) toma valores tan próximos a cero como se quiera, sin más que aproximar *x* a *a* lo suficiente.

② Siendo f(x), g(x) dos infinitésimos para *x* tendiendo hacia *a,* diremos que son de *igual orden* si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$$

En particular, si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

se habla de infinitésimos *equivalentes*.

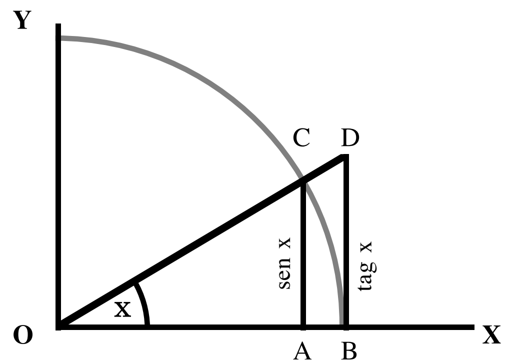
③ Siendo f(x), g(x) dos infinitésimos para *x* tendiendo hacia *a,* diremos que f(x) es un infinitésimo de *mayor orden* que g(x) si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

(lo que, para entendernos, es como decir que f(x) es más infinitésimo que g(x), si tal cosa pudiera decirse).

Ejemplo

Es fácil demostrar que *sen x* y *x* son infinitésimos equivalentes, para *x* tendiendo hacia cero. En 3º de BUP lo hiciste, a partir de una figura como la de la derecha, comparando las áreas de los triángulos OAC y OBD con la del sector OBC, y efectuando algún otro paso más. ¿Serías capaz de repetir la demostración?



6. FUNCIÓN CONTINUA EN UN PUNTO

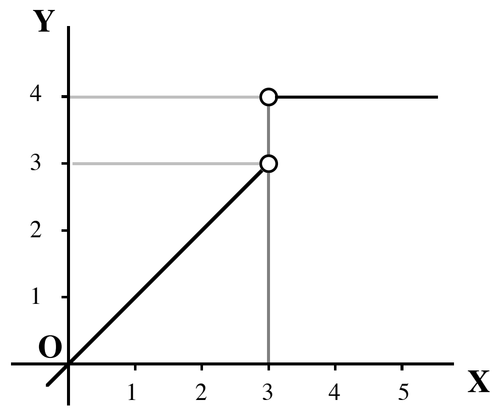
El concepto de continuidad, sin cuyo estudio poco podríamos hacer de ahora en adelante, no es un invento de los matemáticos, sino que, como tantas otras, se trata de una idea que éstos han tomado de la realidad y, posteriormente, han formalizado. En efecto, en la vida diaria se dan muchos fenómenos físicos, sociales, etc., tales que las funciones que en ellos intervienen y los explican son *continuas,* es decir, se caracterizan porque a pequeños incrementos de la variable independiente corresponden incrementos también pequeños de la variable dependiente. Así, por poner el más típico de los ejemplos, si un movimiento se rige por una ley de la forma $\mathbf{e = f(t)}$, con la que se expresa la dependencia del espacio recorrido en función del tiempo, es normal que a pequeñas variaciones en el valor de $\mathbf{t}$ correspondan variaciones igualmente pequeñas de $\mathbf{e}$; el espacio será una función continua del tiempo. Y no faltarían otras situaciones con las que ilustrar lo que decimos.

Veamos, sin embargo, antes de dar la definición de función continua, algunos ejemplos de lo que **no** son funciones continuas.

Primer caso

Considera en primer lugar la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 3 \\ 4 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

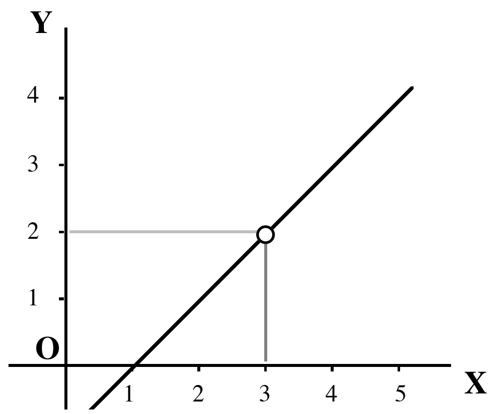


Si dibujas su gráfica, obtendrás una figura como la de la derecha, en la que se refleja el hecho de que ni está definida $f(x)$ en $x = 3$ (eso se pretende indicar con los circulitos) ni existe el $\lim_{x \to 3} f(x)$, pues los límites laterales a izquierda y derecha de $x = 3$ son distintos.

Segundo caso

Si representas ahora la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$$



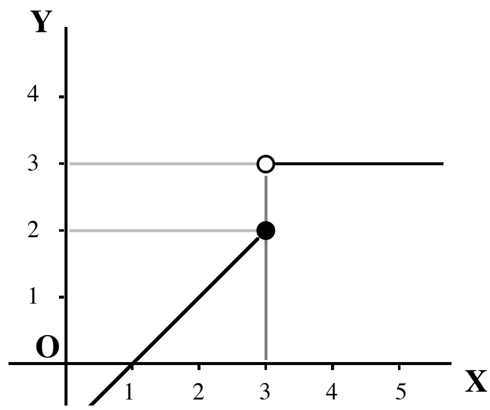
(lo cual es más fácil de lo que parece, pues los valores de f(x) coinciden, salvo en $x = 3$, con los de $g(x) = x-1$) , obtendrás la gráfica de la figura, en la que se observa que la función $f(x)$ no está definida en $x = 3$, aunque sí existe $\lim_{x \to 3} f(x)$.

Tercer caso

Piensa ahora en la función:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \le 3 \\ 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Su gráfica indica que f (x) sí está definida en x = 3, pero no existe el $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ pues los límites laterales a izquierda y derecha en dicho punto son distintos.



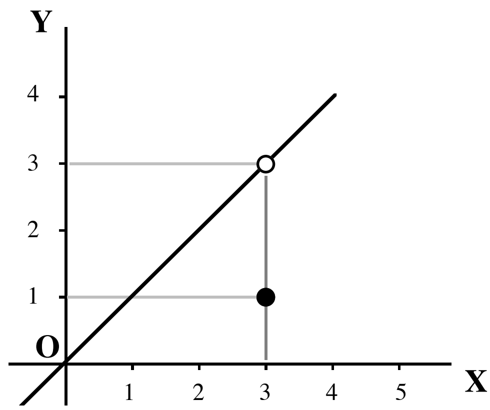
Cuarto caso

Finalmente, considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \ne 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

cuya gráfica tienes a la vista. En ella se ve que f(x) sí está definida en el punto x = 3, y que también existe el $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

Los valores de una y otro, sin embargo, son distintos.



Definición (de función continua en un punto)

Hablando sin mucho rigor, podríamos decir que, aun siendo diferentes, lo que tienen en común los casos anteriores es que las gráficas se *rompen* en el punto de abscisa 3, hay que levantar el lápiz del papel al llegar a x = 3... Justamente cuando no suceda eso, cuando no haya que levantar el lápiz del papel para dibujar la gráfica, será cuando diremos que la función es *continua*. Formalmente:

Una función f (x) es continua en x = a	si y sólo si	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

O, dicho de otra manera:

f(x) es continua en x = a	$\Leftrightarrow$	$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \,/\, \lvert x - a \rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(a) \rvert < \varepsilon$

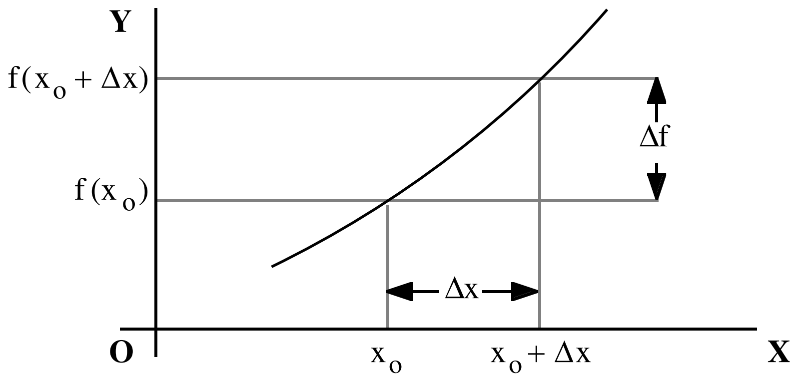
En términos de entornos: f(x) es continua en a si y sólo si tomado cualquier entorno de f(a), se puede lograr que f(x) pertenezca a él, sin más que hacer que x se halle en un entorno de a, que será posible determinar.

Observaciones

① Quede claro, pues, que para producirse la continuidad de una función en un punto, tienen que darse tres condiciones: Que la función esté definida en el punto, que exista el límite en dicho punto y, finalmente, que los valores de una y otro coincidan.

② Dijimos antes que las funciones continuas hacían corresponder a incrementos *pequeños* de la variable independiente, incrementos también *pequeños* de la variable dependiente. Veámoslo.

Sea la función f(x) y consideremos un valor x_0 de la variable independiente, perteneciente al dominio; el valor correspondiente de la función será $f(x_0)$. Si a x_0 le sumamos cierta cantidad Δx, a la que llamaremos *incremento de x,* el valor de la función será $f(x_0 + \Delta x)$. A la diferencia $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, que refleja la variación de f(x) cuando la variable independiente ha pasado de valer x_0 a valer $x_0 + \Delta x$, la llamaremos *incremento de la función* y la representaremos por Δf.



Pues bien, si la función f (x) es continua en x_0, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ y, en tal caso, sustituyendo x por $x_0 + \Delta x$, se tendrá:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \ , \ \text{es decir :} \ \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

Luego, que f(x) sea continua en x_0 significa, efectivamente, que a incrementos Δx de la variable independiente muy pequeños *(infinitesimales),* corresponden incrementos Δf de la función también muy pequeños *(infinitesimales).*

③ El hecho de que la continuidad de una función en un punto suponga, pues, que a pequeños incrementos de la variable independiente correspondan pequeños incrementos de la función, permite predecir cómo se comportará ésta en las proximidades de tal punto. Así, por ejemplo, si f(x) es continua y toma valor positivo en un punto a, es *lógico* pensar que podrá hallarse un pequeño entorno de a en el que f(x) siga siendo positiva. O también, que si f(a) = 8, pongamos por caso, se podrá encontrar un entorno de a en el que los valores de f(x) estén comprendidos entre 7 y 9, por ejemplo.

En el apartado de ejercicios te ofreceremos algunas sugerencias para que demuestres formalmente las cuestiones anteriores.

Consecuencias (algunas funciones continuas)

Partiendo de la definición de función continua y de las propiedades de los límites, se puede establecer:

❒ La suma, producto y cociente de dos funciones, f(x) y g(x), continuas en un punto *a* es otra función continua en *a* (con la excepción, para la función $\frac{f(x)}{g(x)}$, del caso en que g(a) = 0).

❒ Las funciones constante: f(x) = k, e identidad: f(x) = x, son continuas en todo punto $a \in \mathbf{R}$.

❒ Las funciones polinómicas:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n \quad ; \quad a_i \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}$$

y las funciones racionales:

$$g(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_m x^m} \quad ; \quad a_i, b_i \in \mathbf{R} \ ; \ n,m \in \mathbf{N}$$

son continuas en todo punto $a \in \mathbf{R}$ (salvo, a lo sumo, en el caso de g(x), en los puntos en los que el denominador se anula).

❒ Las funciones trigonométricas: f(x) = sen x, g(x) = cos x; exponencial: $f(x) = a^x$, a > 0; y logarítmica: $f(x) = \log_a x$, a > 0, son continuas en todos los puntos en los que están definidas.

Naturalmente, hay muchas más funciones continuas, pero casi todas se obtienen a partir de las anteriores. Las demostraciones de lo dicho, salvo las del último caso, son sencillas y deberías intentar alguna antes de pasar al apartado siguiente.

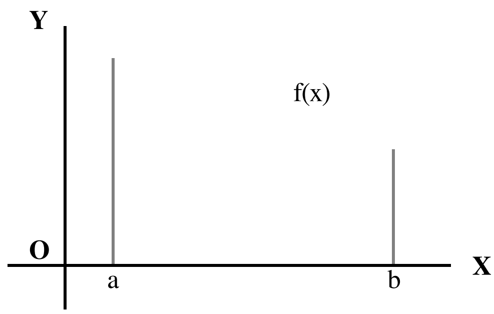
7. FUNCIONES CONTINUAS EN UN INTERVALO

Definición (de función continua en un intervalo abierto)

☞ Diremos que una función f(x) es *continua en un intervalo abierto* (a, b) si lo es en todos los puntos de dicho intervalo.

Como la cuestión es así de sencilla, no vamos a darle más vueltas. Pero, en cambio, considera ahora una función f (x) cuya gráfica fuera como la que tienes a la vista:

De acuerdo con la primera noción, intuitiva, de continuidad, parecería razonable decir que tal función sería continua en todo el intervalo cerrado [a, b]. Lo que ocurre es que no podríamos decir sin más que f (x) fuera continua en todos los puntos del intervalo cerrado, ya que no sabríamos qué ocurriría con los límites de f (x) en los puntos *a* y *b*. (A saber, sin ir más lejos, si f (x) estaría definida a la izquierda de *a* o a la derecha de *b*). Se hace necesaria, por tanto, una precisión.



Definición (de función continua en un intervalo cerrado)

☞ Diremos que una función f(x) es *continua en un intervalo cerrado* [a, b] si es continua en el intervalo abierto (a, b) y, además:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a); \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Definiciones (de máximo y mínimo absolutos)

➪ Diremos que una función $f : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ tiene un *máximo absoluto* en un punto $a \in \mathbf{D}$ si $f(a) \geq f(x),\ \forall x \in \mathbf{D}$.

➪ Diremos que una función $f : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ tiene un *mínimo absoluto* en un punto $a \in \mathbf{D}$ si $f(a) \leq f(x),\ \forall x \in \mathbf{D}$.

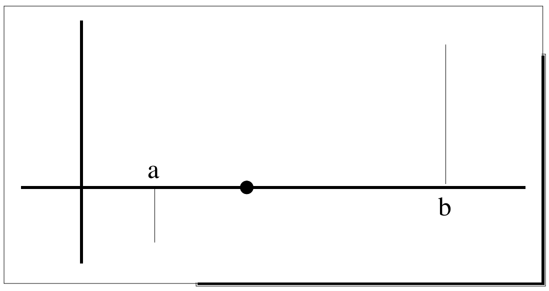
(No debes confundir estos máximos y mínimos absolutos con los máximos y mínimos *locales* que estudiaste en cursos anteriores, y de los que hablaremos más adelante).

Advertencia

Las demostraciones de los teoremas siguientes requieren un conocimiento de los números reales del que no disponemos en este curso. Tratándose, no obstante, de resultados básicos para casi todo lo que sigue, enunciaremos los teoremas y haremos algunos comentarios sobre su significado.

Teorema (de Bolzano)

Si una función es continua en un intervalo cerrado y toma valores de distinto signo en sus extremos, entonces existe al menos un punto en el interior del intervalo en el que la función se anula.



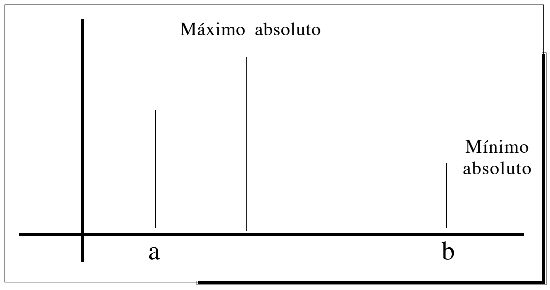
Como decimos, la demostración rigurosa del teorema no es trivial y requiere el uso de la propiedad de continuidad de los números reales. Intuitivamente, sin embargo, la cosa parece fácil. El que la función pudiera pasar de valores negativos a positivos sin pasar por cero, supondría que la función tendría que dar un *salto* y, como sabes, las funciones continuas no *saltan*.

Ejemplo

La función $f(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - 8$ toma valor negativo en el punto $x = 1$ y valor positivo en $x = 4$ (compruébalo); en consecuencia, tratándose de una función continua en todo $\mathbf{R}$ y admitido el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe algún valor de x, $1 \leq x \leq 4$, tal que $x^5 - 2x^3 + x^2 - 8 = 0$.

Teorema (de Weierstrass)

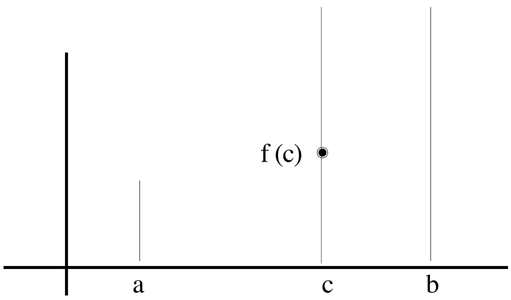
Una función continua en un intervalo cerrado tiene en él un máximo y un mínimo absolutos.



Dos comentarios sobre el teorema y la figura anteriores:

El primero, que en el dibujo hemos supuesto que el máximo absoluto se halla en un punto interior del intervalo $[a, b]$ y el mínimo absoluto en un extremo. Es un caso entre otros posibles.

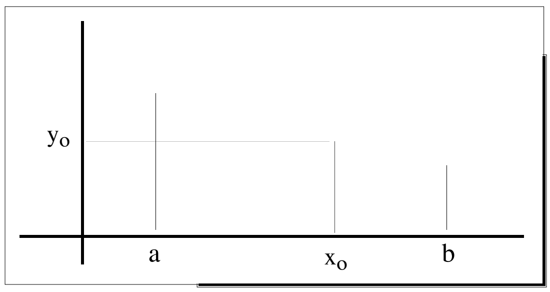
El segundo, que alguien podría pensar que toda función definida en un intervalo cerrado, aunque no sea continua en él, siempre habrá de tomar un valor que sea el *mayor* de todos y otro que sea el *menor*. Si ése es tu caso, observa la figura siguiente:



La función correspondiente a la gráfica estaría definida en $[a, b]$ y, sin embargo, no existirían valores de ella de los que pudiéramos decir que fueran el máximo o el mínimo.

Teorema (de los valores intermedios)

Una función continua en un intervalo cerrado toma en él cualquier valor comprendido entre el máximo y el mínimo absolutos.



La demostración de este teorema, admitidos los anteriores, sí resulta asequible. Siendo x_m y x_M los puntos del intervalo $[a, b]$ en los que $f(x)$ alcanza los valores mínimo absoluto y máximo absoluto, m y M, respectivamente, y siendo y_o un valor cualquiera comprendido entre el mínimo y el máximo absolutos, la función $g(x) = f(x) - y_o$ es continua en $[x_M, x_m]$ (suponemos que x_M está a la izquierda de x_m) y en los extremos de dicho intervalo cerrado toma valores de distinto signo.

Por consiguiente, y en virtud del teorema de Bolzano, existirá al menos un punto $x_o \in (x_M, x_m)$, luego $x_o \in (a, b)$, tal que $g(x_o) = f(x) - y_o = 0$; es decir, tal que $f(x_o) = y_o$.

8. EJERCICIOS

1.- Además de los intervalos definidos en la página 124, en ocasiones aparecen los intervalos [a, b), (a, b], (-∞, b), (a, ∞), (-∞, b], [a, ∞), que no parece necesario definir. Pues bien, simplifica al máximo la expresión: $\{(-\infty, 3) \cup [2, 5]\} \cap (4, \infty)$.

2.- Un *punto de acumulación* de un conjunto C de números reales es un punto (número real) a tal que todo entorno reducido de él contiene algún punto de C. Demuestra que si a es punto de acumulación de C, entonces todo entorno de a contiene infinitos puntos de C. (Sugerencia: Supón que hubiera un entorno de a que sólo tuviera un número finito de puntos de C).

3.- Demuestra que: $\lim\limits_{x\to 3}(2x+4) = 10$; $\lim\limits_{x\to 0} x \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$

4.- Siendo $x \in \mathbf{R}$, con el símbolo [x] se representa la *parte entera de x,* o sea, el mayor de los números enteros menores o iguales que *x*. Sabiendo lo anterior, representa gráficamente la funcion f(x) = [x], di qué ocurre con sus límites laterales para *x* tendiendo hacia *a,* siendo *a* un número entero, y estudia su continuidad.

5.- Haz lo mismo que en el ejercicio anterior, pero con la función f(x) = x - [x].

6.- Determina el valor de *k* para que las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{si } x \neq 3 \\ k, & \text{si } x = 3 \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} (1+x)^n - 1, & \text{si } x \neq 0 \\ k, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

sean continuas en los puntos x = 3 y x = 0, respectivamente.

7.- Representa gráficamente la función f(x) = | x | y estudia su continuidad en x = 0.

8.- Estudia la continuidad de las funciones:

$$f(x) = \left|\frac{x-2}{2}\right| \quad ; \quad g(x) = x + [x] \quad ; \quad h(x) = \frac{|x|}{x}$$

9- Determina si existe algún valor de *k* para el que sea continua en a = 2 la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-6}{\sqrt{x^2-4}}, & \text{si } x \neq 2 \\ k, & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

10.- Determina si existe algún valor de *k* tal que la función:

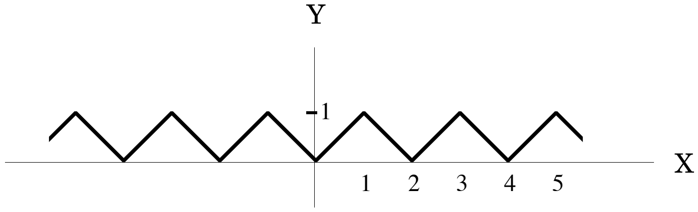
$$f(x) = \begin{cases} 2x+k, & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - kx + 2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea continua en todo punto.

11.- ¿Para qué valores de *k* la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 3x + k}$ no es continua en x = *k?*

12.- Demuestra que si una función f(x) es continua en un punto a, siendo $f(a) > 0$, entonces existe un entorno de a en el que los valores de f(x) también son positivos. (Sugerencia: Tras escribir la condición de continuidad de f(x) en a, toma un entorno de centro f(a) y radio f(a)/2).

13.- Determina una expresión algebraica y estudia la continuidad de la función f (x) cuya gráfica es la siguiente:



14.- Tras representarla, estudia la continuidad de la función $f(x) = |x - 2| + |x - 6|$.

15.- Estudia la continuidad en el punto x = 0 de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

16.- Se dice que una función f(x) está acotada en un intervalo si existen números reales k, k' tales que $k \leq f(x) \leq k'$, cualquiera que sea el punto *x* de dicho intervalo. Demuestra que si una función es continua en un punto a, entonces existe un entorno de a en el que la función está acotada. (Sugerencia: Toma un entorno de centro f(a) y radio 1).

17.- Demuestra que si una función f(x) es continua en un punto a y toma valores positivos y negativos en cualquier entorno de a, entonces $f(a) = 0$. (Sugerencia: Demuestra que f(a) no puede ser ni positiva ni negativa).

18.- Tras representarla, estudia si la función $f(x) = |x^2 - 6x + 8| + 1$ está acotada en el intervalo [1, 3].

19.- Determina un entorno de centro a = 2 en el que la función $f(x) = 9x - 4x^2$ tenga signo constante.

20.- Explica por qué puede asegurarse que existe algún x, $0 \leq x \leq \pi$, tal que:

$$\frac{5}{2 + \cos x} = 4.$$

21.- La función $f(x) = \dfrac{6}{x-3}$ toma distinto signo en los extremos del intervalo [2, 4] y, sin embargo, no se anula en ningún punto de dicho intervalo. ¿No se contradice el teorema que asegura que una función continua alcanza en un intervalo cerrado cualquier valor comprendido entre el máximo y el mínimo absolutos?

TEMA 7

EL CONCEPTO DE DERIVADA

1. INTRODUCCIÓN

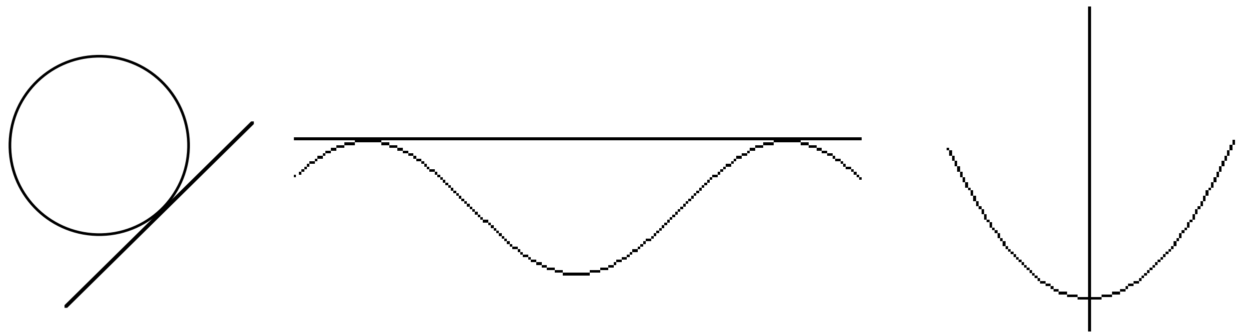
A estas alturas de tus estudios, no vas a decirnos que no sabes qué es la derivada de una función o que no conoces las reglas de derivación, porque se trata de cuestiones fundamentales en el análisis matemático que has visto con detalle en cursos anteriores; sin embargo, la necesidad de manejar perfectamente tales conceptos en los próximos capítulos, nos aconseja dedicar éste a su recuerdo y actualización. Y si la idea de derivada surgió históricamente de los problemas relativos a la tangente a una curva y a la velocidad de un móvil, bueno será que nosotros también empecemos por el principio y hablemos de esos problemas.

El desarrollo del capítulo, en todo caso, se hará partiendo de la base de que en él trataremos asuntos que ya te son conocidos.

2. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Tangente a una curva en un punto

Si alguien -que de todo hay- nos preguntara qué es la tangente a una curva en un punto, nosotros, pensando quizás en el caso de la circunferencia de la figura, podríamos responder que es la recta que corta a la curva en ese único punto... No nos quedaría entonces más remedio que admitir que la segunda recta del dibujo no sería tangente a la sinusoide y que, en cambio, sí lo sería la tercera a la parábola:

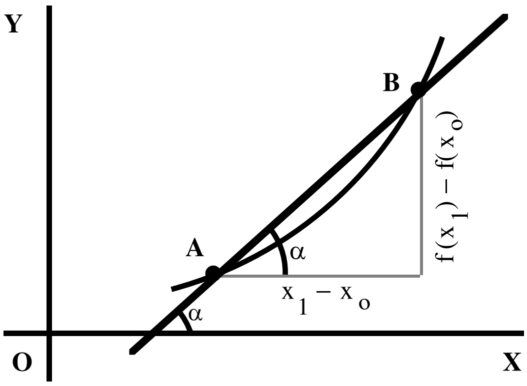


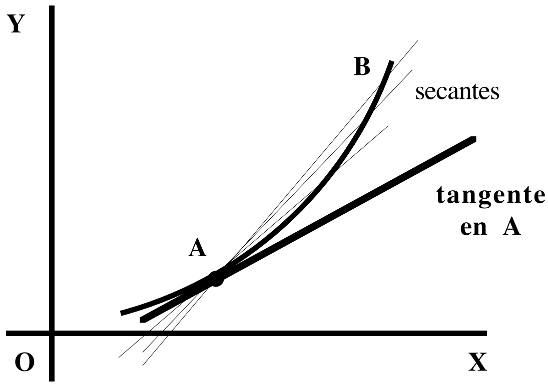
La cuestión se resuelve así:

1º) Como se observa en la figura siguiente, la recta secante a la gráfica de la función $y = f(x)$ en los puntos A $[x_0, f(x_0)]$, y B $[x_1, f(x_1)]$ es la recta que pasando por A tiene por pendiente:

$$\text{tag } \alpha = m_{AB} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

➩ **Recuerda**: la pendiente, **m**, de una recta en el plano es la tangente trigonométrica del ángulo que el eje OX forma con dicha recta. Conocido un punto (x_0, y_0) por el que pasa y su pendiente, la ecuación de la recta es: $y - y_0 = m\,(x - x_0)$.





2º) Por otro lado, la tangente en el punto A *parece ser* la recta a la que *tenderían* las secantes en **A** y **B** cuando el punto **B** *tendiera a confundirse* con el **A**.

➩ Por todo ello, se define formalmente la tangente a la función y = f (x) en el punto **A** $[x_o, f(x_o)]$ como la recta que pasando por dicho punto tiene por pendiente:

$$m = \lim_{x_1 \to x_o} \frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o}$$

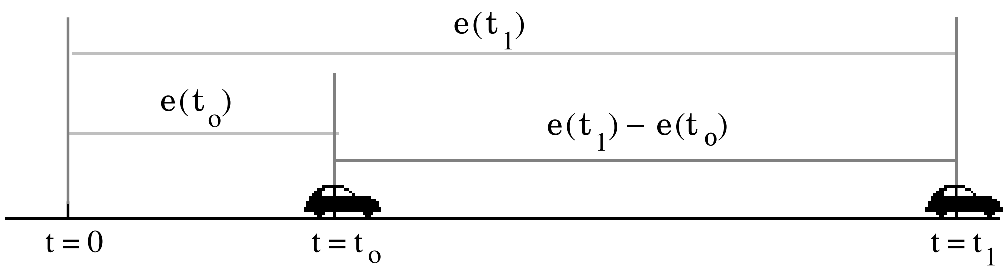
en el supuesto de que tal límite exista.

• Interesa observar que si donde pone x_1 ponemos $x_o + \Delta x$, y donde figura $f(x_1)$, escribimos $f(x_o + \Delta x)$, la pendiente de la tangente vendrá dada por:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Velocidad de una partícula

Imaginemos ahora una partícula que se mueve rectilíneamente recorriendo un espacio definido por una función e(t), que expresa la dependencia de la distancia recorrida, e, respecto del tiempo, t. (En la figura, la "partícula" es un *dos caballos).*



Si quisiéramos definir la velocidad en el instante t_o, dado que el cociente

$$\frac{e(t_1) - e(t_o)}{t_1 - t_o}$$

es la velocidad media en el intervalo de tiempo comprendido entre t_o y t_1, bastaría considerar velocidades medias entre instantes cada vez más próximos, instantes que *tendieran a confundirse*. Y como eso es bastante impreciso, la cuestión se resuelve definiendo la velocidad en el instante t_o así:

$$v(t_o) = \lim_{t_1 \to t_o} \frac{e(t_1) - e(t_o)}{t_1 - t_o}$$

O también, llamando Δt a la diferencia t_1 - t_o:

$$v(t_o) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(t_o + \Delta t) - e(t_o)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

Observa que la velocidad instantánea es un concepto teórico, una abstracción, que no corresponde exactamente a ninguna magnitud medible; aunque sería erróneo decir que no tiene nada que ver con una magnitud que sí lo es, como la velocidad media. La velocidad en el instante t_o **no es igual** al cociente:

$$\frac{e(t_o + \Delta t) - e(t_o)}{\Delta t}$$

para ningún valor de Δt, pero **sí es igual** al valor del límite para $\Delta t \to 0$ del cociente anterior, calculado matemáticamente. Así, pues, cuando los físicos miden velocidades, lo hacen para intervalos de tiempo, por pequeños que éstos sean.

En resumen, que problemas aparentemente tan dispares como obtener la tangente a una curva o calcular una velocidad instantánea encuentran su solución con la misma herramienta. Será cuestión de darle nombre propio.

Definición (de derivada de una función en un punto)

➪ Sea y = f(x) una función real de variable real. Diremos que f(x) es *derivable en un punto* x_o si existe y es finito:

$$\boxed{\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}}$$

➪ Tal límite, que también puede expresarse como:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

recibe el nombre de *derivada de la función* f(x) *en el punto* x_o y se representa normalmente por $f'(x_o)$, aunque también son utilizadas expresiones como $y'(x_o)$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_o}$, etc.

➪ Observa finalmente que, escribiendo $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, se tendría:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

expresión que permite interpretar la derivada de f(x) en el punto x_0 como el *límite del cociente entre el incremento de la función y el incremento de la variable independiente, cuando éste último tiende a cero.*

Una pregunta

¿Cuál será la ecuación de la tangente a la curva y = f(x) en un punto x_0 en el que sea derivable?

Ejemplos

➪ ① Una forma de calcular la derivada de $f(x) = x^2$ en el punto $x_0 = 5$, sería ésta:

1º) Hallaríamos $f(x_0) = 5^2 = 25$

2º) Calcularíamos $f(x_0+\Delta x) = (5 + \Delta x)^2 = 25 + 10.\Delta x + (\Delta x)^2$

3º) Obtendríamos $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = 10.\Delta x + (\Delta x)^2$

4º) Hallaríamos $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 10 + \Delta x$

5º) Finalmente, calcularíamos $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (10 + \Delta x) = 10$

➪ ② Siendo $f(x) = |x|$, comprueba que:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

y, que, en consecuencia, $f(x) = |x|$ **no** es derivable en el punto x = 0.

Teorema (la derivabilidad implica la continuidad)

Si una función es derivable en un punto x_0, entonces es continua en dicho punto.

En efecto, si siendo $x \neq x_0$, escribimos: $$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$
y tomamos límites para $x \to x_0$, se tendrá:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) . 0 = 0$$

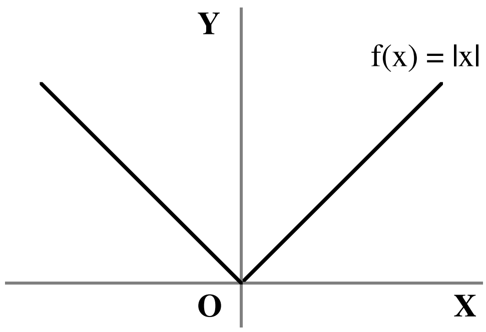
luego $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ y, por tanto, f (x) es continua en x_0.

Advertencia importante

El teorema recíproco del anterior no es cierto. Así, por citar el más típico de los ejemplos, la función $f(x) = |x|$ es continua en el punto $x_0 = 0$ y, sin embargo, como hemos dicho líneas atrás, no es derivable en dicho punto.

Observación

Es importante reflexionar sobre el teorema y la advertencia precedentes, que expresan la relación entre la continuidad y la derivabilidad y marcan la diferencia entre una y otra.



En la figura puedes observar la gráfica de la función $f(x) = |x|$. Se trata de una función continua en todo **R**, pero existe un punto en el que no es derivable (x= 0). Justamente aquel en el que la gráfica parece *quebrarse* (aunque no se *rompa).* Si, hablando sin mucha precisión, las funciones continuas eran aquellas cuyas gráficas podían dibujarse sin levantar el lápiz del papel -no estaban *rotas-,* con el mismo lenguaje podríamos decir que las funciones derivables son las que, además de ser continuas, tienen gráficas que no se *quiebran* o, con más precisión, funciones tales que a incrementos infinitésimales de la variable corresponden incrementos de igual orden de la función, de manera que el $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ es un número real.

Evidentemente, este lenguaje que utiliza expresiones como *roto, brusco, quebrada,* etc., aunque sumamente intuitivo, es demasiado ambiguo; por eso precisamente se dan las definiciones matemáticas. No se trata, como puedes figurarte, de introducir dificultades, sino de todo lo contrario.

Definiciones (de funciones derivables en un intervalo)

① Diremos que una función $f(x)$ es *derivable* en un intervalo *abierto* (a, b) si es derivable en todo punto $x_0 \in (a, b)$.

② Diremos que una función $f(x)$ es *derivable* en un intervalo *cerrado* $[a, b]$ si es derivable en el intervalo abierto (a, b) y, además, existen y son finitos:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad ; \qquad \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

Por cierto: a los límites anteriores, si existen y son finitos, se les llama ***derivadas laterales*** a derecha e izquierda, en los puntos *a* y *b,* respectivamente, de la función $f(x)$.

Ejercicio

Comprueba que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es derivable en el intervalo abierto $(0, 1)$. ¿Lo es también en el intervalo cerrado $[0, 1]$?

3. FUNCIÓN DERIVADA

Ejemplo previo

Supón que dada $f(x) = x^3$ quisiéramos obtener $f'(2)$. Tendríamos que calcular:

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \;,\; \text{o bien}: \quad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

Si, posteriormente, necesitáramos conocer $f'(5)$, tendríamos que calcular:

$$\lim_{x\to 5} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} \;,\; \text{o bien}: \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(5+\Delta x)-f(5)}{\Delta x}$$

Pero, ¿quién nos diría que no tendríamos necesidad de conocer $f'(8)$, o $f'(3)$, o...?

Por ello, lo mejor sería ver que:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(a+\Delta x)^3 - a^3}{\Delta x} = 3a^2; \quad \forall\, a \in \mathbf{R}$$

y, en consecuencia, el cálculo de $f'(2)$, $f'(5)$, $f'(8)$, etc., sería inmediato, pues bastaría hallar las imágenes de 2, 5, 8... mediante la función:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{f'} & \mathbf{R} \\ a & \longrightarrow & 3a^2 \end{array}$$

Definición (de función derivada)

☞ Dada una función $f(x)$, designaremos por $f'(x)$ y llamaremos *función derivada* de $f(x)$ o, simplemente, derivada de $f(x)$, a la función:

$$\begin{array}{cccc} f': & \mathbf{A} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & a & \longrightarrow & f'(a) \end{array}$$

que a cada punto a en el cual $f(x)$ sea derivable hace corresponder como imagen $f'(a)$.

Ejemplos

① Comprueba que, si $f(x) = x^5 + 3x^2$, entonces $f'(x) = 5x^4 + 6x$.

② Comprueba que, si $f(x) = \text{sen } x$, entonces $f'(x) = \cos x$.

Te será de utilidad recordar que, según debiste demostrar en el capítulo anterior, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

Definiciones (de derivadas sucesivas)

① Definida la función derivada de f(x), tiene sentido hablar de:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

A tal límite, cuando exista, lo llamaremos *derivada segunda* de la función f(x) en el punto a y lo representaremos por $f''(a)$.

② Por función *derivada segunda* de f(x) se entenderá la función

$$\begin{aligned} f'': \mathbf{B} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ a &\longrightarrow f''(a) \end{aligned}$$

que a cada punto a en el cual $f'(x)$ sea derivable hace corresponder como imagen $f''(a)$.

En otras palabras: la derivada segunda de f(x) es la derivada de la derivada de f(x).

③ Reiterando el proceso, se pueden definir las derivadas tercera, cuarta..., n-ésima de f(x) en un punto *a* y las funciones derivadas tercera, cuarta..., n-ésima de la función f(x). A la derivada n-ésima de f(x) la representaremos por $f^{(n}(x)$.

4. REGLAS DE DERIVACIÓN

Visto ya que el conocimiento de la función derivada de f(x) convierte en trivial el cálculo de la derivada de f(x) en cualquier punto, es claro que la simplificación aún es mayor cuando se dispone de unas reglas que permiten calcular *mecánicamente* la función derivada de otra. Como sabes, la mayoría de las funciones al uso son resultado de operaciones entre las llamadas funciones *elementales*. Por eso, antes de recordar cuáles son las derivadas de tales funciones, repasaremos qué ocurría con las derivadas, cuando se sumaban, multiplicaban, dividían o componían las funciones. Las demostraciones de lo que sigue son sencillas (salvo la de la *regla de la cadena)*, y puedes hacerlas por ti mismo.

Operaciones con funciones derivables

Derivada de una suma	➠	$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
Derivada de un producto	➠	$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
Derivada de un cociente	➠	$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$
Derivada de una función compuesta *(regla de la cadena)*	➠	$(f \circ g)'(a) = f'[g(a)] \cdot g'(a)$

Todo ello, en el supuesto de que f(x), g(x) son derivables en el punto a, que $g(a) \neq 0$ en el caso del cociente, y que f(x) es derivable en g(a), en el caso de la función compuesta.

Derivadas de las funciones elementales

Las derivadas de las funciones que se indican, son las siguientes:

Función	*Derivada*
K	0
x	1
$\ln x$	$\frac{1}{x}$, $x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \,.\, \ln a}$, $x > 0$
x^k, $k \in \mathbf{R}$	$k \,.\, x^{k-1}$
a^x	$a^x . \ln a$
e^x	e^x
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tag} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{arc\,sen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \neq \pm 1$
$\operatorname{arc\,cos} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \neq \pm 1$
$\operatorname{arc\,tag} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Ejemplo

Comprueba que la derivada de: $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ es $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.
¿Para qué valores de x existe $f'(x)$?

5. EJERCICIOS

1.- Partiendo de la definición de derivada de una función en un punto, demuestra:

$$① \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(a) = -\frac{1}{a^2} \quad , \forall\, a \neq 0$$

$$② \quad f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(a) = \frac{1}{a} \quad , \forall\, a > 0$$

2.- Siendo $f(x) = x^3$, calcula $f[f'(x)]$, $f'[f(x)]$, $[f(x^2)]'$, $f'[f(x^2)]$.

3.- Se consideran las funciones $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$, $g(x) = \text{tag}\, x$, $h(x) = e^{\cos x}$. Calcula:

$$f'(2)\ ,\ g'\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\ ,\ h'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\ ,\ (f_o g)'\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\ ,\ (g_o f)'(1)$$

4.- Obtén la derivada de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & , \text{si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿Es $f'(x)$ continua en $x = 0$? ¿Es derivable en ese punto?

5.- Averigua los valores que han de tomar *a* y *b* para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & , \text{ si } \quad x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & , \text{ si } \quad x > 2 \end{cases}$$

sea derivable en todo punto de **R**.

6.- Determina, si es que existen, los valores de *a* y *b* para los que la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & , \text{si } \ |x| \leq 3 \\ \dfrac{1}{|x|} & , \text{si } \ |x| > 3 \end{cases}$$

es derivable en el punto $x = 3$.

7.- De cierta función $g(x)$ se sabe que es continua en el punto $x = 0$. Demuestra que, entonces, la función $f(x) = x.g(x)$ es derivable en $x = 0$.

8.- Halla las derivadas primera y segunda de la función $f(x) = x.|x|$.

9.- Estudia si la función $f(x) = \left|x^2 - 4x - 5\right|$ es derivable en los puntos de su gráfica pertenecientes al eje de abscisas.

10.- Escribe una función que sea derivable en todo **R**, salvo en el punto $x = \dfrac{4}{5}$.

11.- Halla las derivadas de las siguientes funciones:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{\sqrt[3]{x}} \qquad \frac{(1+x^2)\,\text{arctag}\,x - x}{2} \qquad \sqrt{\cos^2 x^3 + \text{tag}^2 x}$$

$$\ln\sqrt{\frac{1+\text{tag}\,x}{1-\text{tag}\,x}} \qquad \text{arctag}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \qquad \text{arcsen}\sqrt{x^3 - 5x^2}$$

$$(\text{tag}\,x)^x \qquad \text{sen}^3\left[(x^2+\text{sen}\,x)^3\right] \qquad \text{sen}^3[\text{sen}^2(\text{sen}\,x)]$$

$$\log_x(2x^2-1) \qquad \log^x(x^2-1) \qquad \text{arcsen}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\ln\frac{1+\sqrt{\text{sen}\,x}}{1-\sqrt{\text{sen}\,x}} \qquad e^{\ln\ \text{arc sen}\sqrt{1-x^2}} \qquad 2\,\text{arctag}\sqrt{x}$$

12.- Calcula las ecuaciones de las tangentes a las siguientes curvas, en los puntos dados:

1) A la curva $y = \text{arc sen}\ \frac{x-1}{2}$ en el punto de intersección con el eje OX.

2) A la curva $y = \text{arc cos}\ 3x$ en el punto de intersección con el eje de ordenadas.

3) A la curva $y = x^3$ en el punto $x = 0$ (haz un dibujo al respecto).

13.- Halla los puntos de la curva $y = \frac{x}{1-x^2}$ en los que la tangente tiene una inclinación de 45° respecto del eje OX.

14.- Calcula la pendiente de la tangente a la circunferencia: $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 17 = 0$ en el punto de abscisa 1 y ordenada positiva. (Sugerencia: No es preciso despejar *y* para obtener *y'*).

15.- Halla las derivadas segundas de las funciones:

$$f(x) = (1+x^2)\,\text{arctag}\ x\ ; \quad g(x) = \ln\ (x + \sqrt{a^2+x^2})$$

16.- Demuestra que siendo $y = e^{2x}$ sen 5x, se verifica: $y'' - 4y' + 29\,y = 0$.

17.- Halla la derivada n-ésima de las siguientes funciones:

$$f(x) = \text{sen}\ x \qquad g(x) = e^{-3x} \qquad h(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$j(x) = \frac{x+1}{x-1} \qquad k(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-2} \qquad l(x) = \frac{x^2+7x+11}{x^2+5x+6}$$

TEMA 8

FUNCIONES DERIVABLES

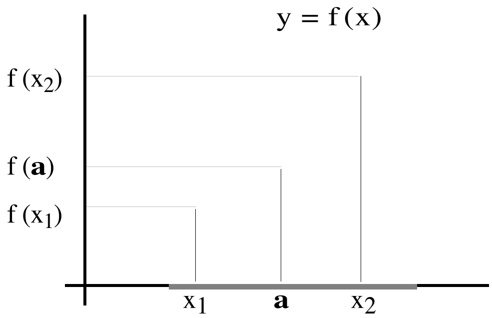
1. INTRODUCCIÓN

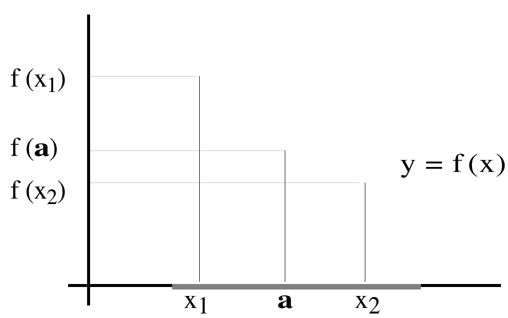
En el capítulo anterior hemos recordado el concepto de derivada en sus dos acepciones: derivada de una función en un punto y función derivada de otra; en éste, empezaremos a sacar provecho de lo hecho hasta ahora. La primera parte del capítulo tratará de la aplicación de la derivada al estudio del crecimiento y decrecimiento y a la determinación de los máximos y mínimos relativos de una función; son cuestiones ya conocidas de otros cursos que, aunque aquí sean tratadas con algo más de rigor, no te supondrán mayor novedad: si has olvidado, por ejemplo, cómo averiguar cuál es el bote de conservas cilíndrico más económico, ahora tendrás ocasión de recordarlo. En la segunda parte estudiaremos los teoremas de Rolle, del valor medio, de Cauchy, la regla de l'Hôpital..., resultados cumbres del pensamiento científico, que verás por primera vez en estas páginas y no te abandonarán mientras sigas teniendo algo que ver con las matemáticas.

2. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Definiciones (de función creciente y decreciente)

Si observas detenidamente las figuras siguientes:





te resultará razonable que digamos:

① Una función es *creciente en un punto* $a \in \mathbf{R}$ si existe un entorno E(a) tal que:

$$x \in E(a) \wedge \begin{cases} x < a \;\Rightarrow\; f(x) < f(a) \\ x > a \;\Rightarrow\; f(x) > f(a) \end{cases}$$

② Una función es *decreciente en un punto* $a \in \mathbf{R}$ si existe un entorno E(a) tal que:

$$x \in E(a) \wedge \begin{cases} x < a \;\Rightarrow\; f(x) > f(a) \\ x > a \;\Rightarrow\; f(x) < f(a) \end{cases}$$

☞ Por extensión, diremos que una función es *creciente (decreciente) en un intervalo abierto* cuando sea creciente (decreciente) en todos los puntos del intervalo.

Teorema (sobre la relación signo de la derivada-crecimiento)

Sea f(x) una función derivable en un punto $a \in \mathbf{R}$. Entonces:

$f'(a) > 0 \Rightarrow$	la función es creciente en a.
$f'(a) < 0 \Rightarrow$	la función es decreciente en a.

En efecto. Supongamos, por ejemplo, que $f'(a) = k > 0$; o sea:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = k > 0$$

Tomado entonces el entorno de centro k y radio $\frac{k}{2}$, podrá asegurarse, en virtud de la definición de límite, que el cociente $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se hallará en él, y por lo tanto será positivo, sin más que tomar *x* perteneciente a cierto entorno reducido de a, $E'(a)$.

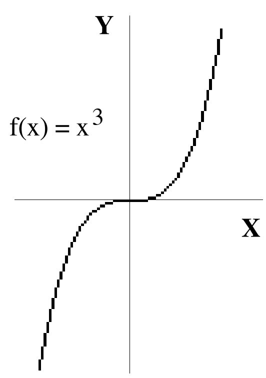
Pero, entonces: $\begin{cases} x \in E'(a), \text{ con } x < a \text{ , implicaría } f(x) < f(a) \\ x \in E'(a), \text{ con } x > a \text{ , implicaría } f(x) > f(a) \end{cases}$

y por tanto la función f sería creciente en a.

En el caso en que $f'(a) < 0$, se procede de forma análoga.

Advertencia

El que la derivada de f (x) en el punto a sea positiva (negativa) constituye, como acabamos de ver, una *condición suficiente* para que la función sea creciente (decreciente) en dicho punto, pero *no es una condición necesaria.*



Así, por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es creciente en el punto $a = 0$ y, sin embargo, su derivada en dicho punto no es positiva. ¿De acuerdo?

Ejemplo

Sea $f(x) = x^2 - 2x + 8$. Como $f'(x) = 2x - 2$ y sucede:

$$\begin{cases} 2x - 2 > 0 \iff x > 1 \\ 2x - 2 < 0 \iff x < 1 \end{cases}$$

la función será decreciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y creciente en el intervalo $(1, \infty)$.

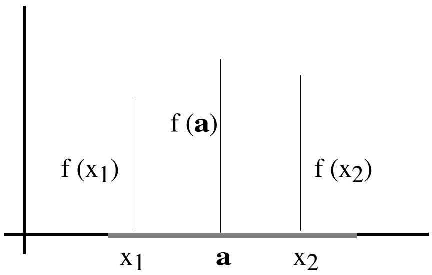
3. MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES

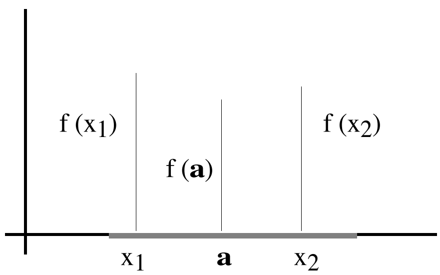
Una de las aplicaciones más útiles de la derivada es, como sabes, la referida a la obtención de los máximos y mínimos locales o relativos de una función (aunque se trata de conceptos relacionados, no debes confundir estos *extremos locales* con los *absolutos,* que fueron definidos en la página 135). Empecemos estableciendo tales conceptos.

Definiciones (de máximo y mínimo local)

1) Diremos que una función $y = f(x)$ tiene un *máximo local o relativo* en un punto a cuando exista un entorno E(a) tal que $\forall x \in E(a)$ sea $f(x) \leq f(a)$.

2) Diremos que una función $y = f(x)$ tiene un *mínimo local o relativo* en un punto a cuando exista un entorno E(a) tal que $\forall x \in E(a)$ sea $f(x) \geq f(a)$.





Teorema (condición necesaria para la existencia de extremos locales)

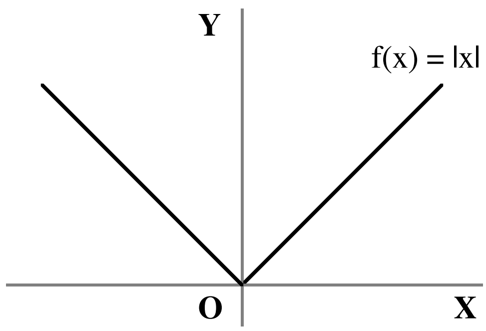
> La condición *necesaria* para que una función f(x), derivable en un punto $a \in \mathbf{R}$, tenga un máximo o un mínimo local en dicho punto es que $f'(a) = 0$.

En efecto: Si fuera $f'(a) \neq 0$, se tendría, o bien $f'(a) > 0$, o bien $f'(a) < 0$, y la función sería creciente o decreciente en a, donde no podría haber ni máximo ni mínimo local.

Dos observaciones:

La primera, que la anterior **no** es condición suficiente para la existencia de extremos locales. En la página anterior hemos visto que siendo $f(x) = x^3$, se tiene $f'(0) = 0$, y en tal punto la función no tiene ni máximo ni mínimo local: es creciente.

La segunda, que $f'(a) = 0$ es, efectivamente, una condición necesaria para la existencia de extremo local, pero en el supuesto de que f(x) sea derivable en el punto a. El ejemplo más sencillo para ilustrar lo que decimos lo constituye la función $f(x) = |x|$, de la que ya hemos hablado en otras ocasiones. En a = 0 tiene un mínimo local y en ese punto la función ni siquiera es derivable.



Siguen las observaciones

Como ves, el teorema anterior permite seleccionar los puntos, de entre aquellos en los que f(x) es derivable, en los que *puede* haber máximos o mínimos relativos; pero aun en ellos, no despeja totalmente las dudas. Así, considera la función:

$$f(x) = 3x^4 - 28x^3 + 60x^2 + 5$$

Su derivada se anula en los puntos x = 0, x = 2, x = 5, pero ¿cómo saber si, efectivamente, alcanza valores máximos o mínimos locales en ellos?

Teorema (una condición suficiente para la existencia de extremos locales)

Sean f(x) una función y $a \in \mathbf{R}$ un punto tales que $\mathbf{f'(a) = 0}$. Entonces: ☞

$$\begin{cases} f''(a) < 0 \Rightarrow & \text{en a existe un máximo local.} \\ f''(a) > 0 \Rightarrow & \text{en a existe un mínimo local.} \end{cases}$$

En efecto. Supongamos f'(a) = 0, f''(a) < 0. Se tendrá:

$$f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{x - a} < 0$$

luego existe un entorno E(a) = (a – δ, a + δ) en el que el cociente $\frac{f'(x)}{x-a}$, $x \neq a$, es negativo, es decir, en el que f'(x) es positiva a la izquierda del punto a y negativa a la derecha de a.

Por otra parte, como f(x) es derivable en el intervalo (a - δ, a + δ), será continua en el intervalo cerrado $[a - \frac{\delta}{2}, a + \frac{\delta}{2}]$, donde, en virtud del teorema de Weierstrass, alcanzará un máximo absoluto. ¿En qué punto? Debido a que a la izquierda de a la función f(x) es creciente (f'(x) > 0) y a la derecha decreciente (f'(x) < 0), el único punto en el que lo puede alcanzar es en el a.

El teorema queda finalmente demostrado sin más que observar que dicho máximo absoluto también es local (si no lo *ves,* intenta dibujar una función continua en un intervalo cerrado con el máximo absoluto en un punto del interior, sin que dicho máximo absoluto sea local).

En el caso f'(a) = 0, f''(a) > 0, la demostración es análoga.

Observaciones

1.- Ahora podemos concluir que la función que antes mencionábamos, $f(x) = 3x^4 - 28x^3 + 60x^2 + 5$, alcanza en x = 0 y x = 5 mínimos locales y en x = 2 un máximo local.

2.- Naturalmente, podría uno preguntarse que sucederá en puntos en los que, anulándose la derivada primera de una función f(x), también se anule la segunda. Pues puede que haya un máximo local, puede que un mínimo local, o puede que ni lo uno ni lo otro, como puedes comprobar si dibujas las gráficas de las funciones $f(x) = x^3$ y de $f(x) = x^4$ y miras qué sucede, en ambos casos, con f'(0) y f''(0). La cuestión será resuelta definitivamente en el próximo capítulo.

4. TEOREMA DE ROLLE

Teorema (de Rolle)

> Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un punto $\alpha \in (a, b)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

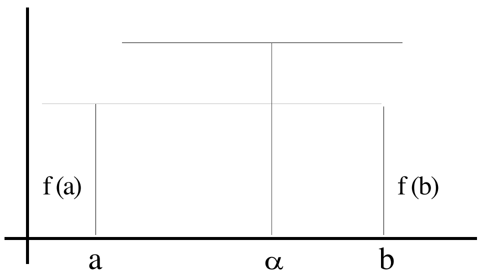
En efecto. Si recuerdas el teorema de Weierstrass (página 136), la demostración de éste te resultará fácil: Como $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, alcanza en él un máximo y un mínimo absolutos y, entonces, una de dos:

➨ O bien cada uno de esos valores los toma en los extremos del intervalo, y eso supondría, al ser $f(a) = f(b)$, que los valores máximo y mínimo de la función en el intervalo coincidirían, luego la función sería constante, con derivada nula en todos los puntos de (a, b),

➨ O bien uno al menos de esos valores los toma en un punto interior α, de (a, b). Pero ese máximo o mínimo absoluto sería local -¿por qué?- y, en consecuencia, siendo la función $f(x)$ derivable en (a, b), habrá de ser $f'(\alpha) = 0$.

Interpretación geométrica

Una interesante interpretación geométrica del teorema de Rolle es la que se desprende de la figura adjunta: Trazada la gráfica de la función $f(x)$, existe al menos un punto en el interior del intervalo (a, b) en el que la tangente a la curva, al tener pendiente nula, es horizontal.



Ejemplo

La función $f(x) = x^2 - 8x$ es continua en el intervalo $[3, 5]$ y derivable en $(3, 5)$, luego existirá $\alpha \in (3, 5)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Ahora bien, como $f'(x) = 2x - 8$, tendremos que $f'(4) = 0$; luego, en este caso, *el* α del teorema es igual a 4.

Una interpretación física

Supón que la $f(x)$ del teorema de Rolle indicara la posición de un punto en movimiento rectilíneo en función del tiempo. La igualdad $f(b) = f(a)$ significaría que al cabo del tiempo $b - a$ el móvil se encontraría en el punto de partida, luego al ser $f'(\alpha) = 0$ para algún $\alpha \in (a, b)$, lo que el teorema indicaría es que la velocidad ha sido nula en algún momento. O sea, que o bien no se ha producido realmente movimiento o bien ha habido al menos un momento en el que, al dejar de avanzar, y retroceder, el móvil se ha detenido.

5. TEOREMAS DEL VALOR MEDIO

Teorema (de Cauchy o del valor medio generalizado)

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), entonces existe al menos un punto $\alpha \in (a, b)$ tal que:

$$[f(b) - f(a)].g'(\alpha) = [g(b) - g(a)].f'(\alpha)$$

(O bien tal que: $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$ si los denominadores no son nulos)

En efecto. La función:

$$h(x) = [\, f(b) - f(a)\,] \,.\, g(x) - [\, g(b) - g(a)\,] \,.\, f(x)$$

es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y cumple: $h(a) = h(b)$. Entonces, en virtud del teorema de Rolle, existirá al menos un punto $\alpha \in (a, b)$ tal que $h'(\alpha) = 0$. Pero como:

$$h'(\alpha) = [\, f(b) - f(a)\,] \,.\, g'(\alpha) - [\, g(b) - g(a)\,] \,.\, f'(\alpha),$$

se concluye lo que habíamos anunciado.

Observa que el teorema de Cauchy permite comparar el incremento experimentado por las dos funciones a lo largo del intervalo [a, b] comparando sus derivadas en un punto interior. Buscarle una interpretación geométrica es algo más complicado que en el caso anterior; pero, sin embargo, desde un punto de vista físico, lo que se deduce de lo demostrado es que la relación entre los espacios recorridos por dos móviles en un mismo intervalo de tiempo coincide con la relación entre sus velocidades en un instante determinado.

Teorema (del valor medio)

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe al menos un punto $\alpha \in (a, b)$ tal que:

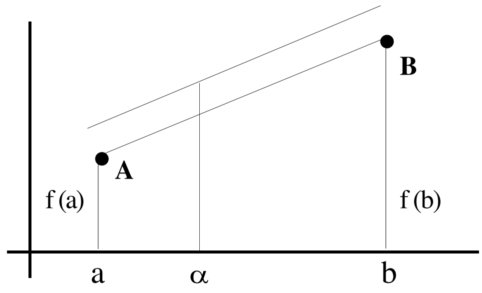
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\alpha)$$

La demostración es sencilla: Las funciones $f(x)$ y $g(x) = x$, son continuas en el intervalo $[a, b]$ y derivables en (a, b), luego existirá al menos un punto α en (a, b) tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}, \text{ o sea: } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\alpha)$$

Interpretación geométrica

Si observas la figura de la derecha, te percatarás de que el teorema del valor medio, desde un punto de vista geométrico, significa que existe al menos un punto en el arco de curva AB en el que la tangente es paralela a la secante que pasa por A y B, al tener ambas rectas igual pendiente.



Una interpretación física

Considera un movimiento rectilíneo de ecuación e = f (t), con f (t) derivable en **R**. ¿Habrá un instante entre t_0 y t_1 en el que la velocidad coincida con la velocidad media a lo largo de ese intervalo?

Observación

Antes de seguir, parece conveniente hacer alguna apostilla sobre la fórmula:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\alpha)$$

llamada *fórmula de los incrementos finitos*. El hecho de que el teorema asegure la existencia del punto α, pero lo deje indeterminado, no le priva de trascendencia, y sobre ello tendremos ocasión de hablar con más detalle en el capítulo próximo. Por el momento, podemos decir que la fórmula anterior puede utilizarse para acotar el valor de f (x) en *lugares* en los que f'(x) esté acotada.

Así, por ejemplo, intentemos acotar el valor de $\sqrt{83}$.

Buscamos los "cuadrados perfectos" inmediatamente anterior y posterior a 83:

$$9^2 = 81 \; ; \; 10^2 = 100$$

Aplicando ahora el teorema del valor medio a la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo [81, 83], se tendrá:

$$\frac{\sqrt{83} - \sqrt{81}}{83 - 81} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \; , \quad \text{con} \quad 81 < \alpha < 83$$

O sea:

$$\sqrt{83} = 9 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \; , \quad \text{con} \quad 81 < \alpha < 83$$

Ahora bien:

$$81 < \alpha < 83 \Rightarrow 81 < \alpha < 100 \Rightarrow 9 < \sqrt{\alpha} < 10 \Rightarrow \frac{1}{10} < \frac{1}{\sqrt{\alpha}} < \frac{1}{9}$$

luego:

$$\boxed{9 + \frac{1}{10} < \sqrt{83} < 9 + \frac{1}{9}}$$

Corolario

☞ *Si $f(x)$ es una función tal que $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es constante en (a, b).*

En efecto. Si tomas un intervalo cerrado $[a', b']$ contenido en (a, b), $f(x)$ será continua en $[a', b']$ y derivable en (a', b'), luego existirá $\alpha \in (a', b')$ tal que:

$$\frac{f(b') - f(a')}{b' - a'} = f'(\alpha) = 0$$

o sea: $f(b') = f(a')$, de donde, al ser a', b' arbitrarios, se deduce la tesis.

O sea, que no sólo es cierto que la derivada de una constante es cero, sino que si una función tiene derivada nula en un intervalo, tal función es constante en el intervalo.

Otro corolario

☞ *Si $f(x)$, $g(x)$ son dos funciones tales que $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in (a, b)$, entonces existe $k \in \boldsymbol{R}$ tal que, en dicho intervalo, $f(x) = g(x) + k$.*

Es decir, *si dos funciones tienen igual derivada, difieren en una constante.*

Para demostrarlo, basta aplicar el corolario anterior a la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

6. REGLA DE L'HÔPITAL

Una de las más importantes consecuencias del teorema de Cauchy es el teorema que sigue, conocido como regla de l'Hôpital. Aunque en él se encierre un procedimiento muy útil para calcular cierto tipo de límites, sus mayores beneficios, de otro tipo, se pondrán de manifiesto en el próximo capítulo.

Teorema (Regla de l'Hôpital)

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ y existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, verificándose:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Efectuaremos la demostración en dos partes.

➪ Primero, veamos qué tenemos.

1) La hipótesis de que existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, supongamos que es igual a L, garantiza que existe un entorno E(a) tal que $f(x)$ y $g(x)$ son derivables y $g'(x)$ no se anula en E'(a).

En caso contrario, o sea, si todo entorno de a contuviera puntos en los que f(x) o g(x) no fueran derivables, o g'(x) tomara el valor 0, no cabría que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, pues ello exige que la función $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ esté definida en un entorno de a.

2) Además, podemos suponer que f(a) = g(a) = 0, porque aunque no fuese así inicialmente, podríamos cambiar el valor de las funciones en a, ya que para la existencia y, en su caso, valor de los límites para $x \to a$, es indiferente lo que ocurra precisamente en a.

3) En tal caso, cualquiera que sea $x \in E'(a)$ (supongamos x > a), la función g no se anula en (a, x], porque de anularse en un punto y, con $a < y \leq x$, g cumpliría las condiciones del teorema de Rolle en [a, y], luego existiría $\beta \in (a, y)$ (y, por tanto, $\beta \in (a, x)$, que está contenido en E'(a)) tal que $g'(\beta) = 0$, contra lo dicho en 1)

➪ Segundo:

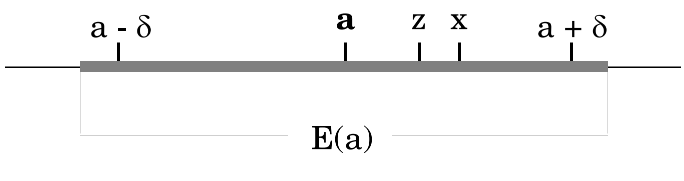
Como consecuencia de todo lo anterior, cualquiera que sea $x \in E'(a)$ (supongamos x > a), f y g cumplen las hipótesis de Cauchy en [a, x], luego existirá un $z \in (a, x)$ tal que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}, \text{ es decir: } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Pero, siendo $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(z)}{g'(z)} = L$, se tendrá que para todo $\varepsilon > 0$ existirá $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |z - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - L \right| < \varepsilon$$

y en esas condiciones, fijado $\varepsilon > 0$ bastará tomar *un* $x \in E'(a)$ que verifique: $0 < |x - a| < \delta$, con lo cual será $0 < |z - a| < \delta$, como se observa en el esquema:



para que se cumpla: $\left| \dfrac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \dfrac{f'(z)}{g'(z)} - L \right| < \varepsilon$

En resumen: ➪ $$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Ejemplo

Afortunadamente, la regla de l'Hôpital es mucho más fácil de aplicar que de demostrar. Así, por ejemplo, supongamos que se desea calcular:

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 4x - 5} .$$

Cumpliéndose las hipótesis del teorema, se tendrá:

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 4x - 5} = \lim_{x\to 5} \frac{2x - 6}{2x - 4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} .$$

Observación importante

Puede demostrarse, aunque aquí no lo hagamos, que la regla de l'Hôpital también es válida para calcular límites en los que $x \to \infty$, y para *deshacer* indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, si se nos permite tal simbolismo. Asimismo, mediante artificios sencillos, se puede aplicar a indeterminaciones del tipo $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ó 1^{∞}.

Para calcular $\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right]$, por ejemplo, procederíamos así:

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right] = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x . \operatorname{sen} x} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x . \cos x} \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x . \operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0$$

Como ves, el *truco* ha consistido en transformar la expresión inicial en un cociente, para así poder aplicar la regla. También habrás notado que hay ocasiones en que el teorema de l'Hôpital ha de ser aplicado más de una vez. En el ejemplo precedente lo hemos aplicado en los *pasos* (1) y (2).

Otros ejemplos

1.- Comprueba que $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = 0 .$

Sugerencia: Con objeto de transformar $(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ en un cociente, único tipo de expresión a la que puede aplicarse la regla de l'Hôpital, escribe $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ y toma logaritmos neperianos.

2.- Comprueba que $\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^n} = 0 \; ; \quad (n \in \mathbf{N})$

7. EJERCICIOS

1.- Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x - 16}; \qquad g(x) = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}; \qquad h(x) = \ln(1 + x^2)$$

$$j(x) = x.\ln x; \qquad ; \qquad k(x) = x + \operatorname{sen} x; \qquad p(x) = \ln[(x-1)(x-2)]$$

2.- Determina los máximos y mínimos relativos de las funciones:

$$f(x) = x.(x-1)^2.(x-2)^3 \qquad g(x) = x - \ln(1+x)$$

$$h(x) = \frac{x}{2}[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)] \qquad k(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$$

3.- Determina los valores máximo y mínimo absolutos de las funciones que se indican, en los intervalos correspondientes:

1º) $f(x) = x^2 - 2x$, en $[-2, 5]$

2º) $g(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$, en $[-2, 2]$

3º) $h(x) = \operatorname{sen}^2 x$, en $[\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}]$

4.- Aplica, si es posible, el teorema de Rolle a las funciones que se indican, en los intervalos correspondientes:

$$f(x) = x^2 - 5x + 8, \text{ en } [-2, 5] \qquad g(x) = \operatorname{tag} x, \text{ en } [0, \pi]$$

$$h(x) = x^2 + \frac{2}{x}, \text{ en } [-2, 1] \qquad j(x) = |\cos x|, \text{ en } [0, \pi]$$

5.- Para cada una de las funciones e intervalos que se indican a continuación, se cumple $f(a) = f(b)$ y, sin embargo, no existe ningún $\alpha \in (a, b)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Explica en cada caso por qué no se contradice el teorema de Rolle:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, en $[-2, 2]$. 2) $f(x) = 1 - |x|$, en $[-1, 1]$.

6.- La función: $$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 5 & \text{si } x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4]. Halla a, b y c y determina en qué punto(s) se verifica lo asegurado por el teorema.

7.- Si la derivada de una función $f(x)$ es positiva en todo punto $x \in \mathbf{R}$, ¿pueden existir dos puntos $a, b \in \mathbf{R}$ tales que $f(a) = f(b)$?

8.- Demuestra que $x = 0$ es la única raíz real de la ecuación $5x^9 + 3x^5 + 7x = 0$.

9.- Siendo $f(x) = x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$, demuestra que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene tres raíces reales.

10.- La ecuación $e^x = 1 + x$ tiene una raíz real en $x = 0$. Demuestra que es la única.

11.- Determina los valores de a y b tales que la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x < 3 \\ x^2 + 4x + b & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 8]. ¿En qué punto(s) se verifica la tesis?

12.- Aplica, si es posible, el teorema del valor medio a las funciones que se indican, en los intervalos correspondientes:

$f(x) = x^2 - 3x + 4$, en $[-2, 3]$ $\qquad$ $g(x) = x - x^3$, en $[-2, 1]$.

13.- Calcula un valor aproximado de $\sqrt{170}$, haciendo uso del teorema del valor medio.

14.- Aplica, si es posible, el teorema de Cauchy a las funciones que se indican, en los intervalos correspondientes:

1) $f(x) = x^2 + 2$, $\quad g(x) = x^3 - 1$, en $[1, 2]$

2) $f(x) = \text{sen } x$, $\quad g(x) = \cos x$, en $[0, \frac{\pi}{2}]$.

15.- Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \text{sen } x}{1 - \cos x} \qquad \lim_{x\to 0} x \cdot \ln x \qquad \lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\text{tag } x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\text{tag}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1}{\text{sen } x} \qquad \lim_{x\to 1} \left[\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x - 1}\right]$$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{a} - 1\right) \qquad \lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 5x + 6} \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x}\right)^{\text{sen } x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{\text{sen } x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x - x}{x - \text{tag } x} \qquad \lim_{x\to 0} (\cos 4x)^{\frac{5}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{4}{x^2} - \frac{2}{1 - \cos x}\right) \qquad \lim_{x\to 4} \frac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{\text{tag } x} - e^x}{\text{tag } x - x}$$

TEMA 9

APROXIMACIÓN LOCAL A UNA FUNCIÓN

1. INTRODUCCIÓN

Presentamos en este capítulo lo que, por su fecundidad, constituye un resultado central del cálculo diferencial: la aproximación polinómica de una función. Exageraríamos si dijéramos que casi todo el cálculo en matemáticas puede reducirse a sumar, restar, multiplicar y dividir, porque para llegar a esa conclusión hacen falta unos conocimientos teóricos que no se reducen a las *cuatro reglas;* pero en lo que sigue veremos que tal afirmación tiene más fundamento del que en un principio pudiera parecer.

Antes, permítenos contarte una pequeña historia: En un papiro escrito hacia el año 1700 a. de C. aparece el primer cálculo del número π (cociente entre la longitud de la circunferencia y el diámetro), asignándole el valor $(16/9)^2 = 3'1604...$ Al cabo de 12 siglos, en la época de Pericles, los intentos de cuadratura del círculo permiten obtener mejores aproximaciones, y Euclides, ya en el siglo III a. de C., sistematiza el problema mediante el uso de polígonos regulares inscritos y circunscritos a la circunferencia. Arquímedes, en el mismo siglo, enuncia: "la circunferencia de un círculo es igual al triplo del diámetro y una parte, menor que la séptima parte y mayor que diez setentaiunavos del diámetro"; lo que se puede traducir por:

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$$

Pasan 21 siglos y, en el XVIII, entre Taylor y Bernouilli proporcionan una fórmula que permite conocer el valor de π con tanta aproximación como se quiera:

$$\pi = 4.\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots\right)$$

¿Qué es más complicado, el estudio que hace Euclides y permite a Arquímedes calcular π o el conocimiento de la teoría de funciones que conduce al desarrollo de Taylor de una función y, *a posteriori*, el cálculo de π como un caso particular? No lo sabemos. Lo que sí afirmamos es que, independientemente del interés de ambos procedimientos, como ejemplos del método científico, la potencia del segundo, no sólo para el cálculo de π, con ser esto importante, sino para multitud de cálculos con los que físicos, ingenieros, economistas y otras gentes de *mal vivir* vienen conformando desde hace tiempo el mundo en que habitamos, hacen de su conocimiento algo indispensable para quien no se conforme con *dar* a una maquinita para saber que, por ejemplo, sen 31° 20'= 0'520016... y quiera saber el porqué de las cosas.

Pero concretemos algo más: A menudo se utilizan funciones de valores fácilmente calculables en ciertos puntos, pero cuyos valores en puntos próximos a los anteriores no son de obtención tan sencilla. Así, una cosa es saber que sen 30°= 0'5, o que log 100 = 2, y otra bien distinta conocer, como decíamos antes, sen 31° 20' o log 102'3. En lo que sigue, veremos que el conocimiento del valor de una función en un punto permitirá, si se dan determinadas condiciones, calcular el valor, aunque sea aproximado, de dicha función *cerca* de tal punto, utilizando para ello las funciones más sencillas: las polinómicas. Determinar qué tendrá que cumplir una función para que podamos sustituirla por otra función polinómica y equivocarnos *poco,* y averiguar cuál será ese polinomio y en cuánto nos equivocaremos, son cuestiones que quedarán resueltas en las líneas siguientes.

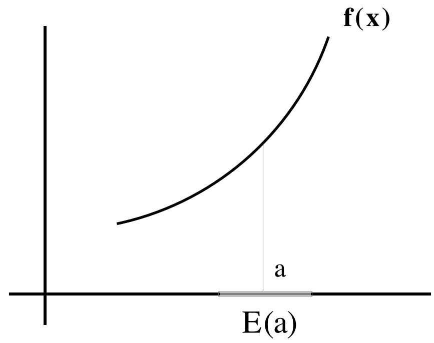
2. APROXIMACIÓN LINEAL

Planteamiento inicial del problema

Supongamos que dada una función f (x) como la representada en la figura, quisiéramos hallar una función polinómica de primer grado:

$$p_1(x) = a_0 + a_1x$$

que en las *cercanías* del punto a tomara valores tan próximos a los de f (x) como para, en caso de no conocer los valores exactos de f (x), poder tomar en su lugar, sin cometer excesivo error, los de $p_1(x)$.



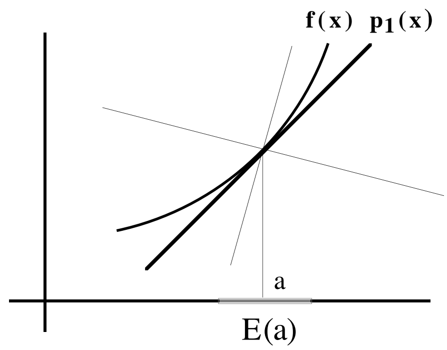
Naturalmente, el problema tendría una doble vertiente: Por un lado, se trataría de determinar dicha función lineal; por otro, convendría averiguar cuán grande (o pequeño) sería el error que cometeríamos. Pues bien, puestos a determinar $p_1(x)$, esto es, a establecer dos condiciones que permitieran calcular a_0 y a_1, podríamos pensar lo siguiente:

① Como queremos que $p_1(x)$ se aproxime a f(x) en un entorno del punto a, no sería descabellado empezar exigiendo que los valores de la función f(x) y el polinomio $p_1(x)$ coincidan en a:

$$p_1(a) = f(a)$$

② Desde luego, son infinitas las funciones lineales (rectas) que cumplen la condición anterior y en la figura hemos dibujado varias. A la vista de ellas procederemos a ver qué resultados se obtendrían si la segunda condición que impusiéramos a $p_1(x)$ fuera la de ser tangente a f (x) en el punto a. Es decir, si además de exigir $p_1(a) = f(a)$, exigiéramos:

$$p'_1(a) = f'(a)$$



(pues f '(a) es la pendiente de la recta tangente a f(x) en a y $p'_1(a) = a_1$ la de la recta $p_1(x)$, y si ambas rectas han de coincidir, sus pendientes también habrán de hacerlo.)

Planteado así el problema, pasemos a enunciarlo formalmente y a resolverlo.

Planteamiento y solución formal del problema

➠ Dada una función f(x), derivable en un entorno E(a) de cierto punto a, se trata de obtener un polinomio de primer grado:

$$p_1(x) = a_0 + a_1x$$

tal que: ☞

$$\begin{cases} ① \ p_1(a) = f(a) \\ ② \ p'_1(a) = f'(a) \end{cases}$$

➠ La solución es fácil de obtener:

$$\left.\begin{array}{l} p_1(a) = f(a) \Rightarrow a_0 + a_1 . a = f(a) \\ p'_1(a) = f'(a) \Rightarrow \qquad a_1 = f'(a) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_0 = f(a) - f'(a). a \\ a_1 = f'(a) \end{array}\right.$$

luego:

$$p_1(x) = f(a) - f'(a).a + f'(a).x = f(a) + f'(a).(x - a)$$

(Desde luego, podíamos haber escrito $p_1(x)$ directamente, buscando la ecuación de la tangente a la función f(x) en el punto a; pero con el razonamiento anterior hemos pretendido una sistematización en la búsqueda del resultado que nos permitirá, más adelante, generalizar el problema.)

Estimación del error

Recapitulando lo hecho hasta aquí, hemos partido de la función f(x) y *creemos* que $p_1(x)$ constituye una buena aproximación a f(x) en las *cercanías* de a, pero:

1°) ¿Cómo confirmarlo?

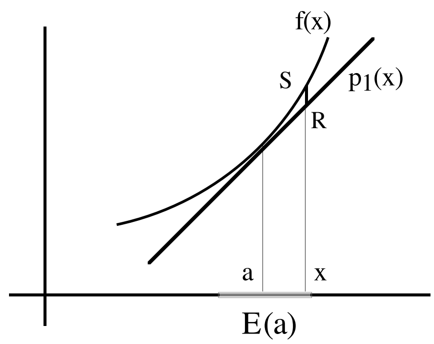
2°) ¿Cómo cuantificar el error que se cometerá si, finalmente, se toma como valor de f(x) el de $p_1(x)$?

Respondamos por separado a ambas preguntas.

① Considerado un entorno de a, E(a), en el que supondremos que la función f es derivable y la función derivada f' continua, sea:

$$R_1(x) = f(x) - p_1(x), \ x \in E(a).$$

$R_1(x)$, que es el error que se cometería cuando tomáramos $p_1(x)$ como valor de f (x), está representado en la figura por el segmento RS.



➠ De la primera condición cumplida por $p_1(x)$, es decir: $p_1(a) = f(a)$, se deduce:

$$\lim_{x\to a} R_1(x) = \lim_{x\to a} [f(x) - p_1(x)] = f(a) - p_1(a) = 0$$

➠ Si, además, consideramos la segunda condición, $p'_1(a) = f'(a)$, se tiene:

$$\lim_{x\to a} \frac{R_1(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - p_1(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - p'_1(x)}{1} = f'(a) - p'_1(a) = 0$$

lo cual nos indica que el error $R_1(x)$ no sólo es un infinitésimo cuando *x* tiende hacia *a,* sino que incluso es infinitésimo de mayor orden que (x – a).

✌ Podemos concluir, pues, que $p_1(x)$ constituye, efectivamente, una *buena aproximación* a la función f(x) en puntos suficientemente próximos a a.

② Sin embargo, por interesante que sea lo anterior, poca utilidad tendría si no fuéramos capaces de acotar el error que cometeremos al tomar $p_1(x)$ como valor de $f(x)$. Es decir, hemos visto que:

$$\lim_{x \to a} \frac{R_1(x)}{x - a} = 0$$

lo cual significa que en puntos suficientemente próximos a a, $R_1(x)$ es pequeño incluso en relación con $(x - a)$, pero ¿cuánto vale?

Al suceder, como puedes comprobar aplicando la regla de l'Hôpital, que:

$$\lim_{x \to a} \frac{R_1(x)}{(x - a)^2} \neq 0$$

(supuesto que existen f', f'' en $E(a)$ y que f'' es continua en a), *una forma de enfocar el cálculo de* $R_1(x)$ *consiste en comparar su valor con el de* $(x-a)^2$. ¿Cómo?

Recordando que el teorema de Cauchy permitía, precisamente, comparar los valores de dos funciones en un intervalo, se tendrá, tras aplicar dos veces dicho teorema, que cualquiera que sea $x \in E'(a)$ (supongamos $x > a$), y siempre que existan f' y f'' en $E(a)$:

Primer paso:

Las funciones: $\begin{cases} R_1(t) = f(t) - f(a) - f'(a).(t - a) \\ g(t) = (t - a)^2 \end{cases}$

son continuas en $[a, x]$ y derivables en (a, x), luego:

$$\frac{R_1(x)}{(x - a)^2} = \frac{R_1(x)}{g(x)} = \frac{R_1(x) - R_1(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{R'_1(\alpha)}{g'(\alpha)} \text{ , para algún } \alpha \in (a, x)$$

Segundo paso:

Las funciones: $\begin{cases} R'_1(t) = f'(t) - f'(a) \\ g'(t) = 2(t - a) \end{cases}$

son continuas en $[a, \alpha]$ y derivables en (a, α), luego:

$$\frac{R'_1(\alpha)}{g'(\alpha)} = \frac{R'_1(\alpha) - R'_1(a)}{g'(\alpha) - g'(a)} = \frac{R''_1(\beta)}{g''(\beta)} \text{ , para algún } \beta \in (a, \alpha).$$

O sea:

$$\frac{R_1(x)}{(x-a)^2} = \frac{f''(\beta)}{2} \text{, es decir : } \quad R_1(x) = \frac{f''(\beta)}{2}(x-a)^2 \text{, con } a < \beta < x$$

lo cual, si conocemos una cota de f'' en E(a), nos permitirá acotar el error cometido al sustituir f(x) por $p_1(x)$, aunque ignoremos cuál es exactamente el punto β.

Conclusión

Si f es una función para la que existen f ', f '' en un entorno E(a) de cierto punto a, entonces, cualquiera que sea x∈ E'(a) (supongamos x > a), se tiene:

$$\boxed{f(x)} = \boxed{f(a) + f'(a).(x-a)} + \boxed{R_1(x)}$$

$$\text{siendo } \quad R_1(x) = \frac{f''(\beta)}{2}(x-a)^2, \quad a < \beta < x$$

(De la propia expresión de $R_1(x)$ se deduce que, para x tendiendo hacia a, es un infinitésimo de mayor orden que (x – a)).

Ejemplo

Para calcular un valor aproximado de sen 31°20' mediante la aproximación lineal a la función f(x) = sen x en un entorno del punto a = 30° = π/6, bastará con aplicar la fórmula anterior, teniendo en cuenta que:

f(x) = sen x , $\qquad$ f '(x) = cos x ; $\qquad$ f''(x) = – sen x

$a = 30° = \frac{\pi}{6}$ radianes; $\qquad x = 31°\,20' = \left(31 + \frac{1}{3}\right).\frac{\pi}{180} = \frac{47\pi}{270}$ radianes.

Por consiguiente:

Valor aproximado de sen 31°20':

$$p_1\left(\frac{47\pi}{270}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}.\left(\frac{47\pi}{270} - \frac{\pi}{6}\right) = 0'52015\ldots$$

Error cometido en la aproximación:

$$R_1\left(\frac{47\pi}{270}\right) = -\frac{\operatorname{sen}\beta}{2}\cdot\left(\frac{47\pi}{270} - \frac{\pi}{6}\right)^2 = -\operatorname{sen}\beta.\,0'00027\ldots$$

y como $|\operatorname{sen}\beta| \leq 1$: $\quad \Rightarrow \quad \left|R_1\left(\frac{47\pi}{270}\right)\right| < 0'00028.$

Un paréntesis (el concepto de diferencial)

Consideremos otra vez la función $f(x)$, la que hemos llamado su aproximación lineal en un punto x_o, $p_1(x)$, y el resto $R_1(x)$. Se cumple la igualdad:

$$f(x) - f(x_o) = f'(x_o).(x - x_o) + R_1(x)$$

Si escribimos: $\Delta x = x - x_o$, $\Delta f = f(x) - f(x_o)$,

tendremos: ☞ $\Delta f = f'(x_o).\Delta x + R_1(x)$

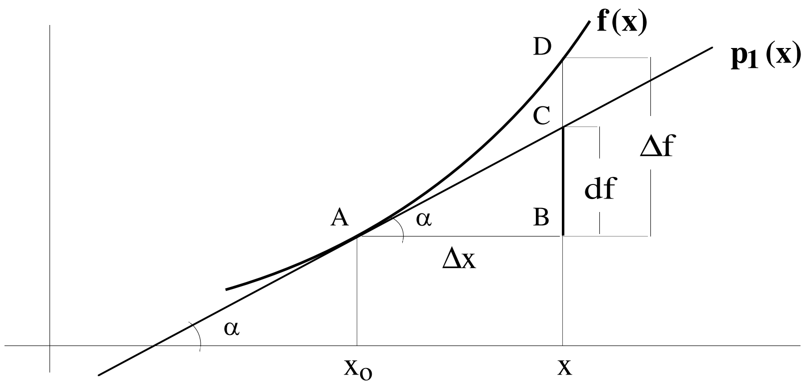
El primer miembro de esta última igualdad es el incremento de la función en el punto x_o, correspondiente a un incremento Δx de la variable. El primer sumando del segundo miembro, $f'(x_o).\Delta x$, recibe el nombre de *diferencial de la función* f en x_o, correspondiente a un incremento Δx de la variable independiente. Se suele representar por df, dy, o, cuando pueda haber equívoco, por $df(x_o, \Delta x)$; esto es:

$$df = f'(x_o).\Delta x$$

Observa que, con tal notación, podrá escribirse:

$$\Delta f = df + R_1(x)$$

expresión que tiene una fácil interpretación geométrica *en* la siguiente figura:



en la que:

$$BC = AB.\text{tag}\,\alpha = f'(x_o).(x - x_o) = df; \quad BD = f(x) - f(x_o) = \Delta f; \quad CD = \Delta f - df = R_1(x)$$

Observaciones

1.- Como ves, una cosa es el incremento de la función en un punto y otra distinta la diferencial de la función en ese punto. Ambos conceptos están ligados por la igualdad $\Delta f = df + R_1(x)$, y si bien $R_1(x)$ es *pequeño* en relación con Δf y df, no podemos olvidarnos de él. Por muy *diferencial* (entiéndase infinitésimo) que sea el incremento que demos a la variable, no podemos decir que $\Delta f = df$.

2.- Por otra parte, es usual escribir la diferencial de una función como:

$$df = f'(x).dx\,; \qquad \text{o bien:} \quad dy = f'(x).dx,$$

expresión que justifica que si, por ejemplo, es $y = x^3$, escribamos $dy = 3x^2.dx$

3. APROXIMACIÓN PARABÓLICA

Planteamiento inicial del problema

Efectuada ya la aproximación lineal, o mediante un polinomio de primer grado, a la función $f(x)$, es natural preguntarse si no podría mejorarse utilizando un polinomio de segundo grado:

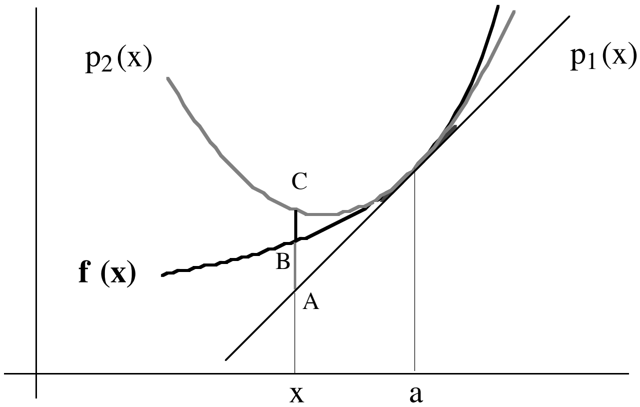
$$p_2(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2$$

de tal manera que, al tomar como valores de $f(x)$ en las *cercanías* de cierto punto los del polinomio $p_2(x)$, el error que cometiéramos:

$$R_2(x) = f(x) - p_2(x)$$

fuera menor que $R_1(x)$, error que se cometía con la aproximación lineal.

Si observas la figura te darás cuenta de que la cuestión consistiría en determinar una parábola $p_2(x)$ que, puesto que pretendemos que se aproxime a $f(x)$ más que la recta $p_1(x)$, debería hallarse situada de tal manera que en las *cercanías* de a, el valor de $R_2(x)$ (segmento BC) habría de ser menor que $R_1(x)$ (segmento BA):



Como antes, se trataría, por una parte, de determinar la función $p_2(x)$; por otra, habría que *evaluar* el error que se cometería al tomar $p_2(x)$ como valor de $f(x)$. Y puestos a establecer tres condiciones que permitiesen hallar a_o, a_1 y a_2:

① La primera condición que podríamos imponer a $p_2(x)$ sería, al igual que en el caso de la aproximación lineal:

$$p_2(a) = f(a)$$

② Respetando también la segunda condición exigida a $p_1(x)$, ahora repetiríamos:

$$p'_2(a) = f'(a)$$

③ ¿Y la tercera condición? A reserva de que después confirmásemos el acierto de nuestra elección, parece razonable que exigiésemos:

$$p''_2(a) = f''(a)$$

Planteamiento y solución formal del problema

➠ Dada una función f(x) tal que existen f' y f'' en un entorno E(a) de cierto punto a, se trata de obtener un polinomio de segundo grado:

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

que cumpla: ☞
$$\begin{cases} ① \; p_2(a) = f(a) \\ ② \; p'_2(a) = f'(a) \\ ③ \; p''_2(a) = f''(a) \end{cases}$$

➠ La solución se obtiene así:

$$\left.\begin{array}{l} p_2(a) = f(a) \Rightarrow \\ p'_2(a) = f'(a) \Rightarrow \\ p''_2(a) = f''(a) \Rightarrow \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} a_0 + a \cdot a_1 + a^2 \cdot a_2 = f(a) \\ a_1 + 2a \cdot a_2 = f'(a) \\ 2a_2 = f''(a) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_0 = f(a) - f'(a) \cdot a + \frac{f''(a)}{2} \cdot a^2 \\ a_1 = f'(a) - f''(a) \cdot a \\ a_2 = \frac{f''(a)}{2} \end{array}\right\}$$

de donde, sin más que sustituir los valores de a_0, a_1 y a_2 en la expresión inicial de $p_2(x)$ y simplificar:

$$p_2(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

(Si te preguntas por la razón de esos *1!* y *2!,* más adelante hallarás la respuesta.)

Estimación del error

Al igual que en el caso de la aproximación lineal, procedamos ahora a:

1º) Confirmar que el polinomio $p_2(x)$ constituye una mejor aproximación a f(x), en puntos suficientemente *cercanos* a a, que la proporcionada por $p_1(x)$.

2º) Cuantificar el error que se cometería si, finalmente, tomáramos como valor de f (x) el de $p_2(x)$.

① Considerado un entorno de a, E(a), en el que supondremos que existen f', f'', y esta última es continua, sea:

$$R_2(x) = f(x) - p_2(x), \quad x \in E(a).$$

¿ Es necesario decir que $R_2(x)$ es el error que se cometería al tomar $p_2(x)$ como valor de f(x)?

➠ De la primera condición cumplida por $p_2(x)$, $p_2(a) = f(a)$, se desprende:

$$\lim_{x \to a} R_2(x) = \lim_{x \to a} [f(x) - p_2(x)] = f(a) - p_2(a) = 0$$

➠ Si utilizamos también la condición, $p'_2(a) = f'(a)$, se tiene, también como antes:

$$\lim_{x\to a} \frac{R_2(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-p_2(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-p'_2(x)}{1} = f'(a) - p'_2(a) = 0$$

➠ En el caso de $R_1(x)$ se tenía $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R_1(x)}{(x-a)^2} \neq 0$, por lo que, si bien $R_1(x)$ era un infinitésimo con respecto a $(x - a)$, no lo era respecto de $(x - a)^2$. ¿Qué sucederá con $R_2(x)$?

• Si además de las anteriores, consideramos la tercera condición cumplida por $p_2(x)$, o sea: $p''_2(a) = f''(a)$, se tiene:

$$\lim_{x\to a} \frac{R_2(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-p_2(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-p'_2(x)}{2(x-a)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f''(x)-p''_2(x)}{2} = f''(a) - p''_2(a) = 0$$

lo cual nos indica que el error $R_2(x)$ no sólo es, para *x* tendiendo hacia *a,* un infinitésimo en relación con $(x - a)$, como *ya* lo era $R_1(x)$, sino incluso en relación con $(x - a)^2$, cosa que no le sucedía a $R_1(x)$.

✌ Podemos concluir que $p_2(x)$ constituye, pues, una *mejor aproximación* a la función $f(x)$ (en puntos suficientemente próximos a a) que la constituida por $p_1(x)$.

② Ciertamente, falta por *ver* si se podrá acotar el error que se cometerá al tomar $p_2(x)$ como valor de $f(x)$. De forma semejante a como decíamos en la página 170, hablando de $R_1(x)$, ahora sabemos que:

$$\lim_{x\to a} \frac{R_2(x)}{(x-a)^2} = 0$$

lo cual significa que en puntos suficientemente próximos a a, $R_2(x)$ es pequeño incluso en relación con $(x - a)^2$, pero ¿cuánto vale?

Al suceder, como puedes comprobar aplicando la regla de l'Hôpital, que:

$$\lim_{x\to a} \frac{R_2(x)}{(x-a)^3} \neq 0$$

(supuesto que existen f', f'', f''' en E(a) y que f''' es continua en a), *el cálculo de* $R_2(x)$ *lo orientaremos,* de forma semejante a como procedimos con $R_1(x)$, *comparando su valor, aplicando el teorema de Cauchy, con el de* $(x - a)^3$.

A tal efecto, se puede asegurar que cualquiera que sea $x \in E'(a)$ (supongamos $x > a$), y siempre que existan f', f'' y f''' en $E(a)$:

Primer paso:

Las funciones: $$\begin{cases} R_2(t) = f(t) - f(a) - f'(a).(t-a) - \dfrac{f''(a)}{2}.(t-a)^2 \\ g(t) = (t-a)^3 \end{cases}$$

son continuas en $[a, x]$ y derivables en (a, x), luego:

$$\frac{R_2(x)}{(x-a)^3} = \frac{R_2(x)}{g(x)} = \frac{R_2(x) - R_2(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{R'_2(\alpha)}{g'(\alpha)}$$, para algún $\alpha \in (a, x)$

Segundo paso:

Las funciones: $$\begin{cases} R'_1(t) = f'(t) - f'(a) - f''(a).(t-a) \\ g'(t) = 3(t-a)^2 \end{cases}$$

son continuas en $[a, \alpha]$ y derivables en (a, α), luego:

$$\frac{R'_2(\alpha)}{g'(\alpha)} = \frac{R'_2(\alpha) - R'_2(a)}{g'(\alpha) - g'(a)} = \frac{R''_2(\beta)}{g''(\beta)}$$, para algún $\beta \in (a, \alpha)$.

Tercer paso:

Las funciones: $$\begin{cases} R''_2(t) = f''(t) - f''(a) \\ g''(t) = 6(t-a) \end{cases}$$

son continuas en $[a, \beta]$ y derivables en (a, β), luego:

$$\frac{R''_2(\beta)}{g''(\beta)} = \frac{R''_2(\beta) - R''_2(a)}{g''(\beta) - g''(a)} = \frac{R'''_2(\gamma)}{g'''(\gamma)}$$, para algún $\gamma \in (a, \beta)$.

O sea:

$$\frac{R_2(x)}{(x-a)^3} = \frac{f'''(\gamma)}{3!}$$, es decir : $$R_2(x) = \frac{f'''(\gamma)}{3!}(x-a)^3, \text{ con } a < \gamma < x$$

expresión que, si conocemos una cota de f''' en $E(a)$, nos permitirá acotar el error cometido al sustituir $f(x)$ por $p_2(x)$, aunque ignoremos cuál es exactamente el punto γ.

Conclusión

Si f es una función para la que existen f', f'', f''' en un entorno E(a) de cierto punto a, entonces, cualquiera que sea $x \in E'(a)$ (supongamos $x > a$), se tiene:

$$f(x) = \boxed{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2} + \boxed{R_2(x)}$$

$$\text{siendo} \quad R_2(x) = \frac{f'''(\gamma)}{3!}(x-a)^3, \quad a < \gamma < x$$

(De la propia expresión de $R_2(x)$ se deduce que, para x tendiendo hacia a, es un infinitésimo de mayor orden que $(x-a)^2$).

Ejemplo

Utiliza la aproximación parabólica para mejorar el cálculo del valor de sen 31° 20' que efectuamos en la página 171 mediante la aproximación lineal y comprueba que:

sen 31° 20' ≈ 0'520017

cometiéndose con tal aproximación cuadrática un error menor de 0'000003.

4. TEOREMA DE TAYLOR

Generalización de las aproximaciones

Como puedes suponer, la aproximación parabólica a la función f(x) en un entorno E(a) podría mejorarse utilizando un polinomio de tercer grado, $p_3(x)$, que quedaría determinado si, además de exigirle: $p_3(a) = f(a)$, $p'_3(a) = f'(a)$, $p''_3(a) = f''(a)$, le impusiéramos la condición: $f'''(a) = p_3'''(a)$.

Sería fácil *ver* que:

$$p_3(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$

así como que el error, $R_3(x) = f(x) - p_3(x)$, que se cometería al tomar como valor de f(x) el del polinomio, cumpliría:

$$\lim_{x \to a} \frac{R_3(x)}{(x-a)^3} = 0$$

pudiendo escribirse:

$$R_3(x) = \frac{f^{iv}(\xi)}{4!}(x-a)^4$$

para algún $\xi \in (a, x)$, supuesto $x > a$ y que f cumple las oportunas condiciones.

En general, *puede* demostrarse el siguiente teorema: ➥

Teorema (de Taylor)

Si f es una función para la que existen f', f'', ..., $f^{(n}$, $f^{(n+1}$ en un entorno E(a) de cierto punto a, entonces, cualquiera que sea $x \in E'(a)$ (supongamos $x > a$), se tiene:

$$\boxed{f(x)} = \boxed{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}.(x-a)^n} + \boxed{R_n(x)}$$

$$\text{siendo} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad , \quad a < \xi < x$$

☞ De $\quad f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}.(x-a)^n$

se dice que es el *Polinomio de Taylor de grado* n *de* f *en* a y si bien la forma más precisa de designarlo sería escribir $p_{n,f,a}(x)$ o algo similar (pues su valor depende de n, f, a, x), cuando no haya posibilidad de error escribiremos simplemente $p_n(x)$.

☞ De $\quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

se dice que es el *resto o término complementario de la fórmula de Taylor* en la forma de Lagrange (lo de Lagrange, debido a que existen otras formas de expresar $R_n(x)$).

Un par de comentarios

1º) Las condiciones para obtener los coeficientes del polinomio $p_n(x)$ consistirían en imponer a éste, de forma semejante a lo hecho en los casos particulares:

$$p_n(a) = f(a)\,; \quad p'_n(a) = f'(a)\,; \quad p''_n(a) = f''(a)\,; \quad \ldots\,; \quad p_n^{(n}(a) = f^{(n}(a)$$

es decir, que *coincidieran el valor de* f *y los de sus* n *primeras derivadas en el punto* a, *con los correspondientes de* p_n.

2º) De la propia expresión del resto se deduce que $R_n(x)$ es un infinitésimo de orden superior a $(x-a)^n$ *en* $x = a$. Para aquellos *x* tales que $R_n(x)$ pueda hacerse tan pequeño como se quiera sin más que tomar n suficientemente grande, o sea, para aquellos x tales que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, el teorema permitirá calcular f(x) con la precisión que se desee.

☞ Se habla entonces del *desarrollo en serie de Taylor* de f(x), escribiéndose:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}.(x-a)^n + \ldots$$

Fórmula de Mac-Laurin

Si el desarrollo de Taylor se efectúa en un entorno del origen, $a = 0$, (supuesto, por tanto, que f es derivable hasta el orden $n+1$ en un entorno $E(0)$ y que $x \in E'(0)$, se llega a:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\, x^3 + \ldots + \frac{f^{(n}(0)}{n!}\, x^n + \frac{f^{(n+1}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1}$$

con $0 < \xi < x$, ó $x < \xi < 0$, que es la *fórmula de Mac-Laurin.*

Ejemplos

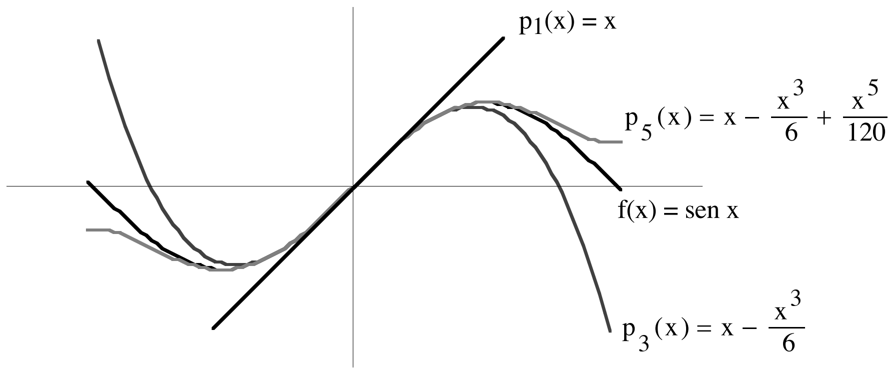
1º) Consideremos la función exponencial $f(x) = e^x$ y el punto $a = 0$. Como f es derivable tantas veces como queramos en cualquier entorno del origen, podremos aplicar la fórmula de Mac-Laurin.

En consecuencia, y dado que: $\begin{cases} f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n}(0) = 1 \\ f^{(n+1}(\xi) = e^{\xi} \end{cases}$

se tendrá:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{\xi}, \quad \text{con } 0 < \xi < x, \quad \text{ó } x < \xi < 0$$

2º) En la figura siguiente se han representado la función sen x y sus polinomios de Taylor de grado menor o igual que 5 en un entorno del origen. Como ves, las gráficas de los polinomios de acercan, más cuanto mayor es su grado, a la de sen x.



Ejemplo de otro tipo

Aunque en algunos ejemplos precedentes hemos calculado valores de $f(x)$ utilizando polinomios de Taylor de grado predeterminado, comprenderás que lo más natural será que se desee calcular $f(x)$ con determinada precisión y, en función de ella, tengamos que tomar el polinomio de Taylor de uno u otro grado.

Así, supongamos que se desee calcular el valor de $\mathbf{e^2}$ con un error menor que 0'05.

Visto el desarrollo de Mac-Laurin de la función $f(x) = e^x$, se tendrá:

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{\xi}, \text{ con } \quad 0 < \xi < 2 .$$

Se tratará en primer lugar, por tanto, de hallar el menor valor de n para el que el resto es menor que 0'05. Ahora bien, como $e < 3$ y $0 < \xi < 2$, será:

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\xi} < \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 9$$

luego bastará con hallar el *primer* n tal que:

$$9.\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} < 0'05$$

Una vez visto que la desigualdad anterior se verifica para $n \geq 8$, podremos concluir que la *primera* suma que nos dará el valor de e^2 con la aproximación deseada será:

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \frac{2^7}{7!} + \frac{2^8}{8!}$$

5. ESTUDIO LOCAL DE UNA FUNCIÓN

Recordarás (pág. 156) que para una función y un punto como la $f(x) = x^4$ y el $a = 0$, los criterios que hacían uso del signo de la segunda derivada *allí donde* la primera se anulaba no permitían decidir sobre la existencia de máximos o mínimos locales. Por otra parte, existen ciertos aspectos de la gráfica de una función que aún no han sido tratados en nuestro curso. En lo que sigue veremos qué puede hacer el teorema de Taylor tanto sobre una como sobre otra cosa.

Teorema (sobre máximos y mínimos locales)

Sean $f(x)$ una función y $a \in \mathbf{R}$ un punto tales que $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1}(a) = 0$, mientras que $f^{(n}(a) \neq 0$. Además, supondremos que $f^{(n}(x)$ es continua en a. Entonces:

① n impar $\Rightarrow$ en a no existe ni máximo ni mínimo local.

② n par $\begin{cases} f^{(n}(a) < 0 & \Rightarrow \text{ en a existe un máximo local.} \\ f^{(n}(a) > 0 & \Rightarrow \text{ en a existe un mínimo local.} \end{cases}$

En efecto. Efectuando el desarrollo de Taylor de f en a de orden n - 1, resulta de las hipótesis:

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n}(\xi)}{n!}.(x-a)^n , \text{ con } \quad a < \xi < x \,, \text{ó } \; x < \xi < a.$$

de donde, tomando x lo suficientemente próximo a a como para conseguir que el signo de $f^{(n}(\xi)$ coincida con el de $f^{(n}(a)$ -lo cual es posible por la continuidad de $f^{(n}$ en a-, se tendrá:

$$\text{signo de } [\, f(x) - f(a)\,] = \text{signo de } [\, f^{(n}(a)\,.\,(x-a)^n\,],$$

luego:

1) Si n es impar: El signo de $[\, f(x) - f(a)\,]$ se modifica según sea $x < a$ ó $x > a$. En a no podrá haber ni máximo ni mínimo.

2) Si n es par:

➪ Si $f^{(n}(a) > 0$, entonces el signo de $[\, f(x) - f(a)\,]$ es positivo, cualquiera que sea la situación de x respecto de a. En a existirá un mínimo relativo.

➪ Si $f^{(n}(a) < 0$, entonces el signo de $[\, f(x) - f(a)\,]$ es negativo, cualquiera que sea la situación de x respecto de a. En a existirá un máximo relativo.

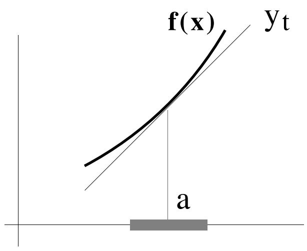
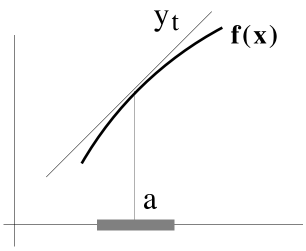
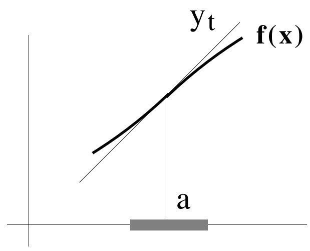
Observa que otra forma de *leer* el enunciado del teorema es:

Dada una función f y considerados sólo los puntos en los que sea derivable, únicamente podrá tener máximos o mínimos relativos en aquellos puntos a tales que $f'(a) = 0$. Calculadas las derivadas sucesivas en a, si la primera no nula es de orden par -la segunda, por ejemplo-, habrá máximo o mínimo local según que dicha derivada sea menor o mayor que cero, respectivamente. Si la primera derivada no nula en los puntos en los que $f'(x) = 0$ es de orden impar, entonces en ellos no hay ni máximo ni mínimo local.

Pregunta fácil: Visto lo anterior, ¿puedes decir qué le sucederá a la función $f(x) = x^4$ en a = 0?

Definiciones (de concavidad, convexidad y puntos de inflexión)

Sea f una función derivable en un punto a, y consideremos su tangente en ese punto, de ecuación: $y_t = f(a) + f'(a).(x-a)$.

		
Diremos que f es *cóncava* en a si existe un entorno E(a) tal que, si $x \in E'(a)$, entonces $f(x) > y_t$.	Diremos que f es *convexa* en a si existe un entorno E(a) tal que, si $x \in E'(a)$, entonces $f(x) < y_t$.	Diremos que a es punto de *inflexión* de f si existe E(a) tal que $f(x) < y_t$ ó $f(x) > y_t$ dependiendo de la posición de $x \in E'(a)$ respecto de *a*.

Teorema (sobre concavidad, convexidad y puntos de inflexión)

Sean $f(x)$ una función y $a \in \mathbf{R}$ un punto tales que $f''(a) = f'''(a) = ... = f^{(n-1}(a) = 0$, mientras que $f^{(n}(a) \neq 0$. Además, supondremos que $f^{(n}(x)$ es continua en a. Entonces:

① n impar $\Rightarrow$ en a existe un punto de inflexión.

② n par $\begin{cases} f^{(n}(a) < 0 & \Rightarrow \text{ en a la función es convexa.} \\ f^{(n}(a) > 0 & \Rightarrow \text{ en a la función es cóncava.} \end{cases}$

En efecto. Por una parte:

$$f(x) - y_t = f(x) - f(a) - f'(a).(x-a)$$

y, por otra, dadas las hipótesis, el desarrollo de Taylor de orden n - 1 de f en el punto a se reduce a:

$$f(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f^{(n}(\xi)}{n!}(x-a)^n, \quad \text{con } a < \xi < x, \text{ ó } x < \xi < a$$

Por tanto:

$$f(x) - y_t = \frac{f^{(n}(\xi)}{n!}(x-a)^n, \quad \text{con } a < \xi < x, \text{ ó } x < \xi < a$$

y tomando x lo suficientemente próximo a a como para que el signo de $f^{(n}(\xi)$ sea el mismo que el de $f^{(n}(a)$, se tendrá:

$$\text{signo de } [\, f(x) - y_t \,] = \text{signo de } [\, f^{(n}(a) . (x-a)^n \,],$$

luego:

1) Si n es impar: El signo de $[\, f(x) - y_t \,]$ se modifica según sea $x < a$ ó $x > a$. En a habrá inflexión.

2) Si n es par: El signo de $[\, f(x) - y_t \,]$ coincide con el de $f^{(n}(a)$ y, por tanto:

➩ Si $f^{(n}(a) > 0$, entonces $[\, f(x) - y_t \,] > 0$, cualquiera que sea la situación de x respecto de a. La función es cóncava en a.

➩ Si $f^{(n}(a) < 0$, entonces $[\, f(x) - y_t \,] < 0$, cualquiera que sea la situación de x respecto de a. La función es convexa en a.

Observa que como caso particular del teorema, se tendra:

➧ Dada una función f, en aquellos puntos a en los que $f''(a) > 0$, la función será cóncava, y en los que $f''(a) < 0$, convexa. Finalmente, en aquellos puntos en los que $f''(a) = 0$, si además es $f'''(a) \neq 0$, habrá inflexión.

6. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Aunque se trata de algo que está implícito en las páginas precedentes, concluiremos este capítulo dedicando unas líneas, *en plan resumen,* a la representación gráfica de funciones.

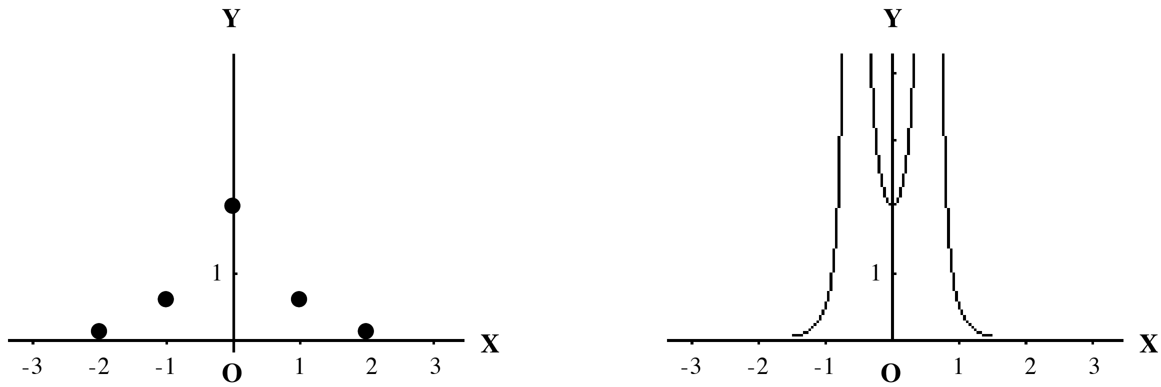
Desde luego, en la expresión algebraica con la que se define normalmente una función se contienen todas las propiedades de la misma. Nada mejor, en efecto, para caracterizar cierta función que decir que se trata de la $f(x) = \operatorname{sen} x$, pongamos por caso. Sin embargo, al igual que un gráfico estadístico facilita una rápida *lectura* de la información contenida en una tabla con numerosos datos, la representación gráfica de una función permite hacerse una rápida idea de las características más importantes de ésta o aclarar ciertos aspectos *oscuros* que la misma pudiera presentar. No han faltado ejemplos de esto que decimos en lo que hemos visto hasta ahora.

Como sabes, un primer *paso* para dibujar la gráfica de una función, que puede ser suficiente en los casos más sencillos, consiste en obtener varios puntos de la misma. Así, para representar una función lineal: $f(x) = ax + b$, basta con tomar dos cualesquiera de sus puntos y trazar la recta que pasa por ellos; para representar una función cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$, basta con dibujar el vértice y dos o cuatro puntos más de la correspondiente parábola... El procedimiento, que no hay que despreciar de forma absoluta, tiene sin embargo sus inconvenientes:

Así, por poner un ejemplo, a pesar de que la curva correspondiente a la función:

$$y = \frac{2}{(3x^2 - 1)^2}$$

pasa por los puntos señalados en el dibujo de la izquierda, la gráfica no es la que sería *razonable* pensar, sino la que se encuentra a la derecha.

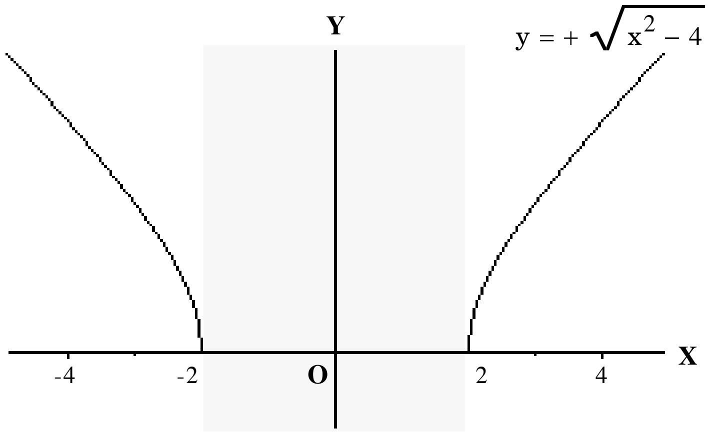


Como decimos, lo que sigue es en gran medida una recopilación de cuestiones ya estudiadas. Son distintos aspectos que *pueden* considerarse a la hora de efectuar la representación gráfica de una función. *No has de entender que siempre sea absolutamente preciso estudiarlos todos,* pero cuantos más de ellos analices, más seguridad tendrás de que la curva que traces es la correcta.

1. Dominio

Lo primero que conviene hacer para representar gráficamente una función f(x) es determinar su *dominio;* o sea, los valores de *x* para los que existe f(x).

Así, por ejemplo, el hecho de que el dominio de la función: $y = f(x) = +\sqrt{x^2 - 4}$ sea $\mathbf{R} - (-2, 2)$, se refleja en que en la zona sombreada de la figura siguiente no hay ningún punto de la gráfica.



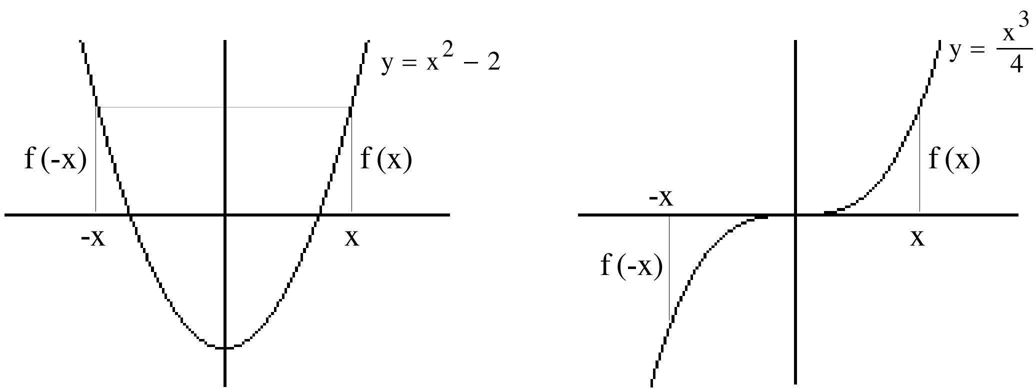
La determinación del dominio requerirá en cada caso un estudio particular (si se trata de una función racional, habrá que excluir, si existen, los puntos en los que se anule el denominador; si se trata de una función en la que intervengan logaritmos, habría que excluir los valores de *x* que supusieran la aparición de *logaritmos de números negativos;* etc.)

2. Continuidad

Si una función no es continua en un punto, la gráfica se *rompe* en dicho punto, lo cual es interesante para representar la función. No obstante, la mayoría de las funciones que tendrás que *dibujar* serán continuas en todo su dominio. (¡Ojo! Un error frecuente consiste en decir que una función es continua incluso en puntos donde no está definida).

3. Simetrías

En la figura tienes las gráficas de dos funciones. La de la izquierda es simétrica respecto del eje OY. La de la derecha, respecto del origen de coordenadas.



En general, para estudiar la simetría de una función y = f(x) han de compararse los valores, *para todo x del dominio,* de f(x) y f(–x).

Si $f(x) = f(-x)$	➠	la gráfica es simétrica respecto del eje OY.
Si $f(x) = -f(-x)$	➠	la gráfica es simétrica respecto del origen.

(Naturalmente, si no ocurre ninguno de los dos supuestos anteriores, la gráfica no será simétrica ni respecto a OY ni respecto a O).

4. Puntos auxiliares

Ya hemos dicho que la obtención de unos cuantos puntos de la gráfica puede ayudar a su trazado. En particular, el *punto de corte de la curva con el eje OY* (que, si existe, será único), se obtendrá dando a x el valor 0 y calculando $f(0)$. Los *puntos de corte con el eje OX* (que pueden ser más de uno), corresponderán a los valores de x tales que $f(x) = 0$. No siempre es fácil resolver tal ecuación, lo cual no debe importarte en exceso.

5. Máximos y mínimos locales

Debido a que una función puede tener máximos o mínimos locales en puntos en los que no sea derivable, lo primero que convendrá hacer será ver si la función que se trate de representar no es derivable en algún punto de su dominio y, caso de que sea así, analizar qué sucede en tales puntos.

Para determinar los máximos y mínimos locales en los puntos en los que f(x) sea derivable, se procede de la siguiente manera:

- Se hallan los puntos a tales que $f'(a) = 0$.
- Siendo a uno de los puntos tales que $f'(a) = 0$, se calcula $f''(a)$.
  - Si $f''(a) < 0$, en a existe un máximo local.
  - Si $f''(a) > 0$, en a existe un mínimo local.
  - Si $f''(a) = 0$, se sigue derivando hasta encontrar la primera $f^{(n}(a) \neq 0$.
    - Si n es impar, no hay máximo ni mínimo locales.
    - Si n es par, hay máximo o mínimo local según sea $f^{(n}(a) < 0$ ó $f^{(n}(a) > 0$.

6. Crecimiento y decrecimiento

El teorema que vimos en la página 154 podría haberse enunciado así:

$f'(x) > 0, \ \forall\, x \in (a, b)$	➠	la función es creciente en el intervalo (a, b).
$f'(x) < 0, \ \forall\, x \in (a, b)$	➠	la función es decreciente en el intervalo (a, b).

(desde luego, una función puede ser creciente o decreciente en otros puntos, además de aquellos en los que la derivada es positiva o negativa, pero se trata de casos de más interés teórico que práctico).

El estudio de la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de una función está bastante ligado al estudio de sus máximos y mínimos relativos. Así, si la función es *como Dios manda,* es decir, continua y derivable, su monotonía cambia en los extremos locales. Por ello, puestos a dibujar la gráfica de una función puede ser interesante dividir el eje OX en intervalos cuyos extremos sean tanto los puntos en los que la función no es derivable como aquellos en los que la derivada se anula. El signo de la derivada en un punto interior de cada uno de estos intervalos nos permitirá decir si la función es creciente o decreciente en ese intervalo.

7. Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

Normalmente, para analizar la concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de una función, bastará con utilizar la segunda derivada de f(x). Así:

$f''(x) > 0,\ \forall\, x \in (a, b) \Rightarrow$	la función es cóncava en el intervalo (a, b).
$f''(x) < 0,\ \forall\, x \in (a, b) \Rightarrow$	la función es convexa en el intervalo (a, b).
Los puntos a en los que $f''(a) = 0$ son puntos de inflexión si $f'''(a) \neq 0$	

Como sabes, si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) = 0$, y la primera derivada posterior distinta de cero, $f^{(n}(a)$, es de orden impar, ello significa que en a existe inflexión. Si n es par, la función es cóncava o convexa según sea $f^{(n}(a) > 0$ ó $f^{(n}(a) < 0$. En la práctica, sin embargo, raramente habrá que acudir a este criterio.

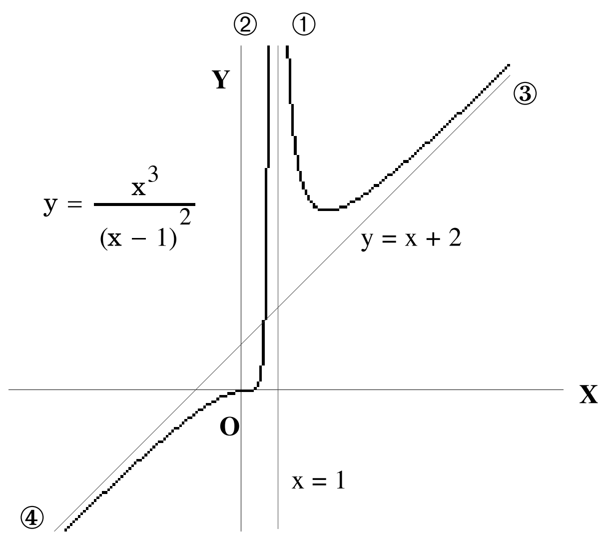
8. Asíntotas

Éste de las asíntotas es el único aspecto relativo al estudio de una función del que no habíamos hablado hasta ahora. Sin embargo se trata de algo cuyo conocimiento puede ayudar de manera definitiva a la construcción de la curva.

En la figura de la derecha, además de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

aparecen las rectas de ecuaciones x = 1, y = x + 2. De ambas se dice que son *asíntotas* de la función, o rectas cuya distancia a la curva puede hacerse tan pequeña como se quiera sin más que alejarse lo suficiente del origen de coordenadas.



El cálculo de la asíntotas de una curva se efectúa de la forma indicada en el siguiente recuadro:

① Las asíntotas paralelas al eje OY son las rectas de ecuación **x=a**, siempre que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

La curva carecerá de este tipo de asíntotas si no existen tales valores de a.

② El resto de las asíntotas, rectas no paralelas al eje OY, tienen, si existen, ecuaciones de la forma **y = mx + b**, donde:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \;; \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - m\,x]$$

Estos valores se obtienen a partir de la condición $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (m\,x + b)] = 0$.

(Puede suceder, en el segundo de los casos anteriores, que m = 0. A la correspondiente asíntota, de ecuación y = b, suele llamársela *horizontal.)*

9. Posición de la curva respecto de las asíntotas

Por último, si observas de nuevo la gráfica de la página anterior, notarás que la posición de la curva correspondiente a la función $y = f(x)$ respecto de la asíntota $x = 1$ es la que se indica con los simbolitos ① y ②. O sea, que la curva se aproxima a la asíntota, tanto por la derecha como por la izquierda, tomando valores positivos (podía haberlo hecho, en uno o en los dos casos, tomando valores negativos; o sea, por la *parte de abajo* de la figura).

➔ La posición ① es debida a que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

➔ La posición ② es debida a que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

(Estas posiciones también quedarían establecidas si al estudiar el crecimiento y decrecimiento hubiéramos obtenido que a la izquierda de x = 1 la función es creciente y a la derecha de x = 1 decreciente. Como ves, todos los aspectos que estamos estudiando se hallan íntimamente ligados.)

En cuanto a la posición de la curva respecto de la asíntota $y = x + 1$, es decir, el que la curva se halle *por encima* o *por debajo* de la asíntota, si escribimos:

$$y_c = \frac{x^3}{(x-1)^2} \;; \qquad y_a = x + 1$$

➔ La posición ③ es debida a que $y_c - y_a > 0$, para $x \to +\infty$.

➔ La posición ④ es debida a que $y_c - y_a < 0$, para $x \to -\infty$.

Naturalmente, los criterios anteriores son válidos no sólo para la función del ejemplo, sino para cualquier otra. Ahora, te toca a ti aplicarlos.

7. EJERCICIOS

1.- Deduce la siguiente fórmula aproximada (para valores de Δx pequeños en comparación con los de x):

$$\sqrt{x + \Delta x} \cong \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$$

2.- Calcula un valor aproximado de ln 0'9, mediante la aproximación cuadrática.

3.- Desarrolla el polinomio $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ en forma de potencias enteras y positivas de $(x - 2)$.

4.- Efectúa el desarrollo de Taylor de orden 3 de la función $\ln x$ en el punto a = 1.

5.- Obtén el desarrollo de Mac-Laurin de orden 4 de la función $\operatorname{sen} 3x$.

6.- Obtén el desarrollo de Taylor de orden 4 de la función e^{2x} en el punto a = 0'5.

7.- Efectúa el desarrollo de Mac-Laurin de orden 2 de la función $\operatorname{tag} x$ y calcula partir de él, un valor aproximado de tag 20°.

8.- Sabiendo que $2 < e < 3$, acota el error que se comete al tomar como valor del número e la suma: $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$.

9.- Calcula $\cos 9°$ con un error menor que 0'001.

10.- Calcula de qué grado se ha de tomar el polinomio de Taylor de e^x en a = 0 para obtener el valor de $e^{0'1}$ con un error menor que 0'001.

11.- Comprueba el siguiente desarrollo y acota el error cometido cuando sea utilizado para calcular ln 0'5.

$$\ln (x - 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R_4(x)$$

12.- Decide si en el punto a = 0, las funciones siguientes presentan un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión:

$$f(x) = x^4 \cdot e^x ; \qquad g(x) = x^3 \cdot e^{2x} ; \qquad h(x) = \operatorname{sen} x - x \cdot \cos x .$$

13.- Representa gráficamente las funciones siguientes:

$$y = x \cdot \ln x \qquad y = \ln (x^2 - 4) \qquad y = \frac{\ln x}{x} \qquad y = e^x \cdot x$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^3 - 1}} \qquad y = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} \qquad y = \frac{3}{x^3 - 3x} \qquad y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2} \qquad y = \frac{4x - 5}{2(x^2 - 1)} \qquad y = \frac{|x + 3|}{1 + |x|} \qquad y = \left| x^4 - 4x^3 \right|$$

TEMA 10

INTERPOLACIÓN

1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo precedente hemos estudiado la llamada aproximación local a una función: conocidos el valor de $f(x)$ y los de sus derivadas sucesivas en un punto, y siempre que se dieran determinadas condiciones, podíamos calcular los valores de la función en otros puntos con tanta precisión como quisiéramos. Sin embargo, aunque resulte algo duro decirlo ahora, hay dos tipos de problemas que, aun tratando de cuestiones en cierto modo semejantes a las anteriores, no son resolubles por desarrollos de Taylor:

1º) En la física, la ingeniería, etc., en las que los datos empíricos son necesariamente finitos, las relaciones entre dos variables no siempre pueden establecerse con toda precisión mediante una función formulada en términos matemáticos. En muchas ocasiones tales relaciones quedan establecidas mediante tablas de datos con las que se pone de manifiesto experimentalmente la dependencia entre dichas variables (temperatura de una barra de hierro y su longitud, tiempo que lleva en cultivo una colonia de bacterias y su tamaño, etc.) y lo que buscaremos será, precisamente, una función $y = f(x)$ que se *ajuste* a los datos experimentales.

2º) En otras ocasiones, necesitándose conocer el valor de una función $f(x)$ para cierto x, no se dispondrá de los valores de **f** y de sus derivadas en puntos suficientemente próximos a x como para poder aplicar desarrollos de Taylor o, disponiéndose de ellos, la dificultad de los cálculos desaconsejará tales desarrollos.

Dedicaremos este capítulo a resolver de forma simultánea ambos problemas.

2. POLINOMIO DE INTERPOLACIÓN

Planteamiento del problema

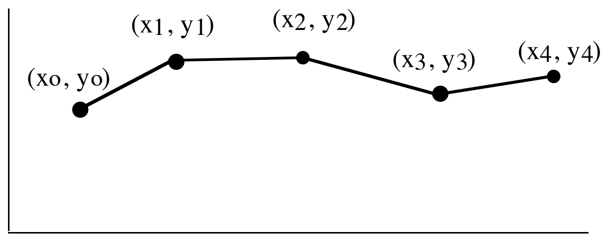
Dados $n + 1$ *puntos* o pares de valores:

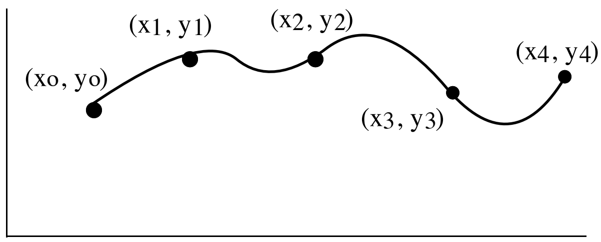
x_0	x_1	x_2	.....	x_n
y_0	y_1	y_2	.....	y_n

donde los x_i *son distintos entre sí y están escritos en orden creciente,* y tanto si la dependencia entre las variables x e y reflejada en la tabla es de tipo experimental como si es funcional, *se trata de efectuar una estimación del valor de y para un valor de x no incluido en la tabla.*[1]

Si observas las figuras siguientes, en las que se han representado en dos sistemas coordenados los puntos (x_i, y_i) –hemos supuesto que son 5–, admitirás que no existe una, sino *infinitas* funciones que *pasan* por dichos puntos.

[1] Suele hablarse de *interpolación* si $x_0 < x < x_n$. En caso contrario se habla de *extrapolación.*





Pues bien, la solución que nosotros daremos al problema consistirá en:

① ➥ Hallar la función polinómica de menor grado, en tanto es la más *sencilla,* que pase por los n+1 puntos dados.

② ➥ Tomar como valor estimado de y para el valor dado de x, el que corresponda a tal x en la función polinómica que hayamos determinado.

Solución de un caso particular

❒ Dados tres pares de puntos (x_o, y_o), (x_1, y_1), (x_2, y_2), con los x_i distintos entre sí, se trata de averiguar si existe alguna función polinómica que quede unívocamente determinada al imponerle que pase por ellos y, en caso afirmativo, de qué forma podrá calcularse.

① Descartado que tal polinomio pudiera ser de grado cero (es decir, constante), lo cual sólo ocurriría si $y_o = y_1 = y_2$, podríamos buscar un polinomio de primer grado:

$$P_1(x) = a_o + a_1 x$$

Tendríamos que determinar valores de a_o y a_1 que cumplieran:

$$\left.\begin{array}{l} a_o + a_1 x_o = y_o \\ a_o + a_1 x_1 = y_1 \\ a_o + a_1 x_2 = y_2 \end{array}\right\}$$

pero como el rango de la matriz de los coeficientes del sistema es 2 y el de la ampliada, en general, 3 (sólo sería 2 si los puntos estuvieran alineados), no existiría tal polinomio de primer grado que pasara por los tres puntos.

□(Desde un punto de vista gráfico el asunto es trivial: ¿Desde cuándo una recta pasa por tres puntos que no estén alineados? Planteamos en la forma anterior el asunto por razones de generalización.)

② Si, en consecuencia, nos propusiéramos hallar un polinomio de segundo grado:

$$P_2(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2$$

que pasara por los tres puntos, tendríamos que considerar el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a_o + a_1 x_o + a_2 x_o^2 = y_o \\ a_o + a_1 x_o + a_2 x_1^2 = y_1 \\ a_o + a_1 x_o + a_2 x_2^2 = y_2 \end{array}\right\}$$

el cual, debido a que: $\begin{vmatrix} 1 & x_o & x_o^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = (x_1 - x_o) \cdot (x_2 - x_o) \cdot (x_2 - x_1) \neq 0$

(¿recuerdas al Sr. Vandermonde?), tendría solución única, que se obtendría aplicando la regla de Cramer o cualquier otro procedimiento; y asunto concluido.

③ Podríamos preguntarnos finalmente si no habría algún polinomio de grado superior a 2 que pasara por los puntos dados. Considerado, por ejemplo, el polinomio:

$$P_3(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a_o + a_1 x_o + a_2 x_o^2 + a_3 x_o^3 = y_o \\ a_o + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 = y_1 \\ a_o + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 = y_2 \end{array}\right\}$$

sería en general compatible indeterminado (el rango de las dos matrices, la de los coeficientes y la ampliada, es 3 -¿por qué?- y el número de incógnitas, 4); y entre las infinitas soluciones, no habría razón especial para quedarse con ninguna.

☞ *Por ello, para resolver nuestro problema utilizaremos el polinomio de segundo grado que, amén de estar determinado unívocamente por los tres puntos, es el más sencillo de calcular.*

Ejemplo

Comprueba que el polinomio de interpolación correspondiente a la tabla:

x	2	4	6
y	3	21	55

es $P_2(x) = 2x^2 - 3x + 1$. ¿Es 36 el valor interpolado para $x = 5$?

Caso general

Dados los n + 1 *puntos* o pares de valores de la siguiente tabla:

x_o	x_1	x_2	.....	x_n
y_o	y_1	y_2	.....	y_n

donde los x_i *son distintos entre sí y están escritos en orden creciente,* procedamos a hallar la función más sencilla que *pase* por ellos. A tal fin:

① Podríamos preguntarnos en primer lugar si existirá algún polinomio de grado *menor* que n, P (x), tal que:

$$P(x_o) = y_o\,,\ P(x_1) = y_1\,,\ \dots\,,\ P(x_n) = y_n$$

Considerado el sistema de ecuaciones con el que expresaríamos las condiciones a cumplir por los coeficientes y término independiente de tal polinomio, veríamos, al igual que hicimos en el caso particular anterior, que, en general, tal sistema sería incompatible, por lo que habríamos de responder negativamente.

② Buscaríamos, entonces, un polinomio de grado n:

$$P_n(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

que cumpliera:

$$P_n(x_o) = y_o\,,\ P_n(x_1) = y_1\,,\ \dots\,,\ P_n(x_n) = y_n$$

Es decir, analizaríamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{lllllll} a_o + & a_1 x_o & + \ a_2 x_o^2 & + & \dots + & a_n x_o^n & = \ y_o \\ a_o + & a_1 x_1 & + \ a_2 x_1^2 & + & \dots + & a_n x_1^n & = \ y_1 \\ \dots & \dots & \dots & & \ddots & \dots & \quad \dots \\ a_o + & a_1 x_n & + \ a_2 x_n^2 & + & \dots + & a_n x_n^n & = \ y_n \end{array}\right\}$$

que resultaría compatible determinado (compruébalo), por lo que concluiríamos que, efectivamente, tal polinomio existiría y *sería único*. Para escribirlo, bastaría con resolver el sistema de ecuaciones lineales. (Podría suceder que $a_n = 0$. El polinomio de interpolación, entonces, sería en realidad de grado menor que n.)

③ También en este caso podríamos preguntarnos si no habría algún polinomio de grado superior a n que pasara por los puntos dados. La respuesta sería afirmativa, pero razones idénticas a las del caso particular precedente nos conducirían a prescindir de tales polinomios y quedarnos con $P_n(x)$ como solución óptima a nuestro problema.

3. MÉTODO DE LAGRANGE

Explicación del método

Dicho lo anterior, lo cierto es que cuando n es un número mayor que 3 ó 4 la resolución del sistema de ecuaciones que permite hallar el polinomio de interpolación es bastante engorrosa. Afortunadamente, existen varios procedimientos para evitar tal dificultad; el que vamos a ver es el más sencillo.

➦ El *método de Lagrange* obtiene el polinomio de interpolación correspondiente a los puntos (x_o, y_o), (x_1, y_1), ... , (x_n, y_n), a partir de las $n+1$ funciones siguientes:

$$f_o(x) = \frac{(x-x_1).(x-x_2).(x-x_3).\ \ldots.(x-x_n)}{(x_o-x_1).(x_o-x_2).(x_o-x_3).\ \ldots.(x_o-x_n)}$$

$$f_1(x) = \frac{(x-x_o).(x-x_2).(x-x_3).\ \ldots.(x-x_n)}{(x_1-x_o).(x_1-x_2).(x_1-x_3).\ \ldots.(x_1-x_n)}$$

……………………………………………………………

$$f_n(x) = \frac{(x-x_o).(x-x_1).(x-x_2).\ \ldots.(x-x_{n-1})}{(x_n-x_o).(x_n-x_1).(x_n-x_2).\ \ldots.(x_n-x_{n-1})}$$

Todas son polinomios de grado n que cumplen $f_i(x_i) = 1$; $f_i(x_j) = 0$ (si $i \neq j$), por lo que:

$$\boxed{P_n(x) = y_o\, f_o(x) + y_1\, f_1(x) + y_2\, f_2(x) + \ldots + y_n\, f_n(x)}$$

será un polinomio de grado menor o igual que n que, además, cumplirá:

$$P_n(x_o) = y_o\,,\ P_n(x_1) = y_1\,,\ \ldots\,,\ P_n(x_n) = y_n$$

En consecuencia, y dado que sólo hay un polinomio de grado menor o igual que n que pase por $n + 1$ puntos, el anterior será el polinomio de interpolación buscado.

Ejemplo

Para hallar por el método de Lagrange el valor interpolado para $x = 4$ correspondiente a los puntos (1, 1), (3, 4) y (6, 8) procederíamos así:

$$P(x) = 1.\frac{(x-3).(x-6)}{10} + 4.\frac{(x-1).(x-6)}{-6} + 8.\frac{(x-1).(x-3)}{15} \quad \Rightarrow \quad P(4) = \frac{22}{5} = 4'4.$$

4. EJERCICIOS

1.- Medida en un laboratorio la tensión del vapor de agua a distintas temperaturas, se ha obtenido la siguiente tabla:

Temperatura (° C.)	30	40	50
Tensión (mm. de Hg.)	31'51	54'86	91'98

Estima la tensión para una temperatura de 42°.

2.- Obtén el polinomio de interpolación de Lagrange para los siguientes datos:

x	-2	1	6	13	21
y	3'30	1	4'25	5'97	6'99

y utilízalo para estimar el valor de y para x = 8.

3.- Calcula por el método de interpolación de Lagrange un valor aproximado de $\sqrt{13}$, sabiendo que $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$.

4.- La función y = sen x *pasa* por los puntos indicados en la tabla:

0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Obtén un valor aproximado de $\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$.

5.- Sabiendo que log 3 = 0'4771, log 3'5 = 0'5441, log 4 = 0'6021, calcula log 3'75.

6.- Escribe el polinomio de interpolación correspondiente a los puntos (2, 4), (3, 8), (5, 12), (6, 14) y, posteriormente, halla sus valores para x = 4 y para x = 10. ¿Cuál de los dos te parece más fiable?

7.- Si a los puntos del ejercicio anterior se añadieran los (1, 2) y (8, 20), ¿cuáles serían los nuevos valores interpolados para x = 4 y para x = 10 ?

8.- Calcula, sirviéndote del método de interpolación de Lagrange, la ecuación de un tiro oblicuo cuyo alcance y altura máxima son 1.200 y 90 metros, respectivamente.

9.- Determina el polinomio de menor grado que pasa por los puntos (0, -5), (2, 5), (3, 13) y (6, 49). ¿Resta validez al método de Lagrange el resultado obtenido?

TEMA 11

LA INTEGRAL DEFINIDA

1. INTRODUCCIÓN

Abordamos ya el último tema, único que dedicaremos en nuestro curso al cálculo integral. Bajo tal nombre no debes pensar que se encierra todo el cálculo, o unos procedimientos para calcularlo *todo;* más bien se tratará de componer un todo a partir de sus partes. Y si la forma más sencilla de componer un todo a partir de sus partes es sumar, veremos que integrar no será cosa distinta de sumar; con lo que volveremos a comprobar que las matemáticas se reducen casi siempre a operaciones triviales. La integral definida, en efecto, será una suma infinita o, mejor, el límite de una suma finita. ¡Otra vez los conceptos de límite e infinito! Ahora, relacionando la integración y la suma. (Y ésa no es la única conexión: La integral se representará por el símbolo $\int$, versión rococó y a la vez estilizada de la letra S, inicial de la palabra latina *Summa,* y se definirá como lím Σ, donde Σ, letra *sigma* mayúscula, es a su vez inicial de la palabra griega Συντιθημι, que también significa suma.)

En este capítulo confirmaremos lo dicho en el VI, cuando afirmábamos que el cálculo integral permite conocer el área limitada por una curva; pero también veremos que integrar es el proceso inverso de derivar. Si el cálculo diferencial es, básicamente, un método para hallar la velocidad cuando se conoce el espacio recorrido, el cálculo integral es un método para hallar el espacio cuando se conoce la velocidad. Este espacio coincidirá con el área bajo la curva que expresa la dependencia de velocidad respecto del tiempo, lo mismo que la pendiente de la tangente a la curva que expresaba el espacio en función del tiempo, coincidía con la velocidad.

Todos estas ideas son fruto de trabajos realizados de forma independiente en el siglo XVII por Newton y Leibniz, quienes, utilizando los métodos de la geometría analítica de Descartes, el concepto de límite y los conocimientos geométricos legados por los griegos, lograron aglutinar, y de alguna manera *integrar,* materias dispersas hasta entonces, inventando el cálculo diferencial e integral. Efectivamente, Arquímedes ya hacía uso de procedimientos que luego se emplearían en el cálculo integral: demostró que el área encerrada por una parábola es 2/3 del área del rectángulo que la contiene; que el volumen de una pirámide es un tercio del volumen del prisma de igual base y altura... Fue un monstruo de la Ciencia: Dijo aquello de *dadme un punto de apoyo y moveré la Tierra,* estableció el principio que lleva su nombre, calculó el tamaño del Sol; escribió *El Arenario,* el más precioso documento sobre la numeración griega que poseemos; un tratado de Estática; un libro sobre poliedros; otro sobre los centros de gravedad; sobre la cuadratura de la parábola; sobre espirales... Para nuestra desgracia, Arquímedes también hizo otras cosas. Es considerado el primer científico que empleo sus conocimientos en el arte (?) de la guerra. Se le atribuye el invento de las catapultas para hundir barcos a destajo; para quemarlos utilizaba espejos parabólicos...

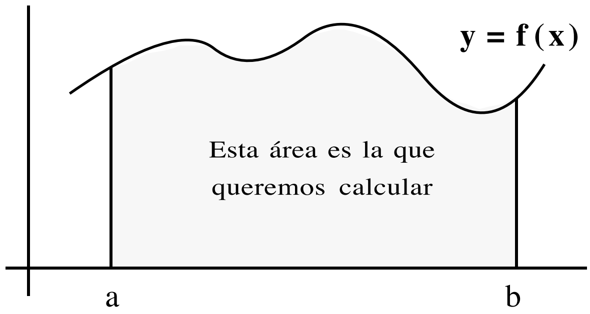
Ignoramos si el conocimiento científico lleva inexorablemente aparejada su utilización en la destrucción de la Humanidad. Sí sabemos que las matemáticas, que tanto han contribuido al dominio de la naturaleza, también han aportado la base teórica de inventos tan nefastos como los misiles o la bomba de neutrones. Si la Ciencia es una moneda con dos caras, apostemos por la buena; nos va en ello nuestra supervivencia.

2. EL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

Planteamiento del problema

Admitamos como punto de partida y, por tanto, utilizable sin definirlo previamente, el concepto de área de un cuadrado. No resulta entonces difícil, sin más que hacer consideraciones geométricas intuitivas, calcular áreas de triángulos, cuadriláteros o polígonos en general... Pero considera la figura siguiente:

La curva $y = f(x)$, que supondremos continua y positiva en [a, b] para simplificar el razonamiento, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje OX forman un recinto, que aparece sombreado en el dibujo.



¿Qué se entenderá por área de dicho recinto? ¿Cómo se calculará?

Algunas cuestiones necesarias para poder responder

☞ Sea $f(x)$ una función continua y positiva en un intervalo cerrado [a, b] y consideremos una *partición* del intervalo [a, b]; o sea, cualquier conjunto de puntos:

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \ / \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

Llamemos:

1) m_i al valor mínimo de $f(x)$ en el *subintervalo* $[x_{i-1}, x_i]$.
(Tal valor existe, pues $f(x)$ es continua en dicho subintervalo cerrado.)

2) M_i al valor máximo de $f(x)$ en el *subintervalo* $[x_{i-1}, x_i]$.
(También existe, por la misma razón por la que existe el mínimo.)

3) Δx_i a la longitud del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, o sea, a la diferencia $x_i - x_{i-1}$.
(Δx_1 es la longitud del primer *trozo* en el que se ha dividido [a, b], Δx_2 la del segundo, etc.)

4) Δx, o *anchura de la partición* P, a la mayor de las longitudes Δx_i.

Entonces, las sumas:

$$s = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$S = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + M_3 \Delta x_3 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

son las sumas de las áreas de todos los rectángulos que aparecen en las figuras ① y ② de la página siguiente, respectivamente.

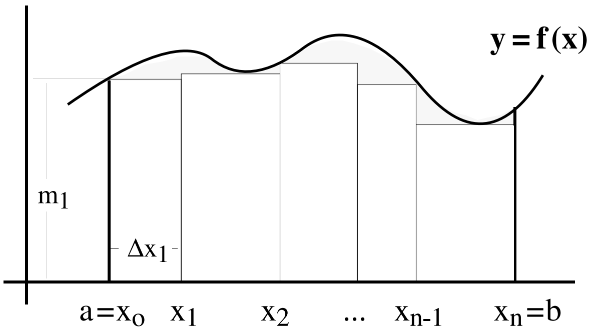


Figura ①

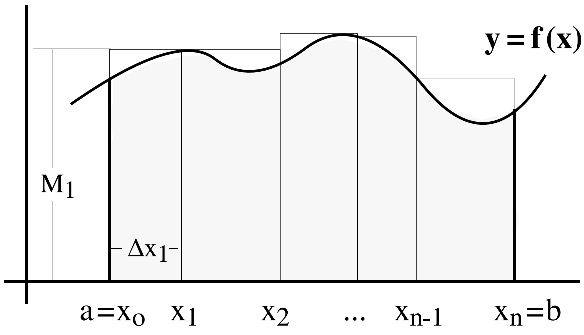
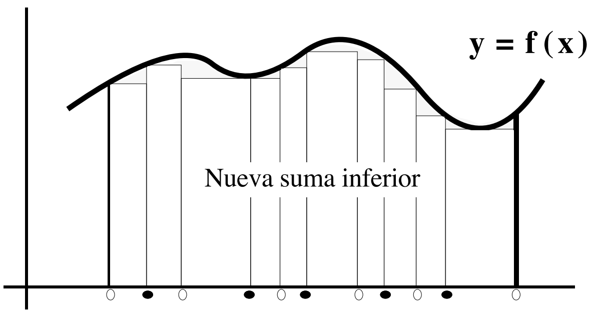


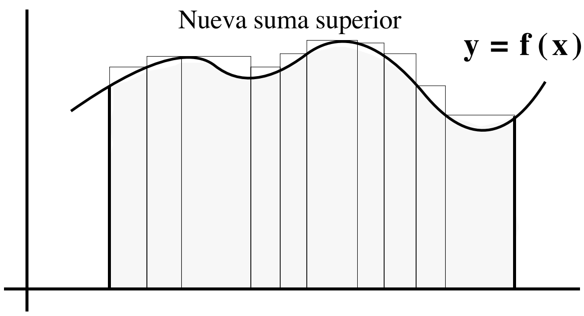
Figura ②

A s y S podríamos llamarlas área por defecto y por exceso pero, en aras de un mayor rigor, las llamaremos *suma inferior y suma superior* de f(x) en [a, b] correspondientes a la partición P.

✂ Observa que, aunque no sepamos cuál es el área del recinto limitado por f(x), el eje OX y las rectas x = a, x = b, es razonable que si la representamos por $\int_a^b f(x)$, haya de ser: $s \leq \int_a^b f(x) \leq S$.

☞ Si ahora tomáramos otra partición P' más *fina* que la anterior, *añadiendo* nuevos puntos a P, tendríamos otras dos sumas inferior y superior, s' y S':





○ Puntos que formaban la partición P

• Puntos que añadidos a los anteriores hacen más fina la partición

Sumas que, como te resultará fácil comprobar, cumplen: $\begin{cases} s \leq s' \\ S \geq S' \end{cases}$

✂ Por consiguiente, habrá de ser: $s \leq s' \leq \int_a^b f(x) \leq S' \leq S$.

☞ Si de forma semejante, siguiéramos tomando particiones P'', P'''... cada vez más finas, las correspondientes sumas inferiores y superiores cumplirían:

$$\begin{array}{l} s \leq s' \leq s'' \leq s''' \leq \ldots \\ S \geq S' \geq S'' \geq S''' \geq \ldots \end{array}$$

✂ Por tanto, habría de ser: $s \leq s' \leq s'' \leq s''' \leq \ldots \leq \int_a^b f(x) \leq \ldots \leq S''' \leq S'' \leq S' \leq S$.

Definición (de integral definida)

Llegados a este punto, y sin ocultarte que se trata de la clave de lo que estamos haciendo, admitiremos sin demostración algo que quizá ya estés sospechando:

☞ Si, dada una función f (x), continua y positiva en el intervalo cerrado [a, b], se toma una sucesión de particiones P, P', P'', P'''... de [a, b] tal que:

1) Cada partición contiene todos los puntos de la anterior.
2) La sucesión de las anchuras de las particiones: $\Delta x, \Delta' x, \Delta'' x, \Delta''' x$... tiene por límite cero.

Entonces, las sucesiones:

1) De las sumas inferiores: $s, \quad s', \quad s'', \quad s''' \quad \ldots$
2) De las sumas superiores: $S, \quad S', \quad S'', \quad S''' \quad \ldots$

tienen igual límite. A tal límite le llamaremos *integral definida* de f (x) sobre [a, b] y lo representaremos, inicialmente, por: $\int_a^b f(x)$.

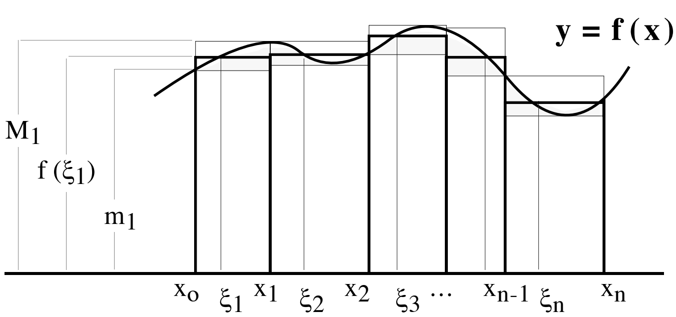
Naturalmente, será el valor de dicha integral el que tomaremos como área del recinto limitado por la función f(x), el eje OX y las rectas x = a, x = b.

Otra forma de considerar la integral

A efectos prácticos, es interesante *contemplar* la integral desde otro punto de vista. Consideremos, pues, la partición $P = \{x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ del intervalo [a, b] y las correspondientes suma inferior, s, y superior, S.

Si en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tomáramos un punto arbitrario ξ_i, se tendría:

$$m_1 \Delta x_1 \le f(\xi_1)\Delta x_1 \le M_1 \Delta x_1$$
$$m_2 \Delta x_2 \le f(\xi_2)\Delta x_2 \le M_2 \Delta x_2$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$
$$m_n \Delta x_n \le f(\xi_n)\Delta x_n \le M_n \Delta x_n$$



y por tanto, sumando "miembro a miembro" las desigualdades anteriores:

$$s \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\,\Delta x_i \le S$$

En consecuencia, si en los supuestos de la definición precedente las sucesiones:

$$\begin{array}{llll} s \ , & s' \ , & s'' \ , & s''', \ldots \\ S \ , & S' \ , & S'' \ , & S''' \ , \ \ldots \end{array}$$

de las sumas inferiores y superiores tienen el mismo límite, $\int_a^b f(x)$, también tendrá ese límite la sucesión cuyos términos sean de la forma:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \, . \, \Delta x_i$$

(n representa en cada caso el número de *trozos* en los que se han dividido las particiones P, P', P''...)

pues cada uno de ellos está comprendido entre los que ocupan el correspondiente lugar en las sucesiones de las sumas inferiores y superiores.

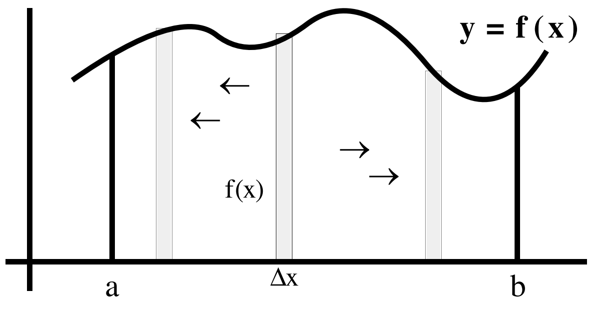
Podrá escribirse, pues: ☞

$$\boxed{\int_a^b f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \, . \, \Delta x_i}$$

Recuerda: Δx era la *anchura* de la partición P, o máximo de los Δx_i. Por tanto, que $\Delta x \to 0$ obliga a que todos los $\Delta x_i \to 0$ y a que $n \to \infty$, por decirlo en un lenguaje asequible, aunque algo impreciso.)

Observaciones

1.- La última igualdad hizo que durante mucho tiempo se considerara la integral como *suma de infinitos elementos diferenciales de área,* "rectángulos de altura f(x) y base Δx infinitamente pequeña", según los términos que acuñó Leibniz, cuyo significado intentamos sugerirte mediante la siguiente figura.



Quizás sea tal interpretación de la integral la que explique que el símbolo más usado para referirse a ella sea:

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

Éste será también el que nosotros utilizaremos a partir de ahora.

2.- Identificada la integral con un área, te será fácil aceptar que la función f(x) no tiene que ser necesariamente continua en [a, b] para que exista su integral. Piensa, por ejemplo, en la función *parte entera,* f (x) = [x], y analiza qué razones podría haber para que no existiera su integral en el intervalo [2, 5], por ejemplo. Por lo tanto, de lo hecho hasta ahora se desprende que si una función es continua, entonces es integrable, pero *nadie ha dicho que sólo sean integrables las funciones continuas.*

3. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Propiedades inmediatas

Puede demostrarse que si $f(x)$, $g(x)$ son funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces se verifican:

1	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2	$\int_a^b k\,.\,f(x)\,dx = k\,.\int_a^b f(x)\,dx \;\; ; \; k \in \mathbf{R}$
3	$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
4	$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \; ; \; c \in [a, b]$

Sería conveniente que buscaras alguna interpretación geométrica a las propiedades anteriores (la cuarta, por ejemplo, tiene un significado obvio). Por nuestra parte, y sin entrar en detalle, nos limitaremos a demostrar la tercera.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\,.\,\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,.\,\Delta x_i + \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,.\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)]dx$$

Ni que decir tiene que los ξ_i, los Δx_i, etc., tienen el significado que hemos visto líneas atrás.

Teorema (del valor medio)

Vamos a demostrar a continuación un teorema que, más adelante, nos permitirá establecer un resultado fundamental. El teorema es éste:

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, entonces existe $\xi \in [a, b]$ tal que:

✍ ☞ $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,.\,(b - a)}$$

En efecto. Sean m y M los valores mínimo y máximo absolutos de f(x) en [a, b], existentes al ser f(x) continua en dicho intervalo. Entonces, cualesquiera que sean la partición $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de [a, b] y los puntos ξ_i en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, como:

$$m \le f(\xi_i) \le M$$

se tendrá:

$$m\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} m\,\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M\,\Delta x_i = M\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

y ya que:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = (x_1 - x_o) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) = b - a$$

será:

$$m.(b-a) \le \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le M.(b-a)$$

o sea:

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$$

Por lo tanto, $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ es un número comprendido entre el valor mínimo, m, y el máximo, M, de f(x) en [a, b]. Recordando finalmente que toda función continua en un intervalo cerrado toma en él cualquier valor comprendido entre el mínimo y el máximo (pág. 136), concluiremos que existe al menos un punto ξ en [a, b] tal que:

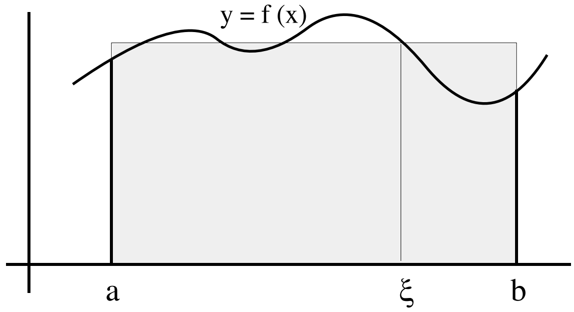
$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(\xi)$$

es decir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi).(b-a)\,,\ \text{con}\quad \xi \in [a,b]$$

Una fácil interpretación geométrica

La figura de la derecha sugiere una interpretación geométrica del teorema del valor medio: Existe al menos un rectángulo de base $b - a$ y altura $f(\xi)$, con $\xi \in [a, b]$, cuya área es igual a la del recinto limitado por la curva f(x), el eje OX y las rectas x = a, x = b.



4. CÁLCULO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Observación

Definida la integral definida y estudiadas algunas de sus propiedades, seguimos sin resolver una cuestión clave: cómo se *calculará* su valor. En las líneas siguientes estudiaremos dos procedimientos para resolver tal problema, empezando por el más importante, al menos desde un punto de vista teórico: La regla de Barrow. Con él se pondrá de manifiesto la relación entre la integración, o cálculo de integrales, y la derivación, de la que hablábamos en la introducción al capítulo.

Teorema (regla de Barrow)

Si f (x) es una función continua en [a, b] y F (x) una primitiva *cualquiera* de f (x) en [a, b] (esto es, una función tal que F ' (x) = f (x), ∀ x ∈ [a, b]), se cumple:

Teorema fundamental

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

En efecto:

① ➠ Demostremos en primer lugar que la función $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a, b]$.

A tal fin, sea $\alpha \in [a, b]$. Entonces:

$$G'(\alpha) = \lim_{h\to 0} \frac{G(\alpha+h) - G(\alpha)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{\alpha+h} f(t)\,dt - \int_a^{\alpha} f(t)\,dt}{h} \overset{(1)}{=}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_\alpha^{\alpha+h} f(t)\,dt}{h} \overset{(2)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi).h}{h}, \text{ para algún } \xi \in [\alpha, \alpha+h]$$

(la igualdad (1), por la propiedad 4ª de la integral definida; la (2), por el teorema del valor medio)

es decir: ➪ $$G'(\alpha) = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(\alpha)$$

(pues f es continua en α, y cuando h tiende a cero, ξ lo hace a α)

En realidad lo anterior prueba que G(x) es primitiva de $f(x)$ en el intervalo abierto (a, b), pero no que lo sea también en los extremos a y b y, por tanto, en el intervalo cerrado $[a, b]$. Ello, sin embargo, no sería difícil de demostrar, admitiendo que $G'(a)$ y $G'(b)$ vendrían dadas por:

$$G'(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{G(a+h) - G(a)}{h} \quad ; \quad G'(b) = \lim_{h\to 0^-} \frac{G(b+h) - G(b)}{h}$$

② ➠ Pero recuerda que se trataba de calcular $\int_a^b f(x)\,dx$, es decir, G(b).

Supongamos que F(x) fuese otra primitiva cualquiera de f(x). Las funciones G(x) y F(x) tendrían igual derivada, luego existiría $k \in \mathbf{R}$ tal que:

$$G(x) = F(x) + k.$$

Sólo nos faltaría calcular k.

Pero como:

$$\left.\begin{array}{l} G(a) = F(a) + k \\ G(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad k = -F(a)$$

se tendría, finalmente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

diferencia que suele escribirse así: $\left[F(x)\right]_a^b$.

Ejemplo

Aunque más adelante expondremos algunos métodos de obtención de primitivas, con lo que recuerdes del curso pasado te bastará para entender el siguiente ejemplo:

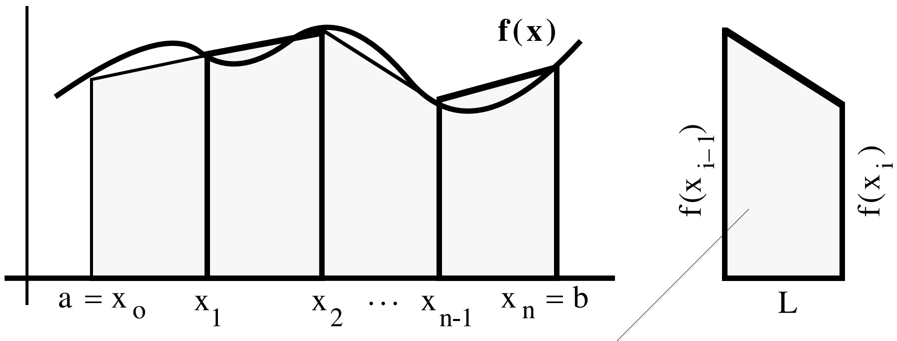
$$\int_{-1}^{1} (2x^2 - x^3)\,dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3}$$

Observación

Con ser importante el teorema anterior, o *teorema fundamental del Cáculo Integral,* para aplicarlo es necesario conocer una primitiva de la función f(x), lo cual no siempre es factible. A continuación estudiaremos el más sencillo de los procedimientos para calcular el valor aproximado de una integral definida cuando su cálculo exacto no sea posible.

Método de los trapecios

Supón que siendo f(x) continua y positiva en [a, b], no fuera posible calcular el valor exacto de su integral en dicho intervalo. El *método de los trapecios,* el más sencillo de los procedimientos que permiten obtener un valor *aproximado* de $\int_a^b f(x)\,dx$, consiste en dividir el intervalo [a, b] en n partes *iguales,* de tal manera que la longitud de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ sea $L = \frac{b-a}{n}$, y tomar como valor de la integral la suma de las áreas de los n trapecios que se indican en la siguiente figura: ➥



Como valor de la integral tomaremos la suma de las áreas de los n trapecios.

$$\text{Área} = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot L$$

Tal suma es:

$$S = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot L + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot L + \ldots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \cdot L =$$

$$\frac{b-a}{n} \cdot \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) \right]$$

Por consiguiente:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{b-a}{n} \cdot \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) \right]}$$

Dos comentarios

1º) Es posible demostrar, aunque aquí no lo hagamos, que en el caso de que la función $f(x)$ posea derivada segunda acotada en el intervalo $[a, b]$ también puede acotarse el error cometido al aplicar la formulita anterior. Asimismo, puede demostrarse algo que resulta bastante *razonable:* la precisión obtenida al usar el método de los trapecios es mayor cuanto mayor sea el número de partes en que se divida $[a, b]$.

2º) Una ventaja que quizás no sospeches de lo anterior es la siguiente: ¡Se podrá calcular el valor aproximado de la integral de $f(x)$ en $[a, b]$ aunque no se sepa cuál es la función $f(x)$! Bastará con que se conozcan sus valores en los correspondiente n+1 puntos.

Ejemplo

Comprueba que si se aplica la regla de los trapecios, dividiendo el intervalo [0, 12] en seis partes, entonces:

$$\int_0^{12} x^2 dx \cong 2 \cdot \left[\frac{0 + 144}{2} + 4 + 16 + 36 + 64 + 100 \right] = 584$$

(Compara el valor anterior con el exacto, obtenido aplicando la regla de Barrow.)

5. CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Como has podido comprobar en las páginas precedentes, el conocimiento de una primitiva de $f(x)$ es imprescindible para conocer el valor exacto de la integral de dicha función en un intervalo $[a, b]$. En cursos anteriores has estudiado que una forma de expresar que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ consiste en escribir:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

y al proceso que permite obtener primitivas es al que has llamado *integración*.

El presente apartado está dedicado a recordarte algunas fórmulas y procedimientos de integración.

Integrales inmediatas

Sin más que considerar las fórmulas de *derivación* que aparecieron en las páginas 147 y 148, podremos escribir:

① $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$	② $\int k\,.f(x)\,dx = k.\int f(x)\,dx\ ;\ (k \in \mathbf{R})$
③ $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\ ;\text{si}\ \ n \neq -1$	④ $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C$
⑤ $\int \text{sen}\,x\ dx = -\cos x + C$	⑥ $\int \cos x\ dx = \text{sen}\,x + C$
⑦ $\int e^x dx = e^x + C$	⑧ $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
⑨ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen}\,x + C$	⑩ $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \text{arc tag}\,x + C$

En adelante, cada vez que hayamos de calcular una integral que no figure entre las anteriores, intentaremos *dar los pasos* que nos permitan expresarla en función de las que sí aparecen en el cuadro.

Ejemplo

No tendrás dificultad alguna en *ver* que:

$$\int \left[5x^3 + 3x^2 + \frac{5}{x} \right] dx = \frac{5x^4}{4} + x^3 + 5\ln x + C$$

Integración por sustitución

Utilizando un ejemplo para explicarte en qué consiste este método, considera la integral:

$$\int 5x\sqrt{1+x^2}\ dx$$

Si no te resulta inmediata, efectúa el siguiente *cambio de variable:*

$$t = 1 + x^2\ ;\ (dt = 2x\ dx)$$

En consecuencia:

$$\int 5x\sqrt{1+x^2}\ dx = \int 5\,.\,x\,.\sqrt{t}\,.\frac{dt}{2x} = \frac{5}{2}\int\sqrt{t}\ dt = \frac{5}{3}\sqrt{t^3} + C = \frac{5}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C$$

Ejemplos

Utiliza el método anterior para comprobar que:

$$\int \mathrm{sen}^2 x\ \cos\ x\ dx = \frac{\mathrm{sen}^3 x}{3} + C\ ; \qquad \int\sqrt{x^2 - 2x^4}\ dx = -\frac{1}{6}\sqrt{(1-2x^2)^3} + C$$

Integración por partes

Se basa este procedimiento en la fórmula de la *derivada de un producto:*

$$[u(x).v(x)]' = u'(x)\,.\,v(x) + u(x)\,.\,v'(x)$$

Se tendrá:

$$\int [\,u(x).\,v(x)\,]'.dx = \int u'(x).\,v(x).dx + \int u(x).\,v'(x).\,dx$$

y como:

$$\int [\,u(x).\,v(x)\,]'.\,dx = u(x).\,v(x), \quad u'(x).\,dx = du, \quad v'(x).dx = dv$$

será:

$$u.\,v = \int v\,.\,du + \int u\,.\,dv$$

es decir:

Fórmula de la integración por partes	✍ ☞	$\boldsymbol{\int u\,.\,dv = u\,.\,v - \int v\,.\,du}$

(Los autores de estas páginas dan su palabra de que algunos estudiantes utilizan para recordar la fórmula anterior aquello de que "**un** **d**ía **vi** **un** **v**iejo **v**estido **d**e **u**niforme")

Ejemplo

Para calcular:

$$\int x.e^x.dx$$

podríamos proceder así:

$$u = x \quad \rightarrow \quad du = dx$$

$$e^x\, dx = dv \rightarrow \quad v = e^x$$

de donde:

$$\int x.e^x.dx = x.e^x - \int e^x.dx = x.e^x - e^x + C$$

Más ejemplos

Comprueba, tras aplicar la fórmula de la integración por partes, que:

① $\int x \ \mathrm{sen}\, x \ dx = -x \cos x + \mathrm{sen}\, x + C$

② $\int x \sqrt{1+x}\, dx = \frac{2}{3} x \sqrt{(1+x)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(1+x)^5} + C$

Integración de funciones racionales

Te recordamos ahora, sirviéndonos de algunos ejemplos, cómo se calculaban las integrales del tipo:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

donde P(x) y Q(x) son dos funciones polinómicas tales que *grado de P(x) < grado Q(x)*.

De entre todos los casos posibles, nosotros consideraremos éstos:

a) El polinomio Q(x) sólo tiene raíces reales simples.
b) El polinomio Q(x) sólo tiene raíces reales, simples y múltiples.
c) El polinomio Q(x) tiene raíces reales simples y múltiples y complejas simples.

Ejemplo del primer caso

Para calcular: $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x}\, dx$

procederemos de la siguiente forma:

- Efectuaremos la descomposición factorial del denominador, obteniendo:

$$x^3 + x^2 - 6x = x.(x-2).(x+3)$$

- Descompondremos la fracción inicial en fracciones simples:

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

En consecuencia:

$$x+1 = A.(x-2).(x+3) + B.x(x+3) + C.x.(x-2)$$

igualdad de la que se obtiene, tras *dar* a **x** los valores x = 0, x = 2, x = -3:

$$A = -\frac{1}{6} \quad ; \quad B = \frac{3}{10} \quad ; \quad C = -\frac{2}{15}$$

- Concluiremos escribiendo:

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx = -\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x} + \frac{3}{10}\int\frac{dx}{x-2} - \frac{2}{15}\int\frac{dx}{x+3} =$$

$$= -\frac{1}{6}\ln x + \frac{3}{10}\ln(x-2) - \frac{2}{15}\ln(x+3) + C$$

Ejemplo del segundo caso

Para calcular: $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

- Efectuaremos la descomposición factorial del denominador:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1).(x-1)^2$$

- Descompondremos la fracción inicial en fracciones simples:

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

En consecuencia:

$$3x+5 = A.(x-1)^2 + B.(x+1).(x-1) + C.(x+1)$$

igualdad de la que se obtiene, sea tras identificar coeficientes, sea tras *dar* a **x** los valores x = 1, x = -1, x = 0:

$$A = \frac{1}{2} \quad ; \quad B = -\frac{1}{2} \quad ; \quad C = 4$$

- Concluiremos escribiendo:

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} + 4\int\frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{4}{x-1} + C\,.$$

Ejemplo del tercer caso

Para calcular:

$$\int \frac{3x^2 - 3x + 11}{(x+1).(x^2 - 6x + 10)}\,dx$$

- Partiremos de la descomposición factorial, ya dada, del denominador y escribiremos:

$$\frac{3x^2 - 3x + 11}{(x+1).(x^2 - 6x + 10)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 6x + 10}$$

En consecuencia:

$$3x^2 - 3x + 11 = A.(x^2 - 6x + 10) + (Bx + C).(x + 1)$$

igualdad de la que se obtiene, sea tras identificar coeficientes, sea tras *dar* a **x** los valores cualesquiera, como x = -1, x = 0, x = 0:

$$A = 1; \quad B = 2; \quad C = 1$$

- Escribiremos:

$$\int \frac{3x^2 - 3x + 11}{(x+1).(x^2 - 6x + 10)}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{2x+1}{x^2 - 6x + 10} =$$

$$= \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{2x+1}{(x-3)^2 + 1}$$

y sin más que hacer el cambio: $t = x - 3$

- Concluiremos:

$$\int \frac{3x^2 - 3x + 11}{(x+1).(x^2 - 6x + 10)}\,dx = \ln(x+1) + \ln[(x-3)^2 + 1] + 7\,\mathrm{arc\ tag}\,(x-3) + C$$

Advertencia

Si quisiéramos calcular una integral como:

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + x + 9}{x^2 - 5x + 6}\,dx$$

en la que el grado del polinomio del numerador es mayor o igual que el del denominador, antes de efectuar la descomposición en *fracciones simples* habría que proceder así:

$$\frac{x^3 - 4x^2 + x + 9}{x^2 - 5x + 6} = (\text{efectuando la división}) = (x+1) + \frac{3}{x^2 - 5x + 6}$$

aplicando a continuación lo visto líneas atrás.

6. CÁLCULO DE ÁREAS PLANAS

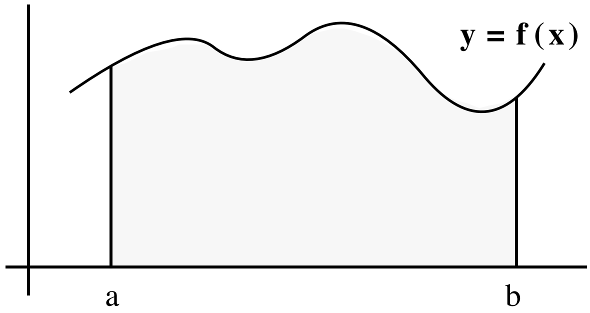
Concluido el paréntesis dedicado al cálculo de primitivas, volvamos a la integral definida viendo cómo se calcula el área de ciertos recintos planos.

Primer caso

Si el recinto está definido por una curva $y=f(x)$, continua y positiva en el intervalo [a, b], las rectas $x=a, x=b$ y el eje OX, para hallar su área bastará con calcular, como ya sabes:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

sin que haya más complicación.



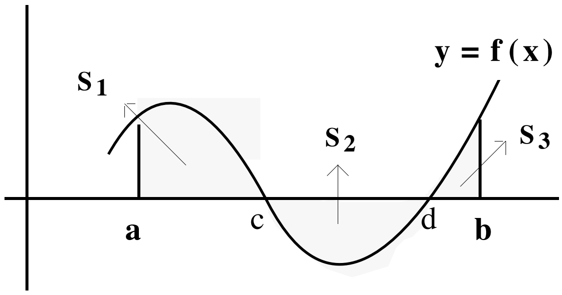
Ejemplo

Comprueba que el área limitada por la sinusoide, el eje OX y la recta $x=\frac{\pi}{2}$ es 1.

Segundo caso

Si se tratara de calcular un área como la de la derecha, habría que considerar que cuando una función continua toma valores negativos en un intervalo, como le sucede a la f (x) del dibujo en el intervalo [c, d], también existe:

$$\int_c^d f(x).\,dx = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i$$



aunque en ese caso la integral será negativa. Por ello, para resolver el problema:

1.- Determinaremos los puntos, **c** y **d**, de corte de y = f (x) con el eje OX.

2.- Calcularemos por separado:

$$S_1=\int_a^c f(x).dx \quad ; \quad S_2=\left|\int_c^d f(x).dx\right| \quad ; \quad S_3=\int_d^b f(x).dx$$

3.- Determinaremos el área pedida, S, como suma de las otras tres:

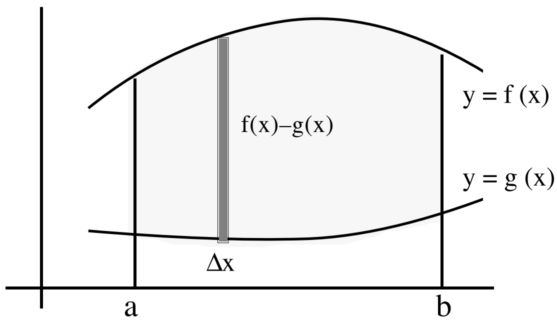
$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

Ejemplo

El área limitada por la curva $y = x^2 + x$, el eje OX y las rectas $x = -2$, $x = 3$ es 87/6.

Tercer caso

Para calcular el área de un recinto como el de la derecha podríamos utilizar la terminología, imprecisa pero intuitiva, de los elementos diferenciales. Tal área sería la suma de las de infinitos rectángulos de base Δx y altura $f(x) - g(x)$ como el dibujado. O sea:



$$\text{Área} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Tal integral proporcionaría el área incluso cuando la función $g(x)$ tomara valores negativos en el intervalo $[a, b]$, pues también en ese caso la altura del elemento diferencial de área vendría dada por la diferencia $f(x) - g(x)$.

Ejemplo

Dibuja sobre un sistema coordenado las parábolas cuyas ecuaciones son:

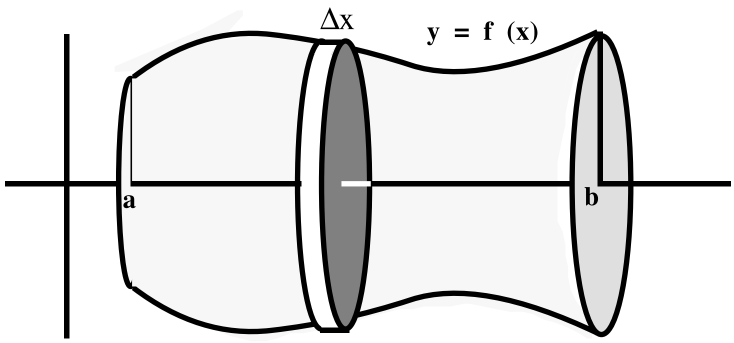
$$y = -x^2 + 4x \quad ; \qquad y = x^2 - 2x$$

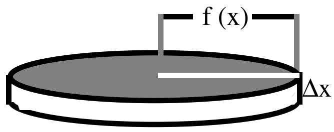
y tras verificar que se cortan en los puntos de abscisas $x = 0$, $x = 3$, comprueba que el área del recinto que limitan es de 9 unidades cuadradas.

7. CÁLCULO DE VOLÚMENES DE REVOLUCIÓN

Primer caso

Supongamos que el recinto limitado por la función $y = f(x)$, continua y positiva en $[a, b]$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje de abscisas, girara sobre OX, dando lugar a un sólido:





El volumen de este elemento diferencial es

$\pi \cdot f(x)^2 \cdot \Delta x$

Para calcular su volumen, procederemos de forma análoga a como hicimos para calcular áreas, considerando tal volumen como suma de los volúmenes de los infinitos elementos diferenciales de volumen del tipo del representado en el dibujo. Es decir: ➥

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot f(\xi_i)^2 \cdot \Delta x$$

y, por consiguiente:

$$\boxed{V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

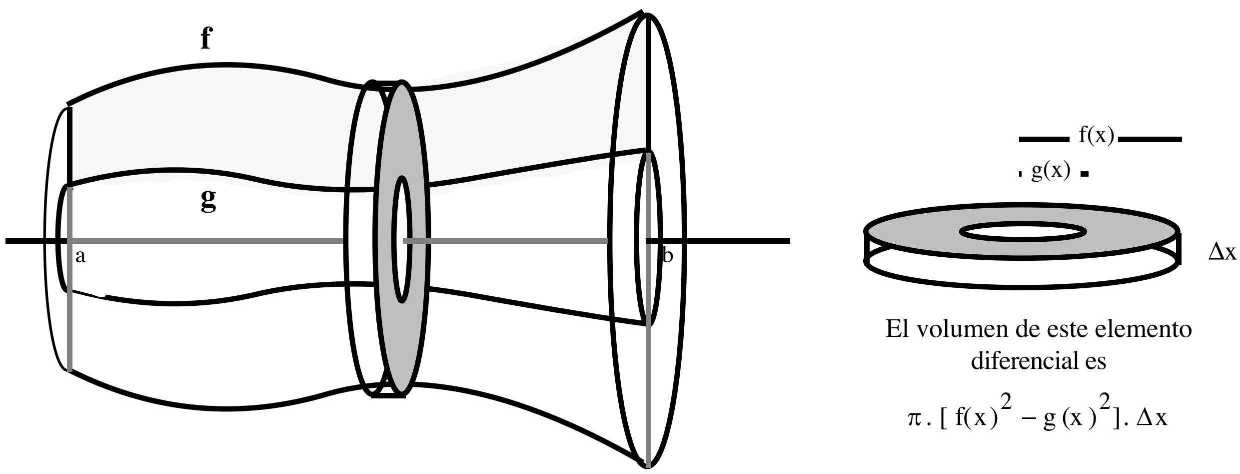
Ejemplo

Para calcular el volumen que se engendra cuando el recinto limitado por la parábola $y = \sqrt{x}$ y la recta x = 3 gira alrededor del eje de abscisas, bastará con escribir:

$$V = \pi \cdot \int_0^3 [\sqrt{x}]^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{9\pi}{2} .$$

Segundo caso

Después de lo hecho hasta aquí no tendrás dificultad en entender cómo se calculará el volumen de un sólido como el de la figura siguiente, engendrado cuando el recinto limitado por dos curvas f(x), g(x) continuas y positivas en un intervalo [a, b], gira alrededor del eje de abscisas:



Dicho volumen vendrá dado por:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x)^2 - g(x)^2\right] dx$$

Ejemplo

Comprueba que el volumen engendrado al girar 360° alrededor del eje OX el recinto limitado por la parábola $y = -x^2 - 3x + 6$ y la recta $x + y - 3 = 0$ es $\frac{1792\pi}{15}$.

8. EJERCICIOS

1.- Determina el valor de $\int_0^5 x\,dx$ tomando una partición del intervalo $[0, 5]$ en n partes iguales, eligiendo el punto medio ξ_i de cada subintervalo y calculando $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, \Delta x_i$.

2.- Calcula el valor de la integral del ejercicio anterior aplicando la regla de Barrow.

3.- Determina la función f (x), sabiendo que $f'''(x) = 2x$ y, además:

$$f(0) = 0; \quad f(1) = -\frac{1}{4}; \quad f(2) = \frac{2}{3}$$

4.- Calcula una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + 3x}$ que se anule para $x = 0$

5.- Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_0^2 \operatorname{sen} t \, dt \quad ; \qquad G(x) = \int_0^x \frac{5}{\sqrt{1+t}} \, dt$$

6.- Calcula las siguientes integrales:

1 $\int \sqrt{5x}\,dx$ 2 $\int \dfrac{5}{x^2+4}\,dx$ 3 $\int \ln x \, dx$ 4 $\int \operatorname{tag} x \, dx$

5 $\int \operatorname{arc\,tag} x \, dx$ 6 $\int x \cos 3x \, dx$ 7 $\int \dfrac{dx}{x^2 - 9}$ 8 $\int x^2 e^x \, dx$

9 $\int x\sqrt{1+x}\,dx$ 10 $\int \dfrac{x-2}{x^2+x}\,dx$ 11 $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$ 12 $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$

13 $\int \dfrac{dx}{(x+1)^3(x+2)}$ 14 $\int \dfrac{2x+5}{(x+3)^3}\,dx$ 15 $\int \dfrac{(x+2)\,dx}{(x-1)^2(x^2-4x+13)}$ 16 $\int \dfrac{x^3+5}{x^2-4}\,dx$

7.- Calcula las siguientes integrales:

1 $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx$ 2 $\int_0^{\pi} \cos^3 x \, dx$ 3 $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$ 4 $\int_0^1 \operatorname{arc\,sen} x \, dx$

5 $\int_2^3 \dfrac{5x}{x^2+3x+2}\,dx$ 6 $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$ 7 $\int_{-2}^{2} |x|\,dx$ 8 $\int_{-1}^{0} \dfrac{dx}{1+e^x}$

8.- Aplica el método de los trapecios para calcular las siguientes integrales, dividiendo los correspondientes intervalos en el número de partes que se indica:

1.– $\int_1^7 \dfrac{1}{x}\,dx$ (número de divisiones: 6) 2.– $\int_1^{11} x^3\,dx$ (número de divisiones: 10)

9.- Calcula $\int_2^3 f(x)\,dx$, siendo la siguiente tabla de valores todo lo que se sabe de $f(x)$:

x	2	2'25	2'50	2'75	3
f (x)	0'001	0'200	0'300	0'312	0'215

10.- Calcula $\int_1^7 f(x)\,dx$, siendo $f(x) = \begin{cases} x & , \text{si } 0 \le x \le 5 \\ 5 & , \text{si } 5 \le x \end{cases}$

11.- Determina el valor de *a* de modo que el área comprendida entre la curva $y = ax - x^2$ y el eje de abscisas sea 36.

12.- Calcula las áreas de los recintos limitados por las siguientes líneas:

1) $y = 4x - x^2$ y el eje OX.
2) $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX.
3) $y = 6x - x^2$; $y = x^2 - 2x$.
4) $y = x^2 - 4$; $y = 8 - 2x^2$.
5) $x = 4 - y^2$ y el eje OY.
6) $y = 3x - x^2$; $y = x - 3$
7) $y^2 = 4x$; $y - 2x + 4 = 0$.
8) $y = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$; $3x - 2y + 3 = 0$.

13.- Halla el área comprendida entre la curva $y = e^x$ y la cuerda de la misma que tiene por extremos los puntos de abscisas 0 y 1.

14.- Halla el área de la elipse de semiejes *a* y *b*.

15.- Halla el área del círculo de radio *r*.

16.- Calcula el volumen que se engendra cuando:

1º) El recinto limitado por la parábola $y^2 = 8x$ y las rectas $x = 2$, $x = 3$, gira alrededor del eje de abscisas.

2º) La elipse de semiejes *a , b* gira 360° alrededor del eje de abscisas.

3º) La elipse de semiejes *a , b* gira 360° alrededor del eje de ordenadas.

17.- Deduce las fórmulas del volumen de cono y de la esfera.

18.- El recinto limitado por la parábola $y = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$ y la recta $3x - 2y + 3 = 0$ gira 360° alrededor del eje de abscisas. Calcula el volumen del sólido así engendrado.

19.- Calcula el volumen de un tronco de cono cuyos radios miden 8 y 5 cm. y cuya altura es 10 cm.

20.- Representa gráficamente la función $y = x^2\sqrt{x + 4}$ y obtén el volumen del sólido engendrado al girar 360° alrededor del eje OX la región limitada por el semieje de abscisas negativas y la gráfica de la función.