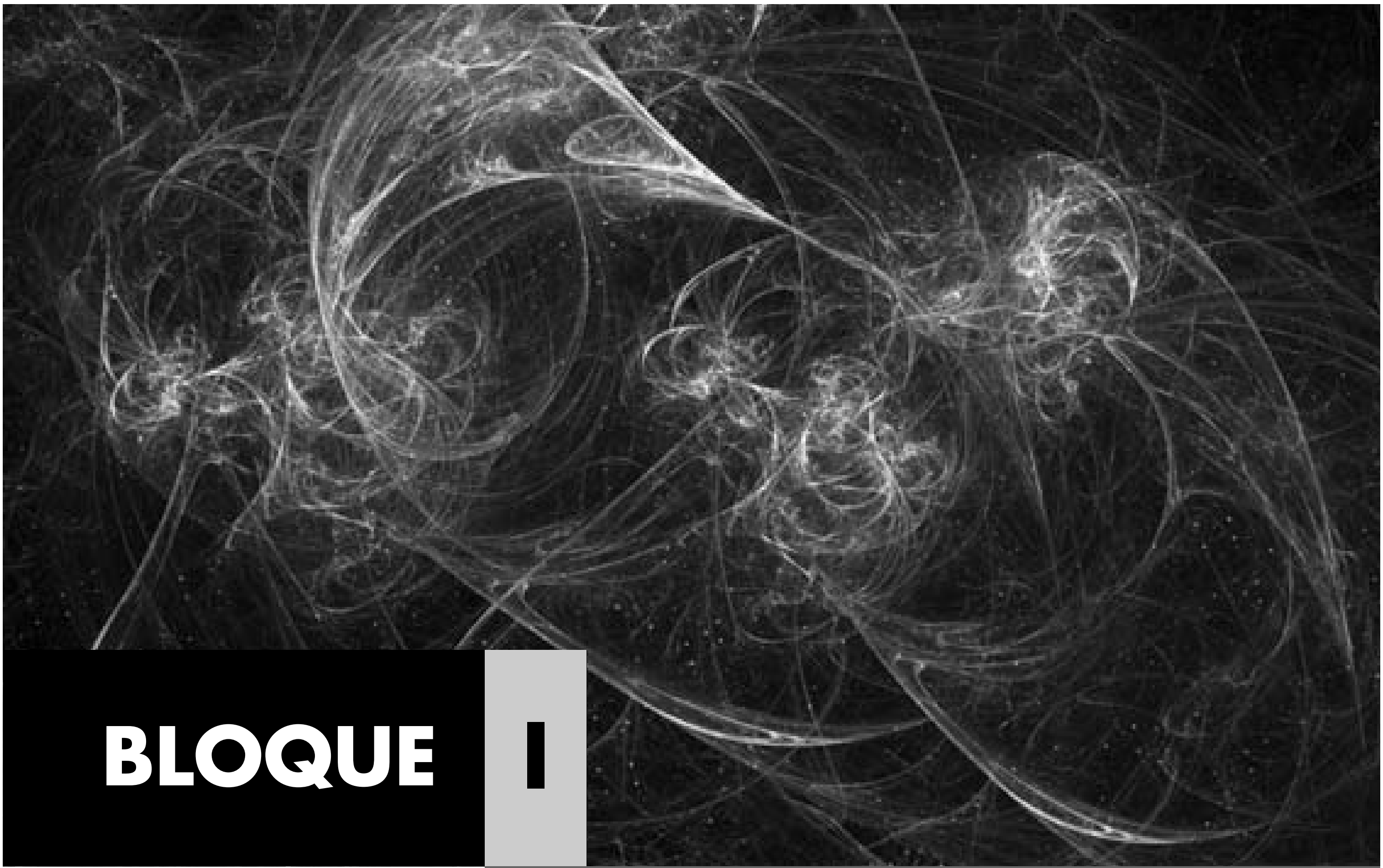
Soluciones a las actividades



BLOQUE I

Álgebra

1. Sistemas lineales
2. Matrices
3. Determinantes
4. Sistemas lineales con parámetros

1 Sistemas lineales

1. Sistemas de ecuaciones lineales

Piensa y calcula

Resuelve mentalmente el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 0 \\ y + z = 6 \\ z = 2 \end{array}\right\}$

Solución:

$x = -1, y = 4, z = 2$

Aplica la teoría

1. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss y clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{rcl} x \qquad + 2z &=& 0 \\ x + y + 2z &=& -1 \\ 2x + 3y \qquad &=& 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{rcl} x - y + z &=& 1 \\ 3x + y - 2z &=& 5 \\ x - 2y + z &=& 0 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Se escriben a la derecha las operaciones que hay que realizar:

$$\left.\begin{array}{rcl} x \qquad + 2z &=& 0 \\ x + y + 2z &=& -1 \\ 2x + 3y \qquad &=& 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x \quad + 2z &=& 0 \\ y \qquad &=& -1 \\ 3y - 4z &=& 1 \end{array}\right\} y = -1$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x + 2z &=& 0 \\ y &=& -1 \\ -3 - 4z &=& 1 \end{array}\right\} z = -1 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} x - 2 &=& 0 \\ y &=& -1 \\ z &=& -1 \end{array}\right\} x = 2$$

La solución del sistema es: $\mathbf{x = 2, y = -1, z = -1}$

El sistema es **heterogéneo compatible determinado.**

b) Se escriben a la derecha las operaciones que hay que realizar:

$$\left.\begin{array}{rcl} x - y + z &=& 1 \\ 3x + y - 2z &=& 5 \\ x - 2y + z &=& 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 1^a - 3^a \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x - y + z &=& 1 \\ 4y - 5z &=& 2 \\ y &=& 1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x - 1 + z &=& 1 \\ 4 - 5z &=& 2 \\ y &=& 1 \end{array}\right\} z = 2/5$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x - 1 + 2/5 &=& 1 \\ z &=& 2/5 \\ y &=& 1 \end{array}\right\} x = 8/5$$

La solución del sistema es: $\mathbf{x = 8/5, y = 1, z = 2/5}$

El sistema es **heterogéneo compatible determinado.**

2. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss y clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{rcl} x + y + 2z &=& 3 \\ 2x - y + z &=& 9 \\ x - y - 6z &=& 5 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{rcl} 2x + y + z &=& 1 \\ x + 2y + z &=& 2 \\ x + y + 2z &=& 4 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Se escriben a la derecha las operaciones que hay que realizar:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y + 2z &=& 3 \\ 2x - y + z &=& 9 \\ x - y - 6z &=& 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 1^a - 3^a \end{array}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x + y + 2z &=& 3 \\ 3y + 3z &=& -3 \\ 2y + 8z &=& -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ 2^a : 3 \\ 3^a : 2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y + 2z &=& 3 \\ y + z &=& -1 \\ y + 4z &=& -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \\ 3^a - 2^a \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y + 2z &=& 3 \\ y + z &=& -1 \\ 3z &=& 0 \end{array}\right\} z = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} x + y &=& 3 \\ y &=& -1 \\ z &=& 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x - 1 &=& 3 \\ y &=& -1 \\ z &=& 0 \end{array}\right\} x = 4$$

La solución del sistema es: $\mathbf{x = 4, y = -1, z = 0}$

El sistema es **heterogéneo compatible determinado.**

b) La 1ª ecuación se coloca la 3ª y se escriben a la derecha las operaciones que hay que realizar:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=2\\ x+y+2z=4\\ 2x+y+z=1\end{array}\right\}\begin{array}{l} \\ 1^a-2^a\\ 2\cdot 1^a-3^a\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=2\\ y-z=-2\\ 3y+z=3\end{array}\right\}\begin{array}{l} \\ \\ 3^a-3\cdot 2^a\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=2\\ y-z=-2\\ 4z=9\end{array}\right\}\begin{array}{l} \\ \\ z=9/4\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+9/4=2\\ y-9/4=-2\\ z=9/4\end{array}\right\}y=1/4$$

$$\left.\begin{array}{r} x+1/2+9/4=2\\ y=1/4\\ z=9/4\end{array}\right\}x=-3/4$$

La solución del sistema es: **x = –3/4, y = 1/4, z = 9/4**

El sistema es **heterogéneo compatible determinado.**

3. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss y clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+y+4z=1\\ -x+2y-2z=1\\ y+z=2\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 8x+3y+2z=4\\ 2x-y=0\\ 2x+2z=1\end{array}\right\}$

Solución:

a) Se permutan la 1ª y la 2ª ecuación, y se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left.\begin{array}{r} -x+2y-2z=1\\ 2x+y+4z=1\\ y+z=2\end{array}\right\}2\cdot 1^a+2^a$$

$$\left.\begin{array}{r} -x+2y-2z=1\\ 5y=3\\ y+z=2\end{array}\right\}y=3/5$$

$$\left.\begin{array}{r} -x+6/5-2z=1\\ y=3/5\\ 3/5+z=2\end{array}\right\}\begin{array}{l} \\ \\ z=7/5\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} -x+6/5-14/5=1\\ y=3/5\\ z=7/5\end{array}\right\}\begin{array}{l} x=-13/5\\ \\ \end{array}$$

La solución del sistema es: **x = –13/5, y = 3/5, z = 7/5**

El sistema es **heterogéneo compatible determinado.**

b) Se coloca la 2ª ecuación en primer lugar, se permutan las columnas de **x** e **y**, y se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left.\begin{array}{r} -y+2x=0\\ 3y+8x+2z=4\\ 2x+2z=1\end{array}\right\}3\cdot 1^a+2^a$$

$$\left.\begin{array}{r} -y+2x=0\\ 14x+2z=4\\ 2x+2z=1\end{array}\right\}\begin{array}{l} \\ 2^a:2\\ 7\cdot 3^a-2^a\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} -y+2x=0\\ 7x+z=2\\ 12z=3\end{array}\right\}\begin{array}{l} \\ \\ z=1/4\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} -y+2x=0\\ 7x+1/4=2\\ z=1/4\end{array}\right\}x=1/4$$

$$\left.\begin{array}{r} -y+1/2=0\\ x=1/4\\ z=1/4\end{array}\right\}\begin{array}{l} y=1/2\\ \\ \end{array}$$

La solución del sistema es: **x = 1/4, y = 1/2, z = 1/4**

El sistema es **heterogéneo compatible determinado.**

4. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss y clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{r} -x-y=0\\ 3x+2y=0\\ y+z=0\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x+2z=3\\ 3x+y+z=-1\\ 2y-z=-2\\ x-y-2z=-5\end{array}\right\}$

Solución:

a) Se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left.\begin{array}{r} -x-y=0\\ 3x+2y=0\\ y+z=0\end{array}\right\}\begin{array}{l} -1^a\\ 2^a+3\cdot 1^a\\ \end{array}\Rightarrow\left.\begin{array}{r} x+y=0\\ -y=0\\ y+z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l} x=0\\ y=0\\ z=0\end{array}$$

La solución del sistema es: **x = 0, y = 0** y **z = 0,** que es la solución trivial.

El sistema es **homogéneo compatible determinado.**

b) Se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left.\begin{array}{r} x+2z=3\\ 3x+y+z=-1\\ 2y-z=-2\\ x-y-2z=-5\end{array}\right\}\begin{array}{l} \\ 2^a-3\cdot 1^a\\ \\ 1^a-4^a\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2z=3\\ y-5z=-10\\ 2y-z=-2\\ y+4z=8\end{array}\right\}\begin{array}{l} \\ \\ 3^a-2\cdot 2^a\\ \end{array}\Rightarrow$$

Se elimina la 4ª ecuación porque es 4ª = 3ª – 2ª

$$\left.\begin{array}{r} x+2z=3\\ y-5z=-10\\ 9z=18\end{array}\right\}\begin{array}{l} \\ \\ z=2\end{array}\Rightarrow\left.\begin{array}{r} x+4=3\\ y-10=-10\\ z=2\end{array}\right\}\begin{array}{l} x=-1\\ y=0\\ \end{array}$$

La solución del sistema es: **x = –1, y = 0, z = 2**

El sistema es **heterogéneo compatible determinado.**

2. Estudio de los sistemas

Piensa y calcula

Indica el número de soluciones que tienen los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 5 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Infinitas soluciones, porque la 2ª es el doble de la 1ª. El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

b) No tiene solución, porque la 2ª ecuación es el doble de la 1ª excepto el término independiente. El sistema es heterogéneo incompatible.

c) Una solución. El sistema es heterogéneo compatible determinado.

Aplica la teoría

5. Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 6 \\ x + y + 2z = 7 \\ 2x - y - z = 3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x + z = -1 \\ x + y = 0 \\ x + z = -1 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 6 \\ x + y + 2z = 7 \\ 2x - y - z = 3 \end{array}\right\}\begin{array}{l} \\ 1^a - 2^a \\ 2 \cdot 1^a - 3^a \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 6 \\ y - 3z = -1 \\ 5y - z = 9 \end{array}\right\}\begin{array}{l} \\ \\ 3^a - 5 \cdot 2^a \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 6 \\ y - 3z = -1 \\ 14z = 14 \end{array}\right\}\begin{array}{l} \\ \\ z = 1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - 1 = 6 \\ y - 3 = -1 \\ z = 1 \end{array}\right\} y = 2 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 4 - 1 = 6 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}\right\} x = 3$$

La solución del sistema es: **$x = 3, y = 2, z = 1$**

El sistema es **heterogéneo compatible determinado.**

b) Se elimina la 1ª ecuación porque es igual a la 3ª:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ x + z = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -1 - z + y = 0 \\ x = -1 - z \end{array}\right\} y = 1 + z$$

La solución del sistema es: **$x = -1 - z, y = 1 + z$**

El sistema es **heterogéneo compatible indeterminado.** La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

6. Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + 4z = 1 \\ -x + y - 2z = 1 \\ y + z = 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x - 3y + z = 1 \\ 2x - y - 3z = 2 \\ x + y - 3z = 3 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 4z = 1 \\ -x + y - 2z = 1 \\ y + z = 1 \end{array}\right\} 1^a + 2^a \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + 4z = 1 \\ 2y + 2z = 2 \\ y + z = 1 \end{array}\right\} 2^a = 2 \cdot 3^a$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 - 4z \\ y = 1 - z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 1 - z = 1 - 4z \\ y = 1 - z \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -3z \\ y = 1 - z \end{array}\right\}$$

La solución del sistema es: **$x = -3z, y = 1 - z$**

El sistema es **heterogéneo compatible indeterminado.** La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = -3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + z = 1 \\ 2x - y - 3z = 2 \\ x + y - 3z = 3 \end{array}\right\}\begin{array}{l} \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 3y + z = 1 \\ 5y - 5z = 0 \\ 4y - 4z = 2 \end{array}\right\}\begin{array}{l} \\ 2^a : 5 \\ 3^a : 2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + z = 1 \\ y - z = 0 \\ 2y - 2z = 1 \end{array}\right\}\begin{array}{l} \\ \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 3y + z = 1 \\ y - z = 0 \\ 0 = 1 \end{array}\right\}$$

Se observa que se ha llegado a una contradicción, 0 = 1, que es imposible. El sistema no tiene solución.

El sistema es **heterogéneo incompatible.**

7. Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{aligned} -3x + y + 4z &= 1 \\ -x - 3y - 2z &= 1 \\ y + z &= -3 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 4x + y + 2z &= 0 \\ 2x + y &= 0 \\ x + z &= 0 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Se permutan la 1ª y la 2ª ecuación cambiando de signo la 2ª ecuación y se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + 2z &= -1 \\ -3x + y + 4z &= 1 \\ y + z &= -3 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ \\ \end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + 2z &= -1 \\ 10y + 10z &= -2 \\ y + z &= -3 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \\ 2^a : 2 \\ 10 \cdot 3^a - 2^a \end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + 2z &= -1 \\ 5y + 5z &= -2 \\ 0 &= -28 \end{aligned}\right\}$$

Se observa que se ha llegado a una contradicción, $0 = -28$, que es imposible. El sistema no tiene solución.

El sistema es **heterogéneo incompatible.**

b) Se permutan las columnas de las **y** con las **x** y se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left.\begin{aligned} y + 4x + 2z &= 0 \\ y + 2x &= 0 \\ x + z &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \\ 1^a - 2^a \\ \\ \end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} y + 4x + 2z &= 0 \\ 2x + 2z &= 0 \\ x + z &= 0 \end{aligned}\right\} 2^a = 2 \cdot 3^a \Rightarrow \left.\begin{aligned} y + 4x + 2z &= 0 \\ x + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} y + 4x &= -2z \\ x &= -z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y - 4z &= -2z \\ x &= -z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y &= 2z \\ x &= -z \end{aligned}\right\}$$

La solución del sistema es: $\mathbf{x = -z, y = 2z}$

El sistema es **homogéneo compatible indeterminado.** La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\lambda \\ y &= 2\lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

8. Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1 \\ -x - 3y + z &= 6 \\ 3x + y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \\ 2 \cdot 1^a - 2^a \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x + z &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= -z \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

La solución del sistema es: $\mathbf{x = -z, y = 0}$

El sistema es **homogéneo compatible indeterminado.** La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\lambda \\ y &= 0 \\ z &= \lambda \end{aligned}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1 \\ -x - 3y + z &= 6 \\ 3x + y + z &= 2 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \\ 1^a + 2^a \\ 3 \cdot 1^a - 3^a \end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1 \\ -y - z &= 7 \\ 5y - 7z &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \\ \\ 3^a + 5 \cdot 2^a \end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1 \\ -y - z &= 7 \\ -12z &= 36 \end{aligned}\right\} z = -3$$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 6 &= 1 \\ -y + 3 &= 7 \\ z &= -3 \end{aligned}\right\} y = -4$$

$$\left.\begin{aligned} x - 8 + 6 &= 1 \\ y &= -4 \\ z &= -3 \end{aligned}\right\} x = 3$$

La solución del sistema es: $\mathbf{x = 3, y = -4, z = -3}$

El sistema es **heterogéneo compatible determinado.**

9. Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 1 \\ x + 4y + z &= 1 \\ 2x - 5y + z &= -2 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 3x + y - 2z &= -8 \\ x + 2y + z &= -1 \\ 2x - 3y + z &= -3 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Se permutan las dos primeras ecuaciones y se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left.\begin{aligned} x + 4y + z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= 1 \\ 2x - 5y + z &= -2 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \\ 3 \cdot 1^a - 2^a \\ 2 \cdot 1^a - 3^a \end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x + 4y + z &= 1 \\ 13y + z &= 2 \\ 13y + z &= 4 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \\ \\ 3^a - 2^a \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + 4y + z &= 1 \\ 13y + z &= 2 \\ 0 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Se observa que se ha llegado a una contradicción, $0 = 2$, que es imposible. El sistema no tiene solución.

El sistema es **heterogéneo incompatible.**

b) Se permutan la 1ª y la 2ª ecuación y se escriben las operaciones que hay que hacer:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=-1\\ 3x+y-2z=-8\\ 2x-3y+z=-3\end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ 3\cdot 1^a-2^a\\ 2\cdot 1^a-3^a\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=-1\\ 5y+5z=5\\ 7y+z=1\end{array}\right\} 2^a:5$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=-1\\ y+z=1\\ 7y+z=1\end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \\ 7\cdot 2^a-3^a\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=-1\\ y+z=1\\ 6z=6\end{array}\right\} z=1$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+1=-1\\ y+1=1\\ z=1\end{array}\right\} y=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+1=-1\\ y=0\\ z=1\end{array}\right\} x=-2$$

La solución del sistema es: **x = –2, y = 0, z = 1**

El sistema es **heterogéneo compatible determinado.**

10. Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0\\ x-y-z=0\\ 3x\quad -2z=0\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x-y=z\\ x+z=y\\ y-z=x\end{array}\right\}$

Solución:

a) Se cambia la columna de **x** al final y se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left.\begin{array}{r} y-z+2x=0\\ -y-z+x=0\\ -2z+3x=0\end{array}\right\} 1^a+2^a \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y-z+2x=0\\ -2z+3x=0\\ \cancel{-2z+3x=0}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} y-z+2x=0\\ -2z+3x=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y+2x=z\\ 3x=2z\end{array}\right\} x=2z/3$$

$$\left.\begin{array}{r} y+4z/3=z\\ x=2z/3\end{array}\right\} y=-z/3$$

La solución del sistema es: **x = 2z/3, y = –z/3**

El sistema es **homogéneo compatible indeterminado.** La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x=2\lambda/3\\ y=-\lambda/3\\ z=\lambda\end{array}\right\} \lambda\in\mathbb{R}$$

b) Se pasan todas las incógnitas al primer miembro, se ordenan y se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=0\\ x-y+z=0\\ \cancel{-x+y-z=0}\end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ 2^a-1^a\\ =-2^a\end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y-z=0\\ 2z=0\end{array}\right\} z=0$$

$$\left.\begin{array}{r} x-y=0\\ z=0\end{array}\right\} x=y$$

La solución del sistema es: **x = y, z = 0**

El sistema es **homogéneo compatible indeterminado.** La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

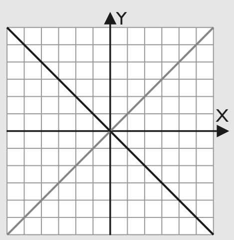
$$\left.\begin{array}{l} x=\lambda\\ y=\lambda\\ z=0\end{array}\right\} \lambda\in\mathbb{R}$$

3. Interpretación gráfica

Piensa y calcula

Representa en el plano las rectas del siguiente sistema e interprétalo gráficamente: $\left.\begin{array}{r} x+y=0\\ x-y=0\end{array}\right\}$

Solución:



Las dos rectas son secantes. La solución del sistema es x = 0, y = 0

Aplica la teoría

11. Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x + y = 4 \\ 3x + y = 2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ 4x + y = 3 \end{array}\right\}$

Solución:

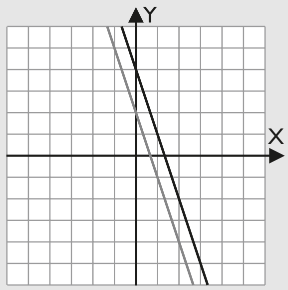
a) $\left.\begin{array}{l} 3x + y = 4 \\ 3x + y = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ 1^a - 2^a \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + y = 4 \\ 0 = 2 \end{array}\right\}$

Se observa que se ha llegado a una contradicción, 0 = 2, que es imposible.

El sistema no tiene solución.

El sistema es **heterogéneo incompatible.**

La interpretación gráfica es que son dos rectas paralelas.



b) Se permutan las columnas de las **x** y de las **y.** Se escriben las operaciones que hay que realizar:

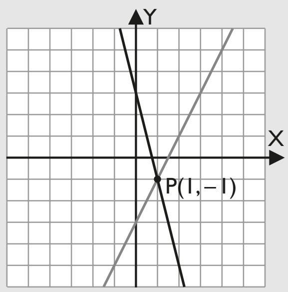
$\left.\begin{array}{r} -y + 2x = 3 \\ y + 4x = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ 1^a + 2^a \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -y + 2x = 3 \\ 6x = 6 \end{array}\right\} x = 1$

$\left.\begin{array}{r} -y + 2 = 3 \\ x = 1 \end{array}\right\} y = -1$

La solución del sistema es: **x = 1, y = – 1**

El sistema es **heterogéneo compatible determinado.**

La interpretación gráfica es que son dos rectas secantes que se cortan en el punto P(1, – 1)



12. Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se sustituye z = 0 en la 1ª y 2ª ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ \cancel{x + y = 3} \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 3 - y \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

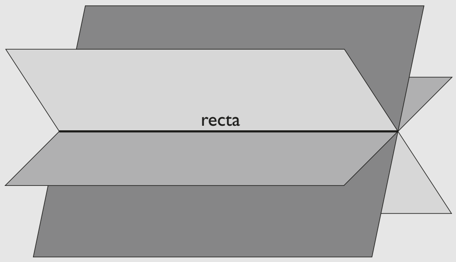
La solución del sistema es: **x = 3 – y, z = 0**

El sistema es **heterogéneo compatible indeterminado.**

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

La interpretación gráfica es que los tres planos se cortan en una recta.



13. Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \\ x + y - 6z = -10 \end{array}\right\}$$

Solución:

La 1ª ecuación se pone la 3ª y se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 1 \\ x + y - 6z = -10 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ 1^a - 2^a \\ 2 \cdot 1^a - 3^a \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 1 \\ y + 5z = 11 \\ 5y - 5z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \\ 5 \cdot 2^a - 3^a \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 1 \\ y + 5z = 11 \\ 30z = 54 \end{array}\right\} z = 9/5$$

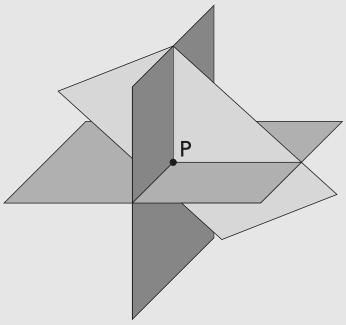
$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - 9/5 = 1 \\ y + 9 = 11 \\ z = 9/5 \end{array}\right\} y = 2$$

$$\left.\begin{array}{r} x + 4 - 9/5 = 1 \\ y = 2 \\ z = 9/5 \end{array}\right\} x = -6/5$$

La solución es: **x = –6/5, y = 2, z = 9/5**

El sistema es **heterogéneo compatible determinado.**

La interpretación gráfica es que los tres planos se cortan en un punto, que es la solución del sistema.



14. Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + 2z &= 15 \\ 3x - 2y - 2z &= -1 \\ -x + 3y + 3z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

La 3ª ecuación se pone la 1ª y se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left.\begin{aligned} -x + 3y + 3z &= 3 \\ 3x + 2y + 2z &= 15 \\ 3x - 2y - 2z &= -1 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \\ 2^a + 3 \cdot 1^a \\ 2^a - 3^a \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} -x + 3y + 3z &= 3 \\ 11y + 11z &= 24 \\ 4y + 4z &= 16 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \\ \\ 3^a : 4 \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} -x + 3y + 3z &= 3 \\ 11y + 11z &= 24 \\ y + z &= 4 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \\ \\ 11 \cdot 3^a - 2^a \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} -x + 3y + 3z &= 3 \\ 11y + 11z &= 24 \\ 0 &= 20 \end{aligned}\right\}$$

Se observa que se ha llegado a una contradicción, $0 = 20$, que es imposible.

El sistema no tiene solución.

El sistema es **heterogéneo incompatible.**

La interpretación gráfica es que los tres planos no se cortan a la vez. Se cortan dos a dos.

4. Resolución de problemas

Piensa y calcula

Plantea un sistema de ecuaciones para resolver el siguiente enunciado:

«Encuentra dos números cuya suma sea 14 y el doble del mayor menos el menor sea 10»

Solución:

Nº mayor: x

Nº menor: y

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 14 \\ 2x - y &= 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 8, y = 6$$

Los números son 8 y 6

Aplica la teoría

15. Si la altura de Carlos aumentase el triple de la diferencia entre las alturas de Toni y de Juan, Carlos sería igual de alto que Juan. Las alturas de los tres suman 515 cm. Ocho veces la altura de Toni es igual que nueve veces la de Carlos. Halla las tres alturas.

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Altura de Carlos: x

Altura de Toni: y

Altura de Juan: z

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{l} x + 3(y - z) = z \\ x + \quad y + z = 515 \\ \quad 8y \quad = 9x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 3y - 4z = 0 \\ x + \ y + \ z = 515 \\ 9x \qquad - 8y = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 160 \\ y = 180 \\ z = 175 \end{array}\right\}$$

c) **Solución**

Las estaturas son:

Altura de Carlos: 160 cm

Altura de Toni: 180 cm

Altura de Juan: 175 cm

16. Si se mezclan 60 litros de vino blanco con 20 litros de vino tinto, se obtiene un vino de 10 grados (10% de alcohol). Si, por el contrario, se mezclan 20 litros de blanco con 60 litros de tinto, se obtiene un vino de 11 grados. ¿Qué graduación tendrá una mezcla de 40 litros de vino blanco con 40 litros de vino tinto?

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Alcohol en el vino blanco: x

Alcohol en el vino tinto: y

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{l} 60x + 20y = 800 \\ 20x + 60y = 880 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 9,5 \\ y = 11,5 \end{array}\right\}$$

c) **Solución**

La graduación de cada vino es:

Alcohol en el vino blanco: 9,5

Alcohol en el vino tinto: 11,5

La graduación de 40 litros de cada clase será:

$$\frac{9,5 + 11,5}{2} = 10,5$$

17. La edad de una madre es en la actualidad el triple de la de su hijo. Las edades del padre, la madre y el hijo suman 80 años, y dentro de 5 años, la suma de las edades de la madre y del hijo será 5 años más que la del padre. ¿Cuántos años tienen en la actualidad el padre, la madre y el hijo?

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

	Actualmente	Dentro de 5 años
Hijo	x	x + 5
Madre	y	y + 5
Padre	z	z + 5

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{r} y = 3x \\ x + y + z = 80 \\ x + 5 + y + 5 = z + 5 + 5 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} -3x + y \quad = 0 \\ x + y + z = 80 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 10 \\ y = 30 \\ z = 40 \end{array}\right\}$$

c) **Solución**

Las edades actuales son:

Madre: 30 años.

Hijo: 10 años.

Padre: 40 años.

18. Alba compra tres pantalones, dos camisas y un sombrero por 135 €. Natalia compra un pantalón, tres camisas y un sombrero por 100 €. Javier compra dos pantalones, tres camisas y dos sombreros por 155 €. Si todos los artículos se han comprado al mismo precio, ¿cuál es el precio de cada una de las prendas?

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Precio del pantalón: x

Precio de la camisa: y

Precio del sombrero: z

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + \ z = 135 \\ x + 3y + \ z = 100 \\ 2x + 3y + 2z = 155 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 25 \\ y = 15 \\ z = 30 \end{array}\right\}$$

c) **Solución**

Precio del pantalón: 25 €

Precio de la camisa: 15 €

Precio del sombrero: 30 €

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 El siguiente sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 0 \\ x + y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right\}$$

- [x] Heterogéneo.
- [ ] Homogéneo.
- [ ] No se puede clasificar porque tiene más ecuaciones que incógnitas.
- [ ] Ninguna de las anteriores.

2 Se llama sistemas equivalentes a:

- [ ] Los que tienen el mismo número de ecuaciones.
- [x] Los que tienen las mismas soluciones.
- [ ] Los que tienen el mismo número de incógnitas.
- [ ] Ninguna de las respuestas anteriores.

3 ¿Cuál de estas transformaciones no produce un sistema equivalente?

- [ ] Suprimir ecuaciones que sean combinación lineal de las restantes.
- [ ] Cambiar de orden las ecuaciones.
- [ ] Sumar a una ecuación una combinación lineal de las restantes.
- [x] Suprimir una incógnita que tenga el mismo coeficiente en todas las ecuaciones.

4 En un sistema compatible determinado:

- [ ] Existen infinitas soluciones.
- [ ] No existe solución.
- [x] Existe una solución.
- [ ] Ninguna de las respuestas anteriores.

5 Un sistema homogéneo

- [ ] Es siempre compatible indeterminado.
- [ ] Es incompatible.
- [x] Es siempre compatible.
- [ ] Es siempre compatible determinado.

6 La solución del siguiente sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x - 4y - z = 0 \\ 3x - 2y - 5z = -7 \end{array}\right\}$$

- [ ] $x = 1, y = 2, z = 0$
- [ ] $x = 1, y = 0, z = -2$
- [x] $x = 1, y = 0, z = 2$
- [ ] No tiene solución.

7 La solución del siguiente sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ y + z = 2 \\ -x + y + z = 3 \end{array}\right\}$$

- [ ] $x = -1, y = 0, z = 1$
- [x] $x = -1, y = 2 - \lambda, z = \lambda; \lambda \in \mathbb{R}$
- [ ] $x = -\lambda, y = 2 - \lambda, z = \lambda; \lambda \in \mathbb{R}$
- [ ] No tiene solución.

8 La solución del siguiente sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y - z = 1 \\ 2x + 6y - 2z = 2 \\ 5x + 15y - 5z = 5 \end{array}\right\}$$

- [ ] $x = 1, y = 1, z = 5$
- [ ] $x = 1 + \lambda, y = \lambda, z = \lambda; \lambda \in \mathbb{R}$
- [ ] Es incompatible.
- [x] $x = 1 + \lambda - 3\mu, y = \mu, z = \lambda; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

9 En el siguiente sistema no cambia la solución si añadimos la ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ -x - y + z = 0 \end{array}\right\}$$

- [ ] Cualquier ecuación que se añada cambiará la solución.
- [ ] $y + 2z = 5$
- [x] $y + 2z = 1$
- [ ] $2x + 3y = 0$

10 Un comercio tiene un total de 270 unidades de un producto de tres tipos: A, B y C. Del tipo A tiene 30 unidades menos que de la totalidad de B más C, y del tipo C tiene el 35% de la suma de A más B. El número de productos que hay en el comercio de cada tipo es:

- [x] Del tipo A hay 120; del tipo B, 80, y del tipo C, 70
- [ ] Del tipo A hay 120; del tipo B, 70, y del tipo C, 80
- [ ] El problema no tiene solución.
- [ ] Del tipo A hay 100; del tipo B, 90, y del tipo C, 80

1. Sistemas de ecuaciones lineales

19. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss y clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{r} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x + z = 2 \\ x + y = 3 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Solución: $x = 1, y = 1, z = -1$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

b) Solución: $x = 5, y = -2, z = -3$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

20. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss y clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 3x + y + z = 6 \\ x + 3y + z = -10 \\ x + y + 3z = 4 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Solución: $x = -9, y = 4, z = 7$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

b) Solución: $x = 3, y = -5, z = 2$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

21. Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 5x - y + z = 6 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 9 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ x + y + 2z = 8 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Solución: $x = 4/3, y = 2/3, z = 0$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

b) Solución: $x = -2, y = 4, z = 3$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

2. Estudio de los sistemas

22. Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 2 \\ x + z = -2 \\ x - y = 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} -x + y - 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Solución: $x = 1/2, y = -1/2, z = -5/2$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

b) Solución: $x = \dfrac{9 - 5z}{6}, y = \dfrac{13z - 3}{6}$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{9 - 5\lambda}{6} \\ y = \dfrac{13\lambda - 3}{6} \\ z = \lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

23. Discute el siguiente sistema y clasifícalo para el valor $a = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = a \\ x + y - az = a \\ 2x + 3y + z = a \end{array}\right\}$$

Solución:

a) Solución: $x = z, y = -z$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es homogéneo compatible indeterminado.

24. Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Solución: $x = z/7, y = 3z/7$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda/7 \\ y = 3\lambda/7 \\ z = \lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es homogéneo compatible indeterminado.

b) Solución: $x = 0, y = 0, z = 0$

El sistema es homogéneo compatible determinado.

25. Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Solución: $x = \dfrac{2z + 1}{2}, y = 0$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{2\lambda + 1}{2} \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

b) Solución: $x = 1 - y, z = 0$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

26. Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ x + 4y - 6z = 0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 4x + 6y - z = 2 \\ x + y + z = 10 \end{array}\right\}$

Solución:

a) No tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.

b) Solución: $x = 29, y = -19, z = 0$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

27. Discute el siguiente sistema y clasifícalo para los valores:

a) $\lambda = -1$ b) $\lambda = 2$

$$\left.\begin{array}{r} x - y + \lambda z = 2 \\ \lambda x + \lambda y - z = 5 \\ (\lambda + 1)x + \lambda y - z = \lambda \end{array}\right\}$$

Solución:

a) No tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.

b) Solución: $x = -3, y = 9, z = 7$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

28. Discute el siguiente sistema y clasifícalo para los valores:

a) $a = 1$ b) $a = 2$

$$\left.\begin{array}{r} x + z = 1 \\ y + (a - 1)z = 0 \\ x + (a - 1)y + az = a \end{array}\right\}$$

Solución:

a) Solución: $x = 1 - z, y = 0$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

b) No tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.

3. Interpretación gráfica

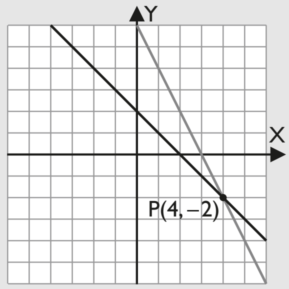
29. Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 2x + y = 6 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} -x + y = 4 \\ x - y = -2 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Solución: $x = 4, y = -2$

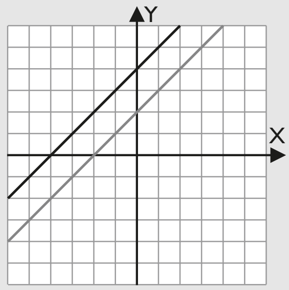
El sistema es heterogéneo compatible determinado.



Son dos rectas secantes.

b) No tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.



Son rectas paralelas.

30. Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 3 \\ 8x + 4y = 12 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 1 \\ x - y = -3 \end{array}\right\}$

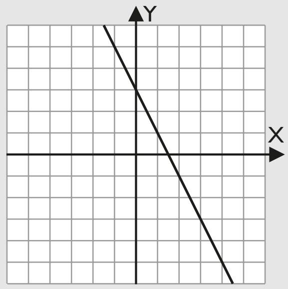
Solución:

a) Solución: $2x + y = 3$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

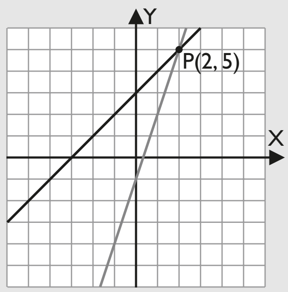
$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3-\lambda}{2} \\ y = \lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$



Son dos rectas coincidentes.

b) Solución: $x = 2, y = 5$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.



Son dos rectas secantes.

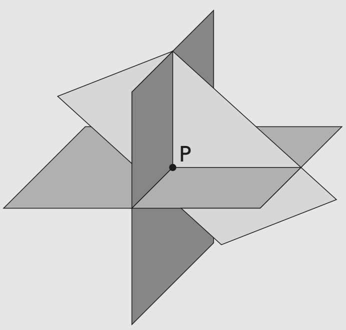
31. Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\}$$

Solución:

$x = 1, y = 1, z = 1$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.



Los tres planos se cortan en el punto que es la solución del sistema.

32. Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 3 \\ x + y - z = 2 \\ x - 2z = 3 \end{array}\right\}$$

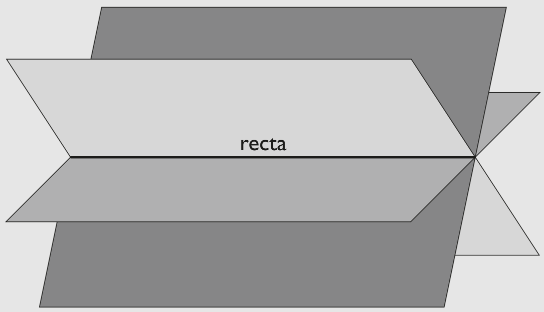
Solución:

$x = 3 + 2z, y = -1 - z$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$



Los planos se cortan en una recta.

33. Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = -3 \\ x + 7y - 6z = -10 \end{array}\right\}$$

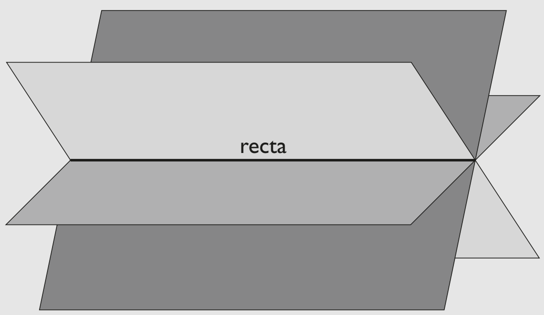
Solución:

$x = -1/5 - z, y = -7/5 + z$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = -1/5 - \lambda \\ y = -7/5 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.



Los planos se cortan en una recta.

34. Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ 2x + 2y = 5 \end{array}\right\}$$

Solución:

No tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.

Los planos no tienen ningún punto en común. Se cortan dos a dos.

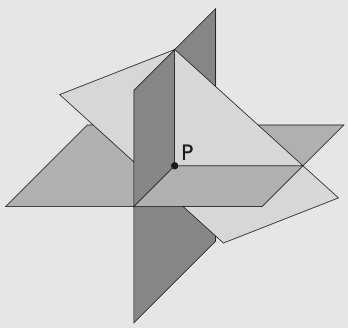
35. Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 0 \\ 4y + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{array}\right\}$$

Solución:

$x = 1/9, y = -1/3$ y $z = 4/3$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.



Los planos se cortan en un punto que es la solución del sistema.

4. Resolución de problemas

36. Sonia ha comprado unos bolígrafos de 2 €, unos cuadernos de 1 € y unas cajas de 3 €. Entre bolígrafos y cuadernos hay el triple que cajas. Considerando que ha comprado 12 objetos y ha pagado 22 €, calcula el número de bolígrafos, cuadernos y cajas que ha comprado.

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

N° de bolígrafos: x

N° de cuadernos: y

N° de cajas: z

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + 3z = 22 \\ x + y = 3z \\ x + y + z = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 4, y = 5, z = 3$$

c) **Solución**

Se ha comprado:

N° de bolígrafos: 4

N° de cuadernos: 5

N° de cajas: 3

37. Calcula las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento; que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento; y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

	Madre	Hijo 1	Hijo 2
Actualmente	x	y	z
Hace 14 años	x – 14	y – 14	z – 14
Dentro de 10 años	x + 10	y + 10	z + 10
Dentro de x – y años	2x – y	x	z + x – y

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{l} x - 14 = 5(y - 14 + z - 14) \\ x + 10 = y + 10 + z + 10 \\ z + x - y = 42 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - 5y - 5z = -126 \\ x - y - z = 10 \\ x - y + z = 42 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 44, y = 18, z = 16$$

c) **Solución**

Las edades son:

Madre: 44 años.

Hijo 1: 18 años.

Hijo 2: 16 años.

38. Un bodeguero compra vinos de dos regiones diferentes A y B. Si se mezclan dos partes del vino de la región A con tres partes de la región B, cada litro cuesta 3,3 €. Si se mezclan tres partes del vino de la región A con dos partes de la región B, cada litro de esta mezcla cuesta 3,2 €. Halla cuánto le ha costado al bodeguero el litro de cada vino adquirido.

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Precio del vino de tipo A: x

Precio del vino de tipo B: y

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{2x+3y}{5}=3{,}3\\[2mm]\dfrac{3x+2y}{5}=3{,}2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2x+3y=16{,}5\\3x+2y=16\end{array}\right\}\Rightarrow x=3, y=3{,}5$$

c) **Solución**

Precio del vino de tipo A: 3 €

Precio del vino de tipo B: 3,5 €

39. Un tren transporta 470 viajeros, y la recaudación del importe de sus billetes asciende a 4 250 €. Calcula cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que asciende a 10 €, cuántos han pagado el 80% del billete y cuántos han pagado el 50%, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 50% es la mitad del número de viajeros que pagaron el 80%

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Viajeros que pagan el 100%: x

Viajeros que pagan el 80%: y

Viajeros que pagan el 50%: z

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z=470\\10x+8y+5z=4250\\z=y/2\end{array}\right\}\Rightarrow x=320, y=100, z=50$$

c) **Solución**

320 viajeros pagan el 100% del billete.

100 viajeros pagan el 80% del billete.

50 viajeros pagan el 50% del billete.

Para ampliar

40. Resuelve y clasifica los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r}2x+y-z=-1\\x-2y+2z=2\\3x-y+2z=4\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}2x-y=4\\-2x+y=-4\\x+2y=2\end{array}\right\}$

Solución:

a) x = 0, y = 2 y z = 3

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

b) x = 2; y = 0

El sistema es heterogéneo compatible.

41. Resuelve y clasifica los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r}2x+y+z=6\\x+y+2z=4\\x+y+z=1\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}x-y+z=3\\2x+y-3z=1\\8x-5y+3z=19\end{array}\right\}$

Solución:

a) x = 5, y = –7, z = 3

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

b) $x=\dfrac{2z+4}{3}, y=\dfrac{5z-5}{3}$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{2(\lambda+2)}{3}\\[2mm]y=\dfrac{5(\lambda-1)}{3}\\[2mm]z=\lambda\end{array}\right\}\lambda\in\mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

42. Resuelve y clasifica el siguiente sistema para el valor de m = 3:

$$\left.\begin{array}{r}2x+y-z=2\\x+y+2z=5\\-x+(m+2)z=3\end{array}\right\}$$

Solución:

x = –3, y = 8, z = 0

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

43. Resuelve y clasifica el sistema para los siguientes valores de **a:**

a) a = –1 b) a = 2

$$\left.\begin{array}{r}x-y=2\\ax+y+2z=0\\x-y+az=1\end{array}\right\}$$

Solución:

a) Solución: $x = 2 + y, z = 1$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

b) Solución: $x = 1, y = -1, z = -1/2$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

44. Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{r} -3x + y + 4z = 1 \\ -x - 3y - 2z = 1 \\ y + z = -3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x + y + 5z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right\}$

Solución:

a) No tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.

b) Solución: $x = -3z, y = -2z$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = -3\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es homogéneo compatible indeterminado.

45. Discute el sistema y clasifícalo para los siguiente valores de λ:

a) $\lambda = 2$ b) $\lambda = -1$

$$\left.\begin{array}{r} -x + \lambda y + 2z = \lambda \\ 2x + \lambda y - z = 2 \\ \lambda x - y + 2z = \lambda \end{array}\right\}$$

Solución:

a) Solución: $x = 2/3, y = 2/3, z = 2/3$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

b) Solución: $x = 1 + z, y = z$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

46. Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 3 \\ x + 9z = 7 \\ x - y + 6z = 6 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = -1 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ 3x - y + z = 4 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Solución: $x = 5/2, y = -1/2, z = 1/2$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

b) No tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.

47. Resuelve por Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 1 \\ -y + z = 0 \\ x + z = 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x - y + z = 6 \\ x + y = -7 \\ x + y + 2z = 11 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Solución: $x = 1 - z, y = z$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

b) Solución: $x = -5, y = -2, z = 9$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

48. Discute el siguiente sistema y clasifícalo para los valores de λ:

a) $\lambda = 0$ b) $\lambda = 3$

$$\left.\begin{array}{r} y + z = 1 \\ (\lambda - 1)x + y + z = \lambda \\ x + (\lambda - 1)y - z = 0 \end{array}\right\}$$

Solución:

a) Solución: $x = 1, y = 1 - z$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

b) Solución: $x = 1, y = 0, z = 1$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

49. Discute el siguiente sistema y clasifícalo para a = 2:

$$\left.\begin{array}{r} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{array}\right\}$$

Solución:

$x = 3 - y, \ z = -1$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

50. Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{r} -x - y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 0 \\ 3x + 4y = 0 \\ y + 4z = 0 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $x = 0, y = 0$ y $z = 0$

El sistema es homogéneo compatible determinado.

b) $x = 0, y = 0, z = 0$

El sistema es homogéneo compatible determinado.

51. Discute el siguiente sistema y clasifícalo para los valores de **a:**

a) $a = -1$ b) $a = 1$

$$\left.\begin{array}{r} (a + 1)x + 2y + z = a + 3 \\ ax + y = a \\ ax + 3y + z = a + 2 \end{array}\right\}$$

Solución:

a) Solución: $x = \dfrac{4 - z}{2}, y = \dfrac{2 - z}{2}$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{4 - \lambda}{2} \\ y = \dfrac{2 - \lambda}{2} \\ z = \lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

b) Solución: $x = 1, y = 0, z = 2$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

Problemas

52. Juan compró 4 entradas de adulto y 6 de niño por 56 €, y Sara abonó 48 € por 5 entradas de adulto y 2 de niño. ¿Cuánto valen las entradas de adulto y de niño?

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Precio entrada adulto: x

Precio entrada niño: y

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 6y = 56 \\ 5x + 2y = 48 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 8, y = 4$$

c) **Solución**

El precio de la entrada de adulto es 8 €

El precio de la entrada de niño es 4 €

53. Un hipermercado inicia una campaña de ofertas. En la primera de ellas descuenta un 4% en un cierto producto A, un 6% en el producto B y un 5% en el producto C. A las dos semanas pone en marcha la segunda oferta, descontando un 8% sobre el precio inicial de A, un 10% sobre el precio inicial de B y un 6% sobre el precio inicial de C.

Se sabe que si un cliente compra durante la primera oferta un producto A, dos B y tres C, se ahorra 16 € respecto del precio inicial; si compra en la segunda oferta tres productos A, uno B y cinco C, el ahorro es de 29 €; y si compra un producto A, uno B y uno C, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 €.

Calcula el precio de cada producto antes de las ofertas.

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Precio del producto A: x

Precio del producto B: y

Precio del producto C: z

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}04x + 0{,}12y + 0{,}15z = 16 \\ 0{,}24x + 0{,}1y + 0{,}3z = 29 \\ x + y + z = 135 \end{array}\right\}$$

$x = 25, y = 50, z = 60$

c) **Solución**

Precio del producto A es 25 €

Precio del producto B es 50 €

Precio del producto C es 60 €

54. Un cliente ha gastado 90 € en la compra de 12 artículos entre discos, libros y carpetas en una tienda. Cada disco le ha costado 12 €; cada libro, 9 €; y cada carpeta, 3 €. Se sabe que entre discos y carpetas hay el triple que de libros. Calcula cuántos artículos ha comprado de cada tipo.

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Nº de discos: x

Nº de libros: y

Nº de carpetas: z

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 12 \\ 12x + 9y + 3z = 90 \\ x + z = 3y \end{array}\right\} \Rightarrow x = 4, y = 3, z = 5$$

c) **Solución**

Nº de discos: 4

Nº de libros: 3

Nº de carpetas: 5

55. En una competición deportiva celebrada en un centro escolar participaron 50 atletas distribuidos, según la edad, en tres categorías: infantiles, cadetes y juveniles. El doble del número de atletas infantiles, por una parte, excede en una unidad al número de atletas cadetes y, por otra parte, coincide con el quíntuplo del número de atletas juveniles. Determina el número de atletas que hubo en cada categoría.

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Nº de atletas infantiles: x

Nº de atletas cadetes: y

Nº de atletas juveniles: z

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 50 \\ 2x = y + 1 \\ 2x = 5z \end{array}\right\} \Rightarrow x = 15, y = 29, z = 6$$

c) **Solución**

Nº de atletas infantiles: 15

Nº de atletas cadetes: 29

Nº de atletas juveniles: 6

56. Una empresa desea disponer de dinero en efectivo en euros, dólares y libras esterlinas. El valor total entre las tres monedas ha de ser igual a 264 000 €. Se quiere que el valor del dinero disponible en euros sea el doble del valor del dinero en dólares, y que el valor del dinero en libras esterlinas sea la décima parte del valor del dinero en euros. Si se supone que una libra esterlina es igual a 1,5 € y un dólar es igual a 1,1 €, ¿cuál es la cantidad de euros, dólares y libras esterlinas que la empresa ha de tener disponible?

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Cantidad de dinero en euros: x

Cantidad de dinero en libras: y

Cantidad de dinero en dólares: z

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{l} x + 1{,}5y + 1{,}1z = 264\,000 \\ x = 2{,}2z \\ 1{,}5y = x/10 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 1{,}5y + 1{,}1z = 264\,000 \\ x \qquad - 2{,}2z = 0 \\ x - 15y \qquad = 0 \end{array}\right\}$$

x = 165 000, y = 11 000, z = 75 000

c) **Solución**

Cantidad de dinero en euros: 165 000

Cantidad de dinero en libras: 11 000

Cantidad de dinero en dólares: 75 000

57. Una tienda tiene tres tipos de conservas, A, B y C. El precio medio de las tres conservas es de 1 €. Un cliente compra 30 unidades de A, 20 de B y 10 de C, y abona 58 €. Otro compra 20 unidades de A, y 30 de C, y abona 51 €. Calcula el precio de cada unidad de A, B y C.

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Precio de la conserva A: x

Precio de la conserva B: y

Precio de la conserva C: z

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 30x + 20y + 10z = 58 \\ 20x + 30z = 51 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0{,}9;\; y = 1;\; z = 1{,}1$$

c) **Solución**

Precio de la conserva A: 0,9 €

Precio de la conserva B: 1 €

Precio de la conserva C: 1,1 €

58. Una heladería prepara helados de tres tamaños; 125 gramos, 250 gramos y 500 gramos cuyos precios son 1 €, 2 € y 3 €, respectivamente. Un cliente compra 10 helados, con un peso total de 2,5 kg, y paga por ellos 18 €

Halla el número de helados que ha comprado de cada tipo.

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Nº de helados de 125 gramos: x

Nº de helados de 250 gramos: y

Nº de helados de 500 gramos: z

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{r}125x + 250y + 500z = 2\,500 \\ x + \quad y + \quad z = \quad 10 \\ x + \quad 2y + \quad 3z = \quad 18\end{array}\right\} \Rightarrow x = 4, y = 4, z = 2$$

c) **Solución**

Nº de helados de 125 gramos: 4

Nº de helados de 250 gramos: 4

Nº de helados de 500 gramos: 2

59. Una editorial va a lanzar al mercado tres libros de bolsillo, L1, L2 y L3. El importe total de la edición es 24 500 €. Los costes en euros, por unidad, son 5 €, 3 € y 4 €, respectivamente. Se sabe que el número de ejemplares de L3 es igual a los dos séptimos de los del tipo L2, y que si al triple del número de ejemplares de L1 se le suma el número de ejemplares de L3, se obtiene el doble de ejemplares de L2.

Averigua cuántos libros se han editado de cada tipo.

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Nº de libros L1: x

Nº de libros L2: y

Nº de libros L3: z

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{l}5x + 3y + 4z = 24\,500 \\ z = 2y/7 \\ 3x + z = 2y\end{array}\right\}$$

$x = 2\,000, y = 3\,500, z = 1\,000$

c) **Solución**

Nº de libros L1: 2 000

Nº de libros L2: 3 500

Nº de libros L3: 1 000

60. En una reunión hay 60 personas entre deportistas, artistas y enseñantes. Se sabe que los enseñantes y los artistas duplican el número de deportistas. También se sabe que los deportistas y el doble de los artistas son el doble de los enseñantes.

¿Cuál es el número de personas deportistas, artistas y enseñantes?

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Nº de deportistas: x

Nº de artistas: y

Nº de enseñantes: z

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{r}x + \quad y + z = 60 \\ y + z = 2x \\ x + 2y \quad = 2z\end{array}\right\} \Rightarrow x = 20, y = 15, z = 25$$

c) **Solución**

Nº de deportistas: 20

Nº de artistas: 15

Nº de enseñantes: 25

61. El señor García deja a sus hijos herederos de todo su dinero, con las siguientes condiciones: al mayor le deja la media de la cantidad que les deja a los otros dos más 30 000 €; al mediano, exactamente la media de la cantidad de los otros dos; y al pequeño, la media de la cantidad de los otros dos menos 30 000 €.

Conociendo estas condiciones solamente, ¿pueden saber los hijos cuánto dinero ha heredado cada uno? Justifica la respuesta.

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Cantidad del hijo mayor: x

Cantidad del hijo mediano: y

Cantidad del hijo pequeño: z

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{l}x = \dfrac{y + z}{2} + 30\,000 \\ y = \dfrac{x + z}{2} \\ z = \dfrac{x + y}{2} - 30\,000\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}2x - \quad y - \quad z = \quad 60\,000 \\ -x + 2y - \quad z = \quad 0 \\ -x - \quad y + 2z = -60\,000\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x - z = 40\,000 \\ y - z = 20\,000\end{array}\right\}$$

c) **Solución**

El sistema es compatible indeterminado. No se puede saber la cantidad que le corresponde a cada hijo.

Para profundizar

62. Resuelve y clasifica el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x \quad\ \ + z = 11 \\ x + y \quad\ \ = 3 \\ \quad\ \ y + z = 13 \\ x + y + z = 13 \end{array}\right\}$$

Solución:

No tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.

63. Discute el siguiente sistema y clasifícalo:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y - 2z + t = 4 \\ x + y + z - t = 5 \\ x - y - z + t = 6 \\ 6x - 3y - 3z + 2t = 32 \end{array}\right\}$$

Solución:

$x = 11/2, y = 2 - z, t = 5/2$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 11/2 \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \\ t = 5/2 \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

64. Resuelve y clasifica el sistema para los siguiente valores de **m:**

a) $m = -3$ b) $m = 1$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = m \\ x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{array}\right\}$$

Solución:

a) Solución: $x = -1, y = -1, z = -1$

El sistema es heterogéneo compatible determinado

b) Solución $x + y + z = 1$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array}\right\} \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

65. Un comerciante ha vendido 600 camisetas por un total de 5 320 €. El precio original era de 10 € por camiseta, pero ha vendido en las rebajas una parte de ellas con un descuento del 30% del precio original, y otra parte con un descuento del 40%. Sabiendo que el número total de camisetas rebajadas fue la mitad del número de las que vendió a 10 €, calcula cuántas camisetas se vendieron a cada precio.

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Nº de camisetas sin descuento: x

Nº de camisetas con el 30%: y

Nº de camisetas con el 40%: z

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 600 \\ 10x + 7y + 6z = 5\,320 \\ y + z = x/2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 600 \\ 10x + 7y + 6z = 5\,320 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

$x = 400, y = 120, z = 80$

c) **Solución**

Nº de camisetas vendidas sin descuento: 400

Nº de camisetas vendidas con el 30%: 120

Nº de camisetas vendidas con el 40%: 80

66. Una compañía fabricó tres tipos de muebles: sillas, mecedoras y sofás. Para la fabricación de estos tipos, se necesitó la utilización de unidades de madera, plástico y aluminio, tal y como se indica en la siguiente tabla:

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sofá	1 unidad	2 unidades	5 unidades

La compañía tenía en existencia 400 unidades de madera, 600 unidades de plástico y 1 500 unidades de aluminio.

Si la compañía utilizó todas sus existencias, ¿cuántas sillas, mecedoras y sofás fabricó?

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Nº de sillas: x

Nº de mecedoras: y

Nº de sofás: z

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{r} x + \ \ y + \ \ z = \ \ 400 \\ x + \ \ y + 2z = \ \ 600 \\ 2x + 3y + 5z = 1\,500 \end{array}\right\}$$

$x = 100, y = 100, z = 200$

c) **Solución**

Nº de sillas: 100

Nº de mecedoras: 100

Nº de sofás: 200

67. Un banco invirtió 2 millones de euros en tres empresas diferentes, A, B y C. Lo que invirtió en A era el doble de lo que invirtió en B. Al cabo de un año, la rentabilidad de la operación ha sido del 10%. Las acciones de la empresa A han aumentado su valor un 10%, y las de B, en un 30%. Si las acciones de la empresa C han perdido un 10% de su valor, ¿qué cantidad se invirtió en cada empresa?

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Cantidad invertida en A: x

Cantidad invertida en B: y

Cantidad invertida en C: z

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y + \quad z = 2\,000\,000 \\ x = 2y \\ 0{,}1x + 0{,}3y - 0{,}1z = \ \ 200\,000 \end{array}\right\}$$

$x = 1\,000\,000, y = 500\,000, z = 500\,000$

c) **Solución**

Cantidad invertida en A: 1 000 000 €

Cantidad invertida en B: 500 000 €

Cantidad invertida en C: 500 000 €

68. En una librería hubo la semana pasada una promoción de tres libros: una novela, un libro de poesía y un cuento. Se vendieron 200 ejemplares de la novela, 100 de poesía y 150 de cuentos. Sabiendo que la librería ingresó por dicha promoción 8 600 €, que el precio de un ejemplar de novela es el doble del precio de un cuento y que el triple de la diferencia entre el precio del ejemplar de poesía y del cuento es igual al precio de una novela, calcula el precio al que se vendió cada libro.

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Precio de libro de novela: x

Precio del libro de poesía: y

Precio del libro del cuento: z

b) **Manos a la obra**

$$\left.\begin{array}{l} 200x + 100y + 150z = 8\,600 \\ x = 2z \\ 3(y - z) = x \end{array}\right\}$$

$x = 24, y = 20, z = 12$

c) **Solución**

Precio de libro de novela: 24 €

Precio del libro de poesía: 20 €

Precio del libro del cuento: 12 €

Paso a paso

69. Resuelve el sistema siguiente. Clasifícalo e interprétalo gráficamente:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ 4x + y = -2 \end{array}\right\}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

70. Resuelve el sistema siguiente. Clasifícalo e interprétalo gráficamente:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 2 \\ x + y - 3z = 4 \\ 3x - y - z = -3 \end{array}\right\}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Wiris o DERIVE:

71. Encuentra dos números cuya suma sea 35 y sean proporcionales a 2 y 3

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

72. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

Resuelve algebraicamente los siguientes sistemas y, a la vista del resultado, clasifícalos:

73. $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ 4x + y = 3 \end{array}\right\}$

Solución:

Ejercicio 73

resolver $\left\{\begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ 4x + y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \{\{x=1, y=-1\}\}$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

74. $\left.\begin{array}{r} 3x + y = 4 \\ 3x + y = 2 \end{array}\right\}$

Solución:

Ejercicio 74

resolver $\left\{\begin{array}{l} 3x + y = 4 \\ 3x + y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \{\}$

El sistema es heterogéneo incompatible.

75 $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ -6x + 3y = -9 \end{array}\right\}$

Solución:

Ejercicio 75

resolver $\left\{\begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ -6x + 3y = -9 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\left\{x=\frac{1}{2}\cdot y+\frac{3}{2}, y=y\right\}\right\}$

resolver $\left(\left\{\begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ -6x + 3y = -9 \end{array}\right\}, \{y\}\right) \rightarrow \{\{y=2\cdot x-3\}\}$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

76. $\left.\begin{array}{r} 3x + y - z = 8 \\ x + 2y + z = 9 \\ 2x - y + 3z = 4 \end{array}\right\}$

Solución:

Ejercicio 76

resolver $\left\{\begin{array}{l} 3x + y - z = 8 \\ x + 2y + z = 9 \\ 2x - y + 3z = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \{\{x=2, y=3, z=1\}\}$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

77. $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 4x + 2y - 3z = 0 \\ 3x + 5y - 4z = 0 \end{array}\right\}$

Solución:

Ejercicio 77

resolver $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 4x + 2y - 3z = 0 \\ 3x + 5y - 4z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\left\{x=\frac{1}{2}\cdot z, y=\frac{1}{2}\cdot z, z=z\right\}\right\}$

El sistema es homogéneo compatible indeterminado.

78. $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 3x + 5y - z = 8 \\ x + 2y - z = 2 \end{array}\right\}$

Solución:

Ejercicio 78

resolver $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 3x + 5y - z = 8 \\ x + 2y - z = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \{\}$

El sistema es heterogéneo incompatible.

Resuelve los sistemas siguientes. Clasifícalos e interprétalos gráficamente:

79. $\left.\begin{array}{r} x - y = -4 \\ 2x + y = \ \ 1 \end{array}\right\}$

Solución:

Ejercicio 79

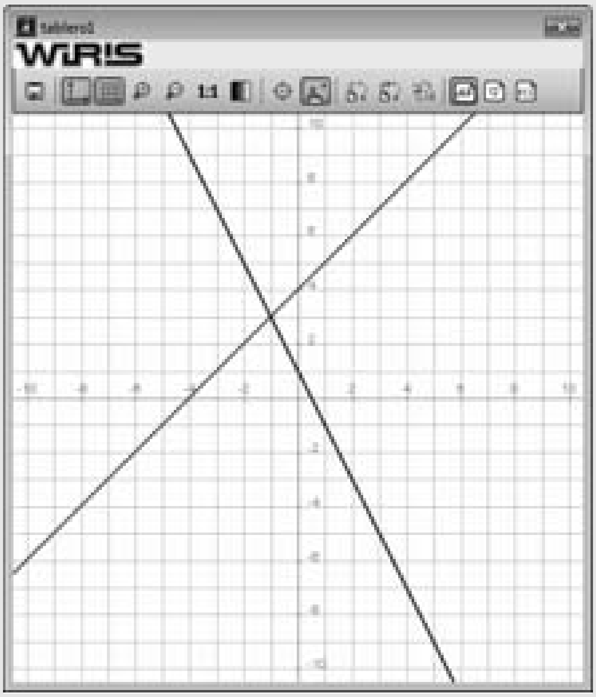
resolver$\left\{\begin{array}{l} x - y = -4 \\ 2x + y = 1 \end{array}\right\}$ → {{x=−1,y=3}}

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

dibujar(x − y = −4, {color = rojo, anchura_linea = 2})

dibujar(2x + y = 1, {color = azul, anchura_linea = 2})

Las dos rectas son secantes.



80. $\left.\begin{array}{r} x - 2y = \ \ 2 \\ x - 2y = -2 \end{array}\right\}$

Solución:

Ejercicio 80

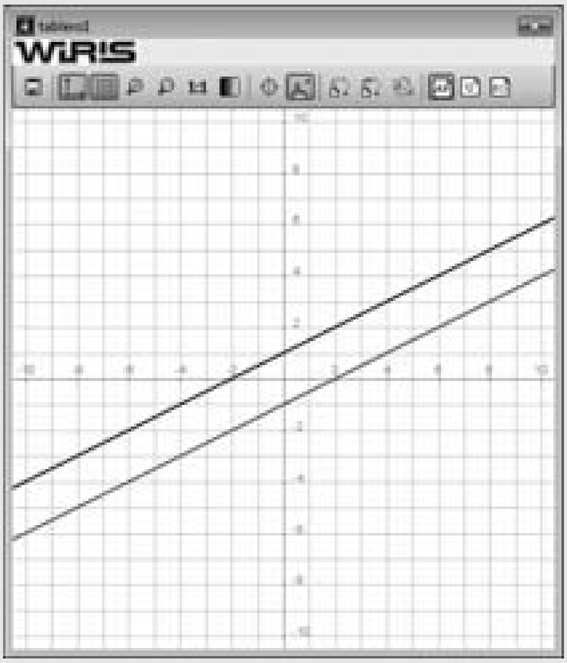
resolver$\left\{\begin{array}{l} x - 2y = 2 \\ x - 2y = -2 \end{array}\right\}$ → {}

El sistema es heterogéneo incompatible.

dibujar(x − 2y = 2, {color = rojo, anchura_linea = 2})

dibujar(x − 2y = −2, {color = azul, anchura_linea = 2})

Las dos rectas son paralelas.



81. $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 4 \end{array}\right\}$

Solución:

Ejercicio 81

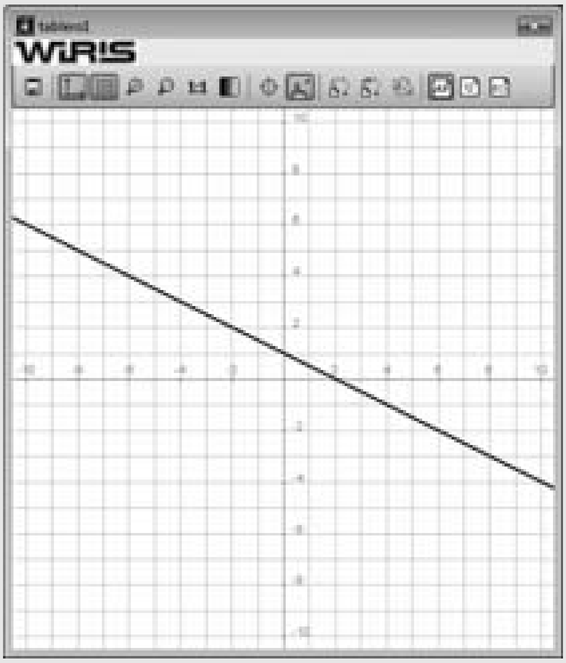
resolver$\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 4 \end{array}\right\}$ → {{x=−2·y+2,y=y}}

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

dibujar(x + 2y = 2, {color = rojo, anchura_linea = 2})

dibujar(2x + 4y = 4, {color = azul, anchura_linea = 2})

Las dos rectas son coincidentes.



82. $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x - y + z &= 2 \\ x - y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$

Solución:

Ejercicio 82

resolver $\left\{\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x - y + z &= 2 \\ x - y + z &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \{\{x=1, y=1, z=1\}\}$

El sistema es heterogéneo compatible.

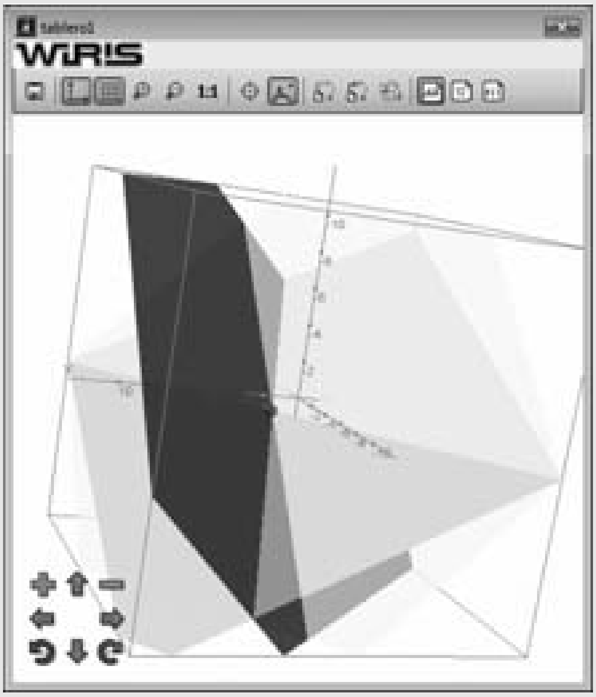
dibujar3d(x + y + z = 3, {color = azul})

dibujar3d(2x − y + z = 2, {color = verde})

dibujar3d(x − y + z = 1, {color = amarillo})

Los tres planos se cortan el punto P(1, 1, 1)

dibujar3d(punto(1, 1, 1), {color = rojo, tamaño_punto = 10})



83. $\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ 8x - 4y + 4z &= 12 \\ -6x + 3y - 3z &= -9 \end{aligned}\right\}$

Solución:

Ejercicio 83

resolver $\left\{\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ 8x - 4y + 4z &= 12 \\ -6x + 3y - 3z &= -9 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\left[x = -\frac{1}{2}\cdot z + \frac{1}{2}\cdot y + \frac{3}{2}, y = y, z = z\right]\right\}$

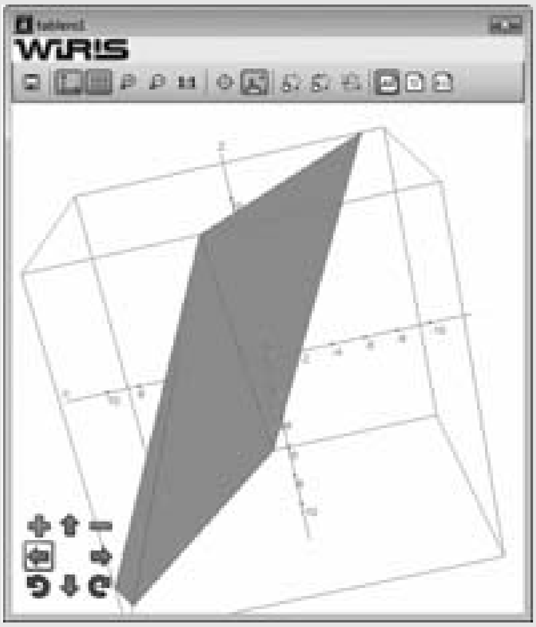
El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

dibujar3d(2x − y + z = 3, {color = rojo})

dibujar3d(8x − 4y + 4z = 12, {color = azul})

dibujar3d(−6x + 3y − 3z = −9, {color = verde})

Los tres planos son coincidentes.



84. $\left.\begin{aligned} -5x + 2y - 2z &= 7 \\ x + 2y + z &= 3 \\ 5x - 2y + 2z &= 8 \end{aligned}\right\}$

Solución:

Ejercicio 84

resolver $\left\{\begin{aligned} -5x + 2y - 2z &= 7 \\ x + 2y + z &= 3 \\ 5x - 2y + 2z &= 8 \end{aligned}\right\} \rightarrow \{\}$

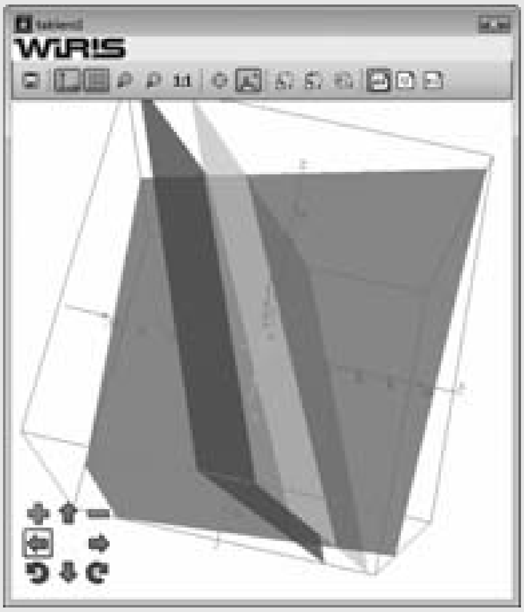
El sistema es heterogéneo incompatible.

dibujar3d(−5x + 2y − 2z = 7, {color = rojo})

dibujar3d(x + 2y + z = 3, {color = azul})

dibujar3d(5x − 2y + 2z = 8, {color = verde})

Dos planos son paralelos y el otro es secante.



Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE:

85. Hemos comprado un disco, un libro y una agenda. El precio del libro es el doble del precio del disco, y también es el triple de la diferencia del precio de la agenda y el disco. Considerando que hemos pagado 140 €, calcula los precios de los tres artículos.

Solución:

Problema 85

Planteamiento :

Precio del disco : x

Precio del libro : y

Precio de la agenda : z

$$\text{resolver}\begin{bmatrix} y=2x \\ y=3(z-x) \\ x+y+z=140 \end{bmatrix} \rightarrow \{\{x=30, y=60, z=50\}\}$$

El disco cuesta 30 €, el libro 60 € y la agenda 50 €

86. El cajero automático de una determinada entidad bancaria solo admite billetes de 50 €, 20 € y 10 €. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7 000 €. Averigua el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 € y de 10 € es el doble del número de billetes de 20 €.

Solución:

Problema 86

Planteamiento :

Nº de billetes de 50 € : x

Nº de billetes de 20 € : y

Nº de billetes de 10 € : z

$$\text{resolver}\begin{bmatrix} x+y+z=225 \\ 50x+20y+10z=7000 \\ x+z=2y \end{bmatrix} \rightarrow \{\{x=100, y=75, z=50\}\}$$

Hay 100 billetes de 50 €, 75 de 20 € y 50 de 10 €

87. En un teatro hay localidades de tres clases, A, B y C, cuyos precios son 3 €, 6 € y 12 €, respectivamente. Cierto día, la recaudación total fue de 6 600 €. Si se sabe, además, que de la clase A se vendieron tantas localidades como de las clases B y C juntas, y que de la B se vendió el doble que de la C, ¿cuántas localidades de cada clase se vendieron ese día?

Solución:

Problema 87

Planteamiento :

Nº de localidades del tipo A : x

Nº de localidades del tipo B : y

Nº de localidades del tipo C : z

$$\text{resolver}\begin{bmatrix} 3x+6y+12z=6600 \\ x=y+z \\ y=2z \end{bmatrix} \rightarrow \{\{x=600, y=400, z=200\}\}$$

Se han vendido 600 localidades del tipo A, 400 del tipo B y 200 del tipo C.

2 Matrices

1. Tipos de matrices

Piensa y calcula

Escribe en forma de tabla el siguiente enunciado: «Una familia gasta en enero 400 € en comida y 150 € en vestir; en febrero, 500 € en comida y 100 € en vestir; y en marzo, 300 € en comida y 200 € en vestir».

Solución:

	Enero	Febrero	Marzo
Comida	400	500	300
Vestir	150	100	200

Aplica la teoría

1. Escribe una matriz fila de dimensión 1×4

Solución:

$$A = (1, -5, 0, 7)$$

2. Escribe una matriz columna de dimensión 2×1

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

3. Escribe una matriz cuadrada de orden 3, y marca la diagonal principal.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 6 \\ -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

4. Completa la siguiente matriz para que sea simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \ldots & 4 & -5 \\ \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Halla el valor de a, b, c, d, e y f para que la siguiente matriz sea antisimétrica o hemisimétrica:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 5 & d & e \\ 0 & -7 & f \end{pmatrix}$$

Solución:

$a = d = f = 0,$

$b = -5, c = 0, e = 7$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Escribe una matriz nula de dimensión 2×3

Solución:

$$O_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Escribe una matriz diagonal de orden 2

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

8. Escribe una matriz escalar de orden 3 en la que el elemento $a_{22} = -6$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

9. Escribe una matriz unidad de orden 3

Solución:

$$I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Escribe una matriz triangular superior de orden 2 y su traspuesta. ¿Cómo es la traspuesta?

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

A^t es una matriz triangular inferior.

11. Escribe una matriz triangular inferior de orden 3 y su traspuesta. ¿Cómo es la traspuesta?

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

A^t es una matriz triangular superior.

12. Dado el sistema lineal:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ 4x - 7y - z = 9 \end{cases}$$

a) escribe la matriz C de los coeficientes de las incógnitas. ¿De qué dimensión es?

b) escribe una matriz columna X con las incógnitas. ¿De qué dimensión es?

c) escribe una matriz columna B con los términos independientes. ¿De qué dimensión es?

Solución:

a) $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$ es de dimensión 2×3

b) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es de dimensión 3×1

c) $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ es de dimensión 2×1

2. Operaciones con matrices

Piensa y calcula

Halla mentalmente el producto escalar de los siguientes vectores: a) $(3, 4)\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$; b) $(2, -3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $15 + 24 = 39$

b) $6 - 6 = 0$

Aplica la teoría

13. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula:

a) A + B b) A – B c) 5A d) 2A – 3B

Solución:

a) $A + B = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A - B = \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

c) $5A = \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}$

d) $2A - 3B = \begin{pmatrix} 23 & -30 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$

14. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Calcula, de los siguientes productos, los que sean posibles, y de los que no sean posibles, razona por qué no se pueden multiplicar:

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$

Solución:

a) $A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 2}$

Se pueden multiplicar porque el número de columnas de la 1ª coincide con el número de filas de la 2ª

$$A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 26 & 8 \end{pmatrix}$$

b) $B_{3\times 2} \cdot A_{2\times 3}$

Se pueden multiplicar porque el número de columnas de la 1ª coincide con el número de filas de la 2ª

$$B_{3\times 2} \cdot A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -7 & -13 & 12 \\ 9 & 1 & -4 \\ -25 & -15 & 20 \end{pmatrix}$$

15. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$. Del resultado obtenido, ¿qué propiedad muy elemental se ha probado que no se verifica?

Solución:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ -4 & 47 \end{pmatrix}$ $\quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 40 & 8 \\ 27 & 19 \end{pmatrix}$

No se verifica la propiedad conmutativa del producto.

16. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Halla una matriz B tal que $A \cdot B = O_{2\times 2}$, con la condición de que B no sea la matriz nula de dimensión 2×2

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a + 2c = 0 \\ b + 2d = 0 \\ 2a + 4c = 0 \\ 2b + 4d = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a = -2c \\ b = -2d \end{aligned}\right\} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

La condición que se debe verificar es que la 1ª fila sea el doble de la 2ª cambiada de signo.

Por ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Potencia de matrices y resolución de sistemas de matrices

Piensa y calcula

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^2. ¿Qué matriz se obtiene?

Solución:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2\times 2}$$

Se obtiene la matriz identidad de orden 2

Aplica la teoría

17. Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, calcula A^2 y A^3

Solución:

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -26 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$

18. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula A^{183}

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= I_{3\times 3}$$

A es una matriz cíclica de orden 2; por tanto, las potencias impares dan A, y las pares, I

$$A^{183} = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

19. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene: $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$

20. Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

calcula A^{250}

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2 \times 2}$$

A es una matriz cíclica de orden 2; por tanto, las potencias impares dan A, y las pares, I

$$A^{250} = I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

21. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^n

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

22. Resuelve el siguiente sistema matricial:

$$A + 2B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 6 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A - 3B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ -9 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Aplicaciones de las matrices a la resolución de problemas

Piensa y calcula

Una empresa de electrodomésticos tiene tres fábricas: una en Madrid, otra en Málaga y otra en Vigo. La producción semanal viene dada por la siguiente matriz:

$$A = \begin{array}{r} \\ \text{Frigoríficos} \\ \text{Lavadoras} \\ \text{Lavaplatos} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Madrid} & \text{Málaga} & \text{Vigo} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 150 & 140 & 130 \\ 175 & 155 & 125 \\ 160 & 140 & 100 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Interpreta el elemento a_{12} de la matriz **A**

b) Interpreta el elemento a_{21} de la matriz **A**

c) Interpreta el elemento a_{33} de la matriz **A**

Solución:

a) El elemento a_{12}, que es 140, indica el número de frigoríficos que se fabrican en Málaga.

b) El elemento a_{21}, que es 175, indica el número de lavadoras que se fabrican en Madrid.

c) El elemento a_{33}, que es 100, indica el número de lavaplatos que se fabrican en Vigo.

Aplica la teoría

23. Los consumos anuales de agua mineral, pan y leche de tres familias vienen expresados en la matriz A. La evolución de los precios de los años 2000 al 2003 viene reflejada en la matriz B, expresada en céntimos de euro.

$$A = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{pan} & \text{agua} & \text{leche} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ \text{pan} \\ \text{agua} \\ \text{leche} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2000 & 2001 & 2002 & 2003 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Halla, si es posible, $A \cdot B$ y $B \cdot A$ e indica qué información proporciona el producto matricial.

b) ¿Qué información nos da el elemento c_{34} de la matriz producto?

Solución:

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 106\,150 & 111\,300 & 113\,250 & 122\,750 \\ 108\,580 & 113\,940 & 115\,800 & 125\,450 \\ 73\,000 & 76\,200 & 78\,000 & 84\,500 \end{pmatrix}$$

Cada valor del producto proporciona los gastos de cada familia en pan, agua y leche en cada uno de los años 2000, 2001, 2002, 2003

El producto $B_{3 \times 4} \cdot A_{3 \times 3}$ no se puede realizar porque el número de columnas de B no coincide con el de filas de A

b) El elemento c_{34} de la matriz producto es el consumo de la familia 3, F_3, durante el año 2003, que son 845 €, ya que todos los valores están en céntimos de euro.

24. Un constructor puede adquirir ladrillos, tejas, madera y cemento de tres proveedores: P, Q y R. Los precios de cada proveedor por paquete de materiales vienen dados en miles de euros por la matriz:

$$\begin{array}{c} \\ P \\ Q \\ R \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} L & T & M & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 13 & 6 & 6 \\ 6 & 12 & 7 & 8 \\ 7 & 14 & 6 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

El constructor tiene que comenzar tres obras. Necesita:

a) Primera obra: 24 paquetes de ladrillo, 5 de tejas, 12 de madera y 18 de cemento.

b) Segunda obra: 20 paquetes de ladrillo, 7 de tejas, 15 de madera y 20 de cemento.

c) Tercera obra: 20 paquetes de ladrillo, 4 de tejas, 15 de madera y 15 de cemento.

El constructor quiere adquirir todos los materiales de cada obra al mismo proveedor. ¿Qué proveedor es el más económico para cada obra?

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 13 & 6 & 6 \\ 6 & 12 & 7 & 8 \\ 7 & 14 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24 & 20 & 20 \\ 5 & 7 & 4 \\ 12 & 15 & 15 \\ 18 & 20 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 437 & 461 & 392 \\ 432 & 469 & 393 \\ 436 & 468 & 391 \end{pmatrix}$$

Debe elegir:

Para la primera obra, el proveedor Q

Para la segunda obra, el proveedor P

Para la tercera obra, el proveedor R

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 En una matriz hemisimétrica o antisimétrica, los elementos de la diagonal principal:

- ❑ son todos unos.
- ❑ pueden ser cualesquiera.
- ❑ son unos cero y otros uno.
- ☒ son todos cero.

2 Para poder multiplicar dos matrices:

- ❑ la primera ha de tener tantas filas como columnas la segunda.
- ☒ la primera ha de tener tantas columnas como filas la segunda.
- ❑ tienen que ser cuadradas.
- ❑ dos matrices se pueden multiplicar siempre.

3 Sean A y B matrices tales que se pueda multiplicar $A \cdot B$ y $B \cdot A$

- ☒ Unas veces $A \cdot B = B \cdot A$ y otras $A \cdot B \neq B \cdot A$
- ❑ Siempre $A \cdot B = B \cdot A$
- ❑ Siempre $A \cdot B \neq B \cdot A$
- ❑ No es cierta ninguna de las anteriores.

4 Sean A y B matrices tales que $A \cdot B = O$, siendo O la matriz nula.

- ❑ Siempre $A = B = O$
- ❑ Al menos una de las dos $A = O$, o bien $B = O$
- ☒ Puede ser $A \neq O$ y $B \neq O$
- ❑ No es cierta ninguna de las anteriores.

5 Sean A, B y C matrices tal que $A \cdot B = A \cdot C$

- ❑ Siempre $B = C$
- ☒ Unas veces $B = C$, y otras, $B \neq C$
- ❑ Nunca $B = C$
- ❑ No es cierta ninguna de las anteriores.

6 Sean I y A las matrices cuadradas siguientes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$$

Calcula A^2

- ❑ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
- ❑ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☒ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- ❑ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

7 Sean I y A las matrices cuadradas siguientes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$$

Calcula A^3

- ❑ $\begin{pmatrix} 17 & -1 \\ -1 & -17 \end{pmatrix}$
- ☒ $\begin{pmatrix} -17 & -29 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}$
- ❑ $\begin{pmatrix} -29 & 17 \\ 1 & -23 \end{pmatrix}$
- ❑ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

8 Sean I y A las matrices cuadradas siguientes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$$

Halla los números reales α y β para los que se verifica $(I + A)^3 = \alpha \cdot I + \beta \cdot A$

- ❑ $\alpha = 2, \beta = -2$
- ❑ $\alpha = 0, \beta = 0$
- ❑ $\alpha = 3, \beta = 5$
- ☒ $\alpha = -2, \beta = 2$

9 Halla todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ distintas de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2 = A$

- ☒ $a = 0, b = 0; a = 0, b = 1; a = 1, b = 0$
- ❑ $a = 1, b = 1$
- ❑ $a = -1, b = -1; a = 1, b = 2$
- ❑ $a = 3, b = 5$

10 Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula $M = A + A^2 + \ldots + A^{10}$

- ❑ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ❑ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- ❑ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$
- ☒ $\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Tipos de matrices

25. Escribe una matriz fila de dimensión 1×3

Solución:

$$A = (2 \quad -8 \quad -9)$$

26. Escribe una matriz columna de dimensión 3×1

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

27. Escribe una matriz cuadrada de orden 2 y marca la diagonal principal.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

28. Halla el valor de **a, b, c** para que la siguiente matriz sea simétrica:

$$\begin{pmatrix} 3 & a & b \\ -2 & -7 & c \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$a = -2$, $b = 0$, $c = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

29. Completa la siguiente matriz para que sea antisimétrica o hemisimétrica:

$$\begin{pmatrix} \dots & 5 & -1 \\ \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

30. Escribe una matriz nula de dimensión 3×2

Solución:

$$O_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

31. Escribe una matriz diagonal de orden 3

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

32. Escribe una matriz escalar de orden 2 en la que el elemento $a_{11} = 5$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

33. Escribe una matriz unidad de orden 4

Solución:

$$I_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

34. Escribe una matriz triangular superior de orden 3 y su traspuesta. ¿Cómo es la traspuesta?

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

A^t es una matriz triangular inferior.

35. Escribe una matriz triangular inferior de orden 2 y su traspuesta. ¿Cómo es la traspuesta?

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

A^t es una matriz triangular superior.

36. Dado el sistema lineal:

$$\left. \begin{aligned} 3x + 2y - 5z &= 4 \\ 7y + 6z &= 8 \\ z &= 9 \end{aligned} \right\}$$

a) escribe la matriz C de los coeficientes de las incógnitas. ¿De qué dimensión es? ¿De qué tipo es?

b) escribe una matriz columna X con las incógnitas. ¿De qué dimensión es?

c) escribe una matriz columna B con los términos independientes. ¿De qué dimensión es?

Solución:

a) $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es de dimensión 3×3

Es una matriz triangular superior.

b) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es de dimensión 3×1

c) $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ es de dimensión 3×1

2. Operaciones con matrices

37. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

calcula:

a) A + B b) A – B c) – 3A d) – 5A + 2B

Solución:

a) $A + B = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A - B = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 1 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$

c) $-3A = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 0 & -3 \\ 3 & -15 \end{pmatrix}$ d) $-5A + 2B = \begin{pmatrix} -22 & 15 \\ -2 & 3 \\ 9 & -31 \end{pmatrix}$

38. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Halla la matriz opuesta –A y comprueba que –A + A es la matriz nula de dimensión 2×2

Solución:

$$-A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$-A + A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

39. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula, de los siguientes productos, los que sean posibles, y respecto a los que no sean posibles, razona por qué no se pueden multiplicar:

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$

Solución:

a) $A_{3\times 2} \cdot B_{2\times 3}$

Se pueden multiplicar porque el número de columnas de la 1ª coincide con el número de filas de la 2ª

$$A_{3\times 2} \cdot B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ -9 & 6 & -7 \\ -30 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

b) $B_{2\times 3} \cdot A_{3\times 2}$

Se pueden multiplicar porque el número de columnas de la 1ª coincide con el número de filas de la 2ª

$$B_{2\times 3} \cdot A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ -12 & 14 \end{pmatrix}$$

40. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

calcula $A \cdot C$ y $B \cdot C$. Del resultado obtenido ¿qué propiedad muy elemental se ha probado que no se verifica?

Solución:

$A \cdot C = \begin{pmatrix} 38 & -19 \\ 54 & -27 \end{pmatrix}$ $B \cdot C = \begin{pmatrix} 38 & -19 \\ 54 & -27 \end{pmatrix}$

El producto de matrices no es simplificable:

Si $A \cdot C = B \cdot C$, no se deduce que $A = B$

41. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Halla una matriz B, tal que $B \cdot A = O_{2\times 2}$, con la condición de que B no sea la matriz nula de dimensión 2×2

Solución:

Hay muchas soluciones, por ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La condición que se debe verificar es que la 1ª columna sea el doble de la 2ª

3. Potencias de matrices y resolución de sistemas de matrices

42. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^2

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

43. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula A^{83}

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2\times 2}$$

A es una matriz cíclica de orden 2; por tanto, las potencias impares dan A, y las pares, I

$$A^{83} = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

44. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

calcula A^n

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 125 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 5^3 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

45. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula $A^{2\,004}$

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{3 \times 3}$$

A es una matriz cíclica de orden 2; por tanto, las potencias impares dan A, y las pares, I

$$A^{2\,004} = I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

46. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

47. Resuelve el siguiente sistema matricial:

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 13 \\ 11 & -14 \end{pmatrix} \qquad A - 3B = \begin{pmatrix} -18 & 8 \\ -5 & -25 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Aplicaciones de las matrices a la resolución de problemas

48. En un centro escolar, el 80% de los alumnos de 4º de ESO pasan a Bachillerato, el 70% de los alumnos de 1º de Bachillerato pasa a 2º, el 65% de los alumnos de 2º aprueban el curso. Repiten curso el 20% de los alumnos de 1º y el 30% de los alumnos de 2º. En este centro no se admiten alumnos nuevos para Bachillerato y todos los que aprueban el curso pasan al curso siguiente.

a) Escribe la matriz de dimensión 3×3 que muestra la evolución entre cursos.

b) En un cierto curso había 150 alumnos en 4º de ESO, 110 alumnos en 1º de Bachillerato y 100 alumnos en 2º de bachillerato. ¿Cuál será la distribución de alumnos en el curso siguiente?

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0{,}65 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0{,}65 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 150 \\ 110 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 142 \\ 107 \\ 65 \end{pmatrix}$

49. Un industrial produce dos tipos de tornillos: planos (P) y de estrella (E). De cada tipo hace tres modelos: A, B y C. La siguiente matriz da la producción semanal de tornillos:

$$\begin{array}{c} \\ P \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2\,000 & 2\,500 & 3\,000 \\ 2\,500 & 3\,500 & 4\,000 \end{pmatrix} \end{array}$$

El porcentaje de tornillos defectuosos del tipo A es de un 5%, del tipo B es de un 4% y del tipo C es de un 2%. Calcula el número de tornillos planos y de estrella que no sean defectuosos.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2\,000 & 2\,500 & 3\,000 \\ 2\,500 & 3\,500 & 4\,000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}95 \\ 0{,}96 \\ 0{,}98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\,240 \\ 9\,655 \end{pmatrix}$$

Tornillos planos no defectuosos: 7 240

Tornillos de estrella no defectuosos: 9 655

Para ampliar

50. Sean los vectores del plano $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{u}(3, 2)$ y $\mathbf{v}(-2, 5)$. Halla la matriz correspondiente. ¿De qué dimensión es?

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Es de dimensión 2×2

51. Sean los vectores del espacio $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}(1, 2, 3)$, $\mathbf{v}(5, -2, 0)$ y $\mathbf{w}(-7, 9, 4)$. Halla la matriz correspondiente. ¿De qué dimensión es?

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 0 \\ -7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Es de dimensión 3×3

52. Sean las matrices:

$$A = (2 \quad 3 \quad -5) \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Calcula, de los siguientes productos, los que sean posibles, y respecto de los que no sean posibles, razona por qué no se pueden multiplicar:

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$

Solución:

a) $A_{1 \times 3} \cdot B_{3 \times 1}$

Se pueden multiplicar porque el número de columnas de la 1ª coincide con el número de filas de la 2ª

$$A_{1 \times 3} \cdot B_{3 \times 1} = (-30)$$

b) $B_{3 \times 1} \cdot A_{1 \times 3}$

Se pueden multiplicar porque el número de columnas de la 1ª coincide con el número de filas de la 2ª

$$B_{3 \times 1} \cdot A_{1 \times 3} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -20 \\ -2 & -3 & 5 \\ 14 & 21 & -35 \end{pmatrix}$$

53. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -7 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprueba que: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -23 & 1 \\ -3 & 13 \end{pmatrix} \qquad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -23 & -3 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -3 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$$

54. Sea M una matriz real cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n. Expresa M^3 como combinación lineal de M e I

Solución:

$M^2 - 2M = 3I$

$M^2 = 3I + 2M$

$M^3 = (3I + 2M)M$

$M^3 = 3M + 2M^2$

$M^3 = 3M + 2(3I + 2M)$

$M^3 = 3M + 6I + 4M$

$M^3 = 6I + 7M$

55. Sea A una matriz de 3 filas y 4 columnas (esto es, de dimensión 3×4) y C una matriz 2×3. ¿Cuántas filas y columnas tiene B sabiendo que existe la matriz $A \cdot B \cdot C$?, ¿qué dimensión tiene $A \cdot B \cdot C$?

Solución:

$A_{3 \times 4} \cdot B_{n \times p} \cdot C_{2 \times 3}$

B ha de tener tantas filas como columnas tenga A, y el mismo número de columnas que filas tenga C; por tanto, n = 4 filas y p = 2 columnas.

El resultado $A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 2} \cdot C_{2 \times 3}$ tiene tantas filas como A y tantas columnas como C; luego es de dimensión 3×3

56. Sea D una matriz tal que al multiplicarla por su traspuesta da una matriz de dimensión 1×1 y el producto de la traspuesta de D por D es 3×3. ¿Cuántas filas y columnas tiene D?

Solución:

$D_{n \times p} \cdot D^t_{p \times n} = M_{n \times n}$ Como el resultado es de dimensión 1×1, $n = 1$

$D^t_{p \times n} \cdot D_{n \times p} = N_{p \times p}$ Como el resultado es de dimensión 3×3, $p = 3$

D tiene una fila y tres columnas.

57. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

58. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene: $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$

59. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/7 & 1 & 0 \\ 2/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/7 & 1 & 0 \\ 2/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/7 & 1 & 0 \\ 3/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k/7 & 1 & 0 \\ k/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

60. Una empresa produce tres tipos de artículos, A, B y C. Los precios de coste por unidad son 30 €, 46 € y 75 €, respectivamente. Los correspondientes precios de venta de una unidad de cada artículo son 50 €, 80 € y 150 €, respectivamente. El número de unidades vendidas anualmente es de 2 000, 1 500 y 800, respectivamente.

Halla:

a) la matriz fila de costes por unidad.

b) la matriz fila de ventas por unidad.

c) la matriz fila de beneficios por unidad.

d) la matriz columna de unidades vendidas.

e) el beneficio obtenido.

Solución:

a) $C = (30 \quad 46 \quad 75)$

b) $V = (50 \quad 80 \quad 150)$

c) $B = V - C = (20 \quad 34 \quad 75)$

d) $U = \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 1\,500 \\ 800 \end{pmatrix}$

e) $(20 \quad 34 \quad 75) \cdot \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 1\,500 \\ 800 \end{pmatrix} = (151\,000)$

El beneficio obtenido es de 151 000 €

61. Una fábrica produce tres tipos de productos, A, B y C, que distribuye a cuatro clientes. En el mes de enero el primer cliente compró 9 unidades de A, 5 de B y 2 de C; el segundo cliente, 3 unidades de A, 8 de B y ninguna de C; el tercer cliente no compró nada y el cuarto cliente compró 6 de A, 7 de B y 1 de C.

En el mes de febrero, el primer cliente y el segundo duplicaron el número de unidades que habían comprado en enero; el tercer cliente compró 4 unidades de cada artículo, y el cuarto cliente no hizo pedido alguno.

a) Construye la matriz correspondiente a las ventas de enero.

b) Construye la matriz correspondiente a las ventas de febrero.

c) Halla la matriz correspondiente a las ventas de enero y febrero.

d) Si los precios de los artículos son 100 €, 80 € y 90 €, respectivamente, calcula lo que factura la fábrica por sus pedidos en los meses de enero y febrero.

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 15 & 6 \\ 9 & 24 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 27 & 15 & 6 \\ 9 & 24 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,440 \\ 2\,820 \\ 1\,080 \\ 1\,250 \end{pmatrix}$

Problemas

62. Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Calcula la matriz $(A - 2I)^2$

Solución:

$(A - 2I)^2 = (A - 2I)(A - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

63. Considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula A^tA y AA^t, donde A^t denota la matriz traspuesta de A

Solución:

$A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

64. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ (t indica traspuesta)

Solución:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

65. Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^k

Solución:

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 \end{pmatrix}$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} \\ 2^{k-1} & 2^{k-1} \end{pmatrix}$$

66. Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

calcula A^k

Solución:

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 & 3^2 & 3^2 \\ 3^2 & 3^2 & 3^2 \\ 3^2 & 3^2 & 3^2 \end{pmatrix}$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{pmatrix}$$

67. Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

calcula A^k

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix}$$

68. Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

y sea I la matriz identidad de orden 3 y O la matriz nula de orden 3, comprueba que:

$$A^2 - A - 2I = O$$

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A^2 - A - 2I = 0$

$$A^2 - A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$-2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

69. Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Calcula A^{86}

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A es cíclica de orden 3

$$\begin{array}{l|l} 86 & 3 \\ \cline{2-2} 26 & 28 \\ \mathbf{2} & \end{array}$$

$$A^{86} = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

70. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

halla A^{200}

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2\times 2}$$

A es una matriz cíclica de orden 2; por tanto, las potencias impares dan A, y las pares, $I_{2\times 2}$

Por tanto: $A^{200} = A^2 = I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

71. En un centro se imparten los cursos 1°, 2° y 3° de ciertas enseñanzas. Los profesores tienen asignado semanalmente un número de horas de clase, tutorías y guardias que deben cubrir de acuerdo con la siguiente matriz:

$$M = \begin{array}{c} \\ 1° \\ 2° \\ 3° \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{clase} & \text{guardias} & \text{tutorías} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

El centro paga cada hora de clase a 12 €, cada hora de guardia a 3 € y cada hora de tutoría a 6 €, según el vector:

$$C = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

El centro dispone de 5 profesores para primer curso, 4 para segundo y 6 para tercero, representados por el vector:

$$P = (5 \quad 4 \quad 6)$$

Calcula cada uno de los siguientes productos de matrices e interpreta los resultados.

a) PM b) MC c) PMC

Solución:

a) $PM = (5 \quad 4 \quad 6)\begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (304 \quad 55 \quad 47)$

Son el número de horas totales de clase, guardias y tutorías.

b) $MC = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 273 \\ 264 \\ 279 \end{pmatrix}$

Es lo que le cuesta al colegio la enseñanza de cada uno de los cursos.

c) $PMC = (5 \quad 4 \quad 6)\begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 4\,095$

Es lo que le cuesta en total la enseñanza al colegio.

72. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula: $A^2 - 4A + 4I_3$

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$4I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A + 4I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{3 \times 3}$$

73. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad 3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$$

Solución:

Se multiplica la 1ª ecuación por 2 y se le resta la 2ª; se obtiene:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 14 \\ -12 & -6 & -21 \end{pmatrix}$$

Se sustituye el valor obtenido de A en la 1ª ecuación y se despeja B; se obtiene:

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 14 & -21 \\ 28 & 14 & 49 \end{pmatrix}$$

74. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcula $3AA^t - 2I$, siendo I la matriz unidad de orden 2

Solución:

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3AA^t = 3\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$2I = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3AA^t = -2I = \begin{pmatrix} 30 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

75. Una fábrica produce dos modelos de acumuladores de calor, G y P, en tres terminaciones: normal, lujo y especial. Del modelo G, produce 500 unidades normales, 300 unidades de lujo y 200 especiales. Del modelo P, produce 400 unidades normales, 200 unidades de lujo y 100 especiales. La terminación normal necesita 20 horas de fabricación de piezas y 1,5 horas de montaje. La terminación de lujo necesita 25 horas de fabricación y 2 horas de montaje, y la terminación especial necesita 30 horas de fabricación y 2,5 horas de montaje.

a) Representa en dos matrices la información dada.

b) Escribe una matriz que exprese las horas de fabricación y de montaje empleadas para cada uno de los modelos.

c) Si cada hora de fabricación se paga a 15 € y cada hora de montaje a 18 €, escribe una matriz que exprese el coste total de los acumuladores G y P

Solución:

a)
$$\begin{array}{c} \\ G \\ P \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Normal} & \text{Lujo} & \text{Especial} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 500 & 300 & 200 \\ 400 & 200 & 100 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \text{Normal} \\ \text{Lujo} \\ \text{Especial} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Fabricación} & \text{Montaje} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 1,5 \\ 25 & 2 \\ 30 & 2,5 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $$\begin{pmatrix} 500 & 300 & 200 \\ 400 & 200 & 100 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 & 1,5 \\ 25 & 2 \\ 30 & 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23\,500 & 1\,850 \\ 16\,000 & 1\,250 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 23\,500 & 1\,850 \\ 16\,000 & 1\,250 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 385\,800 \\ 262\,500 \end{pmatrix}$$

76. Una fábrica de muebles hace mesas (M), sillas (S), y armarios (A), y cada uno de ellos en tres modelos: económico (E), normal (N) y lujo (L). Cada mes produce de mesas, 50 E, 40 N y 30 L; de sillas, 200 E, 150 N y 100 L; de armarios, 40 E, 30 N y 20 L.

a) Representa esta información en una matriz.

b) Calcula la matriz que da la producción de un año.

Solución:

a)
$$\begin{array}{c} \\ \text{Mesas} \\ \text{Sillas} \\ \text{Armarios} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E & N & L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 50 & 40 & 30 \\ 200 & 150 & 100 \\ 40 & 30 & 20 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $$12\begin{pmatrix} 50 & 40 & 30 \\ 200 & 150 & 100 \\ 40 & 30 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 & 480 & 360 \\ 2\,400 & 1\,800 & 1\,200 \\ 480 & 360 & 240 \end{pmatrix}$$

Para profundizar

77. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz B tal que $A + B = AA^T$

Solución:

$A + B = AA^T$

$B = AA^T - A$

$B = A(A^T - I)$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

78. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

Si k es par: $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si k es impar: $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

79. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^3 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

Si k es par: $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$

Si k es impar: $A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^k \\ 0 & 2^k & 0 \\ 2^k & 0 & 0 \end{pmatrix}$

80. Considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Siendo I la matriz identidad 3×3 y O la matriz nula 3×3, prueba que $A^3 + I = O$

b) Calcula A^{10}

Solución:

a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = O_{3\times 3}$$

b) Si $A^3 + I_{3\times 3} = O \Rightarrow A^3 = -I_{3\times 3} \Rightarrow A^6 = I_{3\times 3}$

A es cíclica de período 6

$$\begin{array}{r|l} 10 & 6 \\ \hline \mathbf{4} & 1 \end{array}$$

$$A^{10} = A^4 = A^3 \cdot A = -I_{3\times 3} \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

81. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

halla el valor de **a** para que se cumpla la igualdad:

$$A^2 + 2A + I = O$$

siendo I la matriz identidad de orden 3 y O la matriz nula de orden 3

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + 2a + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + 2a + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

82. Resuelve el sistema matricial:

$$5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$$

$$3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Solución:

Se multiplica la 1ª ecuación por 2, la 2ª por –3 y se suman. Se obtiene:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Se sustituye el valor obtenido de X en la 1ª ecuación y se despeja Y. Se obtiene:

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso a paso

83. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

halla:

$$A + B;\ A - B;\ 2A - 3B;\ A \cdot B^t$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

84. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula A^2, A^3, A^{257}

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

85. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

86. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

87. Calcula A · B, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

Ejercicio 87

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 13 & 6 & 9 \\ 35 & 12 & 19 \\ 57 & 18 & 29 \\ 79 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

88. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

calcula A · B, B · A y comprueba que el producto de matrices no es conmutativo.

Solución:

Ejercicio 88

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 20 & 28 \\ 52 & 76 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A \rightarrow \begin{pmatrix} 22 & 34 \\ 46 & 74 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$; por tanto, el producto de matrices no es conmutativo.

89. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

comprueba que $A \cdot B = A \cdot C$ y, sin embargo, $B \neq C$

Solución:

Ejercicio 89

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

$A \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 20 & 24 \end{pmatrix}$

$A \cdot C \rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 20 & 24 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = A \cdot C$ y, sin embargo, $B \neq C$

90. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

comprueba que $A \cdot B = O_{2 \times 2}$ y, sin embargo, $A \neq O_{2 \times 2}$ y $B \neq O_{2 \times 2}$

Solución:

Ejercicio 90

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$

$A \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A \neq O_{2 \times 2}$ y $B \neq O_{2 \times 2}$

91. Calcula A^k, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Ejercicio 91

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por recurrencia:

$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$

92. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula:

a) $A + B$ b) $A - B$

c) $2A - 3B$ d) $A^t \cdot B$

Solución:

Ejercicio 92

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

$A + B \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$A - B \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

$2A - 3B \rightarrow \begin{pmatrix} 23 & -30 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$

$A^T \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} -23 & 8 \\ 1 & -24 \end{pmatrix}$

93. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula: A^2, A^3, A^4 y A^{183}

Solución:

Ejercicio 93

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{183} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

94. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula:

$$A^2 - 4A + 4I$$

Solución:

Ejercicio 94

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$I_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A + 4I_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

95. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^n

Solución:

Ejercicio 95

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Determinantes

1. Determinantes de orden 2 y 3 por Sarrus

Piensa y calcula

Dada la proporción $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, calcula el producto de extremos menos el producto de medios.

Solución:

$3 \cdot 8 - 6 \cdot 4 = 24 - 24 = 0$

Aplica la teoría

1. Calcula mentalmente los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $|A| = 0$ porque tiene una columna de ceros.

b) $|B| = 0$ porque tiene dos filas iguales, la 1ª y la 3ª

2. Calcula mentalmente los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & -9 \\ 7 & 5 & -8 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $|A| = 0$ porque tiene dos filas proporcionales; la 2ª es el doble de la 1ª

b) $|B| = 0$ porque tiene una fila que es combinación lineal de las otras dos; la 3ª es la suma de la 1ª y de la 2ª

3. Halla los determinantes que se puedan calcular de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 8 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 38$

b) No se puede calcular porque no es cuadrada.

4. Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 50$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} = -58$

5. Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ -9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ -9 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 255$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

6. Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 4 & 6 & 9 \\ -3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & -9 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 4 & 6 & 9 \\ -3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = -265$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & -9 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 867$

7. Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 125$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 70$

8. Siendo $E^t = (1 \quad 2 \quad 3)$ la traspuesta de la matriz E, calcula el determinante de la matriz $E^t \cdot E$

Solución:

$E^t = E = (1, 2, 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (14)$

$|E^t \cdot E| = |14| = 14$

2. Propiedades de los determinantes

Piensa y calcula

Dada la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, halla su determinante y el de su traspuesta. ¿Cómo son?

Solución:

$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$

$A^t = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

$|A^t| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2$

Ambos determinantes son iguales.

Aplica la teoría

9. Sean $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 9 \\ -8 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -374$ y $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -8 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

Halla mentalmente |B|. ¿Qué propiedad has utilizado?

Solución:

|B| = 374

Porque el determinante |B| se obtiene del |A| cambiando la 2ª y 3ª filas.

10. Halla el valor de los siguientes determinantes y comprueba que son iguales.

La 3ª fila del 2º se ha obtenido sustituyéndola por la suma de las tres del 1º

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -6 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -6 \\ 5 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

Solución:

|A| = 245 |B| = 245

11. Comprueba la identidad $|A| = |A^t|$ siendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 6 & -7 \\ 5 & 2 & -9 \end{vmatrix}$$

Solución:

$|A| = -180$ $\qquad$ $|A^t| = -180$

12. Sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$

calcula el siguiente determinante y enuncia las propiedades que utilices:

$$\begin{vmatrix} a + 2b & c & b \\ d + 2e & f & e \\ g + 2h & i & h \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a + 2b & c & b \\ d + 2e & f & e \\ g + 2h & i & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & c & b \\ 2e & f & e \\ 2h & i & h \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & c & b \\ 2e & f & e \\ 2h & i & h \end{vmatrix} = -2 + 0 = -2$$

En el 1er paso hemos descompuesto el determinante en la suma de otros dos que tienen la 2ª y 3ª columna iguales y la suma de las dos primeras columnas coincide con la 1ª columna inicial.

En el 2º paso hemos cambiado en el 1er determinante la 2ª columna con la 3ª y, por tanto, el determinante cambia de signo y el 2º determinante es cero, porque la 1ª columna es el doble de la 3ª

13. Si todos los elementos de una matriz de orden 3×3 se multiplican por (-1), ¿qué relación hay entre los determinantes de la matriz original y de la nueva matriz?

Solución:

Si todos los elementos de una matriz de orden 3×3 se multiplican por (-1), su determinante queda multiplicado por $(-1)^3 = -1$

La propiedad que se ha utilizado dice que para multiplicar un determinante por un número se multiplica el número por cada elemento de una línea. Como se multiplican las tres líneas, se eleva al cubo.

14. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

comprueba que: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 87 & 20 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 87 & 20 \end{vmatrix} = -1\,071$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 51 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -21$$

$|A| \cdot |B| = 51 \cdot (-21) = -1\,071$

3. Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea

Piensa y calcula

Halla una matriz A de orden 3, es decir, de dimensión 3×3, definida por: $a_{ij} = (-1)^{i+j}$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplica la teoría

15. Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 7 \\ 2 & 9 & -8 \end{pmatrix}$$

halla:

a) el menor complementario del elemento a_{21}

b) el menor complementario del elemento a_{13}

Solución:

a) $M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 9 & -8 \end{vmatrix} = 24$

b) $M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 46$

16. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 1 \\ 2 & 0 & 9 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

halla:

a) el adjunto del elemento a_{12}

b) el adjunto del elemento a_{31}

Solución:

a) $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 35$

b) $A_{31} = \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = -63$

17. Calcula el valor de los siguientes determinantes por los adjuntos de la línea más sencilla:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 9 \\ 5 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -7 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 9 \\ 5 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 23 = 161$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -7 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \cdot 22 = 176$

18. Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -7 & 8 \\ -1 & 9 & 5 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 7 & -8 & 3 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -7 & 8 \\ -1 & 9 & 5 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a + 2^a \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 8 \\ 0 & 2 & 13 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} =$

$= -86$

b) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 7 & -8 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a + 2^a \\ \\ 7 \cdot 1^a + 4^a \end{matrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 8 & 0 \\ 7 & 0 & 12 & -3 \\ 3 & 0 & 8 & 6 \\ 37 & 0 & 48 & 3 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 7 & 12 & -3 \\ 3 & 8 & 6 \\ 37 & 48 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \cdot 1^a + 2^a \\ 1^a + 3^a \end{matrix} = \begin{vmatrix} 7 & 12 & -3 \\ 17 & 32 & 0 \\ 44 & 60 & 0 \end{vmatrix} =$

$= -3\begin{vmatrix} 17 & 32 \\ 44 & 60 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-388) = 1\,164$

19. Halla en función de **a** el valor del determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}$$

Solución:

$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a - 3^a \end{matrix} =$

$= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2-a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2-a & 0 \end{vmatrix} =$

$= -a\begin{vmatrix} 2-a & 0 & 0 \\ 1 & 2-a & 0 \\ 1 & 1 & 2-a \end{vmatrix} =$

$= -a\,(2-a)^3 = a\,(a-2)^3$

4. Matriz inversa

Piensa y calcula

Multiplica las siguientes matrices A · B y B · A. ¿Qué matriz se obtiene?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

En ambos casos se obtiene la matriz unidad de orden 2

Aplica la teoría

20. Comprueba que las siguientes matrices son inversas:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

21. Halla la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$A_{11} = 2 \qquad A_{21} = -5$

$A_{12} = -1 \qquad A_{22} = 3$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$A_{11} = 2 \qquad A_{21} = -3$

$A_{12} = -4 \qquad A_{22} = 7$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

22. Halla la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -7 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{13} = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -9$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -3$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -7 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$

$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 2$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 8$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} = 12$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 4 & 6 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

23. Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} \text{sen } x & \cos x \\ -\cos x & \text{sen } x \end{pmatrix}$ es ortogonal.

Solución:

Para comprobar que es ortogonal hallamos la traspuesta y la inversa y veremos que son iguales.

$$A^t = \begin{pmatrix} \text{sen } x & -\cos x \\ \cos x & \text{sen } x \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \text{sen } x & \cos x \\ -\cos x & \text{sen } x \end{vmatrix} = \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\left.\begin{array}{ll} A_{11} = \text{sen } x & A_{21} = -\cos x \\ A_{12} = \cos x & A_{22} = \text{sen } x \end{array}\right\} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \text{sen } x & -\cos x \\ \cos x & \text{sen } x \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^{-1} = A^t$$

24. Dadas las siguientes matrices, determina si son invertibles y, en su caso, calcula la matriz inversa y el determinante de dicha inversa.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Solución:

Para que una matriz sea invertible tiene que ser cuadrada y su determinante distinto de cero.

a) La matriz A es cuadrada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

Por tanto, A es invertible.

$$A_{11} = 4 \qquad A_{21} = -2$$
$$A_{12} = -3 \qquad A_{22} = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

El determinante de la inversa es el inverso del determinante.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{2}$$

b) La matriz B no es cuadrada. Por tanto, no es invertible.

25. Considera la matriz A que depende de un parámetro **a**

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ 2a & a+1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de **a** tiene A inversa? Justifica la respuesta.

b) Para a = 0 halla la inversa de A

Solución:

a) Como A es una matriz cuadrada, para que tenga inversa, su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ 2a & a+1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$$

$$a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

La matriz A tiene inversa para $a \neq 1$

b) Para a = 0 se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Ecuaciones con matrices y determinantes

Piensa y calcula

Resuelve la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Aplica la teoría

26. Determina la matriz X de dimensión 2×2 tal que:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -23 & 14 \end{pmatrix}$$

27. Halla todas las matrices X tales que XA = AX, siendo A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4a + 2c & 4b + 2d \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 4b & 2b \\ c + 4d & 2d \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= a + 4b \\ b &= 2b \\ 4a + 2c &= c + 4d \\ 4b + 2d &= 2d \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} b &= 0 \\ c &= 4d - 4a \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 4d - 4a & d \end{pmatrix}$$

28. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & x \\ 1 - x & x + 1 & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & x \\ 1 - x & x + 1 & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = -2x^2 + 4x + 6$$

$-2x^2 + 4x + 6 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x = 3,\ x = -1$

29. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Existe alguna matriz Y, cuadrada de orden 2, tal que $AY = B^t$? (B^t es la matriz tranpuesta de B). Justifica la respuesta.

Solución:

Sea $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$B^t = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$AY = B^t$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a - c & b - d \\ 2c - 2a & 2d - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= -2 \\ b &= 3 \\ a - c &= 2 \\ b - d &= -1 \\ 2c - 2a &= 0 \\ 2d - 2b &= 1 \end{aligned}\right\}$$

De las cuatro primeras ecuaciones se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \\ c = -4 \\ d = 4 \end{array}\right\}$$

Que no verifican las otras dos ecuaciones; por tanto, no existe ninguna matriz Y, cuadrada de orden 2, que verifique la ecuación pedida.

30. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Resuelve la ecuación matricial XA – B = 2I, siendo I la matriz identidad de orden tres.

Solución:

$XA - B = 2I$

$XA = B + 2I$

$X = (B + 2I)A^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -20 & 3 \\ 17 & -13 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

31. Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{vmatrix} = 0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{vmatrix} = -2x^2 \Rightarrow -2x^2 = 0$$

$x = 0$

32. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Calcula la matriz X tal que AX = B

Solución:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$$

6. Rango de una matriz

Piensa y calcula

De los siguientes vectores, ¿cuáles son proporcionales?: $\vec{u}(1, -3, 2)$, $\vec{v}(2, 1, 2)$ y $\vec{w}(-2, 6, -4)$

Solución:

Son proporcionales: $\vec{u}(1, -3, 2)$ y $\vec{w}(-2, 6, -4) \Rightarrow \dfrac{1}{-2} = \dfrac{-3}{6} = \dfrac{2}{-4}$

Aplica la teoría

33. Halla mentalmente el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

a) R(A) = 2
Porque las filas no son proporcionales.

b) R(A) = 1
Porque las filas son proporcionales.

34. Halla mentalmente el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & -9 & 15 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Solución:

a) R(A) = 1
Porque las filas son proporcionales.

b) R(A) = 2
Porque las columnas no son proporcionales.

35. Halla el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ -7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ -7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 241 \neq 0$

$R(A) = 3$

Porque el determinante es distinto de cero.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

$R(A) = 2$

Porque el determinante es cero y las tres filas no son proporcionales.

36. Halla el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $R(A) = R\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} =$

$= R\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 7 & 6 \\ -3 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \cdot 1^a + 2^a \\ 3 \cdot 1^a + 3^a \end{matrix} =$

$= R\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 7 & 10 \\ 0 & -9 & 7 & 10 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 7 & 10 \end{pmatrix} = 2$

b) $R(B) = R\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$

$= R\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3 \cdot 1^a - 3^a \end{matrix} =$

$= R\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2^a + 2 \cdot 3^a \end{matrix} =$

$= R\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & 20 \end{pmatrix} = 3$

37. Comprueba que los vectores

$\vec{a} = (1, 1, 3)$ $\vec{b} = (-1, 2, 0)$ $\vec{c} = (1, 3, 5)$

son linealmente dependientes.

Solución:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

Por tanto, son linealmente dependientes.

38. Calcula el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real **a:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$R(A) = R\begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix} =$

$= R\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & a \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & a+4 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a + 2 \cdot 2^a \\ 5 \cdot 2^a + 3^a \end{matrix} =$

$= R\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & 8 & 0 & a-2 \\ 0 & 12 & a+4 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3 \cdot 2^a + 2 \cdot 3^a \end{matrix} =$

$= R\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & 8 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 2a+8 & -3a-12 \end{pmatrix}$

Si $a = -4 \Rightarrow R(A) = 2$

Si $a \neq -4 \Rightarrow R(A) = 3$

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 Indica qué igualdad es falsa:

☐ $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$

☒ $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$

☐ $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

☐ $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$

2 La matriz inversa de una matriz regular A es igual a:

☐ el producto del inverso del determinante de A por la matriz adjunta de A.

☐ la adjunta de su matriz traspuesta.

☒ el producto del inverso del determinante de A por la traspuesta de la matriz adjunta de A.

☐ la traspuesta de la matriz adjunta.

3 Si el determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

el determinante

$$\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

vale

☐ 1 ☐ 5 ☒ –1 ☐ –5

4 La matriz adjunta es:

☐ la matriz cuyo elemento $\mathbf{a_{ij}}$ es el menor complementario del elemento $\mathbf{a_{ij}}$ de la matriz A

☐ la matriz inversa de A

☐ la matriz que se obtiene de eliminar la fila **i** y la columna **j** de la matriz A

☒ la matriz cuyo elemento $\mathbf{a_{ij}}$ es el adjunto del elemento $\mathbf{a_{ij}}$ de la matriz A

5 Si $|A| = 3$ y $|B| = -3$, $|AB|$ es igual a:

☐ 0 ☒ –9 ☐ 9 ☐ –1

6 Despeja **X** en función de A en

$$(X + A)^2 = X^2 + XA + I$$

☐ $X = A - A^{-1}$

☒ $X = A^{-1} - A$

☐ $X = A^2 - A^{-1}$

☐ $X = A^{-1} - A^2$

7 Las soluciones de la siguiente ecuación son:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \\ a^2 & -a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

☐ $a = -1$

☒ $a = 1$

☐ $a = 1, a = -1$

☐ No tiene solución real.

8 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$$

los valores de m para los que el rango de la matriz A es menor que 3 son:

☒ $m = 1, m = 0$ ☐ $m = 0$

☐ $m \neq 0; m \neq 1$ ☐ $m = 1$

9 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}; \ a \in \mathbb{R}$$

¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

☐ Si $a = 4$, $R(A) = 3$

☐ Si $a \neq 4$, $R(A) = 3$

☒ Si $a = 4$, $R(A) = 1$

☐ Si $a \neq 4$, $R(A) = 4$

10 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ m \in \mathbb{R}$$

determina qué valores de m hacen a la matriz A regular.

☐ $m = -1; m = -3$

☒ $m \neq -1; m \neq -3$

☐ $m = 1; m = 3$

☐ Para cualquier valor de **m**

Ejercicios y problemas

1. Determinantes de orden 2 y 3 por Sarrus

39. Calcula mentalmente los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 7 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $|A| = 0$ porque tiene las filas opuestas.

b) $|B| = 0$ porque tiene una columna de ceros.

40. Calcula mentalmente los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -15 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $|A| = 0$ porque tiene dos filas proporcionales; la 2ª es el quíntuplo de la 1ª cambiada de signo.

b) $|B| = 0$ porque tiene una columna que es combinación de las otras dos; la 3ª es la suma de la 1ª y la 2ª

41. Halla los determinantes que se puedan calcular de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

Solución:

a) No se puede calcular porque no es cuadrada.

b) $|B| = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 35$

42. Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -2$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 6$

43. Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ b) $|B| = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 103$

44. Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -2 \end{vmatrix} = -200$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -87$

45. Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 42$

46. Siendo $E^t = (1 \quad 2 \quad 3)$ la traspuesta de la matriz E, calcula el determinante de la matriz $E \cdot E^t$

Solución:

$E \cdot E^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

$|E \cdot E^t| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$

Porque tiene las tres filas proporcionales, la 2ª es el doble de la 1ª, y la 3ª es el triple de la 1ª

2. Propiedades de los determinantes

47. Sea: $|A| = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 8 \\ -7 & 6 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 219$ y $|B| = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 9 \\ 5 & 6 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

Halla mentalmente |B|. ¿Qué propiedad has utilizado?

Solución:

$|B| = -219$

Porque el determinante |B| se obtiene del |A| cambiando la 1ª y 3ª columnas.

48. Halla el valor de los siguientes determinantes y comprueba que son iguales. La 3ª fila del 2º se ha obtenido sustituyéndola por la suma del doble de la 2ª más la 3ª

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución:

$|A| = 9$

$|B| = 9$

49. Comprueba la identidad $|A| = |A^t|$ siendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

$|A| = 238$

$|A^t| = 238$

50. Sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$

calcula el siguiente determinante y enuncia las propiedades que utilices:

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & 5c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 5\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$$

En el 1er paso hemos sacado factor común el 3 en la 1ª fila, y en el 2º paso hemos sacado factor común el 5 en la 3ª columna.

51. Si todos los elementos de una matriz de orden 3×3 se multiplican por (-2), ¿qué relación hay entre los determinantes de la matriz original y de la nueva matriz?

Solución:

Si todos los elementos de una matriz de orden 3×3 se multiplican por (-2), su determinante queda multiplicado por $(-2)^3 = -8$

La propiedad que se ha utilizado dice que para multiplicar un determinante por un número se multiplica el número por cada elemento de una línea. Como se multiplican las tres líneas, se eleva al cubo.

52. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$$

comprueba que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ -47 & -58 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 15 & 16 \\ -47 & -58 \end{vmatrix} = -118$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 59$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -2$$

$|A| \cdot |B| = 59 \cdot (-2) = -118$

3. Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea

53. Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 7 \\ 9 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

halla:

a) el menor complementario del elemento a_{12}

b) el menor complementario del elemento a_{31}

Solución:

a) $M_{12} = \begin{vmatrix} 9 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 57$ b) $M_{31} = \begin{vmatrix} -6 & 7 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 24$

54. Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 6 & 7 & -8 \\ 9 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

halla:

a) el adjunto del elemento a_{22}

b) el adjunto del elemento a_{23}

Solución:

a) $A_{22} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -11$ b) $A_{23} = -\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = 3$

55. Calcula el valor de los siguientes determinantes por los adjuntos de la línea más sencilla:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \\ 6 & 4 & -5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -7 & 8 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 9 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \\ 6 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -9\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -9 \cdot 24 = -216$

b) $\begin{vmatrix} -7 & 8 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 9 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -7 & 8 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 = 4$

56. Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 5 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -7 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & -9 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 5 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -7 & -10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 6 & 20 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 7 & 20 \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot 170 = 340$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -7 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & -9 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 3 \cdot 2^{a} + 3^{a} \\ 2 \cdot 2^{a} + 4^{a} \end{array} =$

$= \begin{vmatrix} 2 & -7 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 9 & 8 & 0 & 17 \\ 10 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 9 & 8 & 17 \\ 10 & -5 & 5 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} -12 & -7 & -3 \\ 25 & 8 & 25 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -12 & -3 \\ 25 & 25 \end{vmatrix} =$

$= 5 \cdot (-225) = -1\,125$

57. Comprueba que las siguientes matrices tienen el mismo determinante:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Solución:

$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} \begin{array}{l} 1^{a} - 2^{a} \\ 2^{a} - 3^{a} \\ 3^{a} - 4^{a} \\ \end{array} =$

$= \begin{array}{c} \quad 2^{a} - 1^{a} \\ \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & -a & -b & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{array} =$

$= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & -b & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} -a & -b & 0 \\ 0 & b & b \\ 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} =$

$= -a^2\begin{vmatrix} b & b \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} = -a^2(b - b^2 - b) = a^2b^2$

$|B| = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{vmatrix} = a^2b^2$

4. Matriz inversa

58. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprueba que B es la inversa de A

Solución:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

59. Halla la inversa de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 2$

$A_{11} = 4$ $A_{21} = 2$

$A_{12} = 5$ $A_{22} = 3$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$

$A_{11} = -3$ $A_{21} = 7$

$A_{12} = -2$ $A_{22} = 5$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

60. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determina si es invertible y, en su caso, calcula la matriz inversa.

Solución:

Para que una matriz sea invertible, tiene que ser cuadrada y su determinante distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$ $\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$

$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = 0$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 1$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -1$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

61. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Determina si es invertible y, en su caso, calcula la matriz inversa.

Solución:

Para que una matriz sea invertible, tiene que ser cuadrada y su determinante distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto, la matriz A no tiene inversa.

62. De las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determina cuáles tienen inversa y, en los casos en que exista, calcula la matriz inversa y el determinante de dicha inversa.

Solución:

Para que una matriz sea invertible, tiene que ser cuadrada y su determinante distinto de cero.

a) La matriz A es cuadrada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, la matriz A no es invertible.

b) La matriz B es cuadrada.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$B_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad B_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$B_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$B_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$B_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$B_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\quad B_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$B_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de la inversa es el inverso del determinante.

$$|B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = 1$$

63. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Determina si es invertible y, en su caso, calcula la matriz inversa.

Solución:

Para que una matriz sea invertible, tiene que ser cuadrada y su determinante distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, la matriz A no tiene inversa.

64. Considera la matriz A que depende de un parámetro **k:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de **k** tiene A inversa? Justifica la respuesta.

b) Para k = −5, halla la inversa de A

Solución:

a) Como A es una matriz cuadrada, para que tenga inversa, su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = k + 8$$

$$k + 8 = 0 \Rightarrow k = -8$$

La matriz B tiene inversa para $k \neq 8$

b) Para k = –5 se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -7/3 & 5/3 & 3 \\ -2/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Ecuaciones con matrices y determinantes

65. Siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

razona si posee solución la ecuación matricial $A \cdot X = B$ y, en caso afirmativo, resuélvela.

Solución:

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

66. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Halla una matriz X que verifique:

$$ABX = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$ABX = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

67. Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

$$x = 1, \; x = -1$$

68. Determina la matriz X de dimensión 2×2 tal que:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 27 & -11 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

69. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Encuentra todas las matrices:

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

tales que XA = I; donde I es la matriz identidad de orden 2

Solución:

$$XA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b-2c & 2c-b \\ d+e-2f & 2f-e \end{pmatrix}$$

$XA = I$

$$\begin{pmatrix} a+b-2c & 2c-b \\ d+e-2f & 2f-e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} a+b-2c=1 \\ 2c-b=0 \\ d+e-2f=0 \\ 2f-e=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=2c \\ d=1 \\ e=2f-1 \end{array}\right.$$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2c & c \\ 1 & 2f-1 & f \end{pmatrix}$$

70. Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = x^2(x^2-4)$$

$x^2(x^2-4) = 0$

$x = 0,\ x = 2,\ x = -2$

6. Rango de una matriz

71. Halla mentalmente el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) R(A) = 1

Porque las dos filas son proporcionales.

b) R(B) = 2

Porque las dos filas no son proporcionales.

72. Halla mentalmente el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Solución:

a) R(A) = 1

Porque las dos columnas son proporcionales.

b) R(B) = 2

Porque las dos filas no son proporcionales.

73. Halla el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$

R(A) = 2

Porque el determinante es cero y no todas las filas son proporcionales.

b) $|B| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix} = -477$

R(B) = 3

Porque el determinante es distinto de cero.

74. Halla el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & 6 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ 1^a + 2^a \\ 2 \cdot 1^a + 3^a \\ \\ \end{array} =$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & -1 \\ 0 & 8 & 6 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 8 & 6 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ 1^a + 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 1 & 15 & 0 \\ -2 & -10 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 15 \\ -2 & -10 \end{vmatrix} = -20$$

R (A) = 4

Porque el determinante es distinto de cero.

b) $R(B) = R\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a + 2 \cdot 2^a \\ 2^a + 3^a \end{matrix} =$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 14 \\ 0 & 7 & 3 & 14 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 14 \end{pmatrix} = 2$$

75. Determina los valores del parámetro **a** para que los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$(1, 1, a), (a, 3, 2) \text{ y } (0, 0, a)$$

sean linealmente independientes. Justifica la respuesta.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 3a$$

$-a^2 + 3a = 0 \Rightarrow a^2 - 3a = 0 \Rightarrow a(a - 3) = 0$

$a = 0, \; a = 3$

Para que los tres vectores sean linealmente independientes, tiene que ser $a \neq 0$ y $a \neq 3$

Para ampliar

76. Sea M una matriz real cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden **n.** Estudia si existe la matriz inversa de M. En caso afirmativo, expresa M^{-1}en términos de M e I

Solución:

$M^2 - 2M = 3I$

$\frac{1}{3}(M^2 - 2M) = I$

$M\left(\frac{1}{3}(M - 2I)\right) = I$

$M^{-1} = \frac{1}{3}(M - 2I)$

Existirá M^{-1} cuando el determinante de $|M - 2I|$ sea distinto de cero, $|M - 2I| \neq 0$

77. Sea:

$$A = \begin{pmatrix} \text{sen } x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \text{sen } x & 0 \\ \text{sen } x + \cos x & \text{sen } x - \cos x & 1 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de **x** existe la matriz inversa de A? Calcula dicha matriz inversa.

Solución:

Existirá la matriz inversa cuando su determinante sea distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} \text{sen } x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \text{sen } x & 0 \\ \text{sen } x + \cos x & \text{sen } x - \cos x & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{sen } x & -\cos x \\ \cos x & \text{sen } x \end{vmatrix} = \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \neq 0$$

Por tanto, la matriz A tiene siempre inversa.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \text{sen } x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \text{sen } x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

78. Determina los valores de **x** e **y** que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3 \\ 3y - 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3 \\ 3y - 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 2x + 3 \\ 3x + 2y &= 3y - 2 \end{aligned}\right\}$$

$$x = -\frac{5}{4}, \; y = -\frac{7}{4}$$

79. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula |ABC|

Solución:

$$ABC = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |ABC| = -9$$

80. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Se cumple la igualdad rang(A · B) = rang (A) · rang (B)? Justifica la respuesta.

Solución:

rang(A) = 2, rang(B) = 2

rang(A) · rang(B) = 2 · 2 = 4

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ 10 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

rang(A · B) = 2

Porque la 3ª fila es: –2 · 2ª. Por tanto, no se verifica la igualdad.

También se observa que:

rang(A) · rang(B) = 4

y que la matriz A · B tiene de dimensión 3 × 3; luego nunca puede tener rango 4

Problemas

81. Se sabe que:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$$

a) Calcula el valor de:

$$\begin{vmatrix} 3a - b & 6a + 2b \\ 3c - d & 6c + 2d \end{vmatrix}$$

b) Enuncia una de las propiedades de los determinantes que hayas usado en el apartado anterior.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 3a - b & 6a + 2b \\ 3c - d & 6c + 2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a - b & 6a \\ 3c - d & 6c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a - b & 2b \\ 3c - d & 2d \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 3a & 6a \\ 3c & 6c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 6a \\ d & 6c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 2b \\ d & 2d \end{vmatrix} =$

$= 0 - 6\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + 3 \cdot 2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - 0 =$

$= 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 = 60$

b) Se han utilizado las propiedades:

- Un determinante se puede descomponer en la suma de otros dos de forma que tenga todas las líneas iguales menos una, cuya suma sea la del primero. Se ha aplicado 3 veces.
- Para multiplicar un determinante por un número se multiplica el número por cada elemento de una línea. Por tanto, en una línea se pueden sacar los factores comunes.
- Si en la matriz se cambian dos líneas paralelas, su determinante cambia de signo.
- Si una matriz tiene dos líneas paralelas proporcionales, su determinante es cero.

82. Siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

razona si posee solución la ecuación matricial A · X = B y, en caso afirmativo, resuélvela.

Solución:

Tiene solución si la matriz A tiene inversa, es decir, si $|A| \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, luego tiene inversa y la ecuación matricial tiene solución.

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

83. Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

a) Halla los valores de **x** e **y** tales que AX = U

b) Encuentra los posibles valores de **m** para los que los vectores:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes.

Solución:

a) $AX = U \Rightarrow X = A^{-1}U$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m+3 \\ 3m+4 \end{pmatrix}$

Para que los vectores $\begin{pmatrix} 2m+3 \\ 3m+4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ sean linealmente dependientes, tienen que ser proporcionales.

$$\frac{2m+3}{1} = \frac{3m+4}{m}$$

$2m^2 + 3m = 3m + 4$

$2m^2 = 4$

$m^2 = 2$

$m = \pm\sqrt{2}$

84. Resuelve la ecuación matricial $A^2 \cdot X = 2B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$A^2 \cdot X = 2B$

$X = (A^2)^{-1}2B$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$X = (A^2)^{-1}2B$

$$X = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 52 \\ 8 & -2 & 30 \end{pmatrix}$$

85. Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula una matriz X tal que $A^2 + AX = I$

Solución:

$A^2 + AX = I$

$AX = I - A^2$

$X = A^{-1}(I - A^2)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I - A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(I - A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

86. Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & 3 & 2 \\ x^2 & 1 & 9 & 4 \\ x^3 & -1 & 27 & 8 \end{vmatrix} = 0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & 3 & 2 \\ x^2 & 1 & 9 & 4 \\ x^3 & -1 & 27 & 8 \end{vmatrix} = 12x^3 - 48x^2 + 12x + 72$$

$12x^3 - 48x^2 + 12x + 72 = 0$

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

$x = -1,\ x = 2,\ x = 3$

87. ¿Para qué valores de **a** y **b** la siguiente matriz es ortogonal?

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & \operatorname{sen} b \\ 0 & -\operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix}$$

Solución:

Para que sea ortogonal, su inversa tiene que ser igual a su traspuesta.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & \operatorname{sen} b \\ 0 & -\operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & -\operatorname{sen} b \\ 0 & \operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix}$$

Se halla la inversa:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & \operatorname{sen} b \\ 0 & -\operatorname{sen} b & \cos b \end{vmatrix} = a(\cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b) = a$$

$A_{11} = 1 \qquad A_{21} = 0 \qquad A_{31} = 0$

$A_{12} = 0 \qquad A_{22} = a\cos b \qquad A_{32} = -a\operatorname{sen} b$

$A_{13} = 0 \qquad A_{23} = a\operatorname{sen} b \qquad A_{33} = a\cos b$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & -\operatorname{sen} b \\ 0 & \operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix}$$

Para que $A^t = A^{-1}$ se tiene que verificar:

$$a = \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

El valor de **b** puede ser cualquier número.

88. Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)\,(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = (b-a)\,(c-a)\,(c-b)$$

$(b-a)\,(c-a)\,(c-b) = 0$

Las raíces son: $b = a$, $c = a$, $b = c$

89. Se sabe que la siguiente matriz M tiene de rango 1

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & a & b \\ 2 & c & d \end{pmatrix}$$

¿Pueden determinarse **a, b, c** y **d**? Justifica la respuesta y, en caso afirmativo, hállalos.

Solución:

Si la matriz tiene rango 1, la 2ª fila es proporcional a la 1ª. Por tanto:

$$a = \frac{6}{5} \text{ y } b = \frac{7}{5}$$

Si la matriz tiene rango 1, también la 3ª fila es proporcional a la 1ª. Por tanto:

$$c = \frac{12}{5} \text{ y } d = \frac{14}{5}$$

90. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Explica brevemente el concepto de independencia lineal de vectores en $\mathbb{R}^3$ y enuncia alguna condición equivalente a que tres vectores de $\mathbb{R}^3$ sean linealmente independientes.

b) Escribe el vector **b** como combinación lineal de los vectores **u, v** y **w,** siendo:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) Tres vectores en $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes si el rango de la matriz correspondiente es 3

Una condición equivalente es que tres vectores en $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes si el determinante correspondiente es distinto de cero.

b) $x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} x \qquad - z &= -1 \\ -x + 2y - z &= -7 \\ 2x + 6y + 3z &= 7 \end{aligned}\right\}$$

$x = 2$, $y = -1$, $z = 3$

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

91. Dados los vectores $\vec{u} = (a, 1 + a, 2a)$, $\vec{v} = (a, 1, a)$ y $\vec{w} = (1, a, 1)$, se pide:

a) determina los valores de **a** para los que los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

b) estudia si el vector $\vec{c} = (3, 3, 0)$ depende linealmente de los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $a = 2$. Justifica la respuesta.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} a & 1+a & 2a \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^3 - a$

$a^3 - a = 0 \Rightarrow a = 0,\ a = 1, a = -1$

Para $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ los tres vectores son linealmente dependientes.

b) Para $a = 2$, como $a \neq 0, a \neq 1, a \neq -1 \Rightarrow$ los tres vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes y, como están en $\mathbb{R}^3$, forman una base, luego todo vector es combinación lineal de ellos, en particular $\vec{c} = (3, 3, 0)$

92. Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula los valores de **x** para los que no existe la inversa de A

b) Para $x = 3$, calcula, si es posible, A^{-1}

Solución:

a) No existe la inversa para los valores de **x** que hagan su determinante cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{vmatrix} = x^2 - x$$

$x^2 - x = 0$

$x(x - 1) = 0$

$x = 0$, $x = 1$

b) Para $x = 3$ se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Para profundizar

93. Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determina para qué valores del parámetro λ la matriz A no tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $\lambda = -2$

Solución:

a) La matriz A no tiene inversa cuando su determinante sea cero, $|A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2$$

$1 - \lambda^2 = 0$

$\lambda = 1,\ \lambda = -1$

b) Para $\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2/3 & -1/3 & 0 \\ -4/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

94. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

calcula $(A^tA^{-1})^2A$

Solución:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^tA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A^tA^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 21/4 & -5/4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A^tA^{-1})^2A = \begin{pmatrix} 21/2 & -5/4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 11/2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

95. Sean los vectores:

$\mathbf{u} = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (2, 5, -2)$, $\mathbf{x} = (4, 1, 3)$ y $\mathbf{z} = (4, 1, -8)$

a) ¿Se puede expresar **x** como combinación lineal de **u** y **v**? Si es así, escribe dicha combinación lineal; si no es así, explica por qué.

b) ¿Se puede expresar **z** como combinación lineal de **u** y **v**? Si es así, escribe dicha combinación lineal; si no es así, explica por qué.

c) ¿Son **u, v** y **z** linealmente independientes? Justifica la respuesta.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -99 \neq 0$

u, v y **x** son linealmente independientes; por tanto, **x** no es combinación lineal de **u** y **v**

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 0$

u, v y **z** son linealmente dependientes. Como **u** y **v** son independientes por no ser proporcionales, **z** es combinación lineal de **u** y **v**

$a(-1, 2, 3) + b(2, 5, -2) = (4, 1, -8)$

$$\left.\begin{aligned} -a + 2b &= 4 \\ 2a + 5b &= 1 \\ 3a - 2b &= -8 \end{aligned}\right\}$$

$a = -2,\ b = 1$

Por tanto:

$$-2(-1, 2, 3) + (2, 5, -2) = (4, 1, -8)$$

c) **u, v** y **z** son linealmente dependientes porque el determinante formado por ellos vale cero, como se ha visto en el apartado b).

96. Sea M una matriz real cuadrada de orden **n** que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden **n.** Halla todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

Solución:

Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

$$M^2 - 2M = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 2ab - 2b & a^2 + b^2 - 2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 2ab - 2b & a^2 + b^2 - 2a \end{pmatrix}$$

$$3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $M^2 - 2M = 3I$, se tiene que

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 2ab - 2b & a^2 + b^2 - 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2a &= 3 \\ 2ab - 2b &= 0 \\ a^2 + b^2 - 2a &= 3 \\ 2ab - 2b &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2a &= 3 \\ ab - b &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$ab - b = 0 \Rightarrow b(a - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

Si $a = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2a = 3 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$

$a = 1,\ b = 2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$a = 1,\ b = -2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Si $b = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2a = 3 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow$
$a = -1, a = 3$

$a = -1,\ b = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$a = 3,\ b = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Paso a paso

97. Halla el determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

98. Halla la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -5 & 1 & 0 \\ -7 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

99. Halla el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 7 & -4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE:

100. Resuelve la ecuación matricial:

$$\mathbf{AX + 2B = C}$$

sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

101. Halla todas las matrices X que permutan con A, es decir, tales que XA = AX, siendo A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

102. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

103. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$$

comprueba que:

a) $|A| = |A^t|$ b) $|B| = |B^t|$ c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Solución:

Problema 103

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$

a)

$|A| \rightarrow 10$

$|A^T| \rightarrow 10$

b)

$|B| \rightarrow 82$

$|B^T| \rightarrow 82$

c)

$|A \cdot B| \rightarrow 820$

$|A| \cdot |B| \rightarrow 820$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE:

104. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

halla una matriz **P** que verifique: **PB = AP**

Solución:

Problema 104

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$P \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$

$A \cdot P \rightarrow \begin{pmatrix} a+2\cdot c & b+2\cdot d \\ c & d \end{pmatrix}$

$\text{resolver}\begin{bmatrix} a = a + 2c \\ -b = b + 2d \\ c = c \\ -d = d \end{bmatrix} \rightarrow \{\{a=a, b=0, c=0, d=0\}\}$

La matriz es $P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

105. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Discute, en función de los valores que pueda tomar **k,** si la matriz:

a) AB tiene inversa.

b) BA tiene inversa.

Solución:

Problema 105

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a)

$|A \cdot B| \rightarrow 0$

$A \cdot B$ no tiene inversa nunca, independiente del valor de k.

a)

$|B \cdot A| \rightarrow k^2+2\cdot k+3$

$\text{resolver}(k^2+2\cdot k+3=0) \rightarrow \{\}$

$B \cdot A$ tiene inversa siempre, independiente del valor de k.

106. Resuelve la siguiente ecuación dada por un determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \\ a^2 & -a & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

Problema 106

$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \\ a^2 & -a & -1 \end{vmatrix} \rightarrow a^6-1$

$\text{resolver}(a^6-1=0) \rightarrow \{\{a=-1\}, \{a=1\}\}$

107. Halla el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

según los valores de **a**

Solución:

Problema 107

$A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow a \mapsto \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

$|A(a)| \rightarrow a^3-3\cdot a+2$

$\text{resolver}(a^3-3\cdot a+2=0) \rightarrow \{\{a=-2\}, \{a=1\}\}$

Si $a \neq -2$, $a \neq 1$, Rango (A) = 3

Para $a = -2$

$A(-2) \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\text{rango}(A(-2)) \rightarrow 2$

Para $a = 1$

$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\text{rango}(A(1)) \rightarrow 1$

108. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

di cuándo la matriz A es invertible.

Calcula la inversa para a = 1

Solución:

Problema 108

$A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix} \rightarrow a \mapsto \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2 \cdot a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$

$|A(a)| \rightarrow -2 \cdot a^3 - 4 \cdot a^2 + 2$

$\text{resolver}(-2 \cdot a^3 - 4 \cdot a^2 + 2 = 0) \rightarrow \left\{\{a = -1\}, \left\{a = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right\}, \left\{a = -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right\}\right\}$

La matriz A tiene inversa si $a \neq -1$, $a \neq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $a \neq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Para a = 1

$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$(A(1))^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

109. Calcula la matriz X tal que:

$$XA + B = C$$

siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Problema 109

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$(C - B) \cdot A^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 \\ 3 & -5 & -5 \end{pmatrix}$

4 Sistemas lineales con parámetros

1. Teorema de Rouché

■ Piensa y calcula

Dado el siguiente sistema en forma matricial, escribe sus ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y = 2 \end{array}\right\}$$

● Aplica la teoría

1. Escribe los siguientes sistemas en forma matricial:

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 2 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 5 \\ -x + 5z = 3 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Escribe en forma ordinaria el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2z = 1 \\ 3x + y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

3. Discute los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 0 \\ 2x - 5y = -2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + 2z = 15 \\ 3x - 2y - 2z = -1 \\ -x + 3y + 3z = 3 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -13$$

Como el determinante de C es distinto de cero, el R(C) = 3 y se tiene:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado.

b) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Como el determinante de C es igual a cero, se halla el rango de A y C por Gauss:

$$R\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 15 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 15 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 2^a + 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 2^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 3^a : 4 \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{7 \cdot 3^a - 2^a} =$$

$$= R\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$R(C) = 2 < R(A) = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

4. Discute los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ x + y = 1 \\ -x + z = 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 3 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como el determinante de C es igual a cero, se halla el rango de A y C por Gauss:

$$R\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 1^a + 3^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

Como el determinante de C es distinto de cero, el $R(C) = 3$ y se tiene:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

2. Regla de Cramer y forma matricial

Piensa y calcula

Dado el siguiente sistema, resuélvelo matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplica la teoría

5. Resuelve por Cramer:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16 \\ 5y - z = 10 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-29}{-29} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-87}{-29} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-145}{-29} = 5$$

b) Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 16 & 3 & -7 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 16 & -7 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 16 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

6. Resuelve por Cramer en función del parámetro **a:**

$$\left.\begin{aligned} x + y &= a \\ x + z &= 0 \\ x + 2y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2 - 2a}{-2} = a - 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2a - 2}{-2} = 1 - a$$

7. Resuelve por Cramer:

$$\left.\begin{aligned} 4x + 4y + 5z + 5t &= 0 \\ 2x + 3z - t &= 10 \\ x + y - 5z &= -10 \\ 3y + 2z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -290$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & 5 \\ 10 & 0 & 3 & -1 \\ -10 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{-290}{-290} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 10 & 3 & -1 \\ 1 & -10 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{290}{-290} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 10 & -1 \\ 1 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{-580}{-290} = 2$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{580}{-290} = -2$$

8. Resuelve matricialmente el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 5 \\ 2x - y + z &= 6 \\ x + 5y &= -3 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -11 & 13 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x = 2, y = -1, z = 1$

9. Resuelve matricialmente el sistema:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{107}\begin{pmatrix} -4 & 9 & 50 \\ 15 & -7 & -27 \\ 7 & 11 & -34 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x = -3, y = 2, z = 1$

10. Resuelve matricialmente el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -7 \\ x + 4y + 2z &= -1 \\ x - 4y &= -5 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La solución es: $x = -1, y = 1, z = -2$

3. Resolución de sistemas de cuatro ecuaciones

Piensa y calcula

Resuelve mentalmente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + y &= 1 \\ 3x + 2y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se elimina la 3ª ecuación porque es: 1ª + 2ª

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}\right\}_{2^a - 1^a} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1$$

Aplica la teoría

11. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y + 2t &= 3 \\ 3x - y + z - t &= 1 \\ 5x - 3y + 2z - 4t &= -1 \\ 2x + y + z + t &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 5 \cdot 1^a \\ 4^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & -8 & 2 & -14 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ = 2 \cdot 2^a \\ \\ \end{matrix} = 0$$

El sistema no es de Cramer porque |C| = 0. Se resuelve por Gauss.

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 3 \cdot 1^a - 2^a \\ 5 \cdot 1^a - 3^a \\ 2 \cdot 1^a - 4^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 8 & -2 & 14 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2 \cdot 2^a \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2^a - 4 \cdot 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

R(C) = 3 = R(A) < número de incógnitas ⇒ Sistema compatible indeterminado. El sistema es equivalente a:

$$\left.\begin{aligned} x + y + 2t &= 3 \\ 4y - z + 7t &= 8 \\ 3z - 5t &= -8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + y &= 3 - 2t \\ 4y - z &= 8 - 7t \\ 3z &= -8 + 5t \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 3 - 2t \\ 4y - \frac{5t - 8}{3} &= 8 - 7t \\ z &= \frac{5t - 8}{3} \end{aligned}\right\} y = \frac{4 - 4t}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{4 - 4t}{3} &= 3 - 2t \\ y &= \frac{4 - 4t}{3} \\ z &= \frac{5t - 8}{3} \end{aligned}\right\} x = \frac{5 - 2t}{3}$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{5 - 2\lambda}{3} \\ y &= \frac{4 + 4\lambda}{3} \\ z &= \frac{-8 + 5\lambda}{3} \\ t &= \lambda \end{aligned}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

12. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + z + t &= 1 \\ y + z - t &= 1 \\ y + z - 2t &= 2 \\ z - t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3^a - 2^a \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

El sistema es de Cramer porque $|C| \neq 0$. Se puede resolver por Cramer, pero es más sencillo por Gauss.

La solución es: $x = 3; y = 1; z = -1; t = -1$

13. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ x - y + z &= 1 \\ 3x - y - z &= 1 \\ 6x - y + z &= 6 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

El sistema no es de Cramer porque no tiene el mismo número de incógnitas que de ecuaciones. Se resuelve por Gauss.

$$R\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ = 1^a + 2^a + 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2 \cdot 2^a - 3 \cdot 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3^a : 10 \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

El sistema es equivalente a:

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ 3y - z &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x - y + 1 &= 1 \\ 3y - 1 &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned}\right\} y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x - 1 &= 0 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}\right\} x = 1$$

La solución es: $x = 1, y = 1, z = 1$

14. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 5 \\ 2x + y - 4z &= 1 \\ x + y - z &= 2 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

El sistema no es de Cramer porque no tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. Se resuelve por Gauss.

$$R\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -6 & -9 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a : 3 \\ \\ 4^a : (-1) \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 4^a - 3^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$R(C) = 3 < R(A) = 4 \Rightarrow$ El sistema es incompatible.

4. Discusión de sistemas con parámetros

Piensa y calcula

Discute, según los valores de **k,** el siguiente sistema: $\left.\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= k \end{aligned}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 0 &= k - 6 \end{aligned}\right\}$$

Para todo valor $k \neq 6$ el sistema es incompatible.

Para $k = 6$ el sistema se reduce a $x + y = 3 \Rightarrow$ Compatible indeterminado.

Aplica la teoría

15. Discute, según los valores del parámetro **a,** los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} (a+1)x + y + z &= 0 \\ x + (a+1)y + z &= 0 \\ x + y + (a+1)z &= 0 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2$

$a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2, a = 1$

Para todo valor de $a \neq -2$ y $a \neq 1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para a = –2 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 1^a - 2^a \\ 2 \cdot 1^a + 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 2^a : 3 \\ 3^a : 3 \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ 3^a - 2^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para a = 1 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 1 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = a^3 + 3a$

$a^3 + 3a = 0 \Rightarrow a^2(a + 3) = 0 \Rightarrow a = -3, a = 0$

Para todo valor de $a \neq -3$ y $a \neq 0$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para a = –3 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 1^a - 2^a \\ 2 \cdot 1^a + 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 2^a : 3 \\ = 2^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para a = 0 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 1 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

16. Discute, según los valores del parámetro **k,** los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} kx + y + z &= 4 \\ x + y + z &= k \\ x - y + kz &= 2 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ kx \quad + 2z &= 0 \\ 2x - y + kz &= 0 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 1$

$k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = -1, k = 1$

Para todo valor de $k \neq -1$ y $k \neq 1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para k = –1 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 1^a + 2^a \\ 1^a + 3^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para k = 1 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 1^a - 2^a \\ 1^a - 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ 3^a : 2 \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 0 & 2 \\ 2 & -1 & k \end{vmatrix} = -k^2 - k + 6$

$k^2 + k - 6 = 0 \Rightarrow k = -3, k = 2$

Para todo valor de $k \neq -3$ y $k \neq 2$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para k = –3 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a + 3 \cdot 1^a \\ 2 \cdot 1^a - 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ = 2^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para k = 2 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 2^a - 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

17. Discute, según los valores del parámetro **a,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 10y &= -4 \\ ax + y &= 1 \\ x + 3y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como hay más ecuaciones que incógnitas, se calcula el determinante de la matriz ampliada:

Se calcula $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 10 & -4 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2a$

$2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 1$

Para todo valor de $a \neq 1$ se verifica que:

R(C) < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para a = 1 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 3 & 10 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a : 2 \\ 3^a : 7 \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ = 2^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

18. Discute, según los valores del parámetro **m,** los siguientes sistemas:

a) $$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ mx + z &= 0 \\ x + (1 + m)y + mz &= m + 1 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} (2m + 2)x + my + 2z &= 2m - 2 \\ 2x + (2 - m)y &= 0 \\ (m + 1)x + (m + 1)z &= m - 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

a) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \\ 1 & 1 + m & m \end{vmatrix} = -m^2 - m$

$m^2 + m = m(m + 1) = 0 \Rightarrow m = -1, m = 0$

Para todo valor de $m \neq -1$ y $m \neq 0$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para m = –1 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a + 2^a \\ 2^a + 3^a \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para m = 0 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ = 1^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Se calcula el $|C| = \begin{vmatrix} 2m + 2 & m & 2 \\ 2 & 2 - m & 0 \\ m + 1 & 0 & m + 1 \end{vmatrix} =$

$= -2m(m + 1)(m - 1)$

$m(m+1)(m-1) = 0 \Rightarrow m = 0, m = -1, m = 1$

Para todo valor de $m \neq 0, m \neq -1$ y $m \neq 1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para m = 0 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} = 2 \cdot 3^a \\ 2^a : 2 \\ \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{1^a - 2^a} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para m = −1 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para m = 1 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3^a : 2} = R\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 2^a - 4 \cdot 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{= 2^a} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 Un sistema lineal heterogéneo es compatible determinado si (C, matriz de los coeficientes, y A, matriz ampliada con los términos independientes):

- ☐ R(C) < R(A)
- ☒ R(C) = R(A) = Nº de incógnitas
- ☐ R(C) > R(A)
- ☐ R(C) ≠ R(A)

2 Si tenemos el sistema lineal matricial CX = B tal que existe C^{-1}, la solución es:

- ☐ X = BC
- ☐ $X = BC^{-1}$
- ☐ X = CB
- ☒ $X = C^{-1}B$

3 Un sistema lineal homogéneo:

- ☒ siempre es compatible.
- ☐ siempre es incompatible.
- ☐ unas veces es compatible y otras incompatible.
- ☐ ninguna de las anteriores es cierta.

4 Un sistema lineal de tres ecuaciones con dos incógnitas:

- ☒ si R(C) = R(A) = 2, es compatible.
- ☐ si R(A) = 3, es compatible.
- ☐ si R(C) = 3, es compatible.
- ☐ si R(C) = R(A) = 3, es compatible.

5 Un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas:

- ☐ si R(C) = R(A) = 2, es compatible determinado.
- ☐ si R(C) ≠ R(A), es compatible determinado.
- ☒ si R(C) = R(A) = 3, es compatible determinado.
- ☐ si R(C) < R(A), es compatible determinado.

6 Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro **k**

$$\left\{\begin{array}{l} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky \quad\ \ = 0 \\ 5x + ky \quad\ \ = 0 \\ x + \quad 2z = 1 \end{array}\right.$$

- ☒ Es siempre incompatible.
- ☐ Para k ≠ 0, compatible determinado.
- ☐ Para k = 0, compatible determinado.
- ☐ Para k = 0, compatible indeterminado.

7 Se considera el sistema: $\left.\begin{array}{r} x - y + z = -1 \\ y + z = 2a \\ x \quad + 2z = a^2 \end{array}\right\}$

donde **a** es un parámetro real.

Discutir el sistema en función del valor de **a**

- ☐ Para a = 0 no tiene solución, y para a = 1, compatible indeterminado.
- ☐ Si a ≠ 0 incompatible, y si a = 0, compatible indeterminado.
- ☐ Si a = 0 incompatible, y si a ≠ 0, compatible indeterminado.
- ☒ Si a ≠ 1 incompatible, y si a = 1, compatible indeterminado.

8 Se considera el sistema: $\left.\begin{array}{r} x - y + z = -1 \\ y + z = 2a \\ x \quad + 2z = a^2 \end{array}\right\}$

donde **a** es un parámetro real.

Resuelve el sistema para a = 0

Resuelve el sistema para a = 1

- ☒ Para a = 0 no tiene solución; para a = 1, x = –2z + 1, y = –z + 2
- ☐ Para a = 0, x = y = z = 0; para a = 1 no tiene solución.
- ☐ Para a = 0, x = 2, y = –3, z = 5; para a = 1, x = 1, y = 2, z = 3
- ☐ Para a = 0, x = –1, y = –2, z = –3; para a = 1, x = 3, y = 2, z = 0

9 Dado el sistema: $\left.\begin{array}{r} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y \quad\ = 1 \end{array}\right\}$

estudia su compatibilidad según los valores de **a**

- ☐ Si a ≠ 0, a ≠ 2, compatible determinado; si a = 1, incompatible; si a = 2 incompatible.
- ☒ Si a ≠ 1, compatible determinado; si a = 1, compatible indeterminado.
- ☐ Si a ≠ 0, compatible determinado; si a = 0, compatible indeterminado.
- ☐ Si a ≠ –1, a ≠ 3, compatible determinado; si a = –1, incompatible; si a = 3, incompatible.

10 Dado el sistema: $\left.\begin{array}{r} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y \quad\ = 1 \end{array}\right\}$

resuélvelo cuando sea posible.

- ☐ Si a ≠ 1, x = 1, y = 1, z = 1 – a
- ☐ Si a = 1, x = 1/2, y = 1/2, z = (1 – a)/2
- ☒ x = 1/2, y = 1/2, z = (1 – a)/2 para a ≠ 1 y x = λ, y = 1 – λ, z = 0; λ ∈ ℝ para a = 1
- ☐ No se puede resolver porque R(C) ≠ R(A)

1. Teorema de Rouché

19. Discute los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 1 \\ x + 4y + z &= 3 \\ 2x - 5y + z &= -2 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 5x + 4y + 5z &= 9 \\ x - 2y &= 1 \\ 5x + 3y + 5z &= 5 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Como $|C| = 0$, se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

R(C) = 2 = R(A) < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Como $|C| = -10$, el R(C) = R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

20. Discute los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} 2x + y + 4z &= 0 \\ 4x - y + 2z &= -4 \\ 3x - y + z &= -2 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 8x + y + 4z &= 9 \\ 5x - 2y + 4z &= 6 \\ x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Como $|C| = 0$, se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Como $|C| = 0$, se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

R(C) = 2 = R(A) < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

21. Discute los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= -2 \\ x + 2y + 3z &= -1 \\ x - 3y - 2z &= 3 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x + 2y - 4z &= 1 \\ 2x + y - 5z &= -1 \\ x - y - z &= -2 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Como $|C| = 0$, se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Como $|C| = 0$, se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

R(C) = 2 = R(A) < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

22. Discute y resuelve, si es posible, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 4y - z + 2t &= 0 \\ x + y + z &= 3 \\ 5x - 2y - 4z - t &= -12 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como hay más incógnitas que ecuaciones, se pasa **t** al 2º miembro y se resuelve por Gauss, obteniéndose la solución:

$$x = \frac{3t-2}{13}, y = \frac{9-7t}{13}, z = \frac{4t+32}{13}$$

La solución en ecuaciones parámetricas es:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{3\lambda - 2}{13} \\ y &= \frac{9 - 7\lambda}{13} \\ z &= \frac{4\lambda + 32}{13} \\ t &= \lambda \end{aligned}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Regla de Cramer y forma matricial

23. Resuelve por Cramer:

a) $\left.\begin{aligned} 7x + 2y + 3z &= 15 \\ 5x - 3y + 2z &= 15 \\ 10x - 11y + 5z &= 36 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y + z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 1 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Como $|C| = -36$, el sistema es de Cramer.

La solución es:

$$x = 2, y = -1, z = 1$$

b) Como $|C| = 5$, el sistema es de Cramer.

La solución es:

$$x = -\frac{1}{5}, y = 0, z = \frac{2}{5}$$

24. Resuelve por Cramer:

a) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x - 4y &= 5 \\ 7x - y - 3z &= 8 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 2 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Como $|C| = 46$, el sistema es de Cramer.

La solución es:

$$x = \frac{27}{23}, y = -\frac{17}{46}, z = \frac{9}{46}$$

b) Como $|C| = -2$, el sistema es de Cramer.

La solución es:

$$x = 4, y = -2, z = 0$$

25. Resuelve matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$|C| = -5$. Calculando la matriz inversa de los coeficientes se tiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solución es: $x = -1, y = 0, z = 2$

26. Resuelve matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$|C| = 2$. Calculando la matriz inversa de los coeficientes se tiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solución es: $x = 0, y = -2, z = 2$

3. Resolución de sistemas de cuatro ecuaciones

27. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y - 2z + 2t &= 2 \\ 2x - y + z - 4t &= 1 \\ x + 2y + z &= 3 \\ x + z - 2t &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = 0$, el sistema no es de Cramer.

Se resuelve por Gauss:

La solución es: $x = 1 + t, y = 1 - t, z = t$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + \lambda \\ y &= 1 - \lambda \\ z &= \lambda \\ t &= \lambda \end{aligned}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

28. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= 8 \\ 2x - y - z &= 1 \\ x - y + z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

El sistema no es de Cramer porque tiene más ecuaciones que incógnitas. Se resuelve por Gauss:

$$x = 1, y = 2, z = -1$$

29. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - 3y - z &= -1 \\ x + 5y + 3z &= 3 \\ x + y + z &= 1 \\ 3x + 7y + 5z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

El sistema no es de Cramer porque tiene más ecuaciones que incógnitas. Se resuelve por Gauss:

$$x = \frac{1 - z}{2}, y = \frac{1 - z}{2}$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1 - \lambda}{2} \\ y &= \frac{1 - \lambda}{2} \\ z &= \lambda \end{aligned}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

30. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 3z + t &= 1 \\ 2x - y - z - 3t &= 2 \\ 7x - y - 6z - 8t &= 7 \\ 4x + 3y - 7z - t &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = 0$, no se puede resolver por Cramer.

Se resuelve por Gauss:

$$x = z + t + 1, y = z - t$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda + \mu + 1 \\ y &= \lambda - \mu \\ z &= \lambda \\ t &= \mu \end{aligned}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

4. Discusión de sistemas con parámetros

31. Discute, según los valores del parámetro **m,** los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} mx + my &= 6 \\ x + (m - 1)y &= 3 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}(m+1)x + y + z = 3\\ x + 2y + mz = 4\\ x + my + 2z = 2\end{array}\right\}$

Solución:

a) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} m & m \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 - 2m$

$m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m(m-2) = 0 \Rightarrow m = 2, m = 0$

Para todo valor de $m \neq 2$ y $m \neq 0$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 2 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para m = 2 se tiene:

  R(C) = R(A) = 1 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

- Para m = 0 se tiene:

  R(C) = 1 < R(A) = 2 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) $|C| = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = -m^3 - m^2 + 6m$

$m^3 + m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = -3, m = 2$

Para todo valor de $m \neq 0$, $m \neq -3$ y $m \neq 2$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para m = 0 se tiene:

  R(C) = 2 = R(A) < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

- Para m = −3 se tiene:

  R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

- Para m = 2 se tiene:

  R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

32. Discute, según los valores del parámetro **a,** los siguientes sistemas:

b) $\left.\begin{array}{r}x + y + 2z = 3\\ 2x - y + az = 9\\ x - y - 6z = 5\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}x + y + 2z = 2\\ 2x - y + 3z = 2\\ 5x - y + az = 6\end{array}\right\}$

Solución:

a) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 2a + 16$

$2a + 16 = 0 \Rightarrow a = -8$

Para todo valor de $a \neq -8$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para a = −8 se tiene:

  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & a \end{vmatrix} = -3a + 24$

$3a - 24 = 0 \Rightarrow a - 8 = 0 \Rightarrow a = 8$

Para todo valor de $a \neq 8$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C| = 0

- Para a = 8 se tiene:

  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

33. Discute, según los valores del parámetro **k,** los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r}3x - 5y = 6\\ x + y = k\\ x + 2y = 2\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}x + y = 1\\ 3x + 2y - z = 3\\ kx + 3y - 2z = 0\\ -x - 4z = 3\end{array}\right\}$

Solución:

a) Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -11k + 22$$

$11k - 22 = 0 \Rightarrow k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$

Para todo valor de $k \neq 2$ se verifica que:

R(C) < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de |A|

- Para k = 2 se tiene:

  R(C) = R(A) = 2 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

b) Como hay una ecuación más que incógnitas se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ k & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = k + 20$$

$k + 20 = 0 \Rightarrow k = -20$

Para todo valor de $k \neq -20$ se verifica que:

R(C) < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de |A|

- Para k = −20 se tiene:

  R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Para ampliar

34. Resuelve y clasifica los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y - z = 4 \\ x + y + z = 3 \\ 2x - 3z = -1 \\ 4x + 5z = 6 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x - y + 3z + 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Se resuelve por Gauss y se obtiene que el sistema es incompatible.

b) Se resuelve por Gauss y se obtiene:

$$x = y + 13t, z = -9t$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda + 13\mu \\ y = \lambda \\ z = -9\mu \\ t = \mu \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

35. Para cada valor del parámetro real **k,** se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2k \\ 3x - 5y = k^2 \end{array}\right\}$$

Se pide:

a) discutir el sistema según los valores de **k**

b) resolverlo en los casos en que sea compatible.

Solución:

a) Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$|A| = -k^2 + 4k - 3$

$k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow k = 1, k = 3$

Para todo valor de $k \neq 1$ y $k \neq 3$ se verifica que:

R(C) < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de |A|

- Para k = 1 se tiene:

  R(C) = R(A) = 2 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

- Para k = 3 se tiene:

  R(C) = R(A) = 2 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

b) Para k = 1 la solución es:

$$x = 7, y = 4$$

Para k = 3 la solución es:

$$x = 3, y = 0$$

36. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro **m:**

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 5 \\ -x + (m + 2)z = 3 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema para los distintos valores de **m**

b) Resuelve el sistema para m = 3

Solución:

a) $|C| = m - 1$

$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

Para todo valor de $m \neq 1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para m = 1 se tiene:

  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para m = 3 la solución del sistema es:

$$x = -3, y = 8, z = 0$$

37. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real **a:**

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro **a**

b) Resuelve el sistema para a = –1

c) Resuelve el sistema para a = 2

Solución:

a) $|C| = a^2 + a = a(a + 1)$

$a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a + 1) = 0 \Rightarrow a = 0, a = -1$

Para todo valor de $a \neq -1$ y $a \neq 0$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para a = –1 se tiene:

  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

- Para a = 0 se tiene:

  R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para a = –1 la solución del sistema es:

$$x = 2 + y, z = 1$$

La solución en ecuaciones paramétricas es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Para a = 2 la solución es:

$$x = 1, y = -1, z = -1/2$$

38. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real λ:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + \lambda z = \lambda^2 \\ y - z = \lambda \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro λ

b) Resuelve cuando sea indeterminado.

Solución:

a) $|C| = \lambda^2 + \lambda - 2$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2, \lambda = 1$

Para todo valor de $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq 1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para $\lambda = -2$ se tiene:

R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para $\lambda = 1$ se tiene:

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\lambda = 1$ la solución del sistema es:

$$x = -2z, y = z + 1$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = -2\lambda \\ y = \lambda + 1 \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

39. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} ax + y - z &=& 0 \\ 2x + ay &=& 2 \\ -x + z &=& 1 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro **a**

b) Resuelve el sistema cuando tenga más de una solución.

Solución:

a) $|C| = a^2 - a - 2$

$a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1, a = 2$

Para todo valor de $a \neq -1$ y $a \neq 2$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para a = –1 se tiene:

R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para a = 2 se tiene:

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para a = 2 la solución del sistema es:

$$x = z - 1, y = 2 - z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda - 1 \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

40. Sea el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} -x + ky + 2z = k \\ 2x + ky - z = 2 \\ kx - y + 2z = k \end{array}\right\}$$

a) Discute la compatibilidad del sistema según los valores del parámetro **k**

b) Resuelve el sistema para k = –1

c) Resuelve el sistema para k = 2

Solución:

a) $|C| = -3k^2 - 6k - 3$

$3k^2 + 6k + 3 = 0 \Rightarrow k^2 + 2k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$

Para todo valor de $k \neq -1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para k = –1 se tiene:

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para k = –1 la solución del sistema es:

$$x = z + 1, y = z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Para k = 2 la solución del sistema es:

$$x = 2/3, y = 2/3, z = 2/3$$

41. Siendo **a** un número real cualquiera, se define el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - az = 1 \\ -y + z = 0 \\ ax + z = a \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema en función del valor de **a**

b) Encuentra todas sus soluciones para a = 1

Solución:

a) $|C| = -a^2 + 2a - 1$

$a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

Para todo valor de $a \neq 1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3$ = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $a = 1$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a = 1$ la solución del sistema es:

$$x = 1 - z, y = z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

42. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real λ:

$$\left.\begin{array}{r} y + z = 1 \\ (\lambda - 1)x + \qquad y + z = \lambda \\ x + (\lambda - 1)y - z = 0 \end{array}\right\}$$

donde λ es un número real.

a) Discute el sistema según los valores del parámetro λ

b) Resuelve el sistema para $\lambda = 0$

c) Resuelve el sistema para $\lambda = 3$

Solución:

a) $|C| = \lambda^2 - \lambda$

$\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = 1$

Para todo valor de $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3$ = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $\lambda = 0$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para $\lambda = 1$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\lambda = 0$ la solución del sistema es:

$$x = 1, y = 1 - z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Para $\lambda = 3$ la solución del sistema es:

$$x = 1, y = 0, z = 1$$

43. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real λ:

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y + 5z = 0 \\ 2x - \lambda y \qquad = 0 \\ x - \quad y + \quad z = 0 \end{array}\right\}$$

Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro λ y resuélvelo.

Solución:

a) $|C| = 4\lambda - 12$

$4\lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$

Para todo valor de $\lambda \neq 3$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3$ = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $\lambda = 3$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\lambda = 3$ la solución del sistema es:

$$x = -3z , y = -2z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = -3t \\ y = -2t \\ z = t \end{array}\right\} \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Para $\lambda \neq 3$ la solución del sistema es la solución trivial:

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

44. Considera el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y + \qquad\quad z = -2 \\ -\lambda x + 3y + \qquad\quad z = -7 \\ x + 2y + (\lambda + 2)z = -5 \end{array}\right\}$$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a) $|C| = \lambda^2 + 3\lambda + 2$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2, \lambda = -1$

Para todo valor de $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq -1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3$ = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $\lambda = -2$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para $\lambda = -1$ se tiene:

$R(C) = 2 \neq R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para $\lambda = -2$, la solución del sistema es:

$$x = -2z + 1, y = z - 3$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = \quad\quad t \end{array}\right\} \text{con } t \in \mathbb{R}$$

45. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro **a**

b) Resuélvelo para a = 2

Solución:

a) $|C| = 2a^2 - 8$

$a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = -2, a = 2$

Para todo valor de $a \neq -2$ y $a \neq 2$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para a = −2 se tiene: R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.
- Para a = 2 se tiene: R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para a = 2 la solución del sistema es:

$$x = 3 - y, z = -1$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

46. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x - y + \quad\quad z = 6 \\ -x - y + (a - 4)z = 7 \\ x + y + \quad\quad 2z = 11 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro real **a**

b) Resuélvelo para a = 4

Solución:

a) $|C| = -2a + 4$

$2a - 4 = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

Para todo valor de $a \neq 2$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para a = 2 se tiene: R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para a = 4 la solución del sistema es:

$$x = -5, y = -2, z = 9$$

47. Sea el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} (a + 1)x + 2y + z = a + 3 \\ ax + \quad y \quad\quad = a \\ ax + 3y + z = a + 2 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro real **a**

b) Resuelve el sistema en los casos en que resulte compatible determinado.

Solución:

a) $|C| = a + 1$

$a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

Para todo valor de $a \neq -1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para a = −1 se tiene: R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a \neq -1$ la solución del sistema es:

$$x = 1, y = 0, z = 2$$

48. Se considera el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + my \quad\quad = 0 \\ x \quad\quad + mz = m \\ x + \quad y + \ 3z = 1 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores de **m**

b) Resuelve el sistema para m = 6

Solución:

a) $|C| = m^2 - 5m$

$m^2 - 5m = 0 \Rightarrow m(m - 5) = 0 \Rightarrow m = 0, m = 5$

Para todo valor de $m \neq 0$ y $m \neq 5$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para m = 0 se tiene: R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.
- Para m = 5 se tiene: R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para m = 6 la solución del sistema es:

$$x = -12, y = 4, z = 3$$

49. Sea el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{array}{r} x \quad\quad + \quad\quad\quad z = 0 \\ x + my + \quad\quad 2mz = 0 \\ 2x + my + (2m + 3)z = 0 \end{array}\right\}$$

a) Calcula el valor de **m** para el que el sistema tenga soluciones distintas de la trivial.

b) Halla las soluciones.

Solución:

a) $|C| = 2m$

$2m = 0 \Rightarrow m = 0$

Para todo valor de $m \neq 0$, la solución es la trivial.

b) Para $m = 0$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

La solución es: $x = 0, z = 0$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Problemas

50. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{array}\right\}$$

a) estudia su compatibilidad.

b) añade al sistema una ecuación de tal forma que el sistema resultante tenga solución única. Justifica la respuesta y encuentra dicha solución.

c) añade al sistema dado una ecuación de tal forma que el sistema resultante sea incompatible. Justifica la respuesta.

Solución:

a) $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) $$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

El sistema tiene como solución:

$$x = 1, y = -1, z = 0$$

c) Se añade una ecuación contradictoria con las otras dos; por ejemplo, sumando y cambiando el término independiente:

$$3x + 2z = 0$$

51. Se considera el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = a \\ x + a^2z = 2a + 1 \\ x - y + a(a-1)z = 2a \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro real **a**

b) Resuelve el sistema para $a = 3$

Solución:

a) $|C| = a^2 - a$

$a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow a = 0, a = 1$

Para todo valor de $a \neq 0$ y $a \neq 1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

- Para $a = 0$ se tiene:

  $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

- Para $a = 1$ se tiene:

  $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para $a = 3$ la solución del sistema es:

$$x = 5/2, y = -1/2, z = 1/2$$

52. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones en las incógnitas x, y, z, t:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 0 \\ y + 2z + t = 0 \\ 2x + 2ky - t = 0 \end{array}\right\}$$

a) Encuentra los valores de **k** para los que el rango de la matriz de los coeficientes del sistema es 2

b) Resuelve el sistema anterior para $k = 0$

Solución:

a) Estudiando la matriz de los coeficientes por Gauss se obtiene que si $k = 3/2$, el $R(C) = 2$

b) Para $k = 0$, la solución es:

$$x = t/2, y = 0, z = -t/2$$

La solución en ecuaciones paramétricas es:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\lambda}{2} \\ y = 0 \\ x = -\dfrac{\lambda}{2} \\ t = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

53. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x + 2y = 3 \\ -x + 2\lambda z = -1 \\ 3x - y - 7z = \lambda + 1 \end{array}\right\}$$

a) Halla todos los valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene infinitas soluciones.

b) Resuelve el sistema para los valores de λ obtenidos en el apartado anterior.

c) Discute el sistema para los restantes valores de λ

Solución:

a) $|C| = 2\lambda^2 + 12\lambda - 14$

$2\lambda^2 + 12\lambda - 14 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 6\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \lambda = -7,\ \lambda = 1$

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

- Para $\lambda = -7$ se tiene: $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.
- Para $\lambda = 1$ se tiene: $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\lambda = 1$ la solución del sistema es:

$$x = 1 + 2z\ ,\ y = 1 - z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Para todo valor de $\lambda \neq -7$ y $\lambda \neq 1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

54. Discute el sistema, según el valor del parámetro **m,** y resuelve en los casos de compatibilidad.

$$\left.\begin{array}{rl} 2x + 3y + z = & 4 \\ 3x + y + mz = & 6 \\ -2x - 10y - 2z = & m - 4 \end{array}\right\}$$

Solución:

a) $|C| = 14m - 14$

$14m - 14 = 0 \Rightarrow m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

Para todo valor de $m \neq 1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

- Para $m = 1$ se tiene:

  $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para $m \neq 1$ la solución del sistema es:

$$x = \frac{3m^2 + 27m - 28}{14(m - 1)},\ y = \frac{-m(2m - 3)}{14(m - 1)},\ z = \frac{-m}{2(m - 1)}$$

55. Dado el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rl} x + z = & 1 \\ y + (a - 1)z = & 0 \\ x + (a - 1)y + az = & a \end{array}\right\}$$

a) discute el sistema según el valor del parámetro **a**

b) resuelve el sistema en todos los casos de compatibilidad.

Solución:

a) $|C| = -a^2 + 3a - 2$

$a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1, a = 2$

Para todo valor de $a \neq 1$ y $a \neq 2$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

- Para $a = 1$ se tiene:

  $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.
- Para $a = 2$ se tiene:

  $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para $a = 1$ la solución es:

$x = 1 - z, y = 0$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Para $a \neq 1$ y $a \neq 2$, la solución es:

$$x = \frac{a - 1}{a - 2},\ y = \frac{a - 1}{a - 2},\ z = -\frac{1}{a - 2}$$

56. Discute, según los valores del parámetro **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rl} 2y - z = & k \\ 3x - 2z = & 11 \\ y + z = & 6 \\ 2x + y - 4z = & k \end{array}\right\}$$

Solución:

Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$|A| = 2k - 12$

$2k - 12 = 0 \Rightarrow k - 6 = 0 \Rightarrow k = 6$

Para todo valor de $k \neq 6$ se verifica que: $R(C) < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de $|A|$

- Para $k = 6$ se tiene: $R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

57. Discute, según los valores del parámetro **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rl} x + y - z = & 2 \\ kx + y + z = & 1 \\ x - y + 3z = & -3 \\ 4x + 2y = & k \end{array}\right\}$$

Solución:

Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$|A| = -2k^2 + 12k - 18$

$2k^2 - 12k + 18 = 0 \Rightarrow k^2 - 6k + 9 = 0 \Rightarrow k = 3$

Para todo valor de $k \neq 3$ se verifica que: $R(C) < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de $|A|$

- Para $k = 3$ se tiene: $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

58. Discute, según los valores del parámetro **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y + 5z &= 0 \\ 2x - 3y &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ x + 2y + 2kz &= k \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$|A| = 0$ para cualquier valor de k

Se estudia el sistema por Gauss y se obtiene que para $k = 7/2$, el $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Para $k \neq 7/2$, el $R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

59. Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro **m** y resuélvelo cuando sea posible:

$$\left.\begin{aligned} x + 2z - 3 &= 0 \\ 3x + y + z + 1 &= 0 \\ 2y - z + 2 &= 0 \\ x - y + mz + 5 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$|A| = -18m - 36$

$18m + 36 = 0 \Rightarrow m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2$

Para todo valor de $m \neq -2$ se verifica que:

$R(C) < R(A) = 4$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de $|A|$

- Para $m = -2$ se tiene:

  $R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

60. Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro **a:**

$$\left.\begin{aligned} ax + z + t &= 1 \\ ay + z - t &= 1 \\ ay + z - 2t &= 2 \\ az - t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$|C| = a^3$

$a^3 = 0 \Rightarrow a = 0$

Para todo valor de $a \neq 0$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 4 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

- Para $a = 0$ se tiene:

  $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Para profundizar

61. Discute y resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores de los parámetros **a** y **b:**

$$\left.\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 1 \\ x + 4y + z &= b \\ 2x - 5y + az &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$|C| = 13a - 13 \Rightarrow |C| = 0 \Rightarrow a = 1$

Para $a \neq 1$, $|C| \neq 0$ y se cumple que $R(A) = R(C) = 3 =$ nº de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado para cualquier valor de **b**

- Estudio para $a = 1$

  Permutando la columna de las **y** con la de las **x** y pasando la 2ª ecuación a la 3ª

$$R(A) = R\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ -5 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 5 \cdot 1^a - 2^a \\ 4 \cdot 1^a + 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 9 & 7 \\ 0 & 13 & 9 & 4+b \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ 3^a - 2^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{pmatrix}$$

Cuando $b \neq 3$ $R(C) = 2 < R(A) = 3 \Rightarrow$ El sistema es incompatible.

Cuando $b = 3$ $R(C) = R(A) = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

La solución es:

$$x = (7 - 9z)/13 \text{ , } y = (8 - z)/13$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{7-9\lambda}{13} \\ y &= \frac{8-\lambda}{13} \\ z &= \lambda \end{aligned}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

Para los valores de $a \neq 1$, la solución es:

$$x = \frac{27-9b}{13(a-1)} + \frac{b+4}{13}$$

$$y = \frac{3-b}{13(a-1)} + \frac{3b-1}{13}$$

$$z = \frac{b-3}{a-1}$$

62. Discute, según los valores de los parámetros λ y μ, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} \lambda x + y + z &= \mu \\ x + y + \lambda z &= 2 \\ 2x + y + \lambda z &= \mu \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$|C| = \lambda - 1 \Rightarrow |C| = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

Para $\lambda \neq 1$, $|C| \neq 0 \Rightarrow R(C) = R(A) =$ nº de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado para cualquier valor de μ

• Estudio para $\lambda = 1$

Permutando la columna de las **z** con la de las **x**

$$R(A) = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a - 2^a \\ 3^a - 1^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & \mu-2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-2 \end{pmatrix}$$

Cuando $\mu \neq 2$, $R(C) = 2 < R(A) = 3 \Rightarrow$ El sistema es incompatible.

Cuando $\mu = 2$, $R(C) = R(A) <$ nº incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

63. Discute, según los valores de los parámetros **a** y **b,** el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 5y + az &= -2 \\ 3x - y + 2z &= 1 \\ x + 4y + z &= b \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$|C| = 13a - 13 \Rightarrow |C| = 0 \Leftrightarrow a = 1$

Para $a \neq 1$, $|C| \neq 0$, $R(C) = R(A) =$ nº incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado para cualquier valor de **b**

Estudiando por Gauss el rango de la matriz ampliada, se obtiene:

Si $a = 1$ y $b = 3 \Rightarrow R(C) = R(A) = 2 \Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

Si $a = 1$ y $b \neq 3 \Rightarrow R(C) = 2 < R(A) \Rightarrow$ El sistema es incompatible.

64. Calcula el valor de **a** y **b** para que el sistema siguiente sea compatible indeterminado:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ x - y + z &= 2 \\ 3x - y - az &= b \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$|C| = a + 1 \Rightarrow |C| = 0 \Leftrightarrow a = -1$

Para $a = -1$ el $R(C) = 2$

Se estudia por Gauss la matriz ampliada y se obtiene:

Para $b = 4$ el $R(A) = 2$

Por lo tanto, para $a = -1$ y $b = 4$, $R(C) = R(A) = 2 \Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

65. Estudia, según los diferentes valores de **a** y **b,** la compatibilidad del sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y - 2z &= b \\ x + y + z &= 5 \\ 4x - 5y + az &= -10 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$|C| = 3a + 24 \Rightarrow |C| = 0 \Leftrightarrow a = -8$

Para $a \neq -8$, $|C| \neq 0$, $R(C) = R(A) =$ nº incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado para cualquier valor de **b**

Estudiando por Gauss el rango de la matriz ampliada, se obtiene:

Si $a = -8$ y $b = 0 \Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

66. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= b \\ x + y + az &= 1 \end{aligned}\right\}$$

a) discute el sistema en función de **a** y **b**

b) resuelve el sistema para **a** = **b** = –2

Solución:

$|C| = a^3 - 3a + 2 = (a - 1)^2 (a + 2) \Rightarrow |C| = 0 \Leftrightarrow a = 1, a = -2$

Para $a \neq 1$ y $a \neq -2$, $|C| \neq 0$, R(C) = R(A) = nº incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado para cualquier valor de **b**

Estudiando por Gauss el rango de la matriz ampliada, se obtiene:

Si a = 1 y b = 1, R(C) = R(A) = 1 < nº de incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

Si a = 1 y $b \neq 1$, R(C) = 1 < R(A) = 2 $\Rightarrow$ El sistema es incompatible.

Si a = –2 y b = –2, R(C) = R(A) = 2 < nº de incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

Si a = –2 y $b \neq -2$, R(C) = 2 < R(A) = 3 $\Rightarrow$ El sistema es incompatible.

67. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ x - y + z &= 2 \\ 3x - y - az &= b \end{aligned}\right\}$$

a) halla los valores de **a** y **b** para los que el sistema sea compatible indeterminado y su solución sea una recta.

b) halla la solución para los valores obtenidos en el apartado anterior.

Solución:

a) $|C| = a + 1 \Rightarrow |C| = 0 \Leftrightarrow a = -1$

Para $a \neq 1$ $|C| \neq 0$, R(C) = R(A) = nº incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado para cualquier valor de **b**

Estudiando por Gauss el rango de la matriz ampliada, se obtiene:

Si a = –1 y b = 4, R(C) = R(A) = 2 < nº de incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

Si a = –1 y $b \neq 4$, R(C) = 2 < R(A) = 3 $\Rightarrow$ El sistema es incompatible.

b) La solución para el caso a = –1 y b = 4 es:

$$x = 1, y - z = -1$$

en paramétricas:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -1 + \lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Paso a paso

68. Discute, según los valores de **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}(1-k)x + y + z = 0\\ x + (1-k)y + z = k\\ x + y + (1-k)z = k^2\end{array}\right\}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

69. Resuelve el sistema cuando sea posible, según los valores de **a,** y clasifícalo.

$$\left.\begin{array}{r}ax + y + z = 1\\ x + ay + z = 1\\ x + y + az = 1\\ x + y + z = a\end{array}\right\}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

70. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

71. Discute el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x + 2y + z = 1\\ 3x + y + 4z = 5\\ 2x - y + 3z = 4\end{array}\right\}$$

Solución:

Ejercicio 71

$$C = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

rango(C) $\rightarrow$ 2

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

rango(A) $\rightarrow$ 2

R(C) = R(A) = 2 < 3 = número de incógnitas.

Sistema heterogéneo compatible indeterminado.

72. Resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}2x - y + z = -8\\ x + 3y - 2z = 5\\ 2x + y + 3z = 4\end{array}\right\}$$

Solución:

Ejercicio 72

$$\text{resolver}\begin{bmatrix}2x - y + z = -8\\ x + 3y - 2z = 5\\ 2x + y + 3z = 4\end{bmatrix} \rightarrow \{\{x=-3, y=4, z=2\}\}$$

Solución : x = −3, y = 4, z = 2

73. Resuelve matricialmente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x + 2y - z = 0\\ 2x + 5y \quad = 4\\ x + 3y + 2z = 5\end{array}\right\}$$

Solución:

Ejercicio 73

$$C = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 5 & 0\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 5 & 0\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

$CX = B \Rightarrow X = C^{-1}B$

$$C^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix}10 & -7 & 5\\ -4 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & -7 & 5\\ -4 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 4\\ 5\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

Solución : x = −3, y = 2, z = 1

74. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x + 2y + z - 3t = 2\\ 2x + 5y + 3z - 8t = 4\\ x + 2y + 2z - 4t = 3\\ 3x + 6y + 5z - 11t = 8\end{array}\right\}$$

Solución:

Ejercicio 74

$$\text{resolver}\begin{bmatrix}x + 2y + z - 3t = 2\\ 2x + 5y + 3z - 8t = 4\\ x + 2y + 2z - 4t = 3\\ 3x + 6y + 5z - 11t = 8\end{bmatrix} \rightarrow \{\{t=z-1, x=3, y=z-2, z=z\}\}$$

Solución : x = 3, y = z − 2, t = z − 1

75. Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{aligned} ax + \ y + z &= 4 \\ x - ay + z &= 1 \\ x + \ y + z &= a + 2 \end{aligned}\right.$$

a) Resuélvelo para el valor de **a** que lo haga compatible indeterminado.

b) Resuelve el sistema que se obtiene para a = 2

Solución:

Ejercicio 75

a) Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

$C(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow a \mapsto \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \rightarrow a \mapsto \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$

$|C(a)| \rightarrow -a^2+1$

resolver$(-a^2+1=0) \rightarrow \{\{a=-1\},\{a=1\}\}$

$C(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(C(-1)) \rightarrow 2$

$A(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(A(-1)) \rightarrow 2$

Para a = −1, R(C) = R(A) = 2 < 3 = número de incógnitas.

Sistema compatible indeterminado.

$C(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(C(1)) \rightarrow 2$

$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

rango$(A(1)) \rightarrow 3$

Para a = 1, R(C) = 2 ≠ R(A) = 3

Sistema incompatible.

Es compatible indeterminado para a = − 1

Lo resolvemos para a = −1

resolver$\begin{bmatrix} -x+y+z=4 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{bmatrix} \rightarrow \left\{\left\{x=-\frac{3}{2}, y=-z+\frac{5}{2}, z=z\right\}\right\}$

b) Resuelve el sistema que se obtiene para a = 2

resolver$\begin{bmatrix} 2x+y+z=4 \\ x-2y+z=1 \\ x+y+z=4 \end{bmatrix} \rightarrow \{\{x=0, y=1, z=3\}\}$

Solución, x = 0, y = 1, z = 3

76. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y \qquad &= \ \ 1 \\ y + z &= \ \ 2 \\ x \qquad - z &= -1 \\ 3x - y + z &= 10 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Ejercicio 76

resolver$\begin{bmatrix} x+y=1 \\ y+z=2 \\ x-z=-1 \\ 3x-y+z=10 \end{bmatrix} \rightarrow \{\{x=2, y=-1, z=3\}\}$

Solución : x = 2, y = −1, z = 3

77. Discute, según los valores del parámetro **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} kx + \qquad y &= 1 \\ x + (k+1)y &= 1 \\ x + \qquad ky &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Ejercicio 77

$C(k) = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k+1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow k \mapsto \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k+1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$

$A(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix} \rightarrow k \mapsto \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$

$|A(k)| \rightarrow k-1$

resolver$(k-1=0) \rightarrow \{\{k=1\}\}$

Para k ≠ 1, R(C) < R(A) = 3, sistema incompatible.

Para k = 1

$C(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(C(1)) \rightarrow 2$

$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(A(1)) \rightarrow 2$

Si k = 1, R(C) = R(A) = 2 = nº de incógnitas.

Sistema compatible determinado.

78. Clasifica el sistema siguiente según los valores del parámetro **k**

$$\left.\begin{aligned} kx + y - 2z &= 0 \\ -x - y + kz &= 1 \\ x + y + \ \ z &= k \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Problema 78

$C(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow k \mapsto \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \Rightarrow k \mapsto \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$

$|C(k)| \Rightarrow -k^2+1$

resolver$(-k^2+1=0) \Rightarrow \{\{k=-1\},\{k=1\}\}$

Para $k \neq -1$, $k \neq 1$, $R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas.
Sistema heterogéneo compatible determinado.

$C(-1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(C(-1)) \Rightarrow 2$

$A(-1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

rango$(A(-1)) \Rightarrow 2$

$R(C) = R(A) = 2 < 3 =$ número de incógnitas.
Sistema compatible indeterminado.

$C(1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(C(1)) \Rightarrow 2$

$A(1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(A(1)) \Rightarrow 3$

$R(C) \neq R(A)$, sistema incompatible.

79. Dado el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{aligned} x + ky - z &= 0 \\ kx - \ \ y + z &= 0 \\ (k+1)x + \ \ y \qquad &= 0 \end{aligned}\right\}$$

averigua para qué valores de **k** tienen soluciones distintas de x = y = z = 0. Resuélvelo en tales casos.

Solución:

Problema 79

$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow k^2-k-2$

resolver$(k^2-k-2=0) \Rightarrow \{\{k=-1\},\{k=2\}\}$

Tiene soluciones distintas de $x = y = z$ para $k \neq -1$, $k \neq 2$

Para $k = -1$

resolver$\begin{bmatrix} x-y-z=0 \\ -x-y+z=0 \\ y=0 \end{bmatrix} \Rightarrow \{\{x=z, y=0, z=z\}\}$

Solución $x = z$, $y = 0$

Para $k = 2$

resolver$\begin{bmatrix} x+2y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 3x+y=0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\left[x=-\frac{1}{5}\cdot z, y=\frac{3}{5}\cdot z, z=z\right]\right]$

Solución $x = -z/5$, $y = 3z/5$

80. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} x - ay &= 2 \\ ax - \ \ y &= a + 1 \end{aligned}\right\}$$

determina para qué valor o valores de **a** el sistema tiene una solución en la que y = 2

Solución:

Problema 80

Resolvemos el sistema cuando y = 2

resolver$\begin{bmatrix} x-2a=2 \\ a\cdot x-2=a+1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{\{a=1, x=4\}, \left\{a=-\frac{3}{2}, x=-1\right\}\right\}$

Tiene la solución $y = 2$ cuando $a = 1$ o $a = -3/2$

Problemas propuestos

1. Sea A una matriz 3×3 de columnas C_1, C_2 y C_3 (en ese orden). Sea B la matriz de columnas $C_1 + C_2$, $2C_1 + 3C_3$ y C_2 (en ese orden). Calcula el determinante de B en función del de A

Solución:

$|C_1 + C_2 \quad 2C_1 + 3C_3 \quad C_2| =$ ← Si una columna está formada por dos sumandos, el determinante se descompone en la suma de dos determinantes, cada uno con uno de los sumandos y el resto de columnas iguales.

$|C_1 \quad 2C_1 + 3C_3 \quad C_2| + |C_2 \quad 2C_1 + 3C_3 \quad C_2| =$ ← La 1ª y 3ª columna son iguales. El determinante vale cero.

$|C_1 \quad 2C_1 + 3C_3 \quad C_2| =$

$|C_1 \quad 2C_1 \quad C_2| + |C_1 \quad 3C_3 \quad C_2| =$

$|C_1 \quad 3C_3 \quad C_2| = 3|C_1 \quad C_3 \quad C_2| = -3|C_1 \quad C_2 \quad C_3| = -3|A|$

2. Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array}\right.$$

a) Discútelo según los valores del parámetro **a**

b) Resuélvelo en el caso a = 2

Solución:

a) Sea la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}; \; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|C| = -a^2 + 3a - 2 \Rightarrow -a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1, a = 2$

Para todo valor $a \neq 1, a \neq 2 \Rightarrow R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ **Sistema compatible determinado.**

Para a = 1

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$R(C) = 2 \neq R(A) = 3 \Rightarrow$ **Sistema incompatible.**

Para a = 2

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(C) = 2 = R(A) = 2 \Rightarrow$ **Sistema compatible indeterminado.**

b) Para a = 2, pasamos de la última matriz en la que hemos calculado el rango a forma de sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1 - z, y = 0$$

En paramétricas: $x = 1 - \lambda; y = 0; z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$

3. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + \quad y + \quad z = k \\ (k-1)x - \quad 2y - \quad z = k + 1 \end{array}\right\}$$

a) discútelo según los valores del parámetro **k**

b) resuélvelo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

a) Sean las matrices de los coeficientes y la ampliada:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ k-1 & -2 & -1 & k+1 \end{pmatrix}$$

$|C| = 2k^2 - 5k + 2 \Rightarrow 2k^2 - 5k + 2 = 0 \Rightarrow k = 2, k = 1/2$

Para todo valor $k \neq 2, k \neq 1/2 \Rightarrow R(C) = R(A) = 3 =$ $=$ número de incógnitas $\Rightarrow$ **Sistema compatible determinado.**

Para k = 2

$$R\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 1^a - 3^a \end{array} = R\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$R(C) = R(A) = 2 \Rightarrow$ **Sistema compatible indeterminado.**

Para k = 1/2

$$R\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2 \cdot 1^a \\ 2 \cdot 2^a \\ 2 \cdot 3^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 2 \cdot 2^a - 1^a \\ 1^a + 2 \cdot 3^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 5 \cdot 2^a + 3^a \end{array} = R\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$R(C) = 2 \neq R(A) = 3 \Rightarrow$ **Sistema incompatible.**

b) Nos queda el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + 2z = -1 \\ 5y + 3z = -4 \end{array}\right\} y = \frac{-4 - 3z}{5} \Rightarrow x = \frac{7 - z}{5}$$

En paramétricas: $x = \dfrac{7 - \lambda}{5}, y = \dfrac{-4 - 3\lambda}{5}, z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$

4. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores del parámetro **m** para los que el rango de A es menor que 3

b) Estudia si el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene solución para cada uno de los valores de **m** obtenidos en el apartado anterior.

Solución:

a) El rango de A será menor que 3 cuando $|A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix} = m^4 - 2m^3 + m^2$$

$$m^4 - 2m^3 + m^2 = 0 \Rightarrow m^2(m^2 - 2m + 1) =$$
$$= m^2(m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 0, m = 1$$

El rango de A será menor que 3 para: m = 0 y m = 1

b) Para m = 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 0 = 1 \\ 0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ **Sistema incompatible.**

Para m = 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x + y + z = 1$

Sistema **compatible indeterminado,** con solución:
$\mathbf{x = 1 - \lambda - \mu;\ y = \lambda;\ z = \mu}$

5. Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde λ es un número real.

a) Encuentra los valores de λ para los que la matriz AB tiene inversa.

b) Dados **a** y **b** números reales cualesquiera, ¿puede ser el sistema

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

compatible determinado con A, la matriz del enunciado?

Solución:

a) Se calcula el producto AB

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda & 3 + 2\lambda \\ 1 - \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Para que exista inversa, $|AB| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 + 2\lambda & 3 + 2\lambda \\ 1 - \lambda & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + 3\lambda - 2$$

$$2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2; \lambda = \frac{1}{2}$$

La matriz AB tiene inversa para todos los valores $\lambda \neq -2; \lambda \neq \frac{1}{2}$

b) Se escribe el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + \lambda z = a \\ x - y - z = b \end{array}\right\}$$

Para que el sistema sea compatible determinado, el rango de la matriz de los coeficientes debe ser igual al de la ampliada y al número de incógnitas. Como el R(A) < 3 = nº de incógnita, se sigue que el sistema no puede ser compatible determinado.

$$R\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & a \\ 1 & -1 & -1 & b \end{pmatrix} \underset{1^a - 2^a}{=} R\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & a \\ 0 & 3 & \lambda + 1 & a - b \end{pmatrix} = 2$$

El rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada, igual a 2. Luego **el sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de a y b**

6. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

a) resolver la ecuación matricial AX + X = B, donde X es una matriz 2×2

b) resolver el sistema: $\begin{cases} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{cases}$, siendo X e Y dos matrices de orden 2×2

Solución:

a) $AX + X = B \Rightarrow (A + I)X = B \Rightarrow (A + I)^{-1}(A + I)X =$
$= (A + I)^{-1}B \Rightarrow X = (A + I)^{-1}B$ [1]

Se calcula la matriz inversa de A + I

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$|A + I| = 1$

$$(A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la igualdad [1]

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $\left.\begin{array}{l} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{array}\right\}$

Multiplicando por 2 la 1ª ecuación y restando la 1ª menos la 2ª:

$Y = 2A - B$

$$Y = 2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Multiplicando la 1ª por 3, la 2ª por 2 y restando la 2ª menos la 1ª:

$2X = 2B - 3A$

$$X = \frac{1}{2}\left[2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

7. Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) determina el rango de M según los valores del parámetro **a**

b) determina para qué valores de **a** existe la matriz inversa de M. Calcula dicha matriz inversa para a = 2

Solución:

a) $|M| = -2a^3 + 2a \Rightarrow -2a^3 + 2a = 0 \Rightarrow a = -1, a = 0$ y $a = 1$

Para todo valor $a \neq -1$, $a \neq 0$ y $a \neq 1$, el rango de M es 3

Para a = – 1

$$R\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 1^a + 2^a \\ 1^a - 3^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{0} \end{pmatrix} = 2$$

Para a = 0

$$R\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ 1^a - 3^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} \end{pmatrix} = 2$$

Para a = 1

$$R\begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ 2^a - 3^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

b) Para que exista inversa, $|M| \neq 0$. Luego existe inversa para $a \neq -1$, $a \neq 0$ y $a \neq 1$

Para a = 2

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ |M| = -12$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -6 & 6 & -6 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

8. Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real λ e incógnitas x, y, z

$$\left.\begin{array}{r} (\lambda + 2)x - \quad y + \quad z = 0 \\ 3x + (\lambda + 6)y - \quad 3z = 0 \\ 5x + \quad 5y + (\lambda - 2)z = 0 \end{array}\right\}$$

se pide:

a) calcular para qué valores de λ el sistema solo admite la solución

$$(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

b) para cada valor de λ que hace indeterminado el sistema, obtener todas sus soluciones.

c) explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $\lambda = -3$

Solución:

a) Sea C la matriz de los coeficientes y A la matriz ampliada.

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda + 6 & -3 \\ 5 & 5 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & \lambda + 6 & -3 & 0 \\ 5 & 5 & \lambda - 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$|C| = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = -3$

Para todo valor $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -3$, R(C) = R(A) = 3 = nº de incógnitas ⇒ Sistema es homogéneo compatible determinado con la solución (x, y, z) = (0, 0, 0)

b) Se estudian las dos valores de λ

Para λ = 0, se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \\ 5 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 3 \cdot 1^a - 2 \cdot 2^a \\ 5 \cdot 1^a - 2 \cdot 3^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & 9 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-15} & \cancel{9} & \cancel{0} \end{pmatrix} = 2$$

R(C) = R(A) = 2 < nº de incógnitas ⇒ Sistema compatible indeterminado. Queda el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ -5y + 3z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -\frac{1}{5}z; y = \frac{3}{5}z$$

La solución en paramétricas es:

$$x = -\frac{1}{5}\mu; y = \frac{3}{5}\mu; z = \mu; \mu \in \mathbb{R}$$

Para $\lambda = -3$, se tiene:

$$R\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{-3} & \cancel{0} \\ \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{-5} & \cancel{0} \end{pmatrix} = 1$$

$R(C) = R(A) = 1 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Queda la ecuación: $-x - y + z = 0 \Rightarrow x = -y + z$

La solución: $x = -\beta, + \mu; y = \beta; z = \mu; \beta, \mu \in \mathbb{R}$

c) Para $\lambda = -3$, las tres ecuaciones son equivalentes. Corresponden a un solo plano.

9. A es una matriz 3×3 tal que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) calcular el determinante de la matriz A^3 y la matriz inversa de A^3

b) calcular la matriz fila $X = (x, y, z)$, que es solución de la ecuación matricial $X A^3 = B A^2$, donde B es la matriz fila $B = (1, 2, 3)$

c) calcular la matriz inversa de A

Solución:

a) $|A^3| = -1$

Los adjuntos de los términos de la matriz A^3 son:

$A^3_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \qquad A^3_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 4$

$A^3_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

$A^3_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6 \qquad A^3_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7$

$A^3_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4$

$A^3_{13} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \qquad A^3_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$A^3_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$$(A^3)^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -6 & -7 & 4 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $X A^3 = BA^2 \Rightarrow X A^3(A^3)^{-1} = BA^2(A^3)^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = BA^2(A^3)^{-1}$

$$X = (1\ \ 2\ \ 3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (5\ \ 6\ \ 2)$$

c) $A^3 = A^2A \Rightarrow (A^3)^{-1}A^3 = (A^3)^{-1}A^2 A \Rightarrow$

$\Rightarrow I = (A^3)^{-1}A^2A \Rightarrow A^{-1} = (A^3)^{-1}A^2$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

BLOQUE III

Análisis

9 Límites, continuidad y asíntotas

1. Límite de una función en un punto

Piensa y calcula

Completa mentalmente la tabla siguiente:

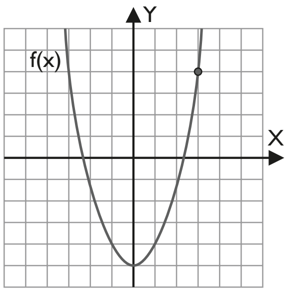
Solución:

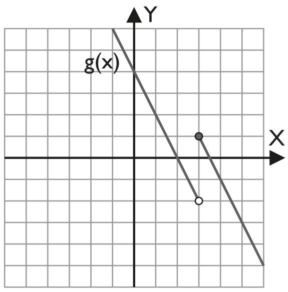
x	1,9	1,99	1,999	→	**2**	→	2,001	2,01	2,1
f(x) = x + 1	2,9	2,99	2,999	→	**3**	→	3,001	3,01	3,1

Aplica la teoría

1. Observando la gráfica, halla el límite en cada caso; si no existe, justifícalo:

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$





Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$

b) $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$ no existe porque los límites laterales son distintos.

$\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = -2;\ \lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = 1$

2. Demuestra que el $\lim\limits_{x \to 1} (3x + 2) = 5$

Solución:

Hay que demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$|3x + 2 - 5| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - 1| < \delta$

$|3x + 2 - 5| = |3x - 3| = |3(x - 1)| = 3|x - 1|$

Para cualquier $\varepsilon > 0$, se puede tomar $\delta = \varepsilon/3$ y se cumple la condición:

Siempre que $0 < |x - 1| < 1 = \varepsilon/3$, se tiene

$|2x - 2 - 5| = 3|x - 1| < 3\,\dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

3. Completa las tablas para estimar el límite en cada caso:

x	0,9	0,99	0,999	→	**1**
$f(x) = x^2 - 1$				→	

x	1,1	1,01	1,001	→	**1**
$f(x) = x^2 - 1$				→	

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 1)$ b) $\lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 1)$

Solución:

x	0,9	0,99	0,999	→	**1**
$f(x) = x^2 - 1$	–0,19	–0,0199	–0,001999	→	**0**

x	1,1	1,01	1,001	→	**1**
$f(x) = x^2 - 1$	0,21	0,0201	0,002	→	**0**

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 1) = 0$ b) $\lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 1) = 0$

4. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 2x + 1)$ b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x}{x + 3}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2 + 4}$ d) $\lim\limits_{x \to 2} 5^{x - 2}$

e) $\lim\limits_{x \to 1} L\,(4x + 2)$ f) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \operatorname{sen}(2x + \pi)$

Solución:

a) $\lim_{x \to 2} (x^3 - 2x + 1) = 8 - 4 + 1 = 5$

b) $\lim_{x \to 3} \frac{2x}{x + 3} = \frac{6}{6} = 1$

c) $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4} = 2$

d) $\lim_{x \to 2} 5^{x-2} = 5^0 = 1$

e) $\lim_{x \to 1} L\,(4x + 2) = L\,6$

f) $\lim_{x \to \pi/2} \operatorname{sen}(2x + \pi) = \operatorname{sen} 2\pi = 0$

2. Límite de una función en el infinito

Piensa y calcula

Completa mentalmente la siguiente tabla:

Solución:

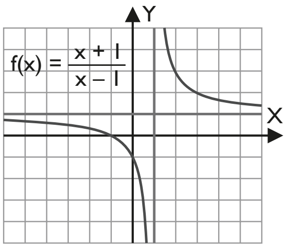
x	$-\infty \leftarrow$	$-1\,000$	-100	-10	-1	1	10	100	$1\,000$	$\rightarrow +\infty$
$f(x) = 1/x$	0	$-0{,}001$	$-0{,}01$	$-0{,}1$	-1	1	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$	0

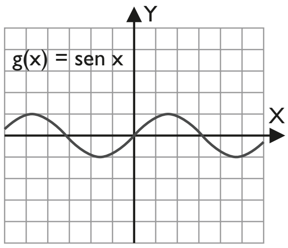
Aplica la teoría

5. Usa la gráfica para estimar el límite en cada caso; y si no existe, justifícalo:

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ siendo $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$

b) $\lim_{x \to -\infty} g(x)$, $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ siendo $g(x) = \operatorname{sen} x$





Solución:

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

b) $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ no existe porque la función sen **x** está oscilando continuamente entre -1 y 1

No se acerca a ningún valor cuando la **x** tiende a $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x)$ no existe porque la función sen **x** está oscilando continuamente entre -1 y 1

No se acerca a ningún valor cuando la **x** tiende a $+\infty$

6. Indica si los siguientes límites son infinitos, un número o una indeterminación:

a) $\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 3x)$

b) $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3x)$

c) $\lim_{x \to +\infty} 2^{-x}$

d) $\lim_{x \to +\infty} x^{-5}$

e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^2}$

f) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

g) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 5}\right)^x$

h) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-5}}{L\,(x + 5)}$

i) $\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot 2^{-x}$

j) $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - 3x\right)$

Solución:

a) $\infty + \infty = +\infty$

b) $[\infty - \infty] = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

$\left(\text{Observa que: } \lim_{x \to +\infty} x^2 > \lim_{x \to +\infty} 3x\right)$

c) $\frac{1}{\infty} = 0$

d) $\infty^{-5} = 0$

e) $\left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0$ $\left(\text{Observa que: } \lim_{x \to +\infty} \log x < \lim_{x \to +\infty} x^2\right)$

f) $\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]$ Indeterminado.

g) $[1^\infty]$ Indeterminado.

h) $\left[\frac{\infty}{\infty}\right] = +\infty$

$\left(\text{Observa que: } \lim_{x \to +\infty} e^{x-5} > \lim_{x \to +\infty} L\,(x + 5)\right)$

i) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0$

$\left(\text{Observa que: } \lim_{x \to +\infty} x^2 < \lim_{x \to +\infty} 2^x\right)$

j) $\infty + \infty = +\infty$

3. Límites de funciones polinómicas y racionales

■ Piensa y calcula

Indica cuál de las siguientes expresiones es determinada, y calcula el resultado, y cuál indeterminada:

a) $(-\infty)^3$ b) ∞^3 c) $\frac{4}{0}$ d) $\frac{0}{4}$ e) $\frac{0}{0}$ f) $\frac{5}{\infty}$ g) $\frac{\infty}{\infty}$

Solución:

a) $(-\infty)^3 = -\infty$ b) $\infty^3 = \infty$ c) $\frac{4}{0} = \infty$ d) $\frac{0}{4} = 0$

e) $\left[\frac{0}{0}\right]$ Indeterminado. f) $\frac{5}{\infty} = 0$ g) $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ Indeterminada.

● Aplica la teoría

7. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^5 + x^2 + 3)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + 5x - 4)$

Solución:

a) $-\infty$ b) $+\infty$

8. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^3 - x^2 + x - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 6}$

Solución:

a) 1/2 b) 2

9. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x + 5}{x + 2}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x + 2}{x^2 - 1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{x + 5}{x + 2} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{x + 5}{x + 2} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x + 2}{x^2 - 1} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x + 2}{x^2 - 1} = +\infty$

10. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3}{x^3 + 2x}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2}{x^2 + 1}$

Solución:

a) 0 b) 3

11. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 2} - x\right)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{5x^4 - x}{x^2 + 3} - 2x\right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x + 1}{2} - \frac{x^2 + 3}{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1} - \frac{x}{2}\right)$

Solución:

a) 0

b) $+\infty$

c) $+\infty$

d) -2

4. Límites de funciones irracionales y potenciales-exponenciales

■ Piensa y calcula

Indica cuál de las siguientes expresiones es determinada, calcula el resultado, y cuál indeterminada:

a) $\sqrt{+\infty}$ b) $+\infty - \infty$ c) ∞^0 d) $3^{+\infty}$ e) 0^0 f) 1^∞

Solución:

a) $+\infty$ b) Indeterminada. c) Indeterminada.

d) $+\infty$ e) Indeterminada. f) Indeterminada.

Aplica la teoría

12. Calcula, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 5^-} \sqrt{x-5}$ b) $\lim_{x \to 5^+} \sqrt{x-5}$

Solución:

a) No existe.   b) 0

13. Calcula, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x-3}$ b) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x-3}$

Solución:

a) No existe.   b) $+\infty$

14. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ b) $\lim_{x \to -\infty} \left(3x + \sqrt{9x^2+x}\right)$

Solución:

a) 0   b) $-1/6$

15. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

b) $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{6+x}-3}{x-3}$

Solución:

a) 1/4   b) 1/6

16. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)^x$

b) $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2+1}{3x-1}\right)^{\frac{x+1}{x-1}}$

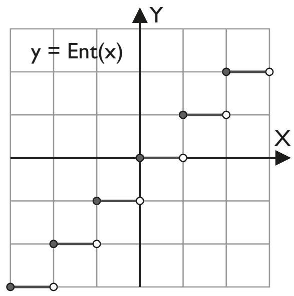
Solución:

a) e^3 b) $e^{-1} = 1/e$

5. Continuidad

Piensa y calcula

Indica en qué valores es discontinua la función parte entera del 1er gráfico del margen:



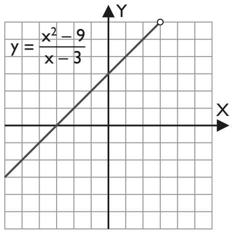
Solución:

En los valores enteros en los que tiene una discontinuidad de salto finito.

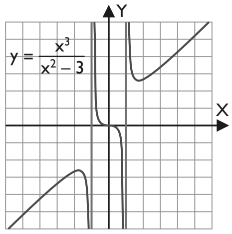
Aplica la teoría

17. A la vista de la gráfica, clasifica las discontinuidades de las siguientes funciones:

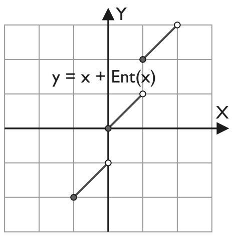
a)



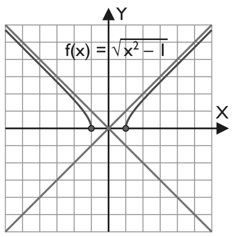
b)



c)



d)



Solución:

a) Tiene una discontinuidad evitable en $x = 3$, que se evita haciendo $f(3) = 6$

b) Tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito en $x = -1$ y $x = 1$

c) Tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito en los valores enteros.

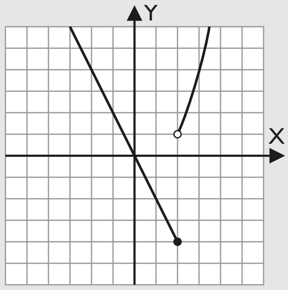
d) Tiene una discontinuidad de 2ª especie en los valores $x = -1$ y $x = 1$

18. Representa y estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2^x - 2 & \text{si } x \le 1 \\ L\,x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Solución:



La función está definida a trozos con dos funciones polinómicas que siempre son continuas en su dominio. El único punto conflictivo puede ser para $x = 2$

a) $f(2) = -4$

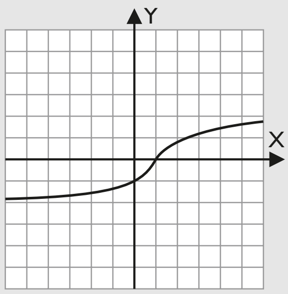
b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-2x) = -4$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 2x + 1) = 1$

Como los límites laterales no son iguales, no existe el $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Existe una discontinuidad de 1ª especie de salto finito en $x = 2$

b)



La función está definida a trozos con una función exponencial y una logarítmica que siempre son continuas en su dominio. El único punto conflictivo puede ser para $x = 1$

a) $g(1) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2^x - 2) = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} L\,x = 0$

Como los límites laterales son iguales, el $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

La función es continua.

19. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

c) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

Solución:

a) Es una función racional que es continua en todo su dominio.

Los valores donde no existe la función son $x = -1$ y $x = 1$

- En $x = -1$

$\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x}{x^2 - 1} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{x^2 - 1} = +\infty$

La función tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

- En $x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{x^2 - 1} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x^2 - 1} = +\infty$

La función tiene una discontinuidad 1ª especie de salto infinito.

b) Es una función racional que es continua en todo su dominio.

El valor donde no existe la función es $x = 2$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

La función tiene una discontinuidad evitable. Se evita haciendo $f(2) = 4$

c) Es una función irracional que es continua en todo su dominio. Los puntos conflictivos se encuentran en los valores de los extremos finitos del dominio $x = -4$ y $x = 4$

- En $x = -4$

$f(-4) = 0$

$\lim\limits_{x \to -4^-} \sqrt{16 - x^2}$ no existe.

$\lim\limits_{x \to -4^+} \sqrt{16 - x^2} = 0$

La función tiene una discontinuidad de 2ª especie en $x = -4$

- En $x = 4$

$f(4) = 0$

$\lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{16 - x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to 4^+} \sqrt{16 - x^2}$ no existe.

La función tiene una discontinuidad de 2ª especie en $x = 4$

20. Halla el valor del parámetro **k** para que la siguiente función sea continua en $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2 - x} & \text{si } x \le 2 \\ kx - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

a) $f(2) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{2 - x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (kx - 1) = 2k - 1$

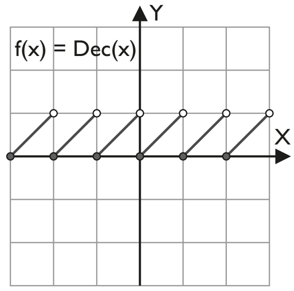
c) Para que sea continua, el límite debe existir cuando **x** tiende a 2, y ser igual que f(2)

$$2k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1/2$$

6. Propiedades de la continuidad

Piensa y calcula

En la gráfica siguiente se representa la función parte decimal. ¿Es continua en el intervalo $(1, 2)$?



Solución:

Sí, es continua en el intervalo abierto $(1, 2)$

Aplica la teoría

21. Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los intervalos cerrados correspondientes:

a) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ en $[-5, 5]$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ en $[-1, 2]$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ en $[0, 2]$

Solución:

a) Es una función irracional que es continua en su dominio. Hay que estudiar los extremos.

En $x = -5$

$f(-5) = 0$

$\lim\limits_{x \to -5^+} \sqrt{25 - x^2} = 0$

La función es continua por la derecha en $x = -5$

En $x = 5$

$f(5) = 0$

$\lim\limits_{x \to 5^-} \sqrt{25 - x^2} = 0$

La función es continua por la izquierda en $x = 5$

La función es continua en el intervalo cerrado $[-5, 5]$

b) La función es racional, que es continua en su dominio. Los valores para los que la función no está definida son $x = -2$ y $x = 2$

Como $2 \in [-1, 2]$, la función no es continua en dicho intervalo porque $x = 2$ tiene un discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

c) La función es racional, que es continua en su dominio. Los valores para los que la función no está definida son $x = -1$; $x = 1$

Como $1 \in [0, 2]$, la función no es continua en el intervalo porque en $x = 1$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

22. Halla los intervalos en los que las siguientes funciones son continuas:

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x - 2}{x - 1}$ b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{x}$

Solución:

a) Es una función racional que es continua en su dominio. Luego es continua en:

$$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

b) Es un cociente de dos funciones continuas en sus dominios respectivos.

La función no existe para $x = 0$ y tampoco existe en aquellos valores en que el radicando es negativo, es decir, $(-\infty, -1)$

Luego la función es continua en $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$

23. Halla los intervalos en los que las siguientes funciones son continuas:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1 & \text{si } x \le 2 \\ -x + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{1}{x - 2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Solución:

a) La función está definida por dos funciones polinómicas que son continuas en sus dominios.

Se estudia $x = 2$

$f(2) = 2$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(\dfrac{x}{2} + 1\right) = 2$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (-x + 3) = 1$

Como no existe el límite para $x = 2$, la función no es continua en $x = 2$. Luego la función es continua en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

b) La función está definida por una función polinómica y una función racional que son continuas en sus dominios.

Se estudia $x = 1$

$f(1) = 0$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (-x + 1) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-2} = -1$$

Como no existe el límite para $x = 1$, la función no es continua en $x = 1$

Como para $x > 1$ la función racional no está definida para $x = 2$, en ese valor no es continua. Luego la función es continua en: $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$

24. Demuestra que las siguientes funciones tienen un cero en los intervalos correspondientes:

a) $f(x) = x^3 + 3x - 2$ en $[0, 1]$

b) $f(x) = x^2 - 2 - \text{sen } x$ en $[0, \pi]$

Solución:

Se comprueban las hipótesis del teorema de Bolzano:

a) $f(x)$ es continua en $[0, 1]$ por ser una función polinómica.

$f(0) = -2 < 0$

$f(1) = 2 > 0$

Por el teorema de Bolzano, se tiene que existe al menos un valor $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$

b) $f(x)$ es continua en $[0, \pi]$ por ser la resta de un polinomio y la función sen x, que son continuas.

$f(0) = -2$

$f(\pi) = \pi^2 - 2 > 0$

Por el teorema de Bolzano se tiene que existe al menos un valor $c \in (0, \pi)$ tal que $f(c) = 0$

7. Asíntotas

Piensa y calcula

Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2}$ b) $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2}$ c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}$

Solución:

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) 0

Aplica la teoría

Calcula las asíntotas y la posición de la gráfica respecto de las asíntotas de las siguientes funciones:

25. $f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$

Solución:

Verticales: $x = -2$, $x = 2$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{4-x^2} = -\infty \qquad \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{4-x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{4-x^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{4-x^2} = -\infty$$

Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{4-x^2} = 0^-$$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{4-x^2} = 0^-$$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

26. $f(x) = \frac{x^2}{x + 2}$

Solución:

Verticales: $x = -2$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2}{x+2} = -\infty \qquad \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2}{x+2} = +\infty$$

Horizontales: no tiene.

Oblicuas: $y = x - 2$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{4}{x+2} = 0^-$$

La gráfica está debajo de la asíntota.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{4}{x+2} = 0^+$$

La gráfica está encima de la asíntota.

27. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

Solución:

Verticales: no tiene.

Horizontales: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2 + 1} = 0^-$

La gráfica está debajo de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2 + 1} = 0^+$

La gráfica está encima de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

28. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

Solución:

Verticales: $x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = -\infty$

Horizontales: $y = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{x^2} = 0^-$

La gráfica está debajo de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2} = 0^-$

La gráfica está debajo de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

29. $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

Solución:

Verticales: no tiene.

Horizontales: no tiene.

Oblicuas:

a) $y = -x + \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} + x - \dfrac{1}{2} \right) = 0^-$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

b) $y = x - \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - x + \dfrac{1}{2} \right) = 0^-$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

30. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x - 2}}$

Solución:

Verticales: $x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x + 1}{\sqrt{x - 2}}$ no existe.

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x + 1}{\sqrt{x - 2}} = +\infty$

Horizontales: no tiene.

Oblicuas: no tiene.

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 Sea $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

El $\lim\limits_{x \to +\infty} [x^2(f(x+1) - f(x))]$ es:

- ☐ $+\infty$
- ☐ 0
- ☒ 2
- ☐ -2

2 La función $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$ tiene:

- ☐ una asíntota horizontal, $y = 1/2$
- ☐ dos asíntotas verticales, $x = \pm 1/2$
- ☒ una asíntota horizontal, $y = 1$
- ☐ una asíntota oblicua, $y = x$

3 Dada la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$, tiene en el intervalo $(1, 2)$

- ☐ dos soluciones
- ☒ al menos una solución
- ☐ ninguna solución
- ☐ ninguna de las anteriores es correcta

4 El $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$ es:

- ☐ 1
- ☐ $+\infty$
- ☐ 0
- ☒ 3/2

5 El $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^x$ es:

- ☐ e
- ☒ 1
- ☐ 0
- ☐ 1/e

6 Se sabe que el $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+ax+1} + x\right) = 2$

El valor de **a** es:

- ☐ No se puede calcular. Queda una expresión del tipo $\dfrac{\infty}{0}$
- ☐ 0
- ☐ 4
- ☒ -4

7 La función $f(x) = x + e^{-x}$

- ☐ tiene una asíntota vertical, $x = 0$
- ☐ tiene una asíntota oblicua, $y = x$, y una horizontal, $y = 0$
- ☒ tiene una asíntota oblicua, $y = x$
- ☐ no tiene asíntotas

8 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ e^{2-x} + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

el valor de **a** que hace que $f(x)$ sea continua en $x = 2$ es:

- ☐ $a = -\dfrac{1}{2}$
- ☒ $a = \dfrac{1}{2}$
- ☐ $a = \dfrac{1}{4}$
- ☐ $a = -\dfrac{1}{4}$

9 Dada la función $f(x) = \dfrac{|x|}{2-x}$

tiene:

- ☐ una asíntota vertical en $x = 0$
- ☐ una asíntota vertical, $x = -2$, y una asíntota horizontal, $y = 2$
- ☐ una asíntota vertical, $x = -2$, una horizontal, $y = -2$
- ☒ una asíntota vertical, $x = 2$, y dos asíntotas horizontales, $y = 1$, $y = -1$

10 Se tienen dos programas informáticos A y B. Para procesar **n** datos, el programa A realiza un número de operaciones elementales no superior a $12 + n\sqrt[4]{n^3}$, mientras que el programa B ejecuta $n^2 - 2n + 10$ operaciones elementales. Cuando el número **n** de datos es grande, ¿qué programa procesa los **n** datos con menos operaciones elementales?

- ☒ A
- ☐ B
- ☐ Los dos iguales
- ☐ Ninguna de las anteriores es correcta

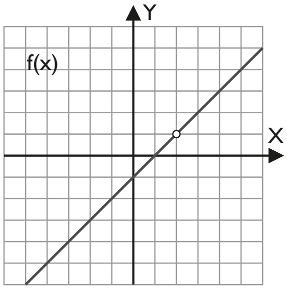
Ejercicios y problemas

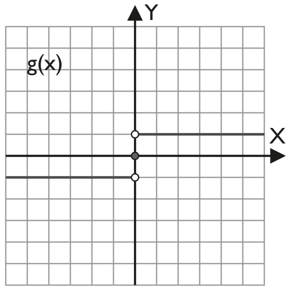
1. Límite de una función en un punto

31. Observando la gráfica en cada caso, halla el límite, y si no existe, justifícalo:

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ siendo $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ siendo $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$





Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe.

32. Completa la tabla para estimar el límite en cada caso:

x	2,9	2,99	2,999	→	3
$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$				→	

x	3,1	3,01	3,001	→	3
$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$				→	

a) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x-2}$

Solución:

x	2,9	2,99	2,999	→	3
$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$	1,111	1,01	1,001	→	1

x	3,1	3,01	3,001	→	3
$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$	0,909	0,990	0,999	→	1

a) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x-2} = 1$ b) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x-2} = 1$

33. Demuestra que el $\lim\limits_{x \to 4} \left(\dfrac{x}{2} + 1\right) = 3$

Solución:

Hay que demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$|x/2 + 1 - 3| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - 4| < \delta$

$|x/2 + 1 - 3| = |x/2 - 2| = \dfrac{1}{2}|x - 4|$

Para cualquier $\varepsilon > 0$, se puede tomar $\delta = 2\varepsilon$ y se cumple la condición:

Siempre que $0 < |x - 4| < \delta = 2\varepsilon$, se tiene

$|x/2 + 1 - 3| = \dfrac{1}{2}|x - 4| < \dfrac{1}{2} 2\varepsilon = \varepsilon$

34. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 4} (x^2 - 5x + 2)$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 4}{x + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to -6} \sqrt{2 - x}$ d) $\lim\limits_{x \to \pi} 2^{\cos x}$

e) $\lim\limits_{x \to 3} \log_2 \sqrt{4x - 8}$ f) $\lim\limits_{x \to \pi/6} \cos 2x$

Solución:

a) -2 b) 2

c) $2\sqrt{2}$ d) 1/2

e) 1 f) 1/2

2. Límite de una función en el infinito

35. Completa la tabla en cada caso:

x	–10	–100	–1 000	→	$-\infty$
$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$				→	

x	10	100	1 000	→	$+\infty$
$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$				→	

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1}$

Solución:

x	–10	–100	–1 000	→	$-\infty$
$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$	1,11111	1,01	1,001	→	1

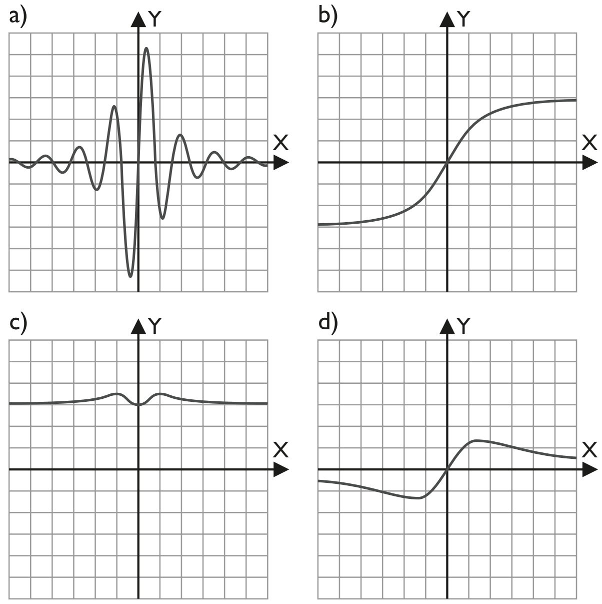
x	10	100	1 000	→	$+\infty$
$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$	0,9090	0,99	0,999	→	1

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$

36. Asocia cada gráfica con una función ayudándote de los límites a los que tiende la función cuando **x** tiende a infinito.

$f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$ $\qquad$ $g(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 3}}$

$h(x) = \dfrac{6 \text{ sen } 4x}{x^2 + 1}$ $\qquad$ $i(x) = 3 + \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$



Solución:

$f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$ es la gráfica d)

$g(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 3}}$ es la gráfica b)

$h(x) = \dfrac{6 \text{ sen } 4x}{x^2 + 1}$ es la gráfica a)

$i(x) = 3 + \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$ es la gráfica c)

37. Ordena de menor a mayor los órdenes de los siguientes infinitos:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^{2/3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} 1{,}5^x$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} 3^x$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^{10}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} L\, x$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} 2{,}5^x$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{2/3} < \lim\limits_{x \to +\infty} x < \lim\limits_{x \to +\infty} x^3$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 1{,}5^x < \lim\limits_{x \to +\infty} 2^x < \lim\limits_{x \to +\infty} e^x$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x < \lim\limits_{x \to +\infty} x^{10} < \lim\limits_{x \to +\infty} 3^x$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} L\, x < \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 < \lim\limits_{x \to +\infty} 2{,}5^x$

38. Indica si los siguientes límites son infinitos, un número o una indeterminación:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 + x^2)$ $\qquad$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4^x}{x + 5}$ $\qquad$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x}\sqrt{x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log (x^2 + 1)}{x^2}$ $\qquad$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 2}{\sqrt{x^6 + 1}}$

Solución:

a) $+\infty$ $\qquad$ b) $[\infty - \infty]$ $\qquad$ c) $+\infty$

d) 0 $\qquad$ e) 0 $\qquad$ f) -1

3. Límites de funciones polinómicas y racionales

39. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 + 5x^2 - x + 2)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3 + 5x^2 - 4x + 1)$

Solución:

a) $+\infty$ $\qquad$ b) $+\infty$

40. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 3x^2 + 4}$ $\qquad$ b) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x + 3}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + x - 2}$ $\qquad$ d) $\lim\limits_{x \to -6} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^3 + 10x^2 + 25x}$

Solución:

a) 2/3 $\qquad$ b) 2 $\qquad$ c) 0 $\qquad$ d) $-7/6$

41. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x^2 - 2x}$ $\qquad$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2}{x^2 - 1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x - 2} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x - 2} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2}{x^2 - 1} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2}{x^2 - 1} = -\infty$

42. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + x}{x^3 + 2}$ $\qquad$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7x^2 - x + 1}{2x^2 + 3}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 5}{x^2 + 2x}$ $\qquad$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 + x - 1}{4x^3 + 3}$

Solución:

a) 0 b) 7/2 c) $-\infty$ d) 1/2

43. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x+2} - x \right)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^3-4}{x^2+1} - 2x \right)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{2x} - \dfrac{3}{x} \right)$

Solución:

a) $-\infty$ b) 0

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{1}{2x} - \dfrac{3}{x} \right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{2x} - \dfrac{3}{x} \right) = -\infty$

4. Límites de funciones irracionales y potenciales-exponenciales

44. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2-1}\right)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2-x}\right)$

Solución:

a) 0 b) 1/2

45. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{2}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$

Solución:

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ b) 6

46. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+3} \right)^{2x+5}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2+3x-1}{2x^2+1} \right)^{3x+5}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2x-1}{x+1} \right)^{\frac{2x}{x-2}}$

Solución:

a) e^{-8} b) $e^{9/2}$ c) $e^{4/3}$

5. Continuidad

47. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x > 0 \\ e^{-x} - 1 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

Razona si es continua en x = 0

Solución:

f(0) = 0

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (e^{-x} - 1) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

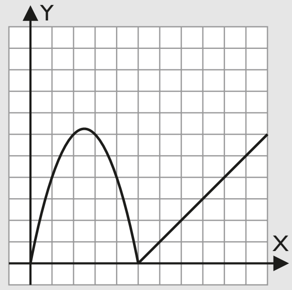
$f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

f(x) es continua en x = 0

48. Representa y estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } 0 \le x < 5 \\ x - 5 & \text{si } 5 \le x \le 10 \end{cases}$$

Solución:



Como la función está definida por dos funciones polinómicas que son continuas, el único punto conflictivo puede ser para el valor x = 5

f(5) = 0

$\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} (-x^2 + 5x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} (x - 5) = 0$

$f(5) = \lim\limits_{x \to 5} f(x) = 0 \Rightarrow$ f(x) es continua en x = 5

49. Dada la función f(x):

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 4}$$

el segundo miembro de la igualdad carece de sentido cuando x = 4. ¿Cómo elegir el valor de f(4) para que la función f(x) sea continua en ese punto?

Solución:

$f(4) = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-4x}{x-4} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} = \lim\limits_{x \to 4} x = 4$

50. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

Solución:

La función está definida para $[0, 4) \cup (4, +\infty)$

Se estudian los valores x = 4 y x = 0

- En $x = 4$

  $f(4)$ no existe.

  $$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = 1/4$$

  Tiene una discontinuidad evitable que se evita haciendo $f(4) = 1/4$
- En $x = 0$

  $f(0) = 1/2$

  $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ no existe.

  $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1/2$

  Es continua por la derecha.

  Hay una discontinuidad de 2ª especie en $x = 0$

51. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determina el valor de **k** para que la función sea continua.

Solución:

Como está definida por funciones polinómicas, el punto que puede ser conflictivo se da para el valor $x = 1$

$f(1) = 7$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x + 5) = 7$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2 + k) = 1 + k$

Como para ser continua

$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$

se tiene:

$1 + k = 7 \Rightarrow k = 6$

6. Propiedades de la continuidad

52. Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los intervalos cerrados correspondientes:

a) $f(x) = \sqrt{x + 3}$ en $[-3, 0]$

b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ en $[1, 2]$

Solución:

a) $f(x)$ es una función irracional que es continua en su dominio $[-3, +\infty)$. Como el intervalo $(-3, 0)$ está incluido en su dominio, la función es continua en él.

Se estudian los extremos:

En $x = -3$

$f(-3) = 0$

$\lim_{x\to -3^+} \sqrt{x + 3} = 0$

La función es continua por la derecha en $x = -3$

En $x = 0$

Como $0 \in [-3, +\infty)$, la función es continua en $x = 0$ y, por tanto, es continua por la izquierda en $x = 0$

La función es continua en el intervalo cerrado $[-3, 0]$

b) La función es racional y es continua en su dominio $\mathbb{R} - \{1\}$. Como el intervalo $(1, 2)$ está en el dominio, la función es continua. Se estudian los extremos:

En $x = 1$

$f(1)$ no existe.

La función no es continua por la derecha en $x = 1$

La función no es continua en el intervalo cerrado $[1, 2]$

53. Halla los intervalos en los que las siguientes funciones son continuas:

a) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Solución:

a) Es una función racional que es continua en su dominio. El único punto donde no existe la función es $x = 0$

Luego es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

b) Es el cociente de un polinomio y una función irracional, que son continuas en su dominio. Como $\sqrt{x^2 + 1} \neq 0$ ya que $x^2 + 1 \ge 0$ para todo **x,** la función cociente es continua en $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

54. Prueba que la función $f(x) = 2 \cos x - x$ tiene un cero en el intervalo $[0, \pi]$

Solución:

Se prueban las hipótesis del teorema de Bolzano:

La función es continua en $(0, \pi)$

$f(0) = 2 > 0$

$f(\pi) = -2 - \pi < 0$

Por el teorema de Bolzano, existe al menos un valor $c \in (0, \pi)$ tal que $f(c) = 0$

55. Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$$

demuestra que existe un valor $c \in (2, 5)$ tal que $f(c) = 20/3$

Solución:

Se prueban las hipótesis del teorema de los valores intermedios:

f(x) es continua en (2, 5)

Observa que el único valor de **x** en el que la función no es continua no pertenece al intervalo.

$f(2) = 6$

$f(5) = 30/4 = 15/2$

Como $6 < 20/3 < 15/2$, por el teorema de los valores intermedios existe un $c \in (2, 5)$ tal que $f(c) = 20/3$

7. Asíntotas

56. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones y estudia la posición de la curva respecto de ellas:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+8}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-4}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+x-2}$

Solución:

a) Verticales: $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2}{x-1} = +\infty$$

Horizontales: no tiene.

Oblicuas: $y = 2x + 2$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x-1} = 0^-$$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x-1} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

b) Verticales: no tiene.

Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{x^2+8} = 0^-$$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x^2+8} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

c) Verticales: $x = -2, x = 2$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+3}{x^2-4} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+3}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+3}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+3}{x^2-4} = +\infty$$

Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{7}{x^2-4} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{7}{x^2-4} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

d) Verticales: $x = -2, x = 1$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2}{x^2+x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2}{x^2+x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x^2+x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x^2+x-2} = +\infty$$

Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{-x+2}{x^2+x-2} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{-x+2}{x^2+x-2} = 0^-$$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

57. Calcula las asíntotas, y la posición de la curva respecto de ellas, de la función:

a) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+4}}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2+2}$

Solución:

a) Verticales: no tiene.

Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+4}} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+4}} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

b) Verticales: no tiene.

Horizontales: no tiene.

Oblicuas:

$y = -x$

$$\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2-1} + x) = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

$y = x$

$$\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

Para ampliar

58. Calcula:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [L(x+1) - Lx]$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x[L(x+1) - Lx]$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [L(x+1) - Lx] = \lim\limits_{x \to +\infty} L\dfrac{x+1}{x} = L\,1 = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x[L(x+1) - Lx] = \lim\limits_{x \to +\infty} x\,L\dfrac{x+1}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} L\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = L\,e = 1$

59. Calcula:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2e^{-3x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$

Solución:

a) 0 b) 1/2 c) e^{-2}

60. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 3x^2 - 12x + 9 & \text{si } 1 < x \le 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Solución:

- En $x = 1$

  $f(1) = 0$

  $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (1 - x^2) = 0$

  $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (3x^2 - 12\,x + 9) = 0$

  $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \Rightarrow$ La función es continua en $x = 1$

- En $x = 3$

  $f(3) = 0$

  $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (3x^2 - 12\,x + 9) = 0$

  $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (-2x^2 + 16\,x - 30) = 0$

  $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) \Rightarrow$ La función es continua en $x = 3$

  La función es continua en $\mathbb{R}$

61. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

- En $x = -1$

  $f(-1) = 0$

  $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 + 2x + 1) = 0$

  $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (2x + 2) = 0$

  $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) \Rightarrow$ La función es continua en $x = -1$

- En $x = 2$

  $f(2) = 6$

  $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2x + 2) = 6$

  $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (-x^2 + 8) = 12$

  $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \ne f(2) \Rightarrow$ La función no es continua en $x = 2$

  Tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito.

62. Estudia la continuidad de f(x)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \le 1 \\ 4 & \text{si } 1 < x \le 4 \\ (x-4)^2 + 2 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Solución:

- En $x = 1$

  $f(1) = 4$

  $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 3) = 4$

  $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 4 = 4$

  $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \Rightarrow$ La función es continua en $x = 1$

- En $x = 4$

  $f(4) = 4$

  $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} 4 = 4$

  $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} \left((x-4)^2 + 2\right) = 2$

  $\lim\limits_{x \to 4} f(x) \ne f(4) \Rightarrow$ La función no es continua en $x = 4$

  Tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito.

63. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si } x \ge 2 \\ x(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Solución:

En $x = 2$

$f(2) = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x(x-2) = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt[3]{x-2} = 0$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) \Rightarrow$ La función es continua en $x = 2$ y por consiguiente es continua en $\mathbb{R}$

64. Estudia la continuidad de f(x)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

La función está definida mediante dos funciones racionales. Además de estudiar el valor x = 2, hay que estudiar el valor x = 1, para el que no está definida la función $\dfrac{x+2}{x-1}$

- En x = 1

  f(1) no existe.

  $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x+2}{x-1} = -\infty$$

  $$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{x-1} = +\infty$$

  La función es discontinua en x = 1, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

- En x = 2

  f(2) = 4

  $$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x+2}{x-1} = 4$$

  $$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{3x^2-2x}{x+2} = 2$$

  La función es discontinua en x = 2, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito.

65. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & \text{si } x \ne 5 \\ 0 & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

a) Demuestra que f(x) no es continua en x = 5

b) ¿Existe una función continua que coincida con f(x) para todos los valores x ≠ 5? En caso afirmativo, da su expresión.

Solución:

a) f(5) = 0

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{\cancel{(x-5)}(x+5)}{\cancel{x-5}} =$$

$$= \lim_{x \to 5} (x+5) = 10$$

En x = 5 hay una discontinuidad evitable. Se evita definiendo f(5) = 10

b) $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \ne 5 \\ 10 & \text{si } x = 5 \end{cases}$

66. Sea f(x) una función continua en [– 1, 5] tal que f(– 1) < 0 y f(5) = 7. Responde de forma razonada si la función g(x) = f(x) – 5 tiene al menos un cero en (– 1, 5)

Solución:

La función g(x) cumple con las hipótesis del teorema de Bolzano:

g(x) es continua en [– 1, 5] por ser continua f(x)

g(– 1) = f(– 1) – 5 < 0

g(5) = f(5) – 5 = 7 – 5 = 2 > 0

Luego existe al menos un c ∈ (– 1, 5) tal que g(c) = 0

67. Sea la función $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$. Utiliza el teorema de Bolzano y justifica si existe un c ∈ (0, 1) que verifique que f(c) = 0. En caso afirmativo calcula dicho valor.

Solución:

f(x) es continua en [0, 1]

f(0) = 1 > 0

f(1) = 1 > 0

No se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano, pero no podemos concluir que no exista un valor c ∈ [0, 1] tal que f(c) = 0. Si se resuelve la ecuación f(x) = 0 se obtienen las raíces $x_1 = x_2 = 1/2 \in (0, 1)$

68. Calcula las asíntotas de la función y estudia la posición de la gráfica respecto de ellas.

$$f(x) = \frac{3x^2-3x}{x+2}$$

Solución:

Verticales: x = –2

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3x^2-3x}{x+2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3x^2-3x}{x+2} = +\infty$$

Horizontales: no tiene.

Oblicuas:

$$\frac{3x^2-3x}{x+2} = 3x - 9 + \frac{18}{x+2}$$

y = 3x – 9

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{18}{x+2} = 0^-$$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{18}{x+2} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

Problemas

69. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 3x + 1}{x} & \text{si } x \geq -1 \\ \dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de f

b) Halla las asíntotas de la gráfica de f

Solución:

a) La función está definida mediante dos funciones racionales. Además de estudiar el valor $x = -1$, hay que estudiar el valor $x = 0$, para el que no está definida la función $\dfrac{x^3 + 3x + 1}{x}$

- En $x = -1$

  $f(-1) = 3$

  $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2x}{x-1} = 1$

  $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^3 + 3x + 1}{x} = 3$

  La función es discontinua en $x = -1$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito.

- En $x = 0$

  $f(0)$ = no existe.

  $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^3 + 3x + 1}{x} = -\infty$

  $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3 + 3x + 1}{x} = +\infty$

  La función es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

b) La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$

Tiene una asíntota horizontal en $y = 2$

70. Determina el valor de **a** y **b** para que la función f(x) sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - a & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ bx - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

Hay que estudiar los valores $x = 0$ y $x = 2$

$f(0) = -a$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-2x - a) = -a$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x - 1) = -1$

Se tiene que cumplir:

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

$-1 = -a \Rightarrow a = 1$

En $x = 2$

$f(2) = 1$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x - 1) = 1$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (bx - 5) = 2b - 5$

Se tiene que cumplir:

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$

$1 = 2b - 5 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$

71. Determina el valor de **a** y **b** para que la función f(x) sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} 5 + 2\text{sen } x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Solución:

La función esta definida por dos funciones que son continuas. El punto que hay que estudiar es $x = 0$

$f(0) = 5$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (5 + 2 \text{ sen } x) = 5$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x^2 + ax + b) = b$

Se tiene que cumplir: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

$b = 5$

La función será continua para $b = 5$ y cualquier valor de **a**

72. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} a^x - 6 & \text{si } x < 2 \\ |x - 5| & \text{si } 2 \leq x < 10 \end{cases}$$

Determina el valor de **a** sabiendo que f es continua y que $a > 0$

Solución:

$f(2) = 3$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (a^x - 6) = a^2 - 6$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} |x - 5| = 3$

Se tiene que cumplir:

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$

$a^2 - 6 = 3 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$

Como $a > 0 \Rightarrow a = 3$

73. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 5a & \text{si } x < 0 \\ bx^2 + 3 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

Estudia la continuidad de f(x) según los valores de las constantes **a** y **b**

Solución:

En $x = 0$

$f(0) = 3$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (3x + 5a) = 5a$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (bx^2 + 3) = 3$

Se tiene que cumplir:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$5a = 3 \Rightarrow a = 3/5$

En $x = 2$

$f(2) = 0$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (bx^2 + 3) = 4b + 3$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2 - 4) = 0$

Se tiene que cumplir:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$4b + 3 = 0 \Rightarrow b = -3/4$

74. Estudia la continuidad de f(x)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Solución:

La función está definida por funciones continuas en sus dominios. El valor que hay que estudiar es $x = 0$

$f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La función tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito en $x = 0$

75. Estudia la continuidad de f(x)

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{4}{x + 3} & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 1 + L\,x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

La función está definida por funciones continuas en sus dominios. Los valores que se estudian son $x = -1$; $x = 1$

- En $x = -1$

  $f(-1) = 2$

  $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} e^x = 1/e$

  $$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{4}{x + 3} = 2$$

  La función tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito en $x = -1$

- En $x = 1$

  $f(1) = 1$

  $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{4}{x + 3} = 1$$

  $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (1 + L\,x) = 1$

  La función es continua en $x = 1$

76. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a - 1 & \text{si } x \le 2 \\ L\,(x - 1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Estudia la continuidad según el valor del parámetro **a**

Solución:

$f(2) = 3a + 3$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 + ax + a - 1) = 3a + 3$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} L\,(x - 1) = 0$

Se tiene que cumplir:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$3a + 3 = 0 \Rightarrow a = -1$

77. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & \text{si } x \le -2 \\ a & \text{si } -2 < x \le 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de **a** para que f(x) sea continua en $x = -2$.

b) Para el valor de **a** hallado, ¿es continua la función en $x = 2$?

Solución:

a) En $x = -2$

$f(-2) = 4a - 2$

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (ax^2 - 2) = 4a - 2$

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} a = a$

Se tiene que cumplir:

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2)$

$4a - 2 = a \Rightarrow a = 2/3$

b) Para $a = 2/3$

$f(2) = 2/3$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 2/3 = 2/3$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x = 2$

La función tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito.

78. Se ha estudiado la evolución de la ganancia **y** en céntimos de euro en cada instante desde un tiempo inicial, hasta pasados 5 años, por la fabricación de un determinado producto y se ha modelizado funcionalmente dicha evolución así:

Durante el primer año: $y = 2t^2$

Durante el segundo y tercer año: $y = 4t - 2$

Durante el resto: $y = e^{3-t}$

Explica la continuidad de la función.

Solución:

Se escribe la función:

$$f(t) = \begin{cases} 2t^2 & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 4t - 2 & \text{si } 1 \le t < 3 \\ e^{3-t} & \text{si } t \ge 3 \end{cases}$$

Se estudian los valores t = 1 y t = 3

En t = 1

$f(1) = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2t^2 = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (4t - 2) = 2$

La función es continua en t = 1

En t = 3

$f(3) = 1$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (4t - 2) = 10$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} e^{3-t} = 1$

La función no es continua en t = 3. Tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito.

79. Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra la cantidad de 5 €. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, decide disminuir el precio por unidad, y por cada **x** unidades cobra la siguiente cantidad:

$$c(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \le 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Halla **a** para que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran «muchísimas» unidades?

Solución:

a) Se estudia en x = 10

$f(10) = 50$

$\lim\limits_{x \to 10^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 10^-} 5x = 50$

$\lim\limits_{x \to 10^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 10^+} \sqrt{ax^2 + 500} = \sqrt{100a + 500}$

Se tiene que cumplir:

$\lim\limits_{x \to 10^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 10^+} f(x) = f(10)$

$\sqrt{100a + 500} = 50 \Rightarrow a = 20$

b) El precio por unidad es:

$$\frac{c(x)}{x}$$

Se calcula $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} = \sqrt{20}$

Para profundizar

80. Se considera la ecuación:

$x^3 + mx^2 - 2x = 1$

Utilizando el teorema de Bolzano:

a) prueba que si m > 2 la ecuación admite alguna solución menor que 1

b) prueba que si m < 2 la ecuación admite alguna solución mayor que 1

Solución:

a) Se considera la función:

$f(x) = x^3 + mx^2 - 2x - 1$

Como la raíz debe ser menor que 1, se toma:

$f(1) = 1 + m - 2 - 1 = m - 2 > 0$ si $m > 2$

Si se toma el intervalo [0, 1], f(x) cumple las hipótesis del teorema de Bolzano.

f(x) es continua en [0, 1]

$f(0) = -1 < 0$

$f(1) = m - 2 > 0$ si $m > 2$

Luego existe al menos un $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$

b) Razonando de la misma forma en el intervalo [1, 2]:

f(x) es continua en [1, 2]

$f(1) = m - 2 < 0$ si $m < 2$

$f(2) = 8 + 4m - 4 - 1 = -3 + 4m$

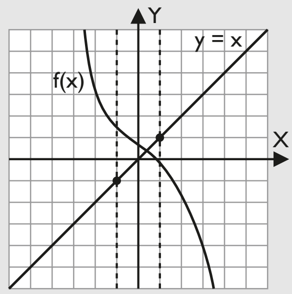
$3 + 4m > 0 \Rightarrow m > -3/4$

Siempre que $-3/4 < m < 2 \Rightarrow f(2) > 0$

Se cumplirían las hipótesis del teorema de Bolzano y se puede garantizar que existe al menos un $c \in [1, 2]$ tal que $f(c) = 0$

81. Si f(x) es una función continua para todo valor de **x,** y se sabe que $f(-1) \ge -1$ y $f(1) \le 1$, demuestra que existe un punto $\mathbf{a} \in [-1, 1]$ con la propiedad de que f(a) = a

Solución:



Se trata de ver si la función f(x) y la función y = x tienen algún punto en común.

Se construye la función g(x) = f(x) – x

g(x) es continua por serlo f(x)

$g(-1) = f(-1) + 1 \geq -1 + 1 = 0$

$g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0$

Luego por el teorema de Bolzano existe al menos un $a \in [-1, 1]$ tal que g(a) = 0, es decir:

$g(a) = f(a) - a \Rightarrow f(a) = a$

82. Se sabe que una función g(x) es continua en el intervalo [0, 1] y que para $0 < x \leq 1$ es $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, donde $f(x) = |x^3 - x|$. ¿Cuánto vale g(0)?

Solución:

Como g(x) es continua en [0, 1], se tiene que:

$$g(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$$

Como $f(x) = |x^3 - x|$, $x \in (0, 1)$

$x^3 < x \Rightarrow f(x) = x - x^3 \Rightarrow g(x) = 1 - x^2$

$$g(0) = \lim_{x \to 0^+} (1 - x^2) = 1$$

83. Supongamos que nos dan la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}(x-4) & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ e^{-x^2} & \text{si } \dfrac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Esta función está definida en el intervalo [0, 1], $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e^{-1} > 0$, pero no existe ningún punto $c \in (0, 1)$ tal que f(c) = 0

¿Contradice el teorema de Bolzano? Razona la respuesta.

Solución:

La función no cumple con la hipótesis de ser continua en el intervalo [0, 1]

En x = 1/2, se tiene:

$f(1/2) = -7/8$

$$\lim_{x \to 1/2^-} f(x) = \lim_{x \to 1/2^-} \frac{1}{4}(x-4) = -7/8$$

$$\lim_{x \to 1/2^+} f(x) = \lim_{x \to 1/2^+} e^{-1/4}$$

La función tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito en x = 1/2

No se contradice el teorema de Bolzano.

84. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ en el intervalo [– 1, 1]. ¿Se cumple el teorema de Bolzano?

Solución:

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

f(x) es discontinua en x = 0 porque no existe f(0), luego no se puede aplicar el teorema de Bolzano.

85. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$

Solución:

Es el cociente de dos funciones continuas, luego es continua; salvo cuando se anule el denominador, lo que nunca sucede, ya que:

$$1 + |x| \geq 1$$

La función es continua en $\mathbb{R}$

86. Calcula, de forma razonada, dos funciones que no sean continuas en un cierto valor x = a de su dominio y tales que la función suma sea continua en dicho valor.

Solución:

Cualquier función constante es continua en $\mathbb{R}$. Se trata de buscar dos funciones que se rompan en un punto y que al sumarlas dé una constante. Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La función f(x) + g(x) = 1 es continua en $\mathbb{R}$

Paso a paso

87. Halla el siguiente límite y representa la función correspondiente para comprobarlo gráficamente.

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 1)$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

88. Halla los siguientes límites y representa la función correspondiente para comprobarlo gráficamente.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

89. Representa la siguiente función y estudia sus discontinuidades.

$$y = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

90. Representa la siguiente función, halla sus asíntotas y represéntalas.

$$y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

91. Representa la siguiente función, halla sus asíntotas oblicuas y represéntalas.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

92. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

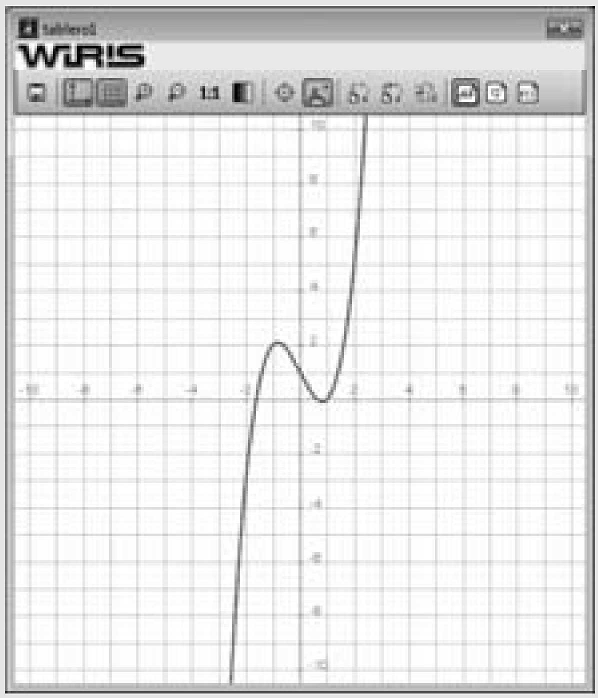
Practica

Halla los siguientes límites y representa la función correspondiente para comprobarlo gráficamente.

93. $\lim_{x \to 2} (x^3 - 2x + 1)$

Solución:

Ejercicio 93
$f(x) = x^3 - 2x + 1 \Rightarrow x \mapsto x^3 - 2 \cdot x + 1$
$\lim_{x \to 2} f(x) \to 5$
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})
Cuando $x \to 2$, se ve que $y \to 5$



94. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$

Solución:

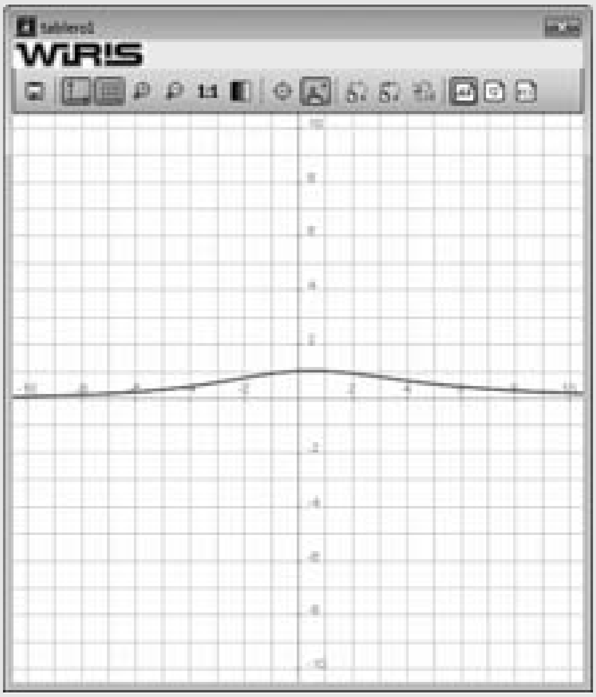
Ejercicio 94

$f(x) = \dfrac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{4^x+5^x}{3^x+6^x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \Rightarrow 0$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

Cuando x → +∞, se ve que y → 0



95. $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^2)$

Solución:

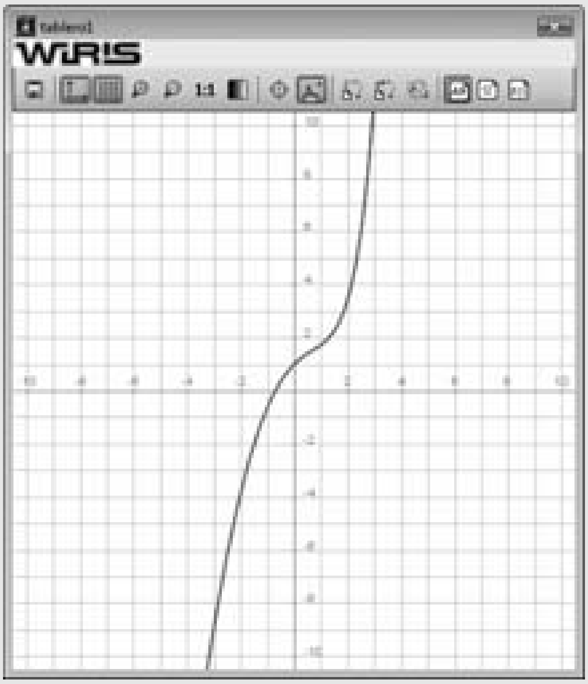
Ejercicio 95

$f(x) = e^x - x^2 \Rightarrow x \mapsto e^x - x^2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \Rightarrow +\infty$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

Cuando x → +∞, se ve que y → +∞



96. $\lim\limits_{x \to 2} 5^{x-2}$

Solución:

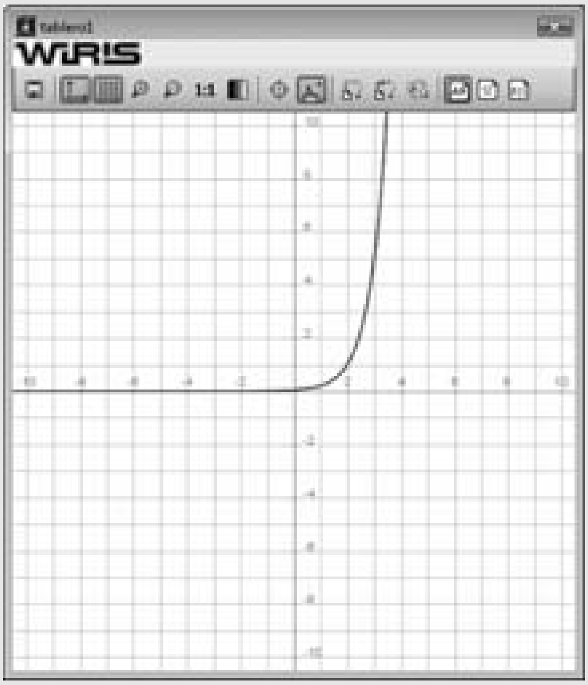
Ejercicio 96

$f(x) = 5^{x-2} \Rightarrow x \mapsto 5^{x-2}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \Rightarrow 1.$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

Cuando x → 2, se ve que y → 1



97. $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + x^2 + 3x - 1)$

Solución:

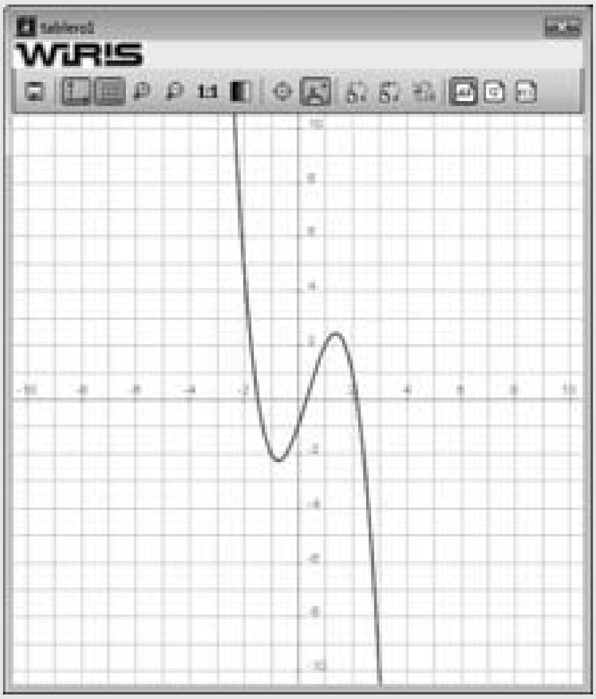
Ejercicio 97

$f(x) = -x^3 + x^2 + 3x - 1 \Rightarrow x \mapsto -x^3 + x^2 + 3 \cdot x - 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \Rightarrow +\infty$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

Cuando $x \to -\infty$, se ve que $y \to +\infty$



98. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + x^2 + 3x - 1)$

Solución:

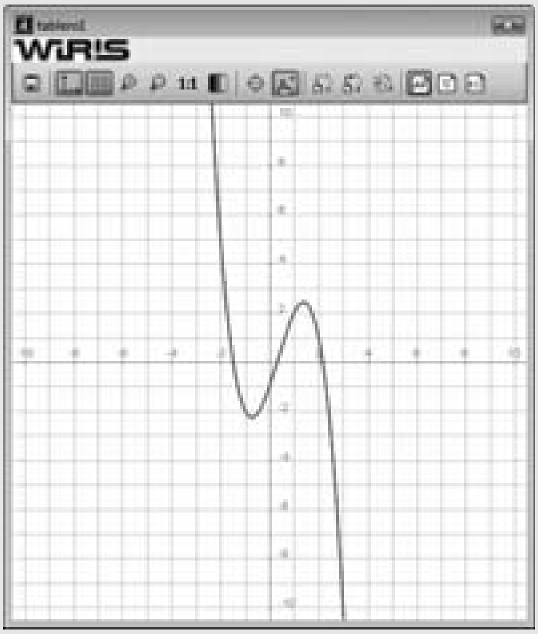
Ejercicio 98

$f(x) = -x^3 + x^2 + 3x - 1 \Rightarrow x \mapsto -x^3 + x^2 + 3 \cdot x - 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \Rightarrow -\infty$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

Cuando $x \to +\infty$, se ve que $y \to -\infty$



99. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 3x}$

Solución:

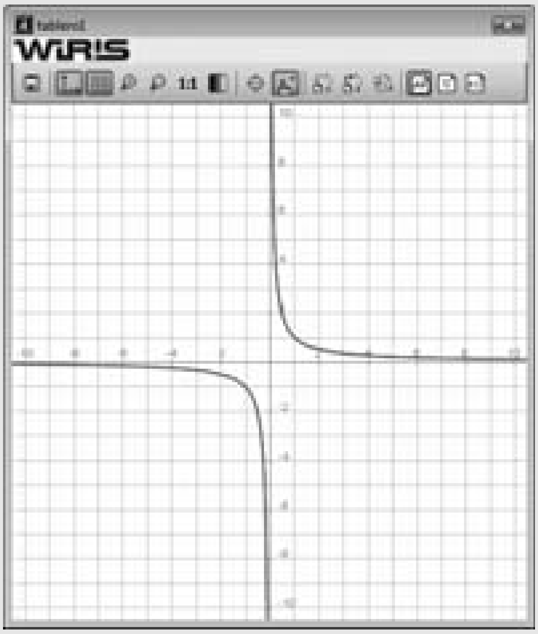
Ejercicio 99

$f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 3x} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) \Rightarrow \dfrac{1}{3}$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

Cuando $x \to 3$, $y \to \dfrac{1}{3}$



100. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x - 5}{x - 2}$

Solución:

Ejercicio 100

$f(x) = \dfrac{3x - 5}{x - 2} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{3 \cdot x - 5}{x - 2}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \Rightarrow \pm\infty$

Como da más y menos infinito, tenemos que hayar los dos límites laterales

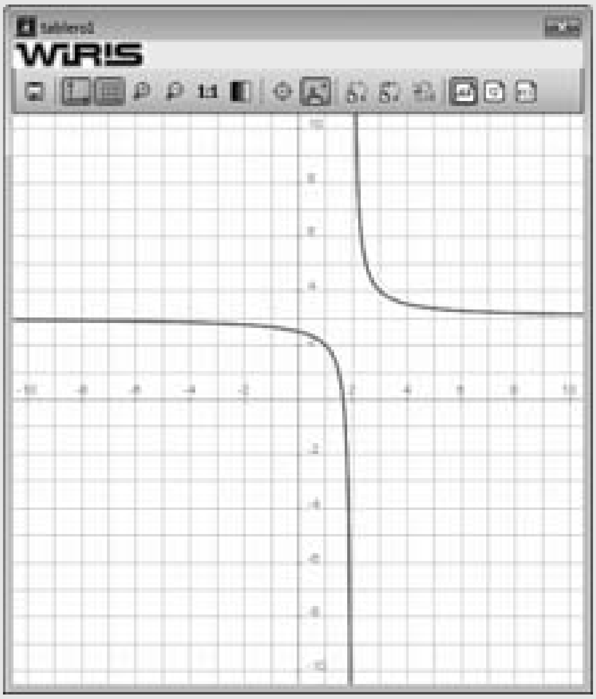
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \Rightarrow -\infty$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

Cuando $x \to 2^+$, se ve que $y \to +\infty$

Cuando $x \to 2^-$, se ve que $y \to -\infty$



101. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + 1 - \dfrac{x^3}{x^2 - 9}\right)$

Solución:

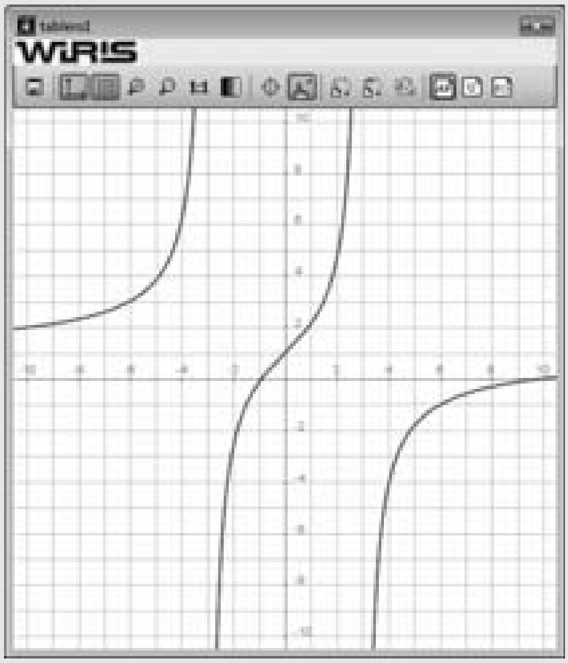
Ejercicio101

$f(x) = x + 1 - \dfrac{x^3}{x^2 - 9} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{x^2 - 9 \cdot x - 9}{x^2 - 9}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \Rightarrow 1$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

Cuando $x \to +\infty$, $y \to 1$



102. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + x}\right)$

Solución:

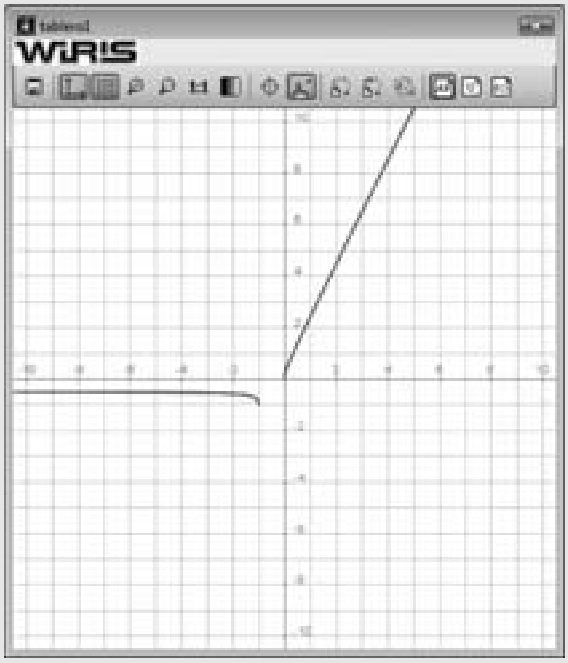
Ejercicio102

$f(x) = x + \sqrt{x^2 + x} \Rightarrow x \mapsto \sqrt{x^2 + x} + x$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \Rightarrow -\dfrac{1}{2}$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

Cuando $x \to -\infty$, $y \to -\dfrac{1}{2}$



103. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{5x-6}-2}{x-2}$

Solución:

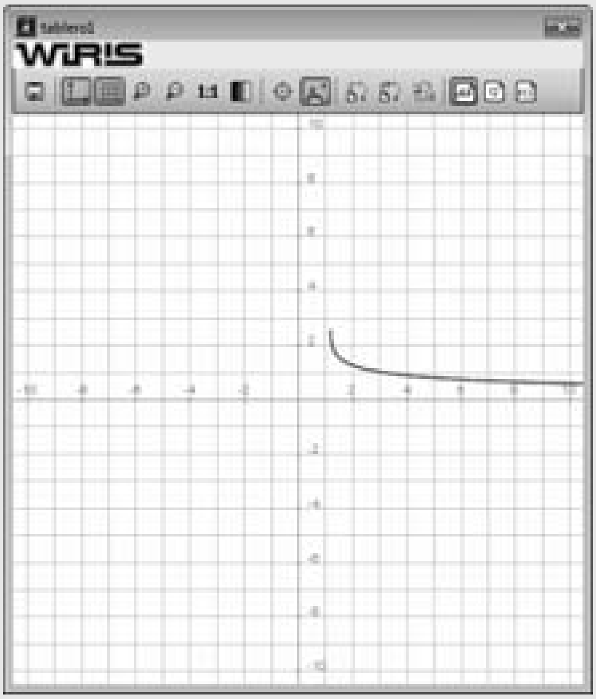
Ejercicio103

$f(x) = \dfrac{\sqrt{5x-6}-2}{x-2} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{1}{x-2} \cdot \sqrt{5 \cdot x - 6} + \dfrac{2}{-x+2}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \rightarrow \dfrac{5}{4}$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

Cuando $x \to +\infty$, $y \to \dfrac{5}{4}$



104. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$

Solución:

Ejercicio104

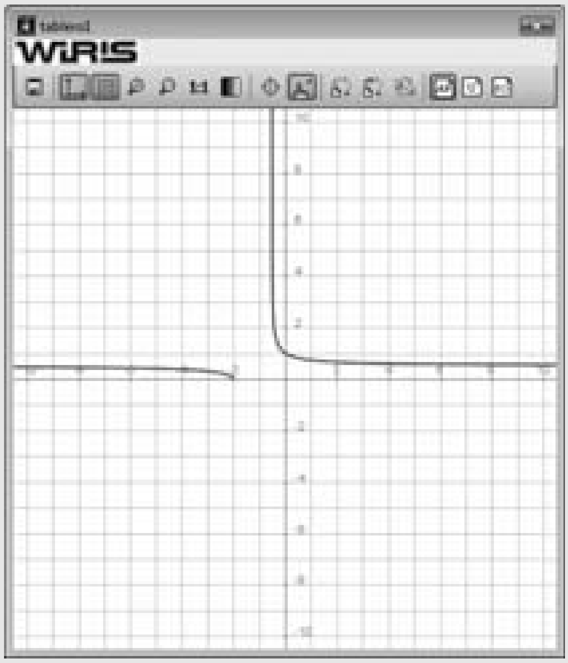
$f(x) = \left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{x+2}{2 \cdot x + 1}^{\frac{x}{x-1}}$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) \rightarrow \dfrac{\sqrt[3]{e^2}}{e}$

$\dfrac{\sqrt[3]{e^2}}{e} \Rightarrow 0.71653$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

Cuando $x \to 1$, se ve que $y \to \dfrac{\sqrt[3]{e^2}}{e} = 0.71653$



Representa las siguientes funciones y estudia sus continuidades.

105. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

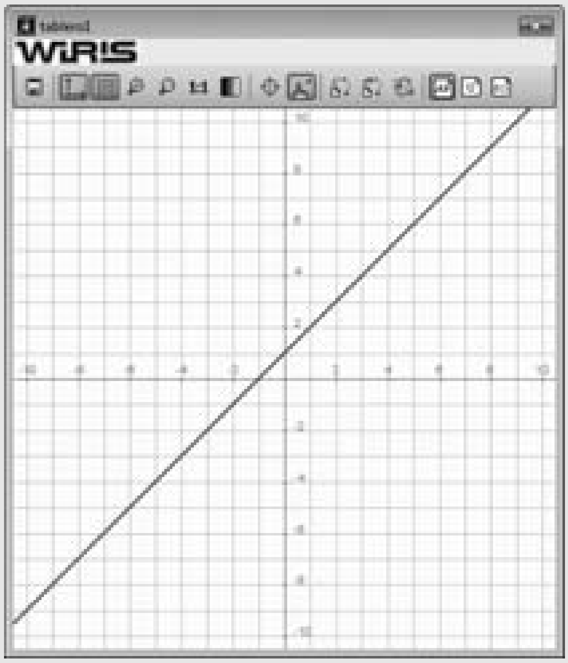
Solución:

Ejercicio105

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} \Rightarrow x \mapsto x+1$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

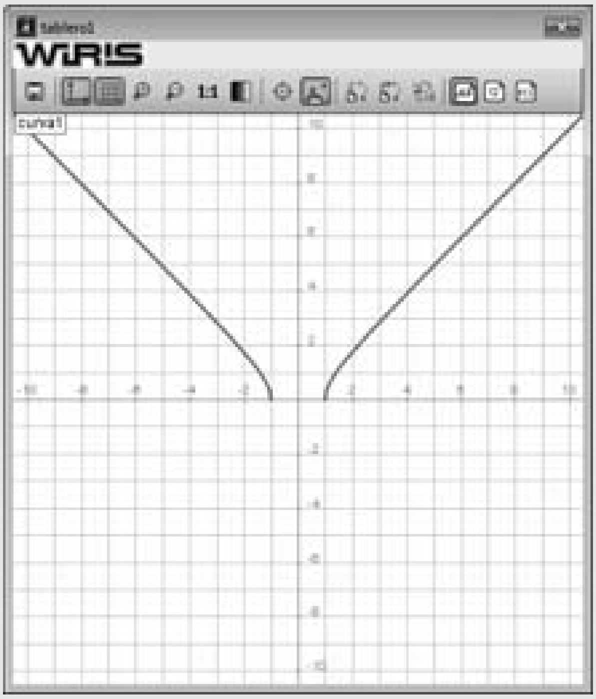
Es discontinua en $x = 1$, donde tiene una discontinuidad evitable.



106. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Solución:

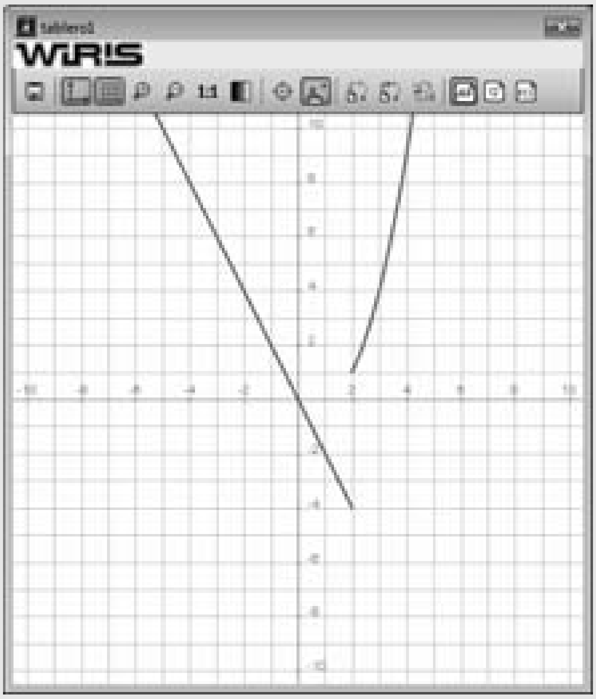
Ejercicio106
$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \rightarrow x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})
Es discontinua en x = − 1, y en x = 1, donde tiene una discontinuidad de 2ª especie.



107. $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Solución:

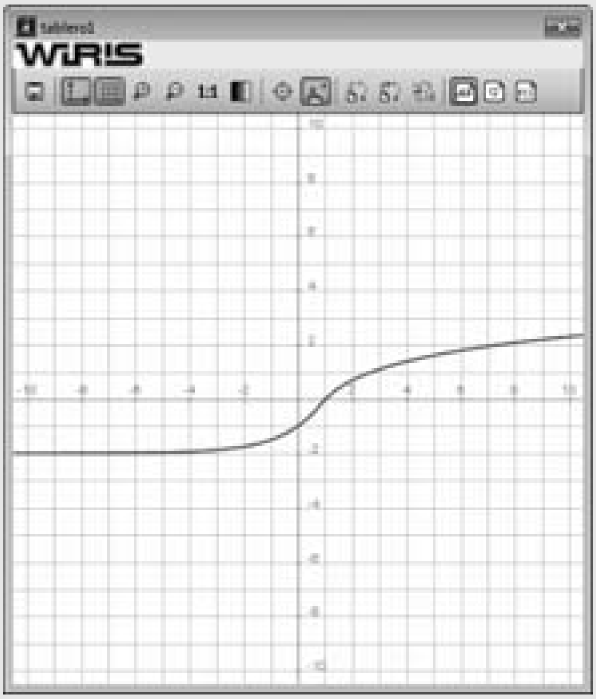
Ejercicio 107
dibujar(− 2x, −∞..2, {color = rojo, anchura_linea = 2}) → tablero1
dibujar(x^2 − 2x + 1, 2..+∞, {color = rojo, anchura_linea = 2}) → tablero1
Es discontinua en x = 2, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto 5



108. $f(x) = \begin{cases} 2^x - 2 & \text{si } x \le 1 \\ L\,x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Solución:

Ejercicio 108
dibujar(2^x − 2, −∞..1, {color = rojo, anchura_linea = 2})
dibujar(ln(x), 1..+∞, {color = rojo, anchura_linea = 2})
Es continua en toda la recta real IR



109. Demuestra que la función $f(x) = x^2 - 2x - 1$ tiene un cero en el intervalo (2, 3). Representa la función y comprueba que se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano.

Solución:

Problema 109

$f(x) = x^2 - 2x - 1 \rightarrow x \mapsto x^2 - 2 \cdot x - 1$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

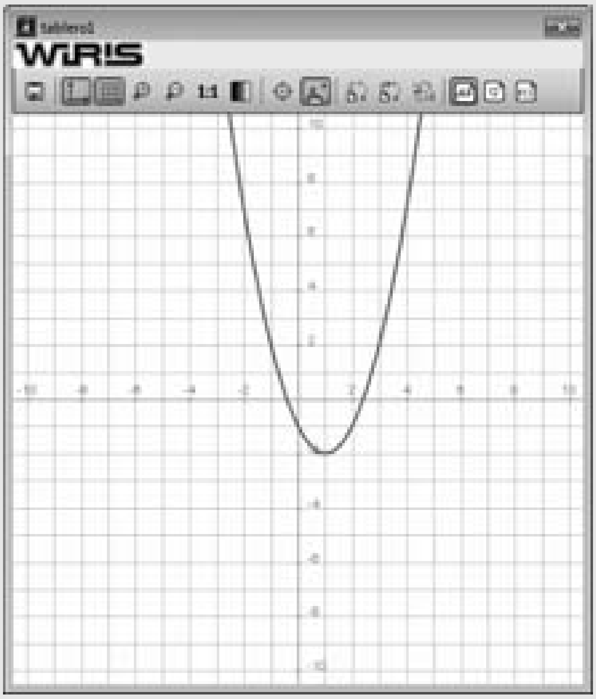
Tomamos el intervalo cerrado [2, 3] en el que f(x) es continua por ser polinómica.

$f(2) \rightarrow -1$

$f(3) \rightarrow 2$

f(x) toma valores de signo opuesto en los extremos.

Por el teorema de Bolzano tiene un cero en el intervalo abierto (2, 3)



Representa las siguientes funciones, halla sus asíntotas y represéntalas:

110. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 2}$

Solución:

Ejercicio 110

$\text{dibujar}\left(\dfrac{x^2}{x+2}, \{\text{color} = \text{rojo}, \text{anchura\_linea} = 2\}\right)$

Asíntota vertical :

dibujar(x = − 2, {color = verde, anchura_linea = 2})

Asíntota horizontal : no tiene

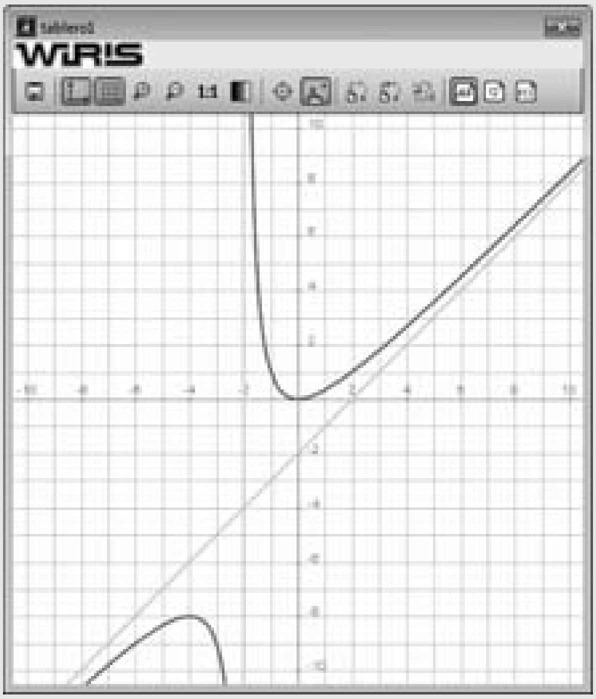
Asíntota oblicua :

$x^2 \;\underline{|\, x + 2} \;\rightarrow\; x^2 \;\underline{|\, x+2}$

$\qquad\qquad\qquad\quad 4 \quad x - 2$

La asíntota oblicua es y = x − 2

dibujar(x − 2, {color = verde, anchura_linea = 2})



111. $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

Solución:

Ejercicio 111

$f(x) = \sqrt{x^2 - x} \rightarrow x \mapsto \sqrt{x^2 - x}$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

$m1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} \rightarrow 1$

$b1 = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - m1 \cdot x) \rightarrow -\dfrac{1}{2}$

La asíntota oblicua por la derecha es $y = x - \dfrac{1}{2}$

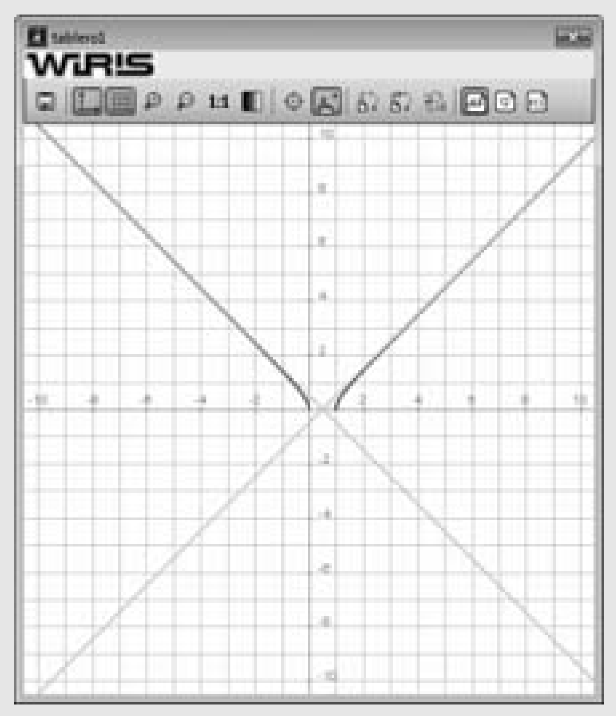
$\text{dibujar}\left(y = x - \dfrac{1}{2}, \{\text{color} = \text{verde}, \text{anchura\_linea} = 2\}\right)$

$m2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} \rightarrow -1$

$b2 = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - m2 \cdot x) \rightarrow \dfrac{1}{2}$

La asíntota oblicua por la izquierda es $y = -x + \dfrac{1}{2}$

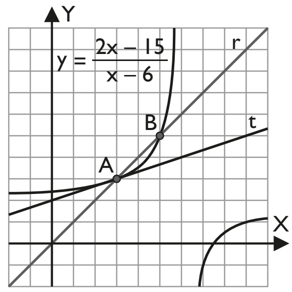
$\text{dibujar}\left(y = -x + \dfrac{1}{2}, \{\text{color} = \text{verde}, \text{anchura\_linea} = 2\}\right)$


WIRIS

10 Cálculo de derivadas

1. La derivada

Piensa y calcula



Calcula mentalmente sobre la primera gráfica del margen:

a) la pendiente de la recta secante, **r,** que pasa por A y B

b) la pendiente de la recta tangente, **t,** en el punto A

Solución:

a) 1 b) 1/3

Aplica la teoría

1. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x) = 2 - 3x$ en $[1, 2]$

b) $f(x) = x^2 - 4$ en $[2, 3]$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en $[2, 4]$

d) $f(x) = \sqrt{x+2}$ en $[-1, 2]$

Solución:

a) –3 b) 5 c) – 1/15 d) 1/3

2. Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los valores que se indican:

a) $f(x) = 5$ en $x = 2$

b) $f(x) = x$ en $x = 5$

c) $f(x) = 3x + 2$ en $x = 4$

d) $f(x) = 2x^2$ en $x = -1$

Solución:

a) 0 b) 1 c) 3 d) –4

3. Aplica la definición de derivada y calcula:

a) la derivada de $f(x) = x^2 - 4x$ en $x = 1$

b) la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$

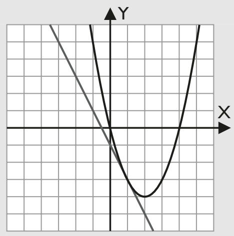
Representa la gráfica de f(x) y la recta tangente para x = 1

Solución:

a) –2

b) $y + 3 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x - 1$

c)



4. Aplica la definición de derivada y calcula:

a) la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$

b) la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 4$

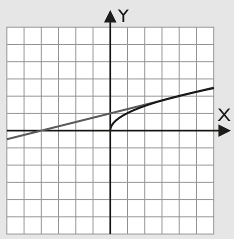
Representa la gráfica de f(x) y la recta tangente para x = 4

Solución:

a) 1/4

b) $y - 2 = \dfrac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow y = \dfrac{1}{4}x + 1$

c)



5. La recta tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto A(2, 1) pasa por el punto B(6, –1). Calcula el valor de f(2) y f'(2)

Solución:

$f(2) = 1$

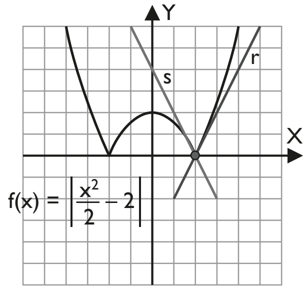
$f'(2) = \dfrac{-1-1}{6-2} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

2. Continuidad y derivabilidad

Piensa y calcula

a) Observando la función del margen, $f(x) = |x^2/2 - 2|$, calcula las pendientes de las rectas tangentes **r** y **s**

b) ¿Se puede dibujar una única recta tangente a la gráfica de la función f(x) en x = 2?



Solución:

a) La pendiente de **r** es 2

La pendiente de **s** es –2

b) No, hay dos.

Aplica la teoría

6. Aplica la definición de derivada y calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 7$ b) $f(x) = x - 2$

c) $f(x) = x^2 - x$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$

Solución:

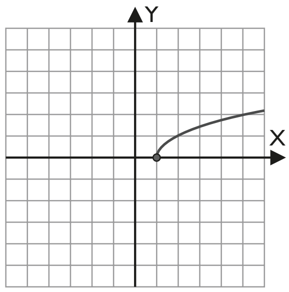
a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = 1$

c) $f'(x) = 2x - 1$

d) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

7. Dada la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x - 1}$, analiza si la función es derivable en x = 1



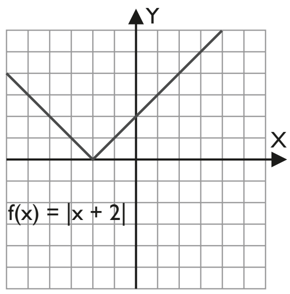
Solución:

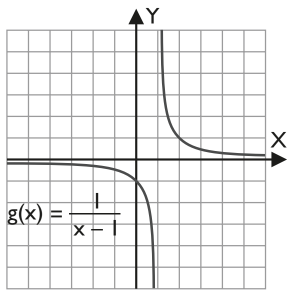
La función solo admitiría derivada por la derecha, puesto que la función no está definida para x < 1. La derivada por la derecha no existe porque, como se ve gráficamente, la tangente sería una recta vertical de ecuación x = 1. La pendiente de la recta sería $+\infty$. Luego no existe la derivada en x = 1

8. Dadas las gráficas de las funciones siguientes, analiza si dichas funciones son derivables en los puntos que se indican:

a) $f(x) = |x + 2|$ en $x = -2$

b) $g(x) = \frac{1}{x - 1}$ en $x = 1$





Solución:

a) La función f(x) no es derivable en x = –2, ya que tiene un pico en ese valor. Las derivadas laterales son distintas.

$f'(-2^-) = -1$ y $f'(-2^+) = 1$

Por lo tanto, no es derivable.

b) La función g(x) no es derivable en x = 1, ya que es discontinua en ese valor.

3. Reglas de derivación. Tablas de derivadas

Aplica la teoría

Deriva en función de **x:**

9. $y = x^3 - 2x + 1$

Solución:
$y' = 3x^2 - 2$

10. $y = (2x - 1)^5$

Solución:
$y' = 10(2x - 1)^4$

11. $y = \text{cotg } 3x$

Solución:
$y' = -3 \text{ cosec}^2 3x$

12. $y = \sqrt{7x + 3}$

Solución:
$y' = \dfrac{7}{2\sqrt{7x + 3}}$

13. $y = \text{arc sen } 8x$

Solución:
$y' = \dfrac{8}{\sqrt{1 - 64x^2}}$

14. $y = e^{2x}$

Solución:
$y' = 2e^{2x}$

15. $y = x \text{ tg } x$

Solución:
$y' = \text{tg } x + x \sec^2 x$

16. $y = L (x^2 + x)$

Solución:
$y' = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x}$

17. $y = x^{\cos x}$

Solución:
$L\, y = \cos x\, L\, x$

$y' = x^{\cos x}\left(-\text{sen } x\, L\, x + \dfrac{1}{x} \cos x\right)$

18. $y = \text{sen } x^3$

Solución:
$y' = 3x^2 \cos x^3$

19. $y = 3^{5x}$

Solución:
$y' = 5 \cdot 3^{5x} L\, 3$

20. $y = \text{arc tg } x^2$

Solución:
$y' = \dfrac{2x}{1 + x^4}$

21. $y = \sqrt[4]{5x}$

Solución:
$y' = \dfrac{5}{4\sqrt[4]{(5x)^3}}$

22. $y = \text{tg } (x^2 + 1)$

Solución:
$y' = 2x \sec^2(x^2 + 1)$

23. $y = \dfrac{2}{(3x - 1)^4}$

Solución:
$y' = -\dfrac{24}{(3x - 1)^5}$

24. $y = \sec 5x$

Solución:
$y' = 5 \sec 5x \text{ tg } 5x$

25. $y = x^x$

Solución:
$L\, y = x\, L\, x$

$y' = x^x(1 + L\, x)$

26. $y = \text{arc cos } 3x^2$

Solución:
$y' = -\dfrac{6x}{\sqrt{1 - 9x^4}}$

27. $y = L \dfrac{x^2 - 2}{2x - 1}$

Solución:
$y' = \dfrac{2x^2 - 2x + 4}{2x^3 - x^2 - 4x + 2}$

28. $y = 8 \text{ sen } 5x$

Solución:
$y' = 40 \cos 5x$

29. $y = x^2 - \cos x$

Solución:
$y' = 2x + \text{sen } x$

30. $y = L (x^2 - 4)^3$

Solución:
$y' = \dfrac{6x}{x^2 - 4}$

31. $y = \log (5x + 2)$

Solución:
$y' = \dfrac{5}{5x + 2} \log e$

32. $y = \text{cosec } x^2$

Solución:
$y' = -2x \text{ cosec } x^2 \text{ cotg } x^2$

33. $y = \dfrac{5x}{x^2 + 1}$

Solución:
$y' = \dfrac{5 - 5x^2}{(x^2 + 1)^2}$

34. $y = \dfrac{\text{sen } x}{2x}$

Solución:
$y' = \dfrac{x \cos x - \text{sen } x}{2x^2}$

35. $x^2 + y^2 = 1$

Solución:
$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{x}{y}$

36. $x^2 - xy + y^2 = 4$

Solución:
$2x - y - xy' + 2yy' = 0$

$y' = \dfrac{y - 2x}{2y - x}$

37. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Solución:
$\dfrac{2x}{4} + \dfrac{2yy'}{9} = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{9x}{4y}$

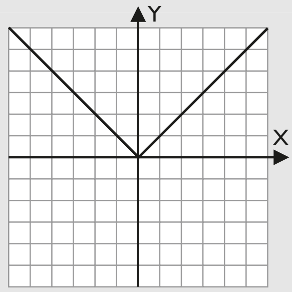
4. Problemas de derivadas

Piensa y calcula

Escribe la función valor absoluto $f(x) = |x|$ como una función definida a trozos y represéntala.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



Aplica la teoría

38. Halla la función derivada de la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ L\,x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

39. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ 7 - x & \text{si } 3 < x < 7 \end{cases}$

justifica si f(x) es derivable en x = 3. ¿Cuál es el significado geométrico del resultado obtenido?

Solución:

a) La continuidad de la función

$f(3) = 4$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 4$$

La función es continua en x = 3

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -3 < x < 3 \\ -1 & \text{si } 3 < x < 7 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} f'(3^-) = \lim\limits_{x \to 3^-} 0 = 0 & \text{si } -3 < x < 3 \\ f'(3^+) = \lim\limits_{x \to 3^+} (-1) = -1 & \text{si } 3 < x < 7 \end{array}\right.$$

$f'(3^-) \neq f'(3^+) \Rightarrow$ La función no es derivable en x = 3

La función es continua y no es derivable en x = 3; la función tiene en el punto de abscisa x = 3 un pico, y en ese punto se pueden dibujar dos tangentes.

40. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$

determina el valor de **k** para que la función sea derivable en x = 1

Solución:

a) La continuidad de la función

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x + 5) = 7 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + k) = 1 + k \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + k = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 6$$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2x = 2 \end{array}\right\}$$

Para k = 6, la función es continua y las derivadas laterales son iguales; luego la función es derivable en x = 1

41. Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = |x - 2|$ en x = 2

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x \leq 2 \\ x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 1 = 1 \end{array}\right\}$$

$f'(2^-) \neq f'(2^+) \Rightarrow$ f(x) no es derivable en x = 2

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 Calcula la tasa de variación media de la función:

$$f(x) = \text{sen }(x)$$

en el intervalo $[0, \pi/2]$

- ☐ 1
- ☐ $\pi/2$
- ☒ $2/\pi$
- ☐ 0

2 Halla la recta tangente a la función:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

en el punto $x = -1/2$

- ☐ $y = 4x + 4$
- ☐ $y = 4x - 4$
- ☒ $y = -4x - 4$
- ☐ $y = -4x + 4$

3 Halla la derivada de la función:

$$y = e^{\cos x}$$

- ☐ $y' = \text{sen } x \, e^{\cos x}$
- ☐ $y' = -\cos x \, e^{\cos x}$
- ☐ $y' = \text{sen } x \, e^{\text{sen } x}$
- ☒ $y' = -\text{sen } x \, e^{\cos x}$

4 Halla la derivada de la función:

$$y = x^x$$

- ☒ $y' = x^x(1 + L\,x)$
- ☐ $y' = x^x(1 - L\,x)$
- ☐ $y' = x^x(-1 + L\,x)$
- ☐ $y' = x^x(-1 - L\,x)$

5 Halla los puntos de la curva de ecuación:

$$y = x^3 - 2x^2 + 1$$

donde la recta tangente es paralela a la recta:

$$y + x - 2 = 0$$

- ☒ $A(1, 0), B(1/3, 22/27)$
- ☐ $A(-1, 0), B(3, 22)$
- ☐ $A(0, 1), B(1, 3)$
- ☐ $A(-1, 0), B(-1/3, 5)$

6 Dada la función:

$$f(x) = 9x + 6x^2 - x^4$$

halla los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de f(x) tiene pendiente 1

- ☐ $A(1, 4), B(-2, -26)$
- ☐ $A(-1, 4), B(-2, 26)$
- ☒ $A(-1, -4), B(2, 26)$
- ☐ $A(-1, 4), B(2, -26)$

7 Dadas las funciones:

$$f(x) = x^3, \qquad g(x) = \text{sen } x$$

calcula la derivada de $(f \circ g)(x)$

- ☐ $(f \circ g)(x) = \text{sen}^3 x, (f \circ g)'(x) = 3 \cos x$
- ☒ $(f \circ g)(x) = \text{sen}^3 x, (f \circ g)'(x) = 3 \,\text{sen}^2 x \cos x$
- ☐ $(f \circ g)(x) = \text{sen}^3 x, (f \circ g)'(x) = 3 \cos^2 x \cos x$
- ☐ $(f \circ g)(x) = \text{sen}^3 x, (f \circ g)'(x) = 3 \cos^2 x \,\text{sen } x$

8 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le -\sqrt{2} \\ -x^2 + 2 & \text{si } x > -\sqrt{2} \end{cases}$$

¿Es f(x) continua en $x = -\sqrt{2}$?

¿Es f(x) derivable en $x = -\sqrt{2}$?

- ☒ es continua y no derivable.
- ☐ es continua y derivable.
- ☐ no es continua ni derivable.
- ☐ no es continua y sí es derivable.

9 Encuentra el valor de **k** para el cual la función:

$$f(x) = \begin{cases} 6 - \dfrac{x}{2}, & x < 2 \\ x^2 + kx, & x \ge 2 \end{cases}$$

es continua.

Estudia si su derivada es una función continua.

- ☐ $k = -1/2$ y la derivada es continua.
- ☐ $k = 1$ y la derivada es continua.
- ☐ $k = -2$ y la derivada es continua.
- ☒ $k = 1/2$ y la derivada no es continua.

10 La función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) e^{-x+1} & \text{si } x > 1 \\ \text{sen } (x - 1) & \text{si } x \le 1 \end{cases}$$

Encuentra los valores α, β y γ que hacen que f(x) sea continua y admita primera y segunda derivada en el punto $x = 1$

- ☒ $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 0$
- ☐ $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = 2$
- ☐ $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 1$
- ☐ $\alpha = 2, \beta = 0, \gamma = -1$

1. La derivada

42. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x) = -2x - 3$ en $[1, 2]$

b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en $[1, 3]$

c) $f(x) = x^3 + x^2$ en $[0, 1]$

d) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ en $[2, 5]$

Solución:

a) -2 b) 2

c) 2 d) 1/3

43. Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los valores que se indican:

a) $f(x) = 3x + 2$ en $x = -2$

b) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ en $x = 1$

c) $f(x) = \sqrt{x + 1}$ en $x = 3$

d) $f(x) = x^3 + x$ en $x = 2$

Solución:

a) 3 b) 6

c) 1/4 d) 13

44. Aplica la definición de derivada y calcula:

a) La derivada de $f(x) = 3/x$ en $x = 1$

b) La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$

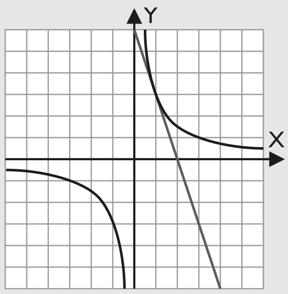
Representa la gráfica de f(x) y la recta tangente para $x = 1$

Solución:

a) -3

b) $y - 3 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 6$

c)



45. La recta tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto $A(-1, 5)$ pasa por el punto $B(1, -3)$. Calcula el valor de $f(-1)$ y $f'(-1)$

Solución:

$f(-1) = 5$ $f'(-1) = -4$

2. Continuidad y derivabilidad

46. Aplica la definición de derivada y calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x + 2$

b) $f(x) = -x^2 + x$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

Solución:

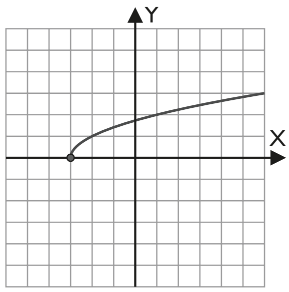
a) $f'(x) = 1$

b) $f'(x) = -2x + 1$

c) $f'(x) = 3x^2$

d) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x + 1)^2}$

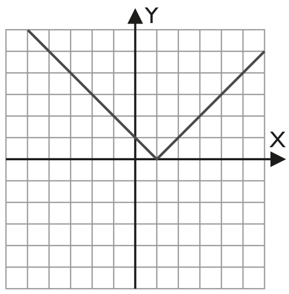
47. Dada la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$, analiza si la función es derivable en $x = -3$



Solución:

No es derivable en $x = -3$. Tiene una recta tangente vertical de ecuación $x = -3$

48. Dada la gráfica de la función $f(x) = |x - 1|$

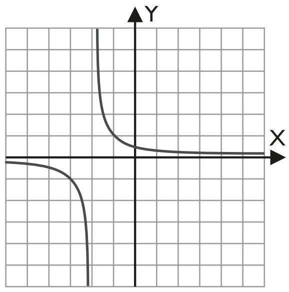


analiza si dicha función es derivable en el punto $x = 1$

Solución:

La función tiene un pico en $x = 1$. No es derivable. Sus derivadas laterales son $f'(-1^-) = -1$ y $f'(-1^+) = 1$

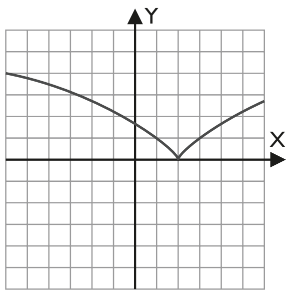
49. Dada la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$



analiza si dicha función es derivable en $x = -2$

Solución:
No es derivable en $x = -2$ porque la función es discontinua en ese valor.

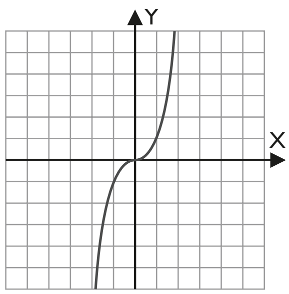
50. Dada la gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{(x - 2)^2}$



analiza si dicha función es derivable en $x = 2$

Solución:
La función tiene un pico en $x = 2$. No es derivable. Tiene una tangente vertical de ecuación $x = 2$

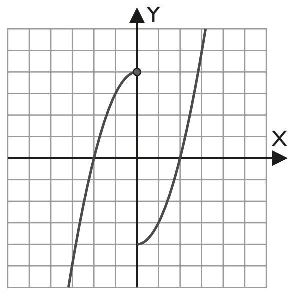
51. Dada la gráfica de la función $f(x) = x^3$



analiza si dicha función es derivable en $x = 0$

Solución:
Sí es derivable en $x = 0$. La tangente es la recta $y = 0$

52. Dada la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$



analiza si dicha función es derivable en $x = 0$

Solución:
No es derivable porque es discontinua en $x = 0$

3. Reglas de derivación. Tablas de derivadas

Halla la derivada de la función:

53. $y = (x^2 - 3)e^x$

Solución:
$y' = (x^2 + 2x - 3)e^x$

54. $y = x \operatorname{sen} x$

Solución:
$y' = \operatorname{sen} x - x \cos x$

55. $y = 7 \operatorname{tg} 3x$

Solución:
$y' = 21 \sec^2 3x$

56. $y = (2x + 3)^2$

Solución:
$y' = 4(2x + 3)$

57. $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$

Solución:
$y' = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

58. $y = e^{x^2 + 3}$

Solución:
$y' = 2xe^{x^2 + 3}$

59. $y = 3x + \sec x$

Solución:
$y' = 3 + \sec x \operatorname{tg} x$

60. $y = 2x + \sqrt{x + 1}$

Solución:

$y' = 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x + 1}}$

61. $y = 5 \text{ arc sen } 4x$

Solución:

$y' = \dfrac{20}{\sqrt{1 - 16x^2}}$

62. $y = L\,(3x - 2)$

Solución:

$y' = \dfrac{3}{3x - 2}$

63. $y = x^{3x}$

Solución:

$L\,y = 3x\,L\,x$

$y' = 3x^{3x}\,(L\,x + 1)$

64. $y = \text{tg}\,(x^3 + 1)$

Solución:

$y' = 3x^2 \sec^2 (x^3 + 1)$

65. $y = 2^{7x}$

Solución:

$y' = 7 \cdot 2^{7x}\,L\,2$

66. $y = \text{arc tg } 3x^2$

Solución:

$y' = \dfrac{6x}{1 + 9x^4}$

67. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

Solución:

$y' = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$

68. $y = \cos 5x^2$

Solución:

$y' = -10x \text{ sen } 5x^2$

69. $y = \dfrac{2x}{x - 1}$

Solución:

$y' = -\dfrac{2}{(x - 1)^2}$

70. $y = (\text{sen } x)^x$

Solución:

$L\,y = x\,L \text{ sen } x$

$y' = (\text{sen } x)^x(L \text{ sen } x + x \text{ cotg } x)$

71. $y = \text{arc cos } x^2$

Solución:

$y' = -\dfrac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$

72. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

Solución:

$y' = -\dfrac{2x}{(x^2 - 1)^2}$

73. $y = L\,\sqrt[4]{x^3 + 5x - 7}$

Solución:

$y' = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3x^2 + 5}{x^3 + 5x - 7}$

74. $y = L \text{ sen } x$

Solución:

$y' = \text{cotg } x$

75. $y = \text{cosec}\,(5x + 2)$

Solución:

$y' = -5 \text{ cosec}\,(5x + 2) \text{ cotg}\,(5x + 2)$

76. $y = \log x^2$

Solución:

$y' = \dfrac{2}{x}$

77. $y = \dfrac{\text{tg } x}{x}$

Solución:

$y' = \dfrac{x \sec^2 x - \text{tg } x}{x^2}$

78. $y = \text{sen } x + \cos x$

Solución:

$y' = \cos x - \text{sen } x$

79. Halla la derivada de la función implícita $xy = 4$

Solución:

$y + xy' = 0$

$y' = -\dfrac{y}{x}$

80. Halla la derivada de la función implícita $x^2 - y^3 = 0$

Solución:

$2x - 3y^2y' = 0$

$y' = \dfrac{2x}{3y^2}$

81. Halla la derivada de la función implícita $x^2 - y^2 = 16$

Solución:

$2x - 2yy' = 0$

$y' = \dfrac{x}{y}$

4. Problemas de derivadas

82. Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \le 2 \\ 4x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

en el punto $x = 2$

Solución:

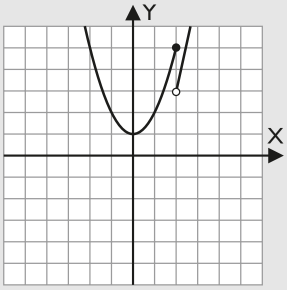
La continuidad de la función

$f(2) = 5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 + 1) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (4x - 5) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) \ne f(2)$$

La función no es es continua en $x = 2$

La función no es derivable en $x = 2$



Se observa que las tangentes por la izquierda y por la derecha tienen la misma pendiente, pero la función no es derivable.

83. Halla el valor de **a** y **b** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 2$

Solución:

a) La continuidad de la función

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2 - bx - 4) = -2b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$4a + 6 = -2b \Rightarrow 2a + b = -3$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (2ax + 3) = 4a + 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2x - b) = 4 - b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$4a + 3 = 4 - b \Rightarrow 4a + b = 1$

Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2a + b = -3 \\ 4a + b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 2, b = -7$$

84. Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = x|x|$

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

La función es continua y derivable por estar definida por polinomios. El único punto que hay que estudiar es el correspondiente al valor de la abscisa $x = 0$

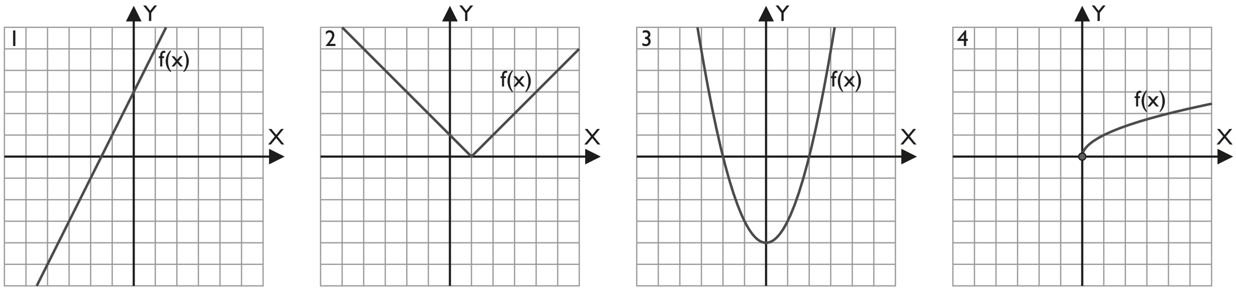
$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

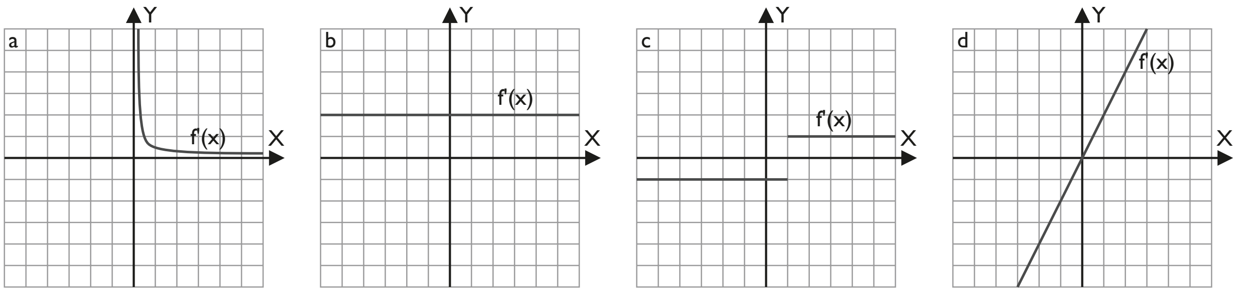
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-2x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0 \end{array}\right\}$$

$f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow$ La función es derivable en $x = 0$

Para ampliar

85. Asocia cada gráfica de la función f(x) con su función derivada f'(x)

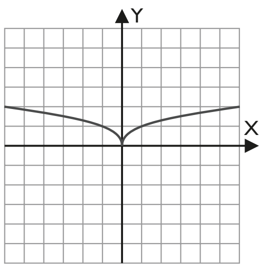




Solución:

f(x)	1	2	3	4
f'(x)	b	c	d	a

86. Dada la gráfica de la función $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

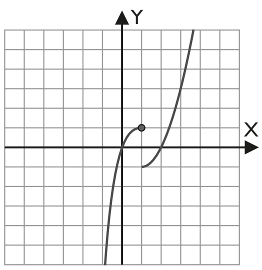


analiza si dicha función es derivable en x = 0

Solución:
No es derivable en x = 0 porque tiene una tangente vertical de ecuación x = 0

87. Dada la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x > 1 \\ x^3 - 3x^2 + 3x & \text{si } x \le 1 \end{cases}$$

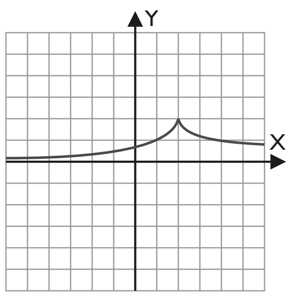


analiza si dicha función es derivable en x = 1

Solución:
No es derivable en x = 1 porque la función no es continua en ese valor.

88. Dada la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



analiza si dicha función es derivable en x = 2

Solución:
No es derivable en x = 2 porque la función tiene un pico. La gráfica en ese valor tiene dos tangentes distintas.

Halla las derivadas de las funciones siguientes:

89. $y = (x^2 + 1)2^x$

Solución:
$y' = 2x \cdot 2^x + (x^2 + 1)\, 2^x\, L\, 2$

90. $y = \sqrt{x}\ \text{sen}\ x$

Solución:
$y' = \dfrac{\text{sen}\ x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\ \cos x$

91. $y = \dfrac{2}{x^2 - 1}$

Solución:
$y' = -\dfrac{4x}{(x^2 - 1)^2}$

92. $y = \dfrac{x^2}{\text{sen}\ x}$

Solución:
$y' = \dfrac{2x\ \text{sen}\ x - x^2 \cos x}{\text{sen}^2\ x}$

93. $y = x \cos x$

Solución:
$y' = \cos x - x\ \text{sen}\ x$

94. $y = (x + 2)e^x$

Solución:
$y' = (x + 3)\ e^x$

95. $y = \sqrt{1 - x^2}$

Solución:
$y' = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

96. $y = \dfrac{1}{2}x - \text{tg}\ x$

Solución:
$y' = \dfrac{1}{2} - \sec^2 x$

97. $y = \dfrac{1 + \text{sen}\ x}{1 - \text{sen}\ x}$

Solución:
$y' = \dfrac{2 \cos x}{(1 - \text{sen}\ x)^2}$

98. $y = (\text{sen}\ x)^{\cos x}$

Solución:
$L\ y = \cos x\ L\ \text{sen}\ x$
$y' = (\text{sen}\ x)^{\cos x}\ (-\text{sen}\ x\ L\ \text{sen}\ x + \cos x\ \text{cotg}\ x)$

99. $y = \dfrac{x + 3}{x - 2}$

Solución:
$y' = -\dfrac{5}{(x - 2)^2}$

100. $y = \text{arc}\cos x^2$

Solución:
$y' = -\dfrac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$

101. $y = \dfrac{\sec x}{x}$

Solución:
$y' = \dfrac{x \sec x\ \text{tg}\ x - \sec x}{x^2}$

102. $y = \sqrt{x + \text{sen}\ x}$

Solución:
$y' = \dfrac{1 + \cos x}{2\sqrt{x + \text{sen}\ x}}$

103. $y = \dfrac{9}{x^2 - 3}$

Solución:
$y' = -\dfrac{18x}{(x^2 - 3)^2}$

104. $y = \text{sen}\ x\ \text{tg}\ x$

Solución:
$y' = \cos x\ \text{tg}\ x + \text{tg}\ x \sec x = \text{tg}\ x\ (\cos x + \sec x)$

105. $y = x^{L\,x}$

Solución:
$L\ y = L\ x\ L\ x \Rightarrow L\ y = (L\ x)^2$
$y' = \dfrac{L\ x}{x}\ 2x^{Lx}$

106. $y = L\ (\cos x)^2$

Solución:
$y' = -2\ \text{tg}\ x$

107. $y = \text{arc sen } \frac{x^2}{5}$

Solución:

$y' = \frac{2x}{\sqrt{25 - x^4}}$

108. $y = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$

Solución:

$y' = \frac{\frac{-6}{(x-3)^2}}{2\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}} = -\frac{3\sqrt{x-3}}{(x-3)^2\sqrt{x+3}}$

109. $y = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^3$

Solución:

$y' = 3\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)$

110. $y = \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3}$

Solución:

$y' = \text{tg } x\,(\sec^5 x - \sec^3 x)$

111. $y = \text{arc tg } \frac{x}{2}$

Solución:

$y' = \frac{2}{4 + x^2}$

112. $y = \text{sen } 2x \cos 2x$

Solución:

$y' = 2(\cos^2 2x - \text{sen}^2\, 2x) = 2 \cos 4x$

113. $y = 2^{\text{sen } x}$

Solución:

$y' = \cos x\; 2^{\text{sen } x}\, L\, 2$

114. $y = L\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

Solución:

$y = \frac{1}{2}\left[L(x+1) - L(x-1)\right]$

$y' = -\frac{1}{x^2 - 1}$

115. $y = 2 \text{ cotg}^2 (\pi x + 2)$

Solución:

$y' = -4\pi \text{ cotg } (\pi x + 2) \text{ cosec}^2 (\pi x + 2)$

116. $y = L\,(L\, x^2)$

Solución:

$y' = \frac{2}{x\, L\, x^2}$

117. $y = e^{5x}$

Solución:

$y' = 5e^{5x}$

118. $y = \sec^2 2x$

Solución:

$y' = 4 \sec^2 2x \text{ tg } 2x$

119. $y = \sec^2 x^2$

Solución:

$y' = 4x \sec^2 x^2 \text{ tg } x^2$

120. $y = \log \sqrt{x+1}$

Solución:

$y = \frac{1}{2}\log(x+1)$

$y' = \frac{1}{2(x+1)} \log e$

121. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Solución:

$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

122. $y = L\, e^x$

Solución:

$y = x$

$y' = 1$

123. $y = \log \frac{x^2}{x-1}$

Solución:

$y = 2\log x - \log (x-1)$

$y' = \frac{x-2}{x(x-1)} \log e$

124. $y = x^2e^x + 2x$

Solución:
$y' = e^x(x^2 + 2x) + 2$

125. $y = (\text{arc sen } x)^x$

Solución:
$L\, y = x\, L \text{ arc sen } x$
$$y' = (\text{arc sen } x)^x \left(L \text{ arc sen } x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}\ \text{arc sen } x}\right)$$

126. $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

Solución:
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

127. $y = 5x \cos x$

Solución:
$y' = 5(\cos x - x \text{ sen } x)$

128. $y = (x + 1) \text{ tg } x$

Solución:
$y' = \text{tg } x + (x + 1) \sec^2 x$

129. $y = 2^x\, L\, x$

Solución:
$$y' = 2^x\left(L\, 2\, L\, x + \frac{1}{x}\right)$$

130. $y = \dfrac{\text{tg } x}{\cos x}$

Solución:
$$y = \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x}$$
$$y' = \frac{\cos^2 x + 2 \text{ sen}^2 x}{\cos^3 x}$$

131. $y = \dfrac{x^2}{L\, x}$

Solución:
$$y' = \frac{x(2\, L\, x - 1)}{L^2\, x}$$

132. $y = x \text{ arc sen } x$

Solución:
$$y' = \text{arc sen } x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

133. $y = \dfrac{\text{sen } x + \cos x}{\cos x - \text{sen } x}$

Solución:
$$y' = \frac{2}{(\cos x - \text{sen } x)^2}$$

134. $y = \dfrac{\text{arc cos } x}{\text{arc sen } x}$

Solución:
$$y' = -\frac{\text{arc sen } x + \text{arc cos } x}{\sqrt{1 - x^2}\,(\text{arc sen } x)^2}$$

135. $y = \text{arc cos } e^x$

Solución:
$$y' = -\frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$$

136. $y = \sqrt{\text{cotg } x}$

Solución:
$$y' = -\frac{\text{cosec}^2 x}{2\sqrt{\text{cotg } x}}$$

137. $y = L^2 (\text{sen } x)$

Solución:
$y' = 2\, L(\text{sen } x) \text{ cotg } x$

138. $y = \text{arc tg } L\, x$

Solución:
$$y' = \frac{1}{x(1 + L^2\, x)}$$

139. $y = \text{arc tg } L\, \dfrac{1}{x}$

Solución:
$y = \text{arc tg } (L\, 1 - L\, x) = \text{arc tg } (-L\, x)$
$$y' = -\frac{1}{x(1 + L^2\, x)}$$

140. $y = e^{\sec x}$

Solución:
$y' = e^{\sec x} \sec x \text{ tg } x$

141. $y = L \cos \dfrac{1}{x}$

Solución:

$$y' = \frac{\dfrac{1}{x^2} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}}{\cos \dfrac{1}{x}} = \frac{1}{x^2} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$$

142. Halla la derivada de la siguiente función implícita:

$$3x - 2y = 4$$

Solución:

$3 - 2yy' = 0$

$y' = \dfrac{3}{2y}$

143. Halla la derivada de la siguiente función implícita:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

Solución:

$2(x - 1) + 2(y - 2)y' = 0$

$y' = -\dfrac{(x - 1)}{(y - 2)}$

144. Halla la derivada de la siguiente función implícita:

$$x^2y + xy^2 = 2$$

Solución:

$2xy + x^2y' + y^2 + 2xyy' = 0$

$(x^2 + 2xy)y' = -2xy - y^2$

$y' = -\dfrac{2xy + y^2}{x^2 + 2xy}$

145. Halla la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 - 4xy = 1$ en el punto $A(1, 4)$

Solución:

$2x + 2yy' - 4y - 4xy' = 0$

$x + yy' - 2y - 2xy' = 0$

$(y - 2x)y' = 2y - x$

$y' = \dfrac{2y - x}{y - 2x}$

Para el punto $(1, 4) \Rightarrow y' = \dfrac{7}{2}$

$y - 4 = \dfrac{7}{2}(x - 1) \Rightarrow 7x - 2y + 1 = 0$

146. Halla las tres primeras derivadas de la función:

$$y = x^3 + 3x$$

Solución:

$y' = 3x^2 + 3$ $\qquad$ $y'' = 6x$

$y''' = 6$

147. Dada la función $y = x^3 - 3x^2$

a) halla las tres primeras derivadas.

b) halla los puntos de la gráfica en los que la tangente sea horizontal.

Solución:

a) $y' = 3x^2 - 6x$

$y'' = 6x - 6$

$y''' = 6$

b) Si la tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

Si $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

Si $x = 2 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow A(2, -4)$

148. Dada la función $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

a) halla las tres primeras derivadas.

b) halla los puntos de la gráfica en los que la tangente sea horizontal.

Solución:

a) $y' = 3x^2 - 12x + 9$

$y'' = 6x - 12$

$y''' = 6$

b) Si la tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$

Si $x = 1 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(1, 4)$

Si $x = 3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(3, 0)$

149. Halla las tres primeras derivadas de la función:

$$y = x^3 + 3x^2 + x - 3$$

Solución:

$y' = 3x^2 + 6x + 1$

$y'' = 6x + 6$

$y''' = 6$

150. Halla las tres primeras derivadas de la función:

$$y = x^3 + x^2$$

Solución:

$y' = 3x^2 + 2x$

$y'' = 6x + 2$

$y''' = 6$

151. Dada la función $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

a) halla las tres primeras derivadas de la función.

b) halla los puntos en los que la recta tangente es horizontal.

Solución:

a) $y' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$y'' = \dfrac{2}{x^3}$

$y''' = -\dfrac{6}{x^4}$

b) Si la tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Si $x = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow A(-1, -2)$

Si $x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(1, 2)$

152. Halla las tres primeras derivadas de la función:

$$y = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

Solución:

$y' = \dfrac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$ $\quad$ $y'' = \dfrac{8x^3 - 24x}{(x^2 + 1)^3}$

$y''' = \dfrac{-24x^4 + 144x^3 - 24}{(x^2 + 1)^4}$

153. Dada la función $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

a) halla las tres primeras derivadas.

b) analiza si puede haber algún punto de la gráfica que tenga tangente horizontal.

Solución:

a) $y' = \dfrac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$

$y'' = \dfrac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$

$y''' = \dfrac{-6x^4 - 36x^2 - 6}{(x^2 - 1)^4}$

b) Si la recta tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' \neq 0$ para todo valor de **x**

No hay ningún punto de la gráfica que tenga recta tangente horizontal.

154. Halla las tres primeras derivadas de la función:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Solución:

$y' = -\dfrac{4x}{(x^2 - 1)^2}$ $\quad$ $y'' = \dfrac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$

$y''' = \dfrac{-48x^3 - 48x}{(x^2 - 1)^4}$

155. Halla las tres primeras derivadas de la función:

$$y = \frac{5}{x^2 + 1}$$

Solución:

$y' = -\dfrac{10x}{(x^2 + 1)^2}$

$y'' = \dfrac{30x^2 - 10x}{(x^2 + 1)^3}$

$y''' = \dfrac{-120x^3 + 120x}{(x^2 + 1)^4}$

156. Dada la función $y = xe^x$

a) halla las tres primeras derivadas.

b) halla los puntos de la gráfica en los que la tangente es horizontal.

Solución:

a) $y' = (x + 1)e^x$

$y'' = (x + 2)e^x$

$y''' = (x + 3)e^x$

b) Si la tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = -1$

Si $x = -1, y = -1/e \Rightarrow A(-1, -1/e)$

157. Halla las tres primeras derivadas de la siguiente función: $y = x^2e^x$

Solución:

$y' = (x^2 + 2x)e^x$

$y'' = (x^2 + 4x + 2)e^x$

$y''' = (x^2 + 6x + 6)e^x$

158. Halla las tres primeras derivadas de la siguiente función: $y = x \text{ L } x$

Solución:

$y' = 1 + \text{L } x$ $\quad$ $y'' = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $y''' = -\dfrac{1}{x^2}$

159. Dada la función $y = \text{L } x^2$

a) halla las tres primeras derivadas.

b) analiza si hay algún punto de la gráfica con tangente horizontal.

Solución:

a) $y' = \dfrac{2}{x}$ $\quad$ $y'' = -\dfrac{2}{x^2}$ $\quad$ $y''' = \dfrac{4}{x^3}$

b) No hay ningún punto con tangente horizontal porque $y' \neq 0$ para todo valor de **x**

160. Dada la función $y = L(x^2 + 1)$

a) halla las tres primeras derivadas.

b) analiza si hay algún punto de la gráfica con tangente horizontal.

Solución:

a) $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ $\quad y'' = \dfrac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$

$y''' = \dfrac{4x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$

b) Si la tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$

Si $x = 0, y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

161. Dada la función $y = \dfrac{L\,x}{x}$

a) halla las tres primeras derivadas.

b) analiza si hay algún punto de la gráfica con tangente horizontal.

Solución:

a) $y' = \dfrac{1 - L\,x}{x^2}$ $\quad y'' = \dfrac{2\,L\,x - 3}{x^3}$

$y''' = \dfrac{11 - 6\,L\,x}{x^4}$

b) Si la tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = e$

Si $x = e, y = 1/e \Rightarrow A(e, 1/e)$

Problemas

162. Halla las rectas tangentes horizontales a la gráfica de la función $y = x^3 - 27x$

Solución:

$y' = 3x^2 - 27$

$y' = 0 \Rightarrow x = -3, x = 3$

Si $x = -3, y = 54 \Rightarrow A(-3, 54)$

Si $x = 3, y = -54 \Rightarrow A(3, -54)$

Recta tangente en A: $y = 54$

Recta tangente en B: $y = -54$

163. Determina los puntos donde la gráfica de la función $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ tiene una tangente horizontal en el intervalo $[0, 2\pi]$

Solución:

$y' = 1 + \cos x$

$y' = 0 \Rightarrow x = \pi$

Si $x = \pi, y = \pi \Rightarrow A(\pi, \pi)$

164. Encuentra el valor de **k** tal que la recta $y = 4x - 9$ sea tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - kx$

Solución:

Sea el punto $A(x, y)$ el punto de tangencia. Se tiene:

$y' = 4$

$f'(x) = 2x - k$

$2x - k = 4 \qquad (1)$

El punto A es común a la tangente y a la curva:

$4x - 9 = x^2 - kx \qquad (2)$

Resolviendo el sistema de (1) y (2):

$x = 3, k = 2$

$x = -3, k = -10$

165. Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x \le 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

en el punto $x = 1$

Solución:

Se estudia el punto $x = 1$

a) La continuidad de la función

$f(1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x-1)^3 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x-1)^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

La función es continua en $x = 1$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} 3(x-1)^2 & \text{si } x < 1 \\ 2(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 3(x-1)^2 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2(x-1) = 0 \end{array}\right\}$$

$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow$ La función es derivable en $x = 1$

166. Determina los valores de **a** y **b** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \le 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$

Solución:

a) La continuidad de la función $f(1) = a + b$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (ax + b) = a + b \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = 1$$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} a = a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2x = 2 \end{array}\right\} a = 2$$

Resolviendo el sistema:

$a = 2, b = -1$

167. Determina el valor de **a** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \geq 3 \\ 2x + a & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 3$

Solución:

a) La continuidad de la función

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x + a) = 6 + a \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 2x) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$6 + a = 3 \Rightarrow a = -3$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x > 3 \\ 2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (2x - 2) = 4 \end{array}\right\}$$

$f'(3^-) \neq f'(3^+) \Rightarrow$ La función no es derivable en $x = 3$ para ningún valor de **a**

168. Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} (2 - x)^3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

en el punto $x = 1$

Solución:

Se estudia el punto $x = 1$

a) La continuidad de la función

$f(1) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2 - x)^3 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

La función es continua en $x = 1$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} -3(2 - x)^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} -3(2 - x)^2 = -3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2x = 2 \end{array}\right\}$$

$f'(1^-) \neq f'(1^+) \Rightarrow$ La función no es derivable en $x = 1$

169. Halla los valores de **a** y **b** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ a\sqrt{x} + \dfrac{b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 1$

Solución:

a) La continuidad de la función

$f(1) = a + 5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (ax + 5) = a + 5 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(a\sqrt{x} + \dfrac{b}{x}\right) = a + b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$a + 5 = a + b \Rightarrow b = 5$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{x}} - \dfrac{b}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} a = a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{a}{2\sqrt{x}} - \dfrac{b}{x^2}\right) = \dfrac{a}{2} - b \end{array}\right\}$$

$a = \dfrac{a}{2} - b \Rightarrow a = -2b$

Resolviendo el sistema:

$a = -10, b = 5$

170. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x|x| & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

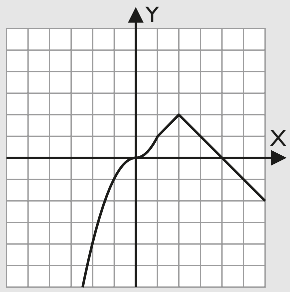
halla los puntos en los que $f(x)$ es derivable.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La función es continua y derivable por estar definida por polinomios. Los valores que hay que estudiar son $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$

En una función con tantos trozos la mejor estrategia es hacer la representación gráfica:



Se estudian los puntos de enlace

a) La continuidad de la función

La función es continua en todos los puntos de enlace.

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$f'(0^-) = 0 = f'(0^+) \Rightarrow$ La función es derivable en $x = 0$

$f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 1 \Rightarrow$ La función no es derivable en $x = 1$

$f'(2^-) = 1 \neq f'(2^+) = -1 \Rightarrow$ La función no es derivable en $x = 2$

171. Halla el valor de **a** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a - 1 & \text{si } x \le 2 \\ L\,(x - 1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

sea continua y estudia si para dicho valor es derivable.

Solución:

La función está definida por dos funciones que son continuas y derivables en sus dominios. Se tiene que estudiar el valor $x = 2$

a) La continuidad de la función

$f(2) = 3a + 3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + ax + a - 1) = 3a + 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} L(x - 1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$3a + 3 = 0 \Rightarrow a = -1$

Para $a = -1$, la función es continua en $x = 2$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{1}{x - 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2x + a) = 4 + a \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x - 1} = 1 \end{array}\right\}$$

Para $a = -1$ se tiene

$f'(2^-) = 3$

$f'(2^+) = 1$

La función no es derivable en $x = 2$

172. Determina el valor de **a** y **b** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 1$

Solución:

a) La continuidad de la función

$f(1) = a + b$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^3 - 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (ax + b) = a + b \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = 0$$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x < 1 \\ a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 3x^2 = 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} a = a \end{array}\right\} \Rightarrow a = 3$$

Resolviendo el sistema:

$a = 3, b = -3$

173. Determina el valor de **a** y **b** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ a \cos x + b \operatorname{sen} x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 0$

Solución:

a) La continuidad de la función

$f(0) = a$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (ax + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (a \cos x + b \operatorname{sen} x) = a \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 0 \\ -a \operatorname{sen} x + b \cos x & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} a = a \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-a \operatorname{sen} x + b \cos x) = b \end{array}\right\} a = b$$

Resolviendo el sistema:

La función es continua y derivable siempre que $a = b$

174. Determina el valor de **a** y **b** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} (x + a)e^{-bx} & \text{si } x < 0 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 0$

Solución:

a) La continuidad de la función

$f(0) = 1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x + a)e^{-bx} = a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (ax^2 + bx + 1) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow a = 1$$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = f(x) = \begin{cases} e^{-bx} - b(x + a)e^{-bx} & \text{si } x < 0 \\ 2ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{-bx} - b(x + a)e^{-bx} = 1 - ab \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2ax + b) = b\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$1 - ab = b$

Resolviendo el sistema:

$a = 1, b = 1/2$

175. Estudia la derivabilidad de $f(x) = |x^3(x - 1)|$

Solución:

Se escribe la función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - x^3 & \text{si } x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \\ -x^4 + x^3 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

La función queda definida por dos polinomios que son continuos y derivables. Los valores que hay que estudiar son $x = 0$ y $x = 1$

En $x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} (x^4 - x^3) = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x^4 + x^3) = 0 = f(0) \Rightarrow$

$f(x)$ es continua en $x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - 3x^2 & \text{si} \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ -4x^3 + 3x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$f'(0^-) = f'(0^+) = 0 \Rightarrow f(x)$ derivable en $x = 0$

En $x = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} (-x^4 + x^3) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^4 - x^3) = 0 = f(1) \Rightarrow$

$f(x)$ es continua en $x = 1$

$f'(1^-) = -1 \neq f'(1^+) = 1 \Rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 1$

176. Estudia la derivabilidad de $f(x) = x|x - 1|$

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

La función queda definida por dos polinomios que son continuos y derivables. El valor que hay que estudiar es $x = 1$

a) La continuidad de la función

$f(1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (-x^2 + x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 - x) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

$f(x)$ es continua en $x = 1$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (-2x + 1) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2x - 1) = 1\end{array}\right\}$$

$f'(1^-) = -1 \neq f'(1^+) = 1 \Rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 1$

177. Estudia la derivabilidad de $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 - x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{1 + x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La función está definida por dos funciones racionales que son continuas y derivables en su dominio. El valor que hay que estudiar es $x = 0$

a) La continuidad de la función

$f(0) = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{1 - x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{1 + x} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

La función es continua en $x = 0$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1 - x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{(1 + x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{(1 - x)^2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{(1 + x)^2} = 1\end{array}\right\}$$

$f'(0^-) = f'(0^+) = 1 \Rightarrow f(x)$ es derivable en $x = 1$

178. Se sabe que una población de 400 bacterias de un cultivo varía según la función

$$f(x) = 400\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

donde **x** se mide en minutos. ¿Qué velocidad de crecimiento instantáneo tendrá la población en t = 3 minutos?

Solución:

El crecimiento instantáneo es la derivada de la función

$f'(x) = 400\dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(3) = -32$

El signo menos indica que están disminuyendo las bacterias.

Para profundizar

179. Halla la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$, que pasa por el punto A(0, 1) y es tangente a la recta $y = x - 1$ en el punto B(1, 0)

Solución:

a) Si pasa por A(0, 1)

$c = 1$

b) Si es tangente a la recta $y = x - 1$ en B(1, 0), la derivada de la parábola en x = 1 es la pendiente de la recta tangente.

$2a + b = 1$

c) Como pasa por B(1, 0)

$a + b + c = 0$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$a = 2, b = -3, c = 1$

180. Sea una función $f(x) = x \cdot g(x)$, donde g(x) es una función continua en x = 0 pero no derivable. ¿Cuánto vale f'(0)?

Solución:

Para calcular f'(0) hay que demostrar que f(x) es derivable en x = 0 y hallar su valor.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{h\,g(h) - 0}{h} =$$

$$= \lim_{x \to 0} g(h) = g(0)$$

Luego f'(0) = g(0)

181. Dadas $f(x) = x^2 + \pi$ y $g(x) = \text{sen } x + \cos x$, calcula la derivada en x = 0 de f(g(x)) y g(f(x))

Solución:

$f(g(x)) = g(x)^2 + \pi$

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2g(x) \cdot g'(x) =$

$= 2(\text{sen } x + \cos x) \cdot (\cos x - \text{sen } x) = 2 \cos 2x$

En x = 0

$[f(g(0))]' = 2 \cos 0 = 2$

$g(f(x)) = \text{sen } f(x) + \cos f(x)$

$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x) =$

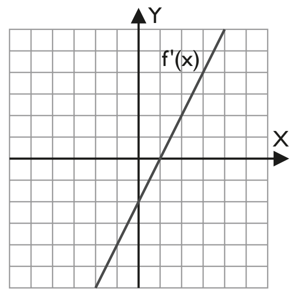
$= f'(x) \cos f(x) - f'(x) \text{ sen } f(x) =$

$= 2x \cos(x^2 + \pi) - 2x \text{ sen } (x^2 + \pi) =$

$= 2x(-\cos x^2 + \text{sen } x^2)$

$[g(f(0))]' = 0$

182. La siguiente gráfica corresponde a la función derivada de la función f(x)



a) ¿Existe algún punto de tangente horizontal en la gráfica de f(x)?

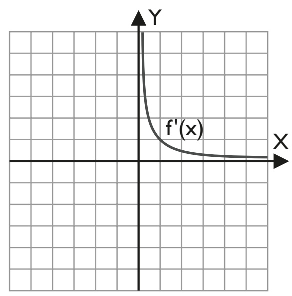
b) ¿Puede ser la derivada de una función polinómica? ¿De qué grado?

Solución:

a) En x = 1 la derivada se hace cero y, por lo tanto, la pendiente de la recta tangente es cero. La tangente es horizontal.

b) Si la derivada es un polinomio de primer grado, la función es un polinomio de segundo grado.

183. La siguiente gráfica corresponde a la función derivada de la función f(x)



a) ¿Existe algún punto de tangente horizontal en la gráfica de f(x)?

b) Escribe la ecuación de la gráfica de f'(x)

c) Da una función cuya derivada sea la de la gráfica.

Solución:

a) No, porque f'(x) no corta al eje X

b) $f'(x) = 1/x$

c) $f(x) = L\,x$

184. Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y encuentra la expresión de la derivada enésima.

a) $y = e^{2x}$

b) $y = \dfrac{1}{x}$

Solución:

a) $y' = 2e^{2x}$

$y'' = 4e^{2x}$

$y''' = 8e^{2x}$

…

$y^n = 2^n e^{2x}$

b) $y' = -\dfrac{1}{x^2}$

$y'' = \dfrac{2}{x^3}$

$y''' = -\dfrac{6}{x^4}$

…

$y^n = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$

Paso a paso

185. Halla la derivada de la función:

$$f(x) = L\sqrt[3]{x^2 + 4}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

186. Halla la recta tangente a la curva:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 \text{ en } x = 3$$

Representa la función y la recta tangente.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

187. Estudia la derivabilidad de la función para $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ -x^2 + 2x + 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Representa la función y la recta o rectas tangentes para $x = 2$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

188. Calcula el valor de los parámetros **a** y **b** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & \text{si } x \le 1 \\ 2bx - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 1$. Representa la función y la recta tangente para $x = 1$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

189. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

Halla las derivadas de las siguientes funciones:

190. $f(x) = e^{\cos x}$

Solución:

Ejercicio 190

$f(x) = e^{\cos x} \Rightarrow x \mapsto e^{\cos(x)}$

$f'(x) \Rightarrow -\operatorname{sen}(x) \cdot e^{\cos(x)}$

191. $f(x) = L\dfrac{x^2 - 2}{2x - 1}$

Solución:

Ejercicio 191

$f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - 2}{2x - 1}\right) \Rightarrow x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2-2}{2 \cdot x - 1}\right)$

$f'(x) \Rightarrow \dfrac{2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 4}{2 \cdot x^3 - x^2 - 4 \cdot x + 2}$

192. $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$

Solución:

Ejercicio 192

$f(x) = x^{\operatorname{sen} x} \Rightarrow x \mapsto x^{\operatorname{sen}(x)}$

$f'(x) \Rightarrow \left(\cos(x) \cdot \ln(x) + \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right) \cdot x^{\operatorname{sen}(x)}$

193. $f(x) = L\,(x^2 - 4)$

Solución:

Ejercicio 193

$f(x) = \ln(x^2 - 4) \Rightarrow x \mapsto \ln(x^2 - 4)$

$f'(x) \Rightarrow \dfrac{2 \cdot x}{x^2 - 4}$

194. $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 + 1}$

Solución:

Ejercicio 194

$f(x) = \dfrac{5x}{x^2+1} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{5 \cdot x}{x^2+1}$

$f'(x) \Rightarrow \dfrac{-5 \cdot x^2 + 5}{x^4 + 2 \cdot x^2 + 1}$

195. Halla la recta tangente a la curva:

$$f(x) = x^2 - 5 \text{ en } x = 2$$

Representa la función y la recta tangente.

Solución:

Ejercicio 195

$a = 2 \Rightarrow 2$

$f(x) = x^2 - 5 \Rightarrow x \mapsto x^2 - 5$

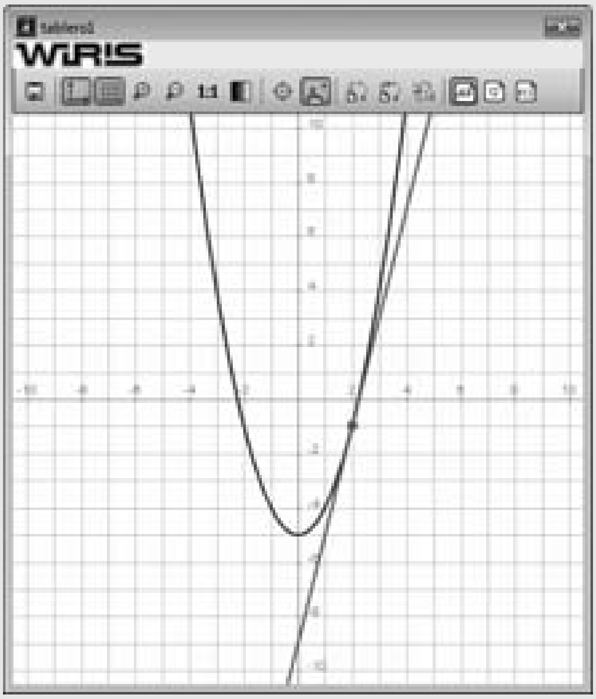
P = punto(a, f(a)) $\Rightarrow$ (2, −1)

dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})

$t(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \Rightarrow x \mapsto 4 \cdot x - 9$

dibujar(f(x), {color = azul, anchura_linea = 2})

dibujar(t(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})



196. Estudia la derivabilidad de la función en x = 2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \le 2 \\ -x^2 + 2x + 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Representa la función y la recta o rectas tangentes para x = 2

Solución:

Ejercicio 196

$a = 2 \Rightarrow 2$

$g(x) = x^2 - 3 \Rightarrow x \mapsto x^2 - 3$

P = punto(a, g(a)) $\Rightarrow$ (2,1)

dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})

$h(x) = -x^2 + 2x + 4 \Rightarrow x \mapsto -x^2 + 2 \cdot x + 4$

dibujar(g(x), −∞..a, {color = azul, anchura_linea = 2})

$t1(x) = g'(a) \cdot (x - a) + g(a) \Rightarrow x \mapsto 4 \cdot x - 7$

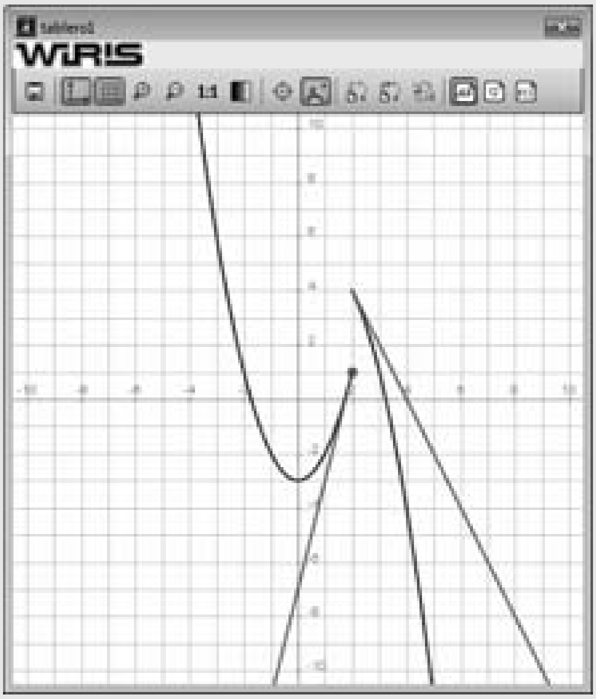
dibujar(t1(x), −∞..a, {color = rojo, anchura_linea = 2})

dibujar(h(x), a..+∞, {color = azul, anchura_linea = 2})

$t2(x) = h'(a) \cdot (x - a) + h(a) \Rightarrow x \mapsto -2 \cdot x + 8$

dibujar(t2(x), a..+∞, {color = rojo, anchura_linea = 2})

La función no es continua en x = 2, por tanto no es derivable.



197. Estudia la derivabilidad de la función para x = 0

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

Representa la función y la recta o rectas tangentes para x = 0

Solución:

Ejercicio 197

$a = 0 \Rightarrow 0$

$f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x \mapsto \sqrt[3]{x}$

P = punto(a, f(a)) $\Rightarrow$ (0,0)

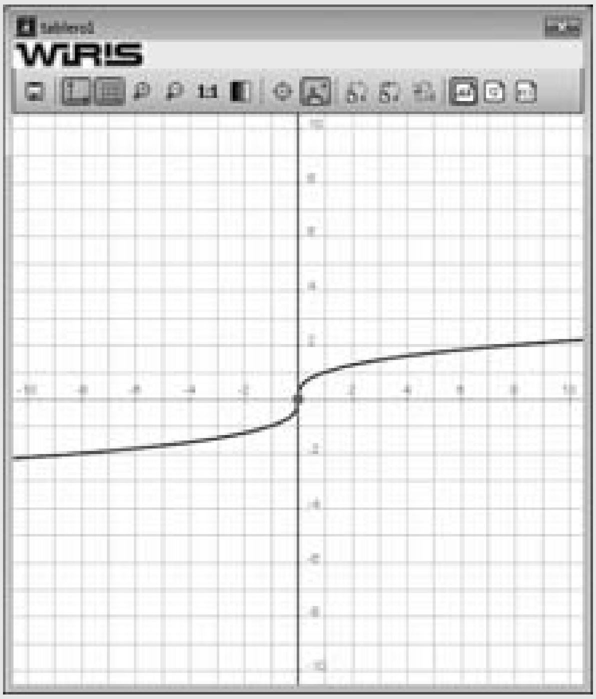
dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})

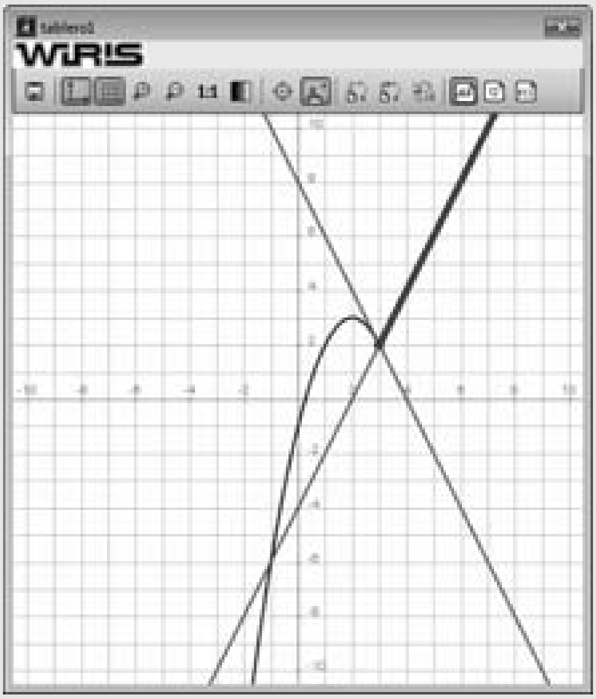
$m = f'(a)$

dibujar(f(x), {color = azul, anchura_linea = 2})

dibujar(x = 0, {color = rojo, anchura_linea = 2})

La gráfica de la función no tiene un pico en x = 0, sin embago no es derivable. La pendiente de la recta tangente es +∞, es decir, la tangente es la recta vertical x = 0





198. Estudia la derivabilidad de la función para x = 3

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 1 & \text{si } x \le 3 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Representa la función y la recta o rectas tangentes para x = 3

Solución:

Ejercicio 198

$a = 3 \rightarrow 3$

$g(x) = -x^2 + 4x - 1 \rightarrow x \mapsto -x^2 + 4 \cdot x - 1$

P = punto(a, g(a)) → (3,2)

dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})

$h(x) = 2x - 4 \rightarrow x \mapsto 2 \cdot x - 4$

dibujar(g(x), −∞..a, {color = azul, anchura_linea = 2})

$t1(x) = g'(a) \cdot (x - a) + g(a) \rightarrow x \mapsto -2 \cdot x + 8$

dibujar(t1(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

dibujar(h(x), a..+∞, {color = azul, anchura_linea = 5})

$t2(x) = h'(a) \cdot (x - a) + h(a) \rightarrow x \mapsto 2 \cdot x - 4$

dibujar(t2(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

La función es continua en x = 3, pero no es derivable porque las rectas tangentes son distintas.

199. Estudia la derivabilidad de la función para x = 1

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Representa la función y la recta o rectas tangentes para x = 1

Solución:

Ejercicio 199

$a = 1 \rightarrow 1$

$g(x) = 2^x \rightarrow x \mapsto 2^x$

P = punto(a, g(a)) → (1,2)

dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})

$h(x) = x^2 - 4x + 5 \rightarrow x \mapsto x^2 - 4 \cdot x + 5$

dibujar(g(x), −∞..a, {color = azul, anchura_linea = 2})

$t1(x) = g'(a) \cdot (x - a) + g(a) \rightarrow x \mapsto 1.3863 \cdot x + 0.61371$

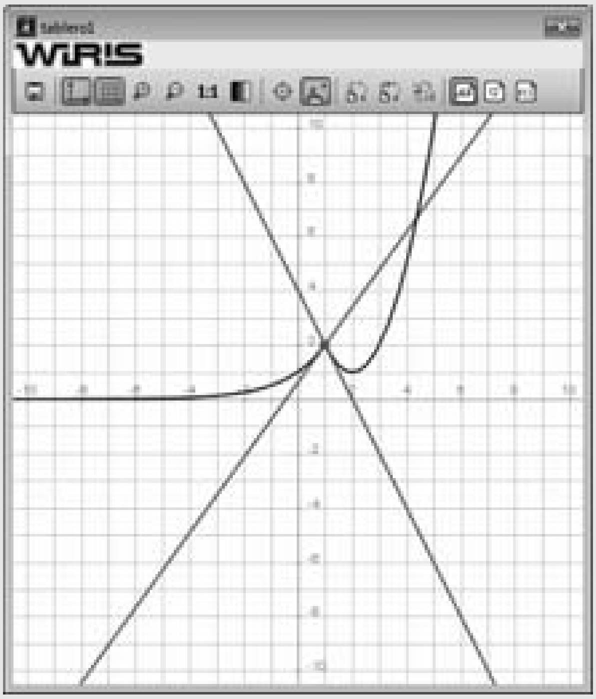
dibujar(t1(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

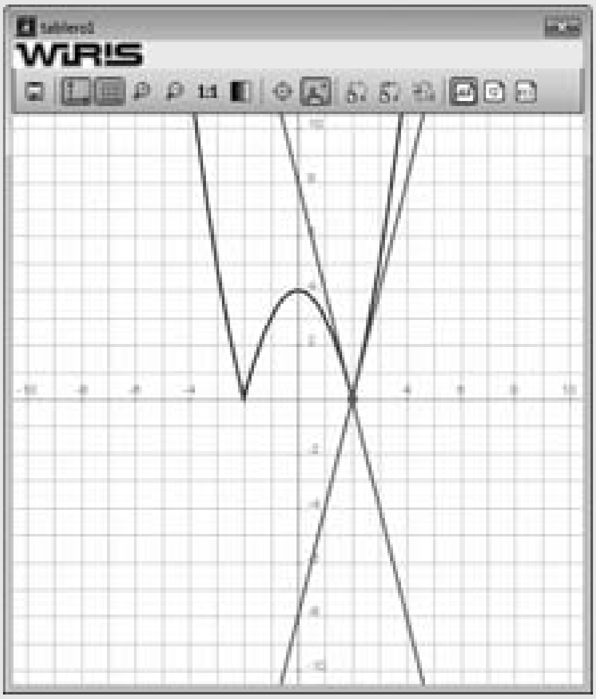
dibujar(h(x), a..+∞, {color = azul, anchura_linea = 2})

$t2(x) = h'(a) \cdot (x - a) + h(a) \rightarrow x \mapsto -2 \cdot x + 4$

dibujar(t2(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

La función es continua en x = 3, pero no es derivable porque las rectas tangentes son distintas.





200. Estudia la derivabilidad de la función para $x = 2$

$$f(x) = |x^2 - 4|$$

Representa la función y la recta o rectas tangentes para $x = 2$

Solución:

Ejercicio 200

$a = 2 \rightarrow 2$

$f(x) = |x^2 - 4| \rightarrow x \mapsto |x^2 - 4|$

dibujar(f(x), {color = azul, anchura_linea = 2})

$g(x) = -x^2 + 4 \rightarrow x \mapsto -x^2 + 4$

P = punto(a, g(a)) $\rightarrow$ (2,0)

dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})

$h(x) = x^2 - 4 \rightarrow x \mapsto x^2 - 4$

$t1(x) = g'(a) \cdot (x - a) + g(a) \rightarrow x \mapsto -4 \cdot x + 8$

dibujar(t1(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

$t2(x) = h'(a) \cdot (x - a) + h(a) \rightarrow x \mapsto 4 \cdot x - 8$

dibujar(t2(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

Halla las tres primeras derivadas de las siguientes funciones:

201. $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 3$

Solución:

Ejercicio 201

$f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 3 \rightarrow x \mapsto x^3 + 3 \cdot x^2 + x - 3$

$f'(x) \rightarrow 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 1$

$f''(x) \rightarrow 6 \cdot x + 6$

$f'''(x) \rightarrow 6$

202. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

Solución:

Ejercicio 202

$f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x} \rightarrow x \mapsto \dfrac{x^2 + 1}{x}$

$f'(x) \rightarrow \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$f''(x) \rightarrow \dfrac{2}{x^3}$

$f'''(x) \rightarrow \dfrac{-6}{x^4}$

203. $f(x) = x \cdot e^x$

Solución:

Ejercicio 203

$f(x) = x \cdot e^x \rightarrow x \mapsto x \cdot e^x$

$f'(x) \rightarrow (x+1) \cdot e^x$

$f''(x) \rightarrow (x+2) \cdot e^x$

$f'''(x) \rightarrow (x+3) \cdot e^x$

204. $f(x) = x \cdot L\, x$

Solución:

Ejercicio 204

$f(x) = x \cdot \ln(x) \rightarrow x \mapsto x \cdot \ln(x)$

$f'(x) \rightarrow \ln(x) + 1$

$f''(x) \rightarrow \dfrac{1}{x}$

$f'''(x) \rightarrow \dfrac{-1}{x^2}$

205. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{-x+1} & \text{si } x > 1 \\ \text{sen } (x - 1) & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

encuentra los valores α, β y γ que hacen que f(x) sea continua, y que admita primera y segunda derivada en el punto x = 1. Representa la función obtenida.

Solución:

Ejercicio 205

$f(x) = (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) \cdot e^{-x+1} \rightarrow x \mapsto (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) \cdot e^{-x+1}$

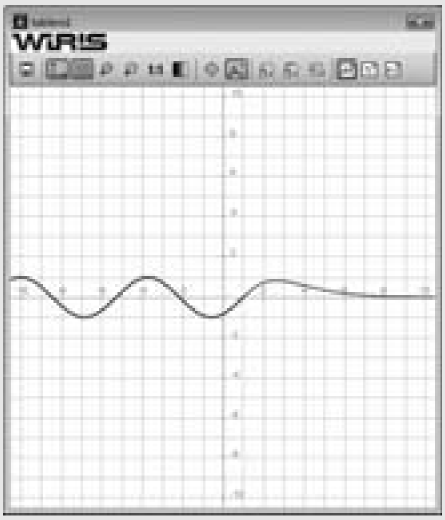
$g(x) = \text{sen}(x-1) \rightarrow x \mapsto \text{sen}(x-1)$

$\text{resolver}\begin{bmatrix} f(1) = g(1) \\ f'(1) = g'(1) \\ f''(1) = g''(1) \end{bmatrix} \rightarrow \{\{a=1, b=-1, c=0\}\}$

$f(x) = (x^2 - x) \cdot e^{-x+1} \rightarrow x \mapsto x^2 - x \cdot e^{-x+1}$

dibujar(f(x), 1..+∞, {color = rojo, anchura_linea = 2})

dibujar(g(x), -∞..1, {color = azul, anchura_linea = 2})



206. Estudia la derivabilidad de la función para x = 0

$$f(x) = x|x|$$

Representa la función y la recta o rectas tangentes para x = 0

Solución:

Ejercicio 206

$a = 0 \rightarrow 0$

$f(x) = x|x| \rightarrow x \mapsto x(|x|)$

dibujar(f(x), {color = azul, anchura_linea = 2})

$g(x) = -x^2 \rightarrow x \mapsto -x^2$

$P = \text{punto}(a, g(a)) \rightarrow (0,0)$

dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})

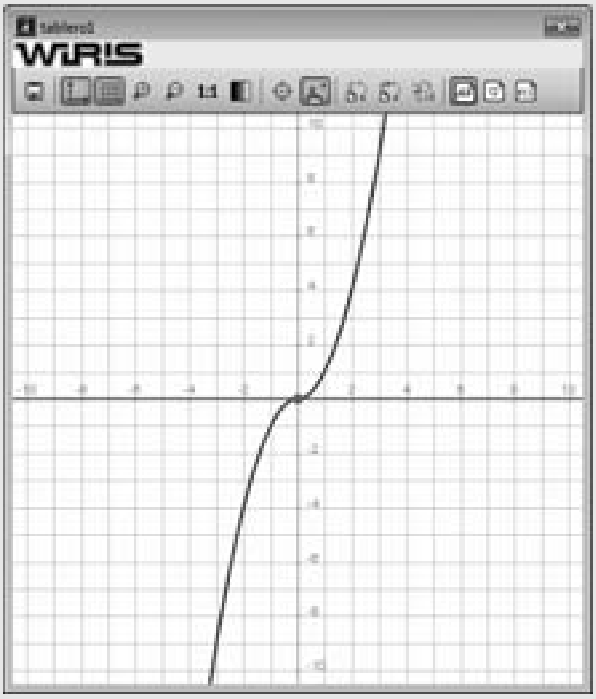
$h(x) = x^2 \rightarrow x \mapsto x^2$

$t1(x) = g'(a) \cdot (x - a) + g(a) \rightarrow x \mapsto 0$

dibujar(t1(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

$t2(x) = h'(a) \cdot (x - a) + h(a) \rightarrow x \mapsto 0$

dibujar(t2(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

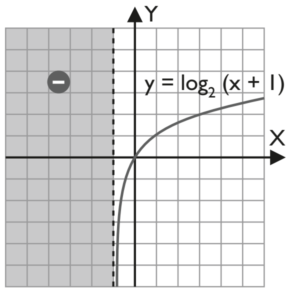


12 Análisis de funciones y representación de curvas

1. Análisis gráfico de una función

Aplica la teoría

1. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

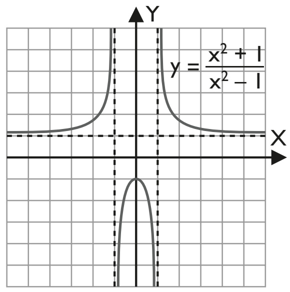
1. Tipo de función: logarítmica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (-1, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = -1$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-1, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $(-1, +\infty)$
   - Decreciente ($\searrow$): $\varnothing$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $\varnothing$
   - Cóncava ($\cap$): $(-1, +\infty)$
10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

2. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = -1$, $x = 1$
   - Horizontales: $y = 1$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: $A(0, -1)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-1, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(0, -1)$
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
   - Decreciente ($\searrow$): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-1, 1)$
10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

2. Análisis de funciones polinómicas

Piensa y calcula

Halla los puntos de corte con el eje X de la función $y = 2x^2 - \dfrac{x^4}{4}$ y estudia su multiplicidad.

Solución:

$$2x^2 - \frac{x^4}{4} = 0 \Rightarrow 8x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow (8 - x^2)x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ doble.} \\ x = 2\sqrt{2} \text{ simple.} \\ x = -2\sqrt{2} \text{ simple.} \end{cases}$$

Aplica la teoría

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

3. $y = x^3 - 4x$

Solución:

$y' = 3x^2 - 4$

$y'' = 6x$

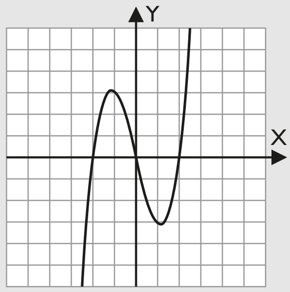
$y''' = 6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-2, 0)$, $O(0, 0)$, $B(2, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(-2\sqrt{3}/3, 16\sqrt{3}/9)$
   - Mínimo relativo: $B(2\sqrt{3}/3, -16\sqrt{3}/9)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -2\sqrt{3}/3) \cup (2\sqrt{3}/3, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3)$
9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

4. $y = 3x - x^3$

Solución:

$y' = 3 - 3x^2$

$y'' = -6x$

$y''' = -6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-\sqrt{3}, 0)$, $O(0, 0)$, $B(\sqrt{3}, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
   - Negativa (–): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(1, 2)$
   - Mínimo relativo: $B(-1, -2)$

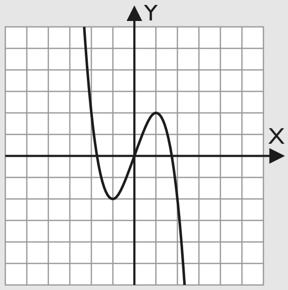
Monotonía:

- Creciente (↗): $(-1, 1)$
- Decreciente (↘): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$

Curvatura:

- Convexa (∪): $(-\infty, 0)$
- Cóncava (∩): $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

5. $y = x^3$

Solución:

$y' = 3x^2$

$y'' = 6x$

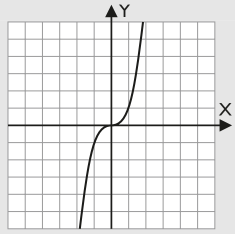
$y''' = 6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $\varnothing$
9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

$Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

6. $y = 4x^2 - x^4$

Solución:

$y' = 8x - 4x^3$

$y'' = 8 - 12x^2$

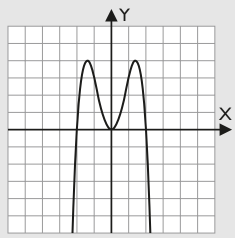
$y''' = -24x$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-2, 0), O(0, 0), B(2, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-2, 0) \cup (0, 2)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $C(-\sqrt{2}, 4), D(\sqrt{2}, 4)$
   - Mínimo relativo: $O(0, 0)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$
   - Decreciente (↘): $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $E(-\sqrt{6}/3, 20/9), F(\sqrt{6}/3, 20/9)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\sqrt{6}/3, \sqrt{6}/3)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$Im(f) = (-\infty, 4]$

7. $y = x^4 - 2x^3$

Solución:

$y' = 4x^3 - 6x^2$

$y'' = 12x^2 - 12x$

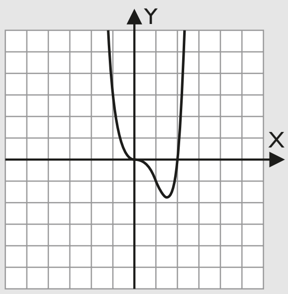
$y''' = 24x - 12$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$, $A(2, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(0, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $B(3/2, -27/16)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(3/2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 3/2)$
9. Puntos de inflexión: $C(0, 0)$, $D(1, -1)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(0, 1)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = [-27/16, +\infty)$

8. $y = \dfrac{x^3}{3} - 4x$

Solución:

$y' = x^2 - 4$

$y'' = 2x$

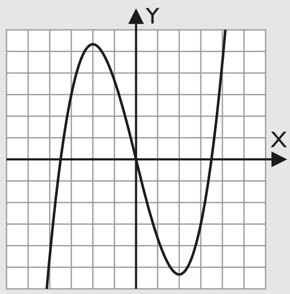
$y''' = 2$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-2\sqrt{3}, 0)$, $O(0, 0)$, $B(2\sqrt{3}, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-2\sqrt{3}, 0) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0, 2\sqrt{3})$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(-2, 16/3)$
   - Mínimo relativo: $B(2, -16/3)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-2, 2)$
9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3. Análisis de funciones racionales

Piensa y calcula

Halla mentalmente las raíces del denominador de la función $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

Solución:

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Aplica la teoría

9. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$y'' = \dfrac{2}{x^3}$

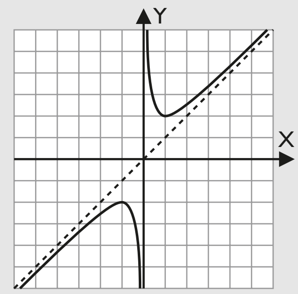
$y''' = -\dfrac{6}{x^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = x$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(-1, -2)$
   - Mínimo relativo: $B(1, 2)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-1, 0) \cup (0, 1)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

10. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$

$y'' = -\dfrac{2}{x^3}$

$y''' = \dfrac{6}{x^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = x$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-1, 0), B(1, 0)$
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

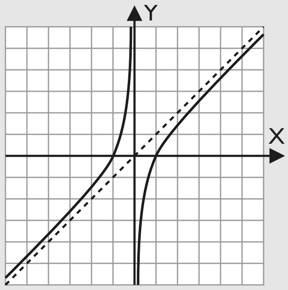
Monotonía:

- Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Decreciente (↘): $\varnothing$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (∪): $(-\infty, 0)$
- Cóncava (∩): $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

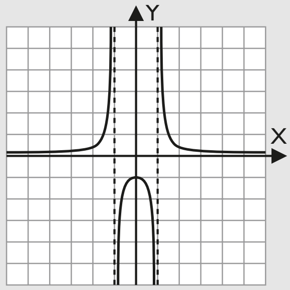
Monotonía:

- Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
- Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (∪): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Cóncava (∩): $(-1, 1)$



10. Recorrido o imagen:

$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$

11. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Solución:

$y' = -\dfrac{2x}{(x^2 - 1)^2}$

$y'' = \dfrac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$

$y''' = -\dfrac{24x^3 + 24x}{(x^2 - 1)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio:

   $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -1$, $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = -1$, $x = 1$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: A(0, –1)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-1, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(0, –1)
   - Mínimo relativo: no tiene.

12. $y = \dfrac{x - 1}{x^2}$

Solución:

$y' = -\dfrac{x - 2}{x^3}$

$y'' = \dfrac{2x - 6}{x^4}$

$y''' = -\dfrac{6x - 24}{x^5}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(1, 0)
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(2, 1/4)
   - Mínimo relativo: no tiene.

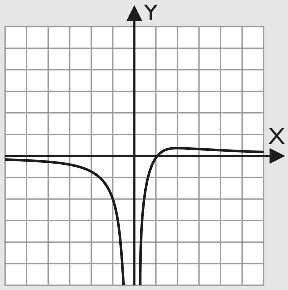
Monotonía:

- Creciente (↗): (0, 2)
- Decreciente (↘): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

9. Punto de inflexión: B(3, 2/9)

Curvatura:

- Convexa (∪): $(3, +\infty)$
- Cóncava (∩): $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$



10. Recorrido o imagen:

Im(f) = $(-\infty, 1/4]$

13. $y = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$

Solución:

$$y' = -\frac{3x^2 - 3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^3 - 18x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{18x^4 - 108x^2 + 18x}{(x^2 + 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: y = 0
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(1, 3/2)
   - Mínimo relativo: B(–1, –3/2)

Monotonía:

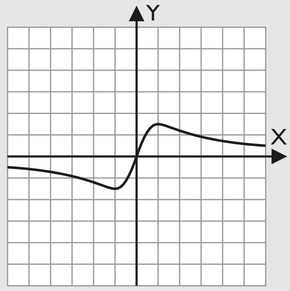
- Creciente (↗): (–1, 1)
- Decreciente (↘): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión:

O(0, 0), $C(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/4)$, $D(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/4)$

Curvatura:

- Convexa (∪): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
- Cóncava (∩): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$



10. Recorrido o imagen:

Im(f) = [–3/2, 3/2]

14. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

Solución:

$$y' = -\frac{6x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y'' = \frac{18x^2 + 24}{(x^2 - 4)^3}$$

$$y''' = -\frac{72x^3 + 288x}{(x^2 - 4)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio:

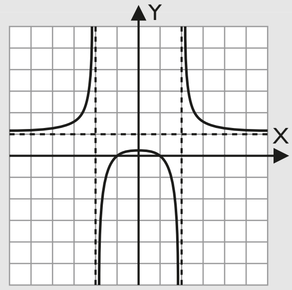
   Dom(f) = $\mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en x = –2, x = 2, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: x = –2, x = 2
   - Horizontales: y = 1
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(–1, 0), B(1, 0)
   - Eje Y: C(0, 1/4)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-2, -1) \cup (1, 2)$

8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: C(0, 1/4)
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
   - Decreciente (↘): $(0, 2) \cup (2, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-2, 2)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = (-\infty, 1/4] \cup (1, +\infty)$

4. Análisis de funciones irracionales

Piensa y calcula

Halla mentalmente el dominio de la función $y = \sqrt{x^2 - 4}$

Solución:

$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4$

$\text{Dom}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

Aplica la teoría

15. $y = \sqrt{4 - x}$

Solución:

$y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{4 - x}}$

$y'' = -\dfrac{1}{4(4 - x)\sqrt{4 - x}}$

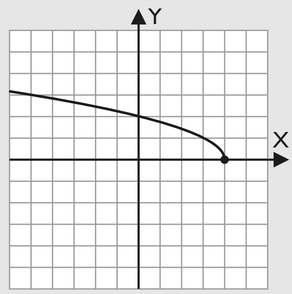
$y''' = -\dfrac{3}{8(4 - x)^2\sqrt{4 - x}}$

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (-\infty, 4]$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En x = 4 tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(4, 0)
   - Eje Y: B(0, 2)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 4)$
   - Negativa (–): ∅
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): ∅
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 4)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): ∅
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 4)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

16. $y = \sqrt{x^2 + 4}$

Solución:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$y'' = \frac{4}{(x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 4}}$$

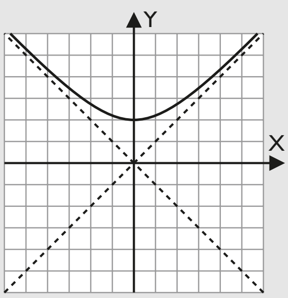
$$y''' = -\frac{12x}{(x^2 + 4)^2\sqrt{x^2 + 4}}$$

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la real $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = -x, y = x$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: $A(0, 2)$

   Signo:
   - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $A(0, 2)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $\varnothing$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = [2, +\infty)$

17. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

Solución:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y'' = -\frac{1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$$

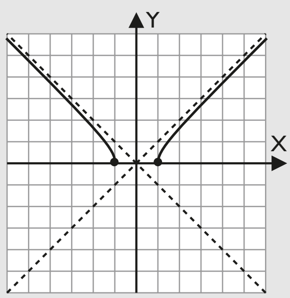
$$y''' = \frac{3x}{(x^2 - 1)^2\sqrt{x^2 - 1}}$$

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: $Dom(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = -1, x = 1$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = -x, y = x$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-1, 0), B(1, 0)$
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(1, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -1)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\varnothing$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = [0, +\infty)$

18. $y = \sqrt{4 - x^2}$

Solución:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$y'' = -\frac{4}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}}$$

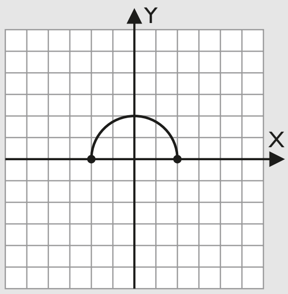
$$y''' = -\frac{12x}{(4 - x^2)^2\sqrt{4 - x^2}}$$

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: Dom(f) = [–2, 2]
3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En x = –2, x = 2 tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(–2, 0), B(2, 0)
   - Eje Y: C(0, 2)

   Signo:
   - Positiva (+): (–2, 2)
   - Negativa (–): ∅
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: C(0, 2)
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): (–2, 0)
   - Decreciente (↘): (0, 2)
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): ∅
   - Cóncava (∩): (–2, 2)



   Es una semicircunferencia.
10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = [0, 2]

19. $y = \sqrt[3]{x}$

Solución:

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$y'' = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

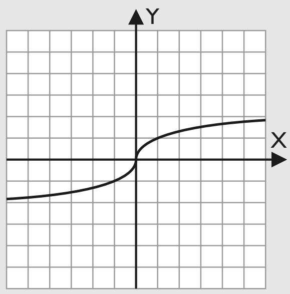
$$y''' = \frac{10}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}$$

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: Dom(f) = ℝ = (–∞, +∞)
3. Continuidad: es continua en toda la recta real.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): (0, +∞)
   - Negativa (–): (–∞, 0)
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): ℝ = (–∞, +∞)
   - Decreciente (↘): ∅
9. Punto de inflexión: O(0, 0)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): (–∞, 0)
   - Cóncava (∩): (0, +∞)



10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = ℝ = (–∞, +∞)

20. $y = x\sqrt{4 - x^2}$

Solución:

$$y' = \sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$y'' = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{x^3 - 8x}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}}$$

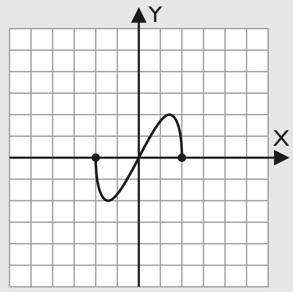
$$y''' = -\frac{4}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}} - \frac{4x^2 + 32}{(4 - x^2)^2\sqrt{4 - x^2}}$$

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: Dom(f) = $[-2, 2]$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = -2$, $x = 2$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(–2, 0), O(0, 0), B(2, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): (0, 2)
   - Negativa (–): (–2, 0)
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $C(\sqrt{2}, 2)$
   - Mínimo relativo: $D(-\sqrt{2}, -2)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
   - Decreciente (↘): $(-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$
9. Punto de inflexión: O(0, 0)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): (–2, 0)
   - Cóncava (∩): (0, 2)



10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = $[-2, 2]$

5. Análisis de funciones exponenciales

Piensa y calcula

Halla mentalmente los puntos de corte con los ejes de la función $y = (2 - x)e^x$

Solución:

Eje X: A(2, 0) Eje Y: B(0, 2)

Aplica la teoría

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

21. $y = (x - 2)e^x$

Solución:

$y' = (x - 1)e^x$

$y'' = xe^x$

$y''' = (x + 1)e^x$

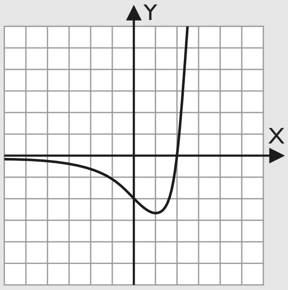
1. Tipo de función: polinómica por exponencial.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(2, 0)
   - Eje Y: B(0, –2)

   Signo:
   - Positiva (+): $(2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 2)$

8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: C(1, –e)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(1, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 1)$
9. Punto de inflexión: B(0, –2)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = [-e, +\infty)$

22. $y = xe^{-x}$

Solución:

$y' = -(x - 1)e^{-x}$

$y'' = (x - 2)e^{-x}$

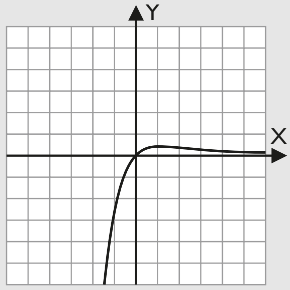
$y''' = -(x - 3)e^{-x}$

1. Tipo de función: polinómica por exponencial.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(1, 1/e)
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 1)$
   - Decreciente (↘): $(1, +\infty)$
9. Punto de inflexión: $B(2, 2/e^2)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(2, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 2)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = (-\infty, 1/e]$

23. $y = \dfrac{e^x}{x}$

Solución:

$$y' = \frac{e^x(x - 1)}{x^2}$$

$$y'' = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$$

$$y''' = \frac{e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)}{x^4}$$

1. Tipo de función: exponencial dividida por polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En $x = 0$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: A(1, e)

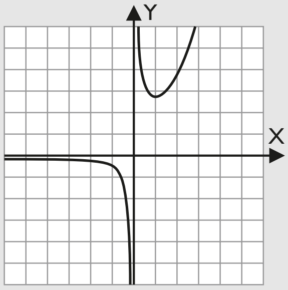
Monotonía:

- Creciente (↗): $(1, +\infty)$
- Decreciente (↘): $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (∪): $(0, +\infty)$
- Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

$\text{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$

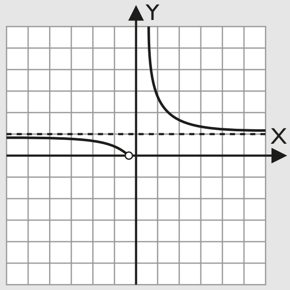
Monotonía:

- Creciente (↗): $\varnothing$
- Decreciente (↘): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

9. Punto de inflexión: $A(-1/2, 1/e^2)$

Curvatura:

- Convexa (∪): $(-1/2, 0) \cup (0, +\infty)$
- Cóncava (∩): $(-\infty, -1/2)$



10. Recorrido o imagen:

$\text{Im}(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

24. $y = e^{1/x}$

Solución:

$y' = -\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

$y'' = \dfrac{e^{1/x}(2x + 1)}{x^4}$

$y''' = -\dfrac{e^{1/x}(6x^2 + 6x + 1)}{x^6}$

1. Tipo de función: exponencial.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En $x = 0$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: $y = 1$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

25. $y = e^{-x^2}$

Solución:

$y' = -2xe^{-x^2}$

$y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$

$y''' = -(2x^2 - 3)4xe^{-x^2}$

1. Tipo de función: exponencial.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: A(0, 1)

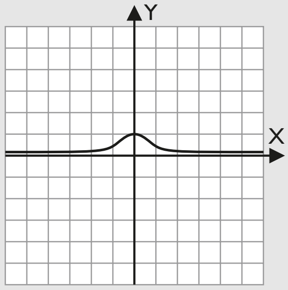
   Signo:
   - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(0, 1)
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 0)$
   - Decreciente (↘): $(0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $B(-\sqrt{2}/2, 1/\sqrt{e})$, $C(\sqrt{2}/2, 1/\sqrt{e})$

Curvatura:

• Convexa (∪): $(-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty)$

• Cóncava (∩): $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$



10. Recorrido o imagen:

$Im(f) = (0, 1]$

26. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

Solución:

$$y' = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$$

$$y'' = \frac{(x^2-4x+6)e^x}{x^4}$$

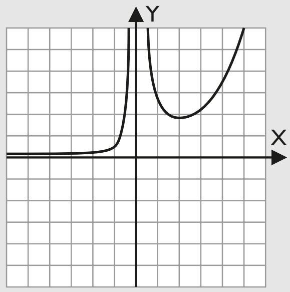
$$y''' = \frac{(x^3-6x^2+18x-24)e^x}{x^5}$$

1. Tipo de función: exponencial dividida por polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En $x = 0$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $A(2, e^2/4)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(0, 2)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $\varnothing$



10. Recorrido o imagen:

$Im(f) = (0, +\infty)$

6. Análisis de funciones logarítmicas

■ Piensa y calcula

Halla los puntos de corte con los ejes de la función $y = L(x^2 - 1)$

Solución:

Puntos de corte con el eje X

$L(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2$

$A(-\sqrt{2}, 0); B(\sqrt{2}, 0)$

Al eje Y no lo corta.

Aplica la teoría

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

27. $y = L(x^2 + 4)$

Solución:

$y' = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$

$y'' = -\dfrac{2x^2 - 8}{(x^2 + 4)^2}$

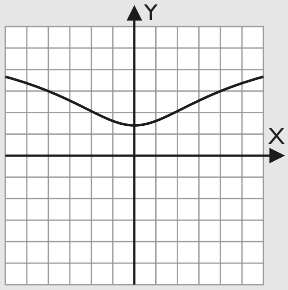
$y''' = \dfrac{4x^3 - 48x}{(x^2 + 4)^3}$

1. Tipo de función: logarítmica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: A(0, L 4)

   Signo:
   - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: A(0, L 4)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: B(–2, L 8), C(2, L 8)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-2, 2)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = [L\,4, +\infty)$

28. $y = L(x^2 - 3x + 2)$

Solución:

$y' = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$

$y'' = -\dfrac{2x^2 - 6x + 5}{(x^2 - 3x + 2)^2}$

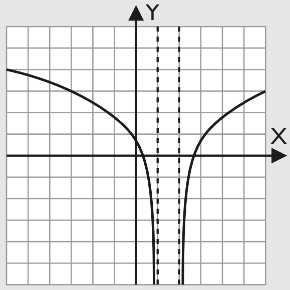
$y''' = \dfrac{4x^3 - 18x^2 + 30x - 18}{(x^2 - 3x + 2)^3}$

1. Tipo de función: logarítmica.
2. Dominio: $Dom(f) = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = 1$, $x = 2$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 1$, $x = 2$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $\left(\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}, 0\right), \left(\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}, 0\right)$
   - Eje Y: (0, L 2)

   Signo:
   - Positiva (+): $\left(-\infty, \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$
   - Negativa (–): $\left(\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}, 1\right) \cup \left(2, \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 1)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\varnothing$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

29. $y = L\,x^2$

Solución:

$y' = \dfrac{2}{x}$

$y'' = -\dfrac{2}{x^2}$

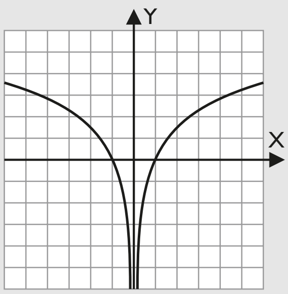
$y''' = \dfrac{4}{x^3}$

1. Tipo de función: logarítmica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = 0$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-1, 0) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\varnothing$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

30. $y = x\,L\,x$

Solución:

$y' = 1 + L\,x$

$y'' = \dfrac{1}{x}$

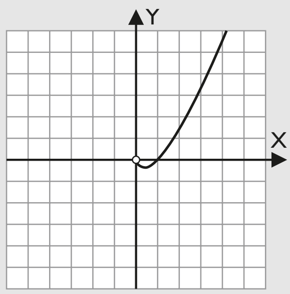
$y''' = -\dfrac{1}{x^2}$

1. Tipo de función: polinómica multiplicada por logarítmica.
2. Dominio: $Dom(f) = (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = 0$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(1, 0)$
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $B(1/e, -1/e)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(1/e, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(0, 1/e)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $\varnothing$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = [-1/e, +\infty)$

31. $y = \frac{L\,x}{x}$

Solución:

$y' = \frac{1 - L\,x}{x^2}$

$y'' = -\frac{3 - 2\,L\,x}{x^3}$

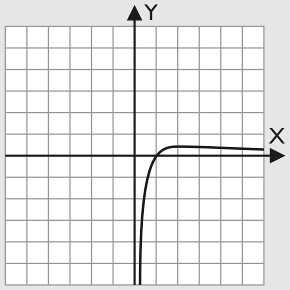
$y''' = \frac{11 - 6\,L\,x}{x^4}$

1. Tipo de función: logarítmica dividida entre polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(1, 0)
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(1, +\infty)$
   - Negativa (–): (0, 1)
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: B(e, 1/e)
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): (0, e)
   - Decreciente (↘): $(e, +\infty)$
9. Punto de inflexión: $C\left(e^{3/2}, \frac{3}{2e^{3/2}}\right)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(e^{3/2}, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(0, e^{3/2})$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = (-\infty, 1/e]$

32. $y = L\,(1 - x^2)$

Solución:

$y' = \frac{2x}{x^2 - 1}$

$y'' = -\frac{2x^2 + 2}{(x^2 - 1)^2}$

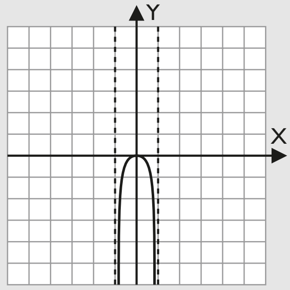
$y''' = \frac{4x^3 + 12x}{(x^2 - 1)^3}$

1. Tipo de función: logarítmica.
2. Dominio: $Dom(f) = (-1, 1)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio; en $x = -1$, $x = 1$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = -1$, $x = 1$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): ∅
   - Negativa (–): $(-1, 0) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: O(0, 0)
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): (–1, 0)
   - Decreciente (↘): (0, 1)
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): ∅
   - Cóncava (∩): (–1, 1)



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = (-\infty, 0]$

7. Análisis de funciones trigonométricas

Piensa y calcula

Halla mentalmente el período de la función y = 3 sen 2x

Solución:

Si el período de y = sen x es 2π, para hallar el de y = sen 2x hay que dividir 2π entre 2; por tanto, el período es π

Aplica la teoría

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

33. y = 3 cos x/2

Solución:

$y' = -\dfrac{3 \text{ sen } x/2}{2}$

$y'' = -\dfrac{3 \cos x/2}{4}$

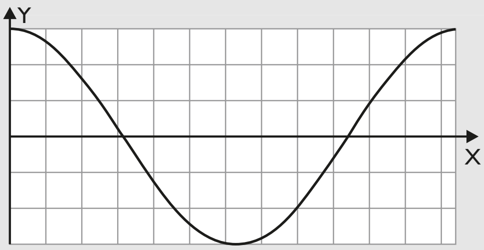
$y''' = \dfrac{3 \text{ sen } x/2}{8}$

1. Tipo de función: trigonométrica.
2. Dominio: Dom(f) = ℝ = (–∞, +∞)
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: es periódica de período 4π; se estudia solo en el primer período [0, 4π)
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(π, 0), B(3π, 0)
   - Eje Y: C(0, 3)

   Signo:
   - Positiva (+): (0, π) ∪ (3π, 4π)
   - Negativa (–): (π, 3π)
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: C(0, 3)
   - Mínimo relativo: D(2π, –3)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): (2π, 4π)
   - Decreciente (↘): (0, 2π)
9. Puntos de inflexión: A(π, 0), B(3π, 0)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): (π, 3π)
   - Cóncava (∩): (0, π) ∪ (3π, 4π)



10. Recorrido o imagen:
    Im(f) = [–3, 3]

34. y = sen x + cos x

Solución:

y' = cos x – sen x

y'' = –sen x – cos x

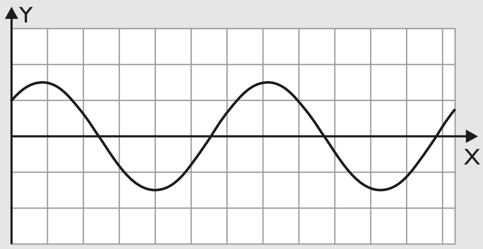
y''' = –cos x + sen x

1. Tipo de función: trigonométrica.
2. Dominio: Dom(f) = ℝ = (–∞, +∞)
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: es periódica de período 2π; se estudia solo en el primer período [0, 2π)
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(3π/4, 0), B(7π/4, 0)
   - Eje Y: C(0, 1)

   Signo:
   - Positiva (+): (0, 3π/4) ∪ (7π/4, 2π)
   - Negativa (–): (3π/4, 7π/4)
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: D(π/4, $\sqrt{2}$)
   - Mínimo relativo: E(5π/4, –$\sqrt{2}$)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): (0, π/4) ∪ (5π/4, 2π)
   - Decreciente (↘): (π/4, 5π/4)

9. Puntos de inflexión: $A(3\pi/4, 0)$, $B(7\pi/4, 0)$
   Curvatura:
   • Convexa (∪): $(3\pi/4, 7\pi/4)$
   • Cóncava (∩): $(0, 3\pi/4) \cup (7\pi/4, 2\pi)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

35. $y = \cos^2 x$

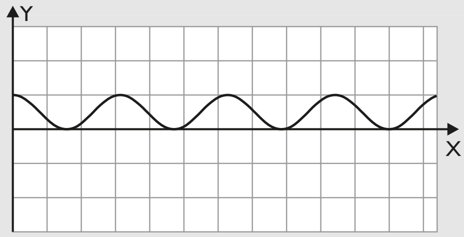
Solución:

$y' = -2 \text{ sen } x \cos x$

$y'' = 2 - 4 \cos^2 x$

$y''' = 8 \text{ sen } x \cos x$

1. Tipo de función: trigonométrica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: es periódica de período π; se estudia solo en el primer período $[0, \pi)$
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   • Verticales: no tiene.
   • Horizontales: no tiene.
   • Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   • Eje X: $A(\pi/2, 0)$
   • Eje Y: $B(0, 1)$
   Signo:
   • Positiva (+): $(0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$
   • Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   • Máximo relativo: $B(0, 1)$
   • Mínimo relativo: $C(\pi/2, 0)$
   Monotonía:
   • Creciente (↗): $(\pi/2, \pi)$
   • Decreciente (↘): $(0, \pi/2)$
9. Puntos de inflexión: $D(\pi/4, 1/2)$, $E(3\pi/4, 1/2)$
   Curvatura:
   • Convexa (∪): $(\pi/4, 3\pi/4)$
   • Cóncava (∩): $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = [0, 1]$

36. $y = \text{sen } x \cos x$

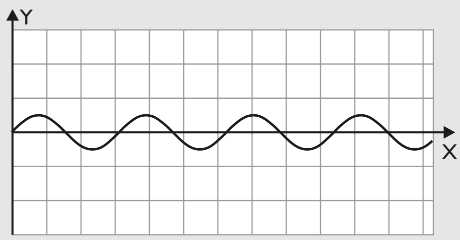
Solución:

$y' = -1 + 2 \cos^2 x$

$y'' = -4 \text{ sen } x \cos x$

$y''' = 4 - 8 \cos^2 x$

1. Tipo de función: trigonométrica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: es periódica de período π; se estudia solo en el primer período $[0, \pi)$
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   • Verticales: no tiene.
   • Horizontales: no tiene.
   • Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   • Eje X: $A(\pi/2, 0)$, $O(0, 0)$
   • Eje Y: $O(0, 0)$
   Signo:
   • Positiva (+): $(0, \pi/2)$
   • Negativa (–): $(\pi/2, \pi)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   • Máximo relativo: $B(\pi/4, 1/2)$
   • Mínimo relativo: $C(3\pi/4, -1/2)$
   Monotonía:
   • Creciente (↗): $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$
   • Decreciente (↘): $(\pi/4, 3\pi/4)$
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$, $D(\pi/2, 0)$
   Curvatura:
   • Convexa (∪): $(\pi/2, \pi)$
   • Cóncava (∩): $(0, \pi/2)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = [-1/2, 1/2]$

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 Dada la función:

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

halla los máximos y mínimos relativos.

- [ ] Máximo A(2, –4), mínimo B(–2, 1)
- [ ] No tiene.
- [x] Máximo A(–2, 4), mínimo O(0, 0)
- [ ] Máximo A(1, 3), mínimo B(–3, 1)

2 Dada la función:

$$f(x) = x^3 - 9x$$

halla dónde es convexa (∪)

- [ ] $(-\infty, 0)$
- [ ] $(-\infty, -\sqrt{3})$
- [x] $(0, +\infty)$
- [ ] $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

3 Sea la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Halla los puntos de inflexión.

- [ ] A(–1, 0); B(1, 0)
- [ ] A(–2, 2); B(2, –2)
- [ ] No tiene.
- [x] O(0, 0)

4 Sea la función:

$$f(x) = \frac{x^2(1 - x)}{x^2 - 1}$$

¿Qué tipo de discontinuidad tiene en x = 1?

- [x] Evitable.
- [ ] De 1ª especie.
- [ ] De 2ª especie.
- [ ] No es discontinua.

5 Dada la función:

$$y = x^4 e^{-x}$$

¿dónde tiene el máximo relativo?

- [ ] O(0, 0)
- [ ] A(2, 2)
- [x] $A(4, 256/e^4)$
- [ ] A(–1, 3)

6 Dada la función:

$$f(x) = xe^x$$

halla dónde es creciente.

- [ ] $(-\infty, -1)$
- [ ] $(-\infty, e)$
- [x] $(-1, +\infty)$
- [ ] $(-e, e)$

7 Dada la función:

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

halla dónde tiene un mínimo relativo.

- [x] O(0, 0)
- [ ] A(2, 1)
- [ ] A(4, 1/e)
- [ ] A(–1, 2)

8 Dada la función:

$$y = \frac{L\,x}{x^2}$$

halla dónde es creciente.

- [ ] $(1, +\infty)$
- [x] $(0, \sqrt{e})$
- [ ] $(-\infty, e)$
- [ ] $(0, e)$

9 Se consideran las funciones:

$$f(x) = x^2 - 4;\ g(x) = L\,f(x)$$

Halla el dominio de g(x)

- [ ] $Dom(g) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
- [ ] $Dom(g) = (-2, 2)$
- [ ] $Dom(g) = [-2, 2]$
- [x] $Dom(g) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

10 La función dada por:

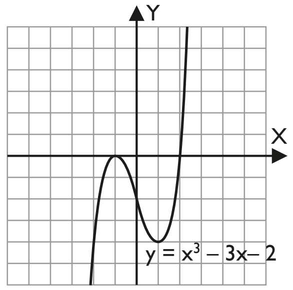
$$f(x) = x|x - 2|$$

tiene un mínimo relativo en:

- [x] A(2, 0)
- [ ] O(0, 0)
- [ ] A(–2, –8)
- [ ] A(1, 1)

1. Análisis gráfico de una función

37. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(–1, 0), B(2, 0)
   - Eje Y: C(0, –2)

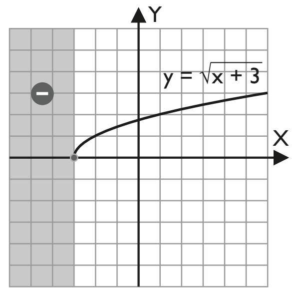
   Signo:
   - Positiva (+): $(2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -1) \cup (-1, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(–1, 0)
   - Mínimo relativo: D(1, –4)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-1, 1)$
9. Punto de inflexión: C(0, –2)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$
10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

38. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: $Dom(f) = [-3, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio; en x = –3 tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(–3, 0)
   - Eje Y: $C(0, \sqrt{3})$

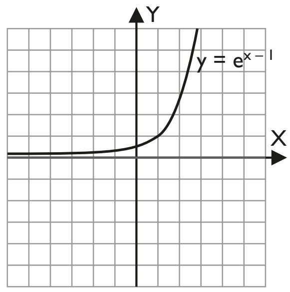
   Signo:
   - Positiva (+): $(-3, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-3, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $\varnothing$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\varnothing$
   - Cóncava (∩): $(-3, +\infty)$
10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = [0, +\infty)$

39. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

1. Tipo de función: exponencial.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: A(e^{-1}, 0)

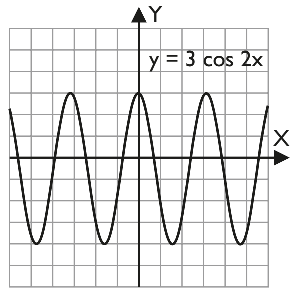
   Signo:
   - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Negativa (–): O
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $\varnothing$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $\varnothing$
10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = $(0, +\infty)$

40. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

1. Tipo de función: trigonométrica.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: es periódica de período π; se estudia solo en el primer período $[0, \pi)$
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A($\pi/4$, 0), B($3\pi/4$, 0)
   - Eje Y: O(0, 3)

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$
   - Negativa (–): $(\pi/4, 3\pi/4)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: B(0, 3)
   - Mínimo relativo: C($\pi/2$, –3)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(\pi/2, \pi)$
   - Decreciente (↘): $(0, \pi/2)$
9. Puntos de inflexión: A($\pi/4$, 0), B($3\pi/2$, 0)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(\pi/4, 3\pi/4)$
   - Cóncava (∩): $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$
10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = $[-3, 3]$

2. Análisis de funciones polinómicas

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

41. $y = 4x - x^3$

Solución:

$y' = 4 - 3x^2$

$y'' = -6x$

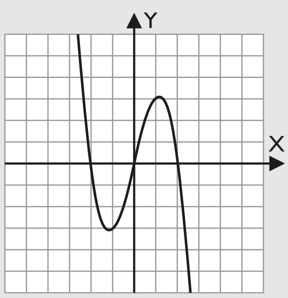
$y''' = -6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-2, 0)$, $O(0, 0)$, $B(2, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
   - Negativa (–): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(2\sqrt{3}/3, 16\sqrt{3}/9)$
   - Mínimo relativo: $B(-2\sqrt{3}/3, -16\sqrt{3}/9)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -2\sqrt{3}/3) \cup (2\sqrt{3}/3, +\infty)$
9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0)$
   - Cóncava (∩): $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

42. $y = -x^3 - 3x^2$

Solución:

$y' = -3x^2 - 6x$

$y'' = -6x - 6$

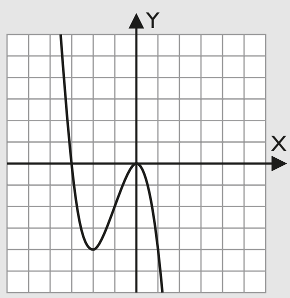
$y''' = -6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-3, 0)$, $O(0, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -3)$
   - Negativa (–): $(-3, 0) \cup (0, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $O(0, 0)$
   - Mínimo relativo: $B(-2, -4)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-2, 0)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
9. Punto de inflexión: $C(-1, -2)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, -1)$
   - Cóncava (∩): $(-1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

43. $y = x^3 + x$

Solución:

$y' = 3x^2 + 1$

$y'' = 6x$

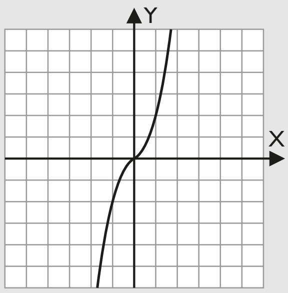
$y''' = 6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $\varnothing$
9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

44. $y = x^4 - 4x^2$

Solución:

$y' = 4x^3 - 8x$

$y'' = 12x^2 - 8$

$y''' = 24x$

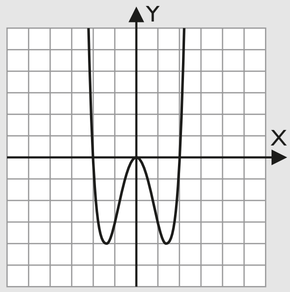
1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-2, 0), O(0, 0), B(2, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-2, 0) \cup (0, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $O(0, 0)$
   - Mínimo relativo: $C(-\sqrt{2}, -4), D(\sqrt{2}, -4)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$
9. Puntos de inflexión:

   $E(-\sqrt{6}/3, -20/9), F(\sqrt{6}/3, -20/9)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, -\sqrt{6}/3) \cup (\sqrt{6}/3, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\sqrt{6}/3, \sqrt{6}/3)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = [-4, +\infty)$

45. $y = 2x^3 - x^4$

Solución:

$y' = 6x^2 - 4x^3$

$y'' = 12x - 12x^2$

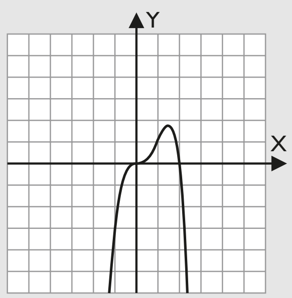
$y''' = 12 - 24x$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0), A(2, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): (0, 2)
   - Negativa (–): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: B(3/2, 27/16)
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 3/2)$
   - Decreciente (↘): $(3/2, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: C(0, 0), D(1, 1)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): (0, 1)
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = (-\infty, 27/16]$

46. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$

Solución:

$y' = 3x^2 - 18x + 24$

$y'' = 6x - 18$

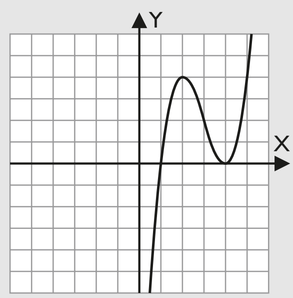
$y''' = 6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(1, 0), B(4, 0)
   - Eje Y: O(0, –16)

   Signo:
   - Positiva (+): $(1, 4) \cup (4, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: C(2, 4)
   - Mínimo relativo: D(4, 0)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$
   - Decreciente (↘): (2, 4)
9. Punto de inflexión: O(3, 2)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(3, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 3)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3. Análisis de funciones racionales

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

47. $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$

$y'' = \dfrac{2}{(x - 1)^3}$

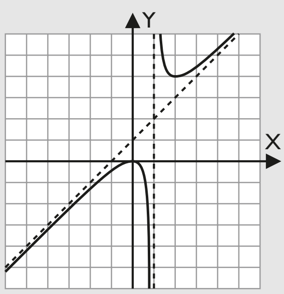
$y''' = -\dfrac{6}{(x - 1)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 1$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = x + 1$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: O(0, 0)
   - Mínimo relativo: A(2, 4)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, 2)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 1)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

48. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x}$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 + 4}{x^2}$

$y'' = -\dfrac{8}{x^3}$

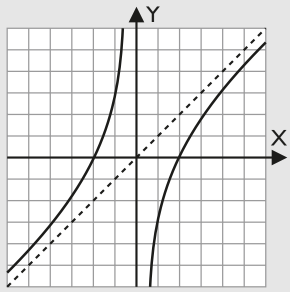
$y''' = \dfrac{24}{x^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = x$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(–2, 0), B(2, 0)
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $\varnothing$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0)$
   - Cóncava (∩): $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

49. $y = \dfrac{3}{x^2 + 1}$

Solución:

$y' = -\dfrac{6x}{(x^2 + 1)^2}$

$y'' = \dfrac{18x^2 - 6}{(x^2 + 1)^3}$

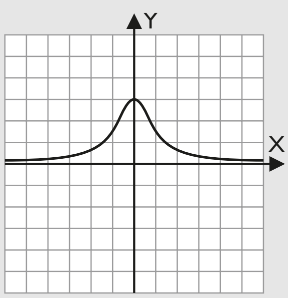
$y''' = -\dfrac{72x^3 - 72x}{(x^2 + 1)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: A(0, 3)

   Signo:
   - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(0, 3)
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 0)$
   - Decreciente (↘): $(0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $B(-\sqrt{3}/3, 9/4)$, $C(\sqrt{3}/3, 9/4)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, -\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$



10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = (0, 3]

50. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Solución:

$y' = -\dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$

$y'' = \dfrac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$

$y''' = -\dfrac{6x^4 + 36x^2 + 6}{(x^2 - 1)^4}$

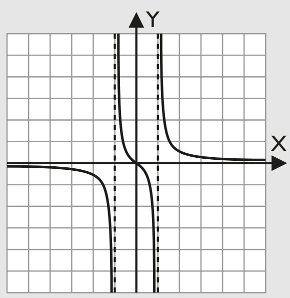
1. Tipo de función: racional.
2. Dominio:

   Dom(f) = $\mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -1$, $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = -1$, $x = 1$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0)
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $\varnothing$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Punto de inflexión: O(0, 0)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$



10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

51. $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2}$

Solución:

$y' = \dfrac{x^3 - 2}{x^3}$

$y'' = \dfrac{6}{x^4}$

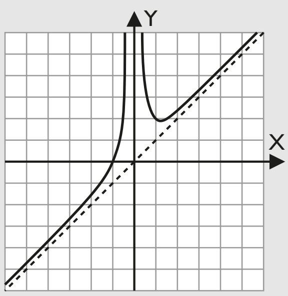
$y''' = -\dfrac{24}{x^5}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = x$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-1, 0)$
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $B(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{2}/2)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{2}, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(0, \sqrt[3]{2})$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $\varnothing$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

52. $y = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 1}$

Solución:

$y' = \dfrac{2x}{(x^2 - 1)^2}$

$y'' = -\dfrac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$

$y''' = \dfrac{24x^3 + 24x}{(x^2 - 1)^4}$

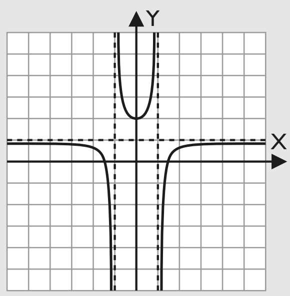
1. Tipo de función: racional.
2. Dominio:

   $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -1, x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = -1, x = 1$
   - Horizontales: $y = 1$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-\sqrt{2}, 0), B(\sqrt{2}, 0)$
   - Eje Y: $C(0, 2)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $C(0, 2)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-1, 1)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$

4. Análisis de funciones irracionales

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

53. $y = \sqrt{x + 2}$

Solución:

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 2}}$

$y'' = -\dfrac{1}{4(x + 2)\sqrt{x + 2}}$

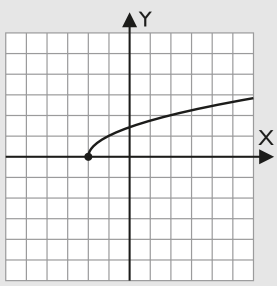
$y''' = \dfrac{3}{8(x + 2)^2\sqrt{x + 2}}$

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: Dom(f) = $[-2, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = -2$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(–2, 0)
   - Eje Y: B(0, $\sqrt{2}$)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-2, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $\varnothing$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\varnothing$
   - Cóncava (∩): $(-2, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
    Im(f) = $[0, +\infty)$

54. $y = \sqrt{x^2 + 1}$

Solución:

$y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$y'' = \dfrac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$

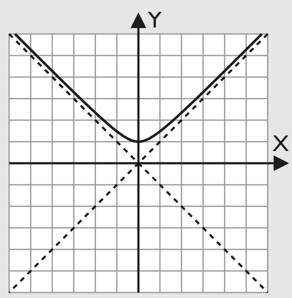
$y''' = -\dfrac{3x}{(x^2 + 1)^2\sqrt{x^2 + 1}}$

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la real $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = -x$, $y = x$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: A(0, 1)

   Signo:
   - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: A(0, 1)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $\varnothing$



10. Recorrido o imagen:
    Im(f) = $[1, +\infty)$

55. $y = \sqrt{x^2 - 9}$

Solución:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$$y'' = -\frac{9}{(x^2 - 9)\sqrt{x^2 - 9}}$$

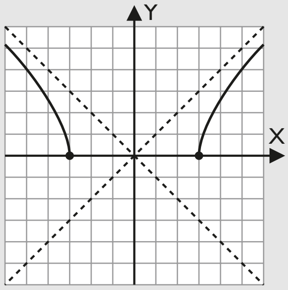
$$y''' = \frac{27x}{(x^2 - 9)^2\sqrt{x^2 - 9}}$$

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = -3, x = 3$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = -x, y = x$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-3, 0), B(3, 0)$
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(3, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -3)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\varnothing$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

56. $y = \sqrt{9 - x^2}$

Solución:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$y'' = -\frac{9}{(9 - x^2)\sqrt{9 - x^2}}$$

$$y''' = -\frac{27x}{(9 - x^2)^2\sqrt{9 - x^2}}$$

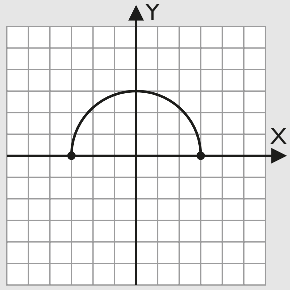
1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = [-3, 3]$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = -3, x = 3$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-3, 0), B(3, 0)$
   - Eje Y: $C(0, 3)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-3, 3)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $C(0, 3)$
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-3, 0)$
   - Decreciente (↘): $(0, 3)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\varnothing$
   - Cóncava (∩): $(-3, 3)$

   Es una semicircunferencia.



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = [0, 3]$

57. $y = \sqrt[3]{x^2}$

Solución:

$y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$y'' = -\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x}}$

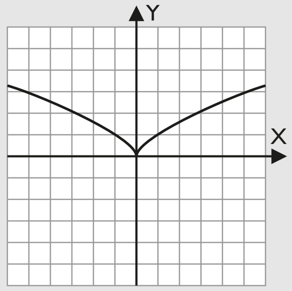
$y''' = \dfrac{8}{27x^2\sqrt[3]{x}}$

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: O(0, 0)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$
9. Punto de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\varnothing$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = [0, +\infty)$

58. $y = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

Solución:

$y' = \dfrac{4}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}}$

$y'' = \dfrac{12x}{(4 - x^2)^2\sqrt{4 - x^2}}$

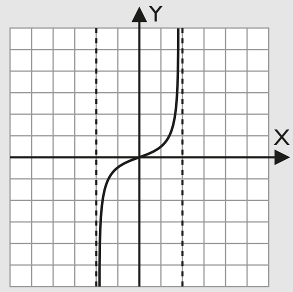
$y''' = \dfrac{48(x^2 + 1)}{(4 - x^2)^3\sqrt{4 - x^2}}$

1. Tipo de función: cociente de una polinómica entre una irracional.
2. Dominio: $Dom(f) = (-2, 2)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = -2$, $x = 2$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = -2$, $x = 2$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): (0, 2)
   - Negativa (–): (–2, 0)
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): (–2, 2)
   - Decreciente (↘): $\varnothing$
9. Punto de inflexión: O(0, 0)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): (0, 2)
   - Cóncava (∩): (–2, 0)



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

5. Análisis de funciones exponenciales

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

59. $y = (x + 2)e^{-x}$

Solución:

$y' = -(x + 1)e^{-x}$

$y'' = xe^{-x}$

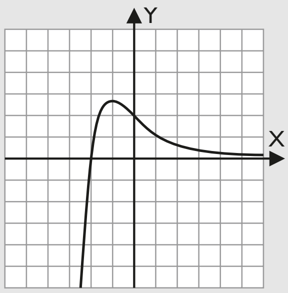
$y''' = -(x - 1)e^{-x}$

1. Tipo de función: polinómica por exponencial.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-2, 0)$
   - Eje Y: $B(0, 2)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $C(-1, e)$
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -1)$
   - Decreciente (↘): $(-1, +\infty)$
9. Punto de inflexión: $B(0, 2)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = (-\infty, e]$

60. $y = xe^{x}$

Solución:

$y' = (x + 1)e^{x}$

$y'' = (x + 2)e^{x}$

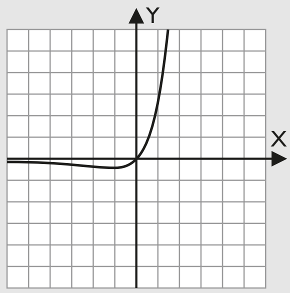
$y''' = (x + 3)e^{x}$

1. Tipo de función: polinómica por exponencial.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $A(-1, -1/e)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-1, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -1)$
9. Punto de inflexión: $B(-2, -2/e^2)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-2, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, -2)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = [-1/e, +\infty)$

61. $y = \dfrac{e^{-x}}{x}$

Solución:

$y' = -\dfrac{(x+1)e^{-x}}{x^2}$

$y'' = \dfrac{(x^2+2x+2)e^{-x}}{x^3}$

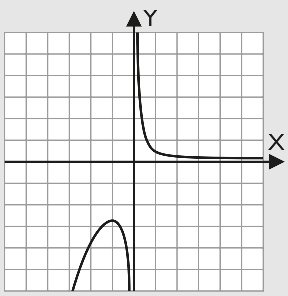
$y''' = -\dfrac{(x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}}{x^4}$

1. Tipo de función: exponencial dividida entre polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En $x = 0$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(-1, -e)$
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -1)$
   - Decreciente (↘): $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = (-\infty, -e] \cup (0, +\infty)$

62. $y = xe^{1/x}$

Solución:

$y' = \dfrac{(x-1)e^{1/x}}{x}$

$y'' = \dfrac{e^{1/x}}{x^3}$

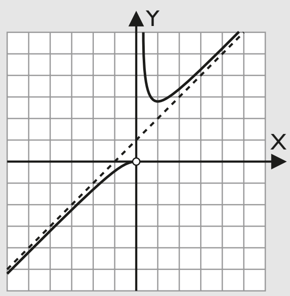
$y''' = -\dfrac{(3x+1)e^{1/x}}{x^5}$

1. Tipo de función: exponencial.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En $x = 0$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = x + 1$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $A(1, e)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(0, 1)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = (-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$

63. $y = e^{x^2}$

Solución:

$y' = 2xe^{x^2}$

$y'' = (4x^2 + 2)e^{x^2}$

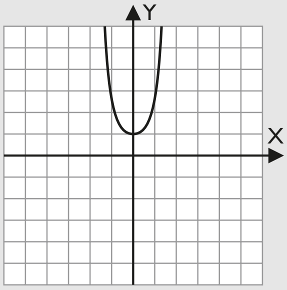
$y''' = (2x^2 + 3)4xe^{x^2}$

1. Tipo de función: exponencial.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: A(0, 1)

   Signo:
   - Positiva (+): $R = (-\infty, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: A(0, 1)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $R = (-\infty, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $\varnothing$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = [1, +\infty)$

64. $y = \dfrac{e^{-x}}{x^2}$

Solución:

$$y' = -\frac{(x + 2)e^{-x}}{x^3}$$

$$y'' = \frac{(x^2 + 4x + 6)e^{-x}}{x^4}$$

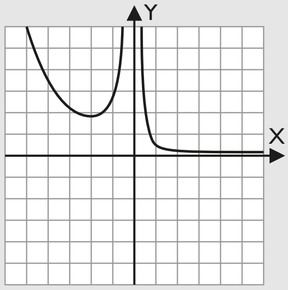
$$y''' = -\frac{(x^3 + 6x^2 + 18x + 24)e^{-x}}{x^5}$$

1. Tipo de función: exponencial dividida entre polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En x = 0 tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: x = 0
   - Horizontales: y = 0
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $A(-2, e^2/4)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-2, 0)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $\varnothing$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = (0, +\infty)$

6. Análisis de funciones logarítmicas

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

65. $y = L(x^2 + 1)$

Solución:

$y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

$y'' = -\dfrac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2}$

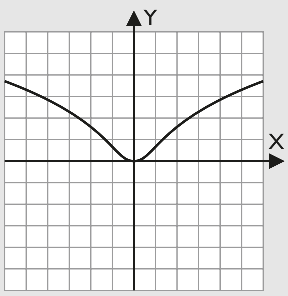
$y''' = \dfrac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3}$

1. Tipo de función: logarítmica.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: O(0, 0)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: B(–1, L 2), C(1, L 2)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-1, 1)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
    Im(f) = $[0, +\infty)$

66. $y = L(x^2 - 4)$

Solución:

$y' = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$

$y'' = -\dfrac{2x^2 + 8}{(x^2 - 4)^2}$

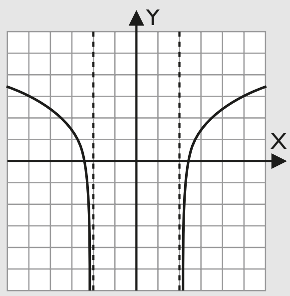
$y''' = \dfrac{4x^3 + 48x}{(x^2 - 4)^3}$

1. Tipo de función: logarítmica.
2. Dominio: Dom(f) = $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = -2$, $x = 2$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = -2$, $x = 2$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-\sqrt{5}, 0)$, $B(\sqrt{5}, 0)$
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\sqrt{5}, -2) \cup (2, \sqrt{5})$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -2)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\varnothing$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
    Im(f) = R = $(-\infty, +\infty)$

67. $y = L\,(x-1)^2$

Solución:

$y' = \dfrac{2}{x-1}$

$y'' = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$

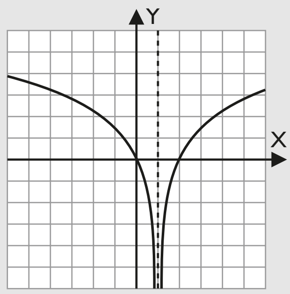
$y''' = \dfrac{4}{(x-1)^3}$

1. Tipo de función: logarítmica.
2. Dominio: $Dom(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = 1$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 1$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0), A(2, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(0, 1) \cup (1, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(1, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 1)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\varnothing$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

68. $y = \dfrac{1}{L\,x}$

Solución:

$y' = -\dfrac{1}{x\,L^2\,x}$

$y'' = \dfrac{2 + L\,x}{x^2\,L^3\,x}$

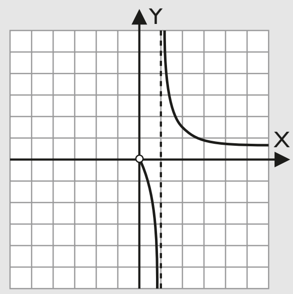
$y''' = -\dfrac{2(L^2\,x + 3\,L\,x + 3)}{x^3\,L^4\,x}$

1. Tipo de función: cociente de una polinómica entre una logarítmica.
2. Dominio: $Dom(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = 0$ tiene una discontinuidad de 2ª especie y en $x = 1$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 1$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $\varnothing$
   - Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Punto de inflexión: $A(1/e^2, -1/2)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, 1/e^2) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(1/e^2, 1)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

69. $y = \dfrac{x}{L\,x}$

Solución:

$y' = \dfrac{-1 + L\,x}{L^2\,x}$

$y'' = \dfrac{2 - L\,x}{x\,L^3\,x}$

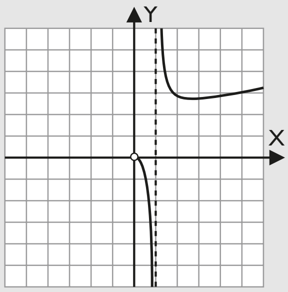
$y''' = \dfrac{-6 + L^2\,x}{x^2\,L^4\,x}$

1. Tipo de función: cociente de una polinómica entre una logarítmica.
2. Dominio: $Dom(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = 0$ tiene una discontinuidad de 2ª especie y en $x = 1$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 1$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: A(e, e)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(e, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, e)$
9. Punto de inflexión: $B(e^2, e^2/2)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(1, e^2)$
   - Cóncava (∩): $(0, 1) \cup (e^2, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
    $Im(f) = (-\infty, 0) \cup (e, +\infty)$

70. $y = L^2\,x$

Solución:

$y' = \dfrac{2\,L\,x}{x}$

$y'' = \dfrac{2(1 - L\,x)}{x^2}$

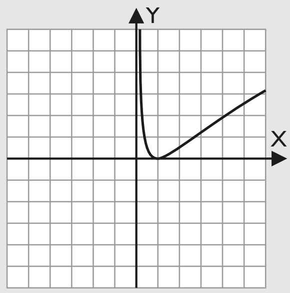
$y''' = \dfrac{2(-3 + 2\,L\,x)}{x^3}$

1. Tipo de función: logarítmica al cuadrado.
2. Dominio: $Dom(f) = (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio; en $x = 0$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(1, 0)
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: A(1, 0)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(1, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(0, 1)$
9. Punto de inflexión: B(e, 1)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, e)$
   - Cóncava (∩): $(e, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
    $Im(f) = [0, +\infty)$

7. Análisis de funciones trigonométricas

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

71. $y = 3 \text{ sen } x/2$

Solución:

$y' = \frac{3}{2} \cos \frac{x}{2}$

$y'' = -\frac{3}{4} \text{ sen } \frac{x}{2}$

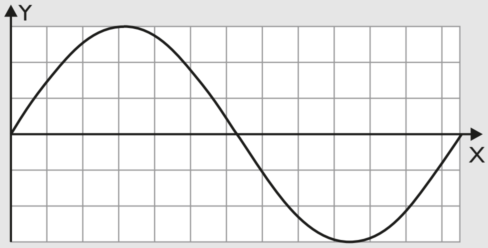
$y''' = -\frac{3}{8} \cos \frac{x}{2}$

1. Tipo de función: trigonométrica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: es periódica de período 4π; se estudia solo en el primer período $[0, 4\pi)$
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen de coordenadas $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0), A(2\pi, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, 2\pi)$
   - Negativa (–): $(2\pi, 4\pi)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $B(\pi, 3)$
   - Mínimo relativo: $C(3\pi, -3)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$
   - Decreciente (↘): $(\pi, 3\pi)$
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0), A(2\pi, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(2\pi, 4\pi)$
   - Cóncava (∩): $(0, 2\pi)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = [-3, 3]$

72. $y = \text{sen } x - \cos x$

Solución:

$y' = \cos x + \text{sen } x$

$y'' = -\text{sen } x + \cos x$

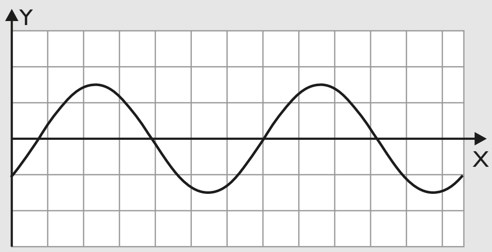
$y''' = -\cos x - \text{sen } x$

1. Tipo de función: trigonométrica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: es periódica de período 2π; se estudia solo en el primer período $[0, 2\pi)$
5. Simetrías: no es simétrica.
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(\pi/4, 0), B(5\pi/4, 0)$
   - Eje Y: $C(0, -1)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(\pi/4, 5\pi/4)$
   - Negativa (–): $(0, \pi/4) \cup (5\pi/4, 2\pi)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $D(3\pi/4, \sqrt{2})$
   - Mínimo relativo: $E(7\pi/4, -\sqrt{2})$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, 3\pi/4) \cup (7\pi/4, 2\pi)$
   - Decreciente (↘): $(3\pi/4, 7\pi/4)$
9. Puntos de inflexión: $A(\pi/4, 0), B(5\pi/4, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, \pi/4) \cup (5\pi/4, 2\pi)$
   - Cóncava (∩): $(\pi/4, 5\pi/4)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

73. $y = \text{sen}^2 x$

Solución:

$y' = 2 \text{ sen } x \cdot \cos x$

$y'' = -2 + 4 \cos^2 x$

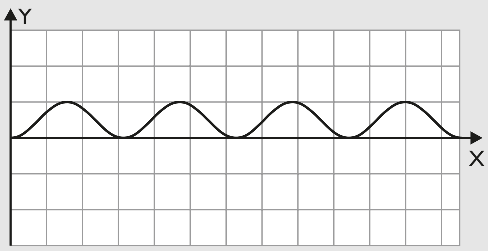
$y''' = -8 \text{ sen } x \cos x$

1. Tipo de función: trigonométrica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: es periódica de período π; se estudia solo en el primer período $[0, \pi)$
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, \pi)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(\pi/2, 1)$
   - Mínimo relativo: $O(0, 0)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, \pi/2)$
   - Decreciente (↘): $(\pi/2, \pi)$
9. Puntos de inflexión: $B(\pi/4, 1/2)$, $C(3\pi/4, 1/2)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$
   - Cóncava (∩): $(\pi/4, 3\pi/4)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = [0, 1]$

74. $y = 3 \cos 2x$

Solución:

$y' = -6 \text{ sen } 2x$

$y'' = -12 \cos 2x$

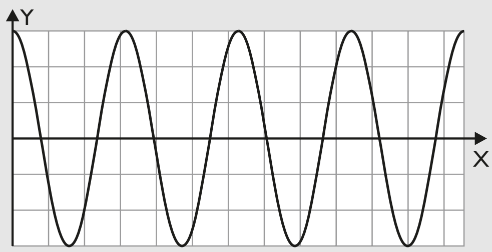
$y''' = 24 \text{ sen } 2x$

1. Tipo de función: trigonométrica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: es periódica de período π; se estudia solo en el primer período $[0, \pi)$
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(\pi/4, 0)$, $B(3\pi/4, 0)$
   - Eje Y: $C(0, 3)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$
   - Negativa (–): $(\pi/4, 3\pi/4)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $C(0, 3)$
   - Mínimo relativo: $D(\pi/2, -3)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(\pi/2, \pi)$
   - Decreciente (↘): $(0, \pi/2)$
9. Puntos de inflexión: $A(\pi/4, 0)$, $B(3\pi/4, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(\pi/4, 3\pi/4)$
   - Cóncava (∩): $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = [-3, 3]$

Para ampliar

75. Dada la función $y = x^3 + 2x$

a) halla los puntos de inflexión.

b) esboza la gráfica.

Solución:

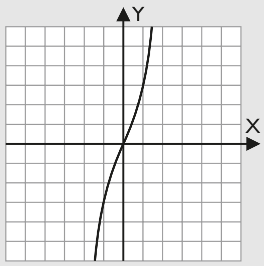
$y' = 3x^2 + 2$

$y'' = 6x$

$y''' = 6 \neq 0$

a) $A(0, 0)$

b) Gráfica:



76. Dada la función $y = x^4$

a) halla y clasifica los puntos singulares.

b) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 4x^3$

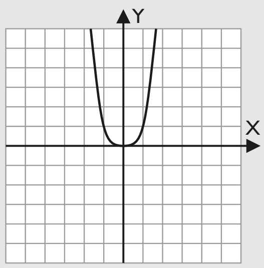
$y'' = 12x^2$

$y''' = 24x$

$y^{IV} = 24 > 0\ (+)$

a) $A(0, 0)$ mínimo relativo.

b) Gráfica:



77. Dada la función $y = \dfrac{1}{x^2}$

a) calcula el dominio.

b) determina las asíntotas.

c) esboza la gráfica.

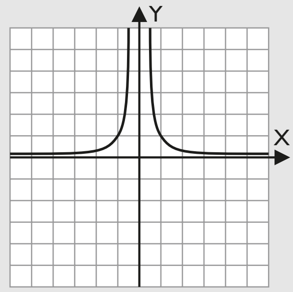
Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

b) Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$
- Horizontales: $y = 0$

c) Gráfica:



78. Dada la función $y = \sqrt{x}$

a) calcula el dominio.

b) determina la monotonía.

c) esboza la gráfica.

Solución:

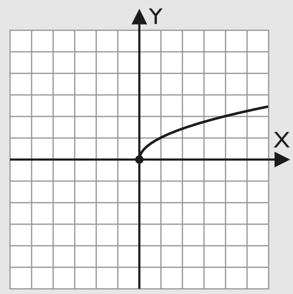
$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

a) $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$

b) Monotonía:

- Creciente ($\nearrow$): $(0, +\infty)$
- Decreciente ($\searrow$): $\emptyset$

c) Gráfica:



79. Dada la función $y = x^4 - 6x^2 + 5$

a) halla los máximos y mínimos relativos.

b) halla los puntos de inflexión.

c) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 4x^3 - 12x$

$y'' = 12x^2 - 12$

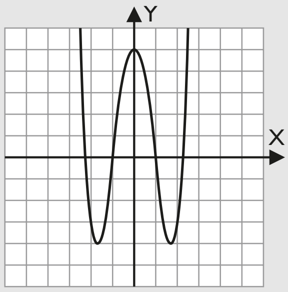
$y''' = 24x$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(0, 5)$
- Mínimo relativo: $B(-\sqrt{3}, -4)$; $C(\sqrt{3}, -4)$

b) Puntos de inflexión: $D(-1, 0)$; $E(1, 0)$

c) Gráfica:



80. Sea la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 20$

a) Determina los máximos y mínimos relativos.

b) Halla los puntos de inflexión.

c) Con los datos obtenidos haz un esbozo de la función.

Solución:

$y' = 3x^2 - 12x$

$y'' = 6x - 12$

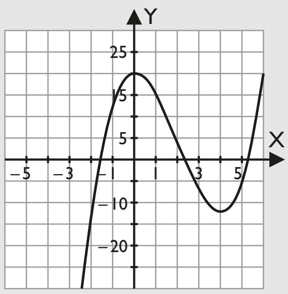
$y''' = 6$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(0, 20)$
- Mínimo relativo: $B(4, -12)$

b) Punto de inflexión: $C(2, 4)$

c) Gráfica:



81. Dada la función $y = x^4 - 2x^2$

a) halla los máximos y mínimos relativos.

b) halla los puntos de inflexión.

c) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 4x^3 - 4x$

$y'' = 12x^2 - 4$

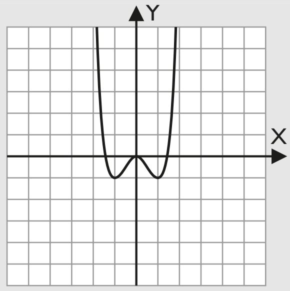
$y''' = 24x$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $O(0, 0)$
- Mínimo relativo: $A(-1, -1)$; $B(1, -1)$

b) Puntos de inflexión: $C(-\sqrt{3}/3, -5/9)$; $D(\sqrt{3}/3, -5/9)$

c) Gráfica:



82. Dada la función $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$

a) calcula el dominio.

b) determina las asíntotas.

c) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = -\dfrac{2}{x^3}$

$y'' = \dfrac{6}{x^4}$

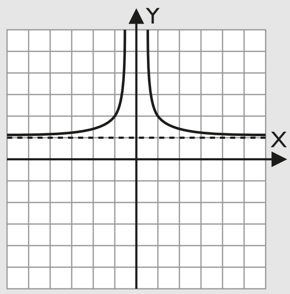
$y''' = -\dfrac{24}{x^5}$

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

b) Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$
- Horizontales: $y = 1$

c) Gráfica:



83. Dada la función $y = x^3 - 3x^2 + 2$

a) halla los máximos y mínimos relativos.

b) halla los puntos de inflexión.

c) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 3x^2 - 6x$

$y'' = 6x - 6$

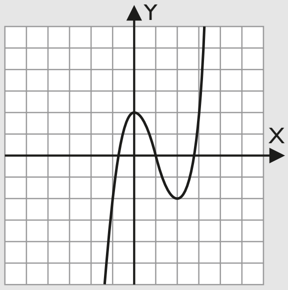
$y''' = 6$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(0, 2)$
- Mínimo relativo: $B(2, -2)$

b) Punto de inflexión: $C(1, 0)$

c) Gráfica:



84. Dada la función $y = 6x^2 - 3x^4$

a) halla los máximos y mínimos relativos.

b) halla los puntos de inflexión.

c) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 12x - 12x^3$

$y'' = 12 - 36x^2$

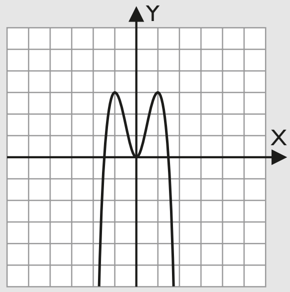
$y''' = -72x$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(–1, 3); B(1, 3)
- Mínimo relativo: O(0, 0)

b) Puntos de inflexión: $C(-\sqrt{3}/3, 5/3)$; $D(\sqrt{3}/3, 5/3)$

c) Gráfica:



Problemas

85. Dada la función $y = x^3 + 3x^2$

a) halla los máximos y mínimos relativos.

b) halla los puntos de inflexión.

c) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 3x^2 + 6x$

$y'' = 6x + 6$

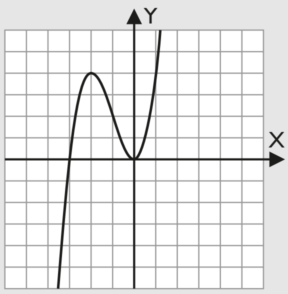
$y''' = 6$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(–2, 4)
- Mínimo relativo: O(0, 0)

b) Punto de inflexión: C(–1, 2)

c) Gráfica:



86. Dada la función $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

a) calcula el dominio.

b) determina las asíntotas.

c) halla los máximos y mínimos relativos.

d) determina los puntos de inflexión.

e) esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = -\frac{2x}{(x-1)^3}$$

$$y'' = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$$

$$y''' = -\frac{12x+12}{(x-1)^5}$$

a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

b) Asíntotas:

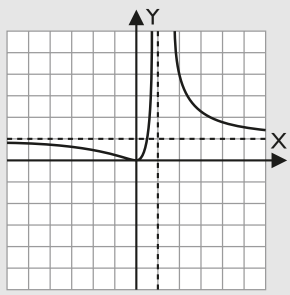
- Verticales: x = 1
- Horizontales: y = 1

c) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: O(0, 0)

d) Punto de inflexión: A(–1/2, 1/9)

e) Gráfica:



Ejercicios y problemas

87. Sea $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x$$

a) Determina los puntos de corte con los ejes.
b) Halla los máximos y mínimos relativos.
c) Calcula los puntos de inflexión.
d) Esboza la gráfica de la función.

Solución:

$y' = -6x^2 - 18x - 12$

$y'' = -12x - 18$

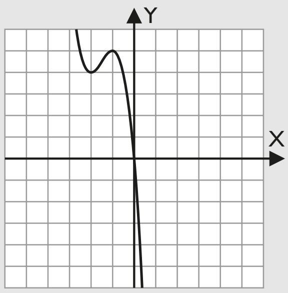
$y''' = -12$

a) Puntos de corte con los ejes:
- Eje X: O(0, 0)
- Eje Y: O(0, 0)

b) Máximos y mínimos relativos:
- Máximo relativo: A(–1, 5)
- Mínimo relativo: B(–2, 4)

c) Punto de inflexión: C(–3/2, 9/2)

d) Gráfica:



88. Dada la siguiente función, definida en los números reales salvo en x = 0;

$$f(x) = 3 - x - \frac{2}{x}$$

a) determina el dominio.
b) halla las asíntotas.
c) calcula las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.
d) esboza la gráfica de la función

Solución:

$y' = \frac{2}{x^2} - 1$

$y'' = -\frac{4}{x^3}$

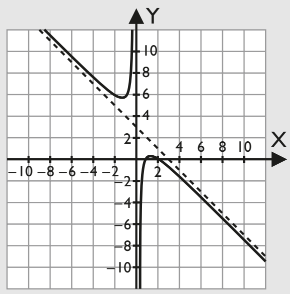
$y''' = \frac{12}{x^4}$

a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

b) Asíntotas:
- Verticales: x = 0
- Oblicuas: y = 3 – x

c) Máximos y mínimos relativos:
- Máximo relativo: $A(\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$
- Mínimo relativo: $B(-\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$

d) Gráfica:



89. Dada la función $y = \sqrt{x^2 + 9}$

a) calcula el dominio.
b) determina las asíntotas.
c) halla los máximos y mínimos relativos.
d) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$

$y'' = \frac{9}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}$

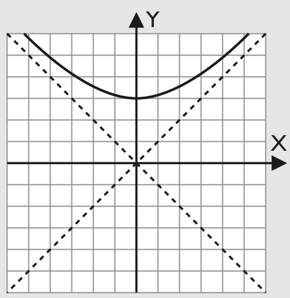
$y''' = -\frac{27x}{(x^2 + 9)^2\sqrt{x^2 + 9}}$

a) Dom (f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

b) Asíntotas:
- Oblicuas: y = x, y = –x

c) Máximos y mínimos relativos:
- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: A(0, 3)

d) Gráfica:



90. Sea la función $V(t) = 60\left(\frac{t^3}{3} - 5t^2 + 16t\right)$

a) Calcula los máximos y mínimos relativos.
b) Determina los puntos de inflexión.
c) Esboza la gráfica de la función.

Solución:

$v'(t) = 60(t^2 - 10t + 16)$

$v''(t) = 60(2t - 10)$

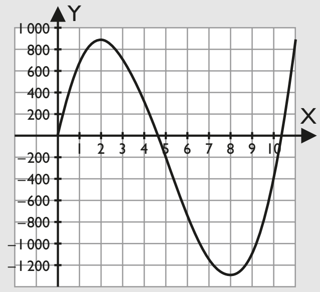
$v'''(t) = 120$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(2, 880)
- Mínimo relativo: B(8, –1 280)

b) Punto de inflexión: C(5, –200)

c) Gráfica:



91. Dada la función $y = 2x^2 - x^4$

a) halla los máximos y mínimos relativos.

b) halla los puntos de inflexión.

c) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 4x - 4x^3$

$y'' = 4 - 12x^2$

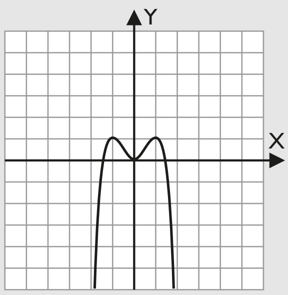
$y''' = -24x$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(–1, 1), B(1, 1)
- Mínimo relativo: O(0, 0)

b) Puntos de inflexión: $C(-\sqrt{3}/3, 5/9), D(\sqrt{3}/3, 5/9)$

c) Gráfica:



92. Sea **f** la función definida para $x \neq -2$ por:

$$f(x) = \frac{x^2}{x + 2}$$

a) Halla las asíntotas de la gráfica de **f**

b) Calcula los extremos locales de **f**

c) Determina los puntos de inflexión.

d) Teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores, haz un esbozo de la gráfica.

Solución:

$$y' = \frac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2}$$

$$y'' = \frac{8}{(x + 2)^3}$$

$$y''' = -\frac{24}{(x + 2)^4}$$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

a) Asíntotas:

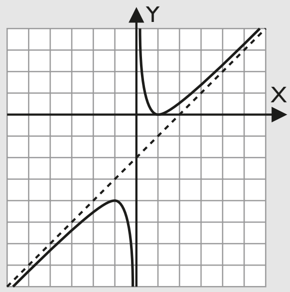
- Verticales: $x = -2$
- Oblicuas: $y = x - 2$

b) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(–4, –8)
- Mínimo relativo: O(0, 0)

c) $y'' \neq 0$. No hay puntos de inflexión.

d) Gráfica:



93. Se considera la función $f(x) = x^2e^{-x}$

Estudia:

a) asíntotas.

b) extremos relativos.

c) A partir de estos datos, representa la función.

Solución:

$y' = -x(x - 2)e^{-x}$

$y'' = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$

$y''' = -(x^2 - 6x + 6)e^{-x}$

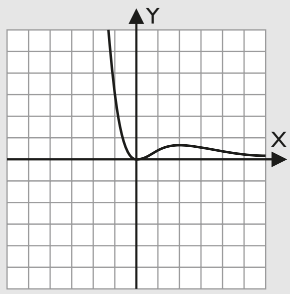
a) Asíntotas:

- Horizontal: $y = 0$

b) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(2, 4/e^2)$
- Mínimo relativo: O(0, 0)

c) Gráfica:



94. Dada la función $y = \sqrt[3]{x^2 + 4}$

a) halla los máximos y mínimos relativos.

b) halla los puntos de inflexión.

c) esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 4)^2}}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 - 24}{9(x^2 + 4)\sqrt[3]{(x^2 + 4)^2}}$$

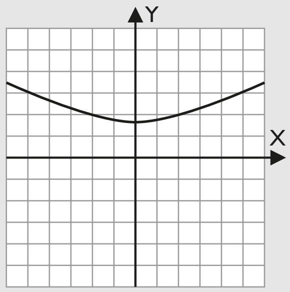
$$y''' = \frac{8x^3 - 288x}{27(x^2 + 4)^2\sqrt[3]{(x^2 + 4)^2}}$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: $A(0, \sqrt[3]{4})$

b) Puntos de inflexión: $B(-2\sqrt{3}, 2\sqrt[3]{2})$; $C(2\sqrt{3}, 2\sqrt[3]{2})$

c) Gráfica:



95. Dada la función $y = e^x + e^{-x}$

a) halla y clasifica los puntos singulares.

b) esboza la gráfica.

Solución:

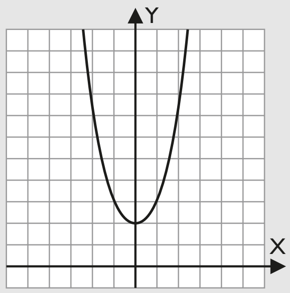
$y' = e^x - e^{-x}$

$y'' = e^x + e^{-x}$

$y''' = e^x - e^{-x}$

a) Punto singular: A(0, 2) es un mínimo relativo.

b) Gráfica:



96. Halla y clasifica los puntos singulares de la función:

$$y = x^4 + x^2$$

Esboza la gráfica.

Solución:

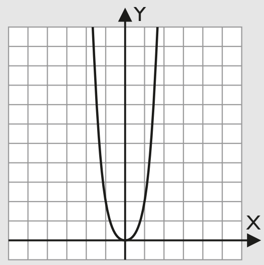
$y' = 4x^3 + 2x$

$y'' = 12x^2 + 2$

$y''' = 24x$

a) Punto singular: A(0, 0) es un mínimo relativo.

b) Gráfica:



97. Dada la curva $y = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$

a) determina el dominio de definición.

b) halla las simetrías.

c) halla los puntos de corte con los ejes.

d) calcula las asíntotas.

e) halla los máximos y mínimos relativos.

f) haz una representación aproximada.

Solución:

$$y' = -\frac{14x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y'' = \frac{42x^2 + 56}{(x^2 - 4)^3}$$

$$y''' = -\frac{168x^3 + 672x}{(x^2 - 4)^4}$$

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (-2, +\infty)$

b) Simetrías: es simétrica respecto del eje Y

c) Corte con los ejes:

- Eje X: no lo corta.
- Eje Y: A(0, –3/4)

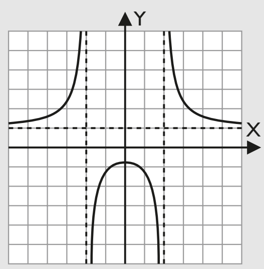
d) Asíntotas:

- Verticales: x = –2, x = 2
- Horizontales: y = 1

e) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(0, –3/4)
- Mínimo relativo: no tiene.

f) Gráfica:



98. Dada la función $y = L\,(x + 1)^2$

a) determina su dominio.

b) halla los puntos de corte con los ejes.

c) calcula las asíntotas.

d) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = \dfrac{2}{x + 1}$

$y'' = -\dfrac{2}{(x + 1)^2}$

$y''' = \dfrac{4}{(x + 1)^3}$

a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

b) Corte con los ejes:

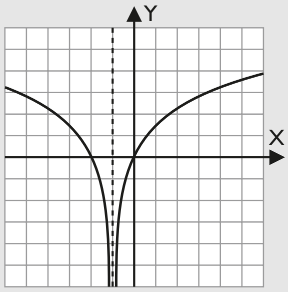
• Eje X: A(–2, 0); O(0, 0)

• Eje Y: O(0, 0)

c) Asíntotas:

• Verticales: $x = -1$

d) Gráfica:



99. Dada la función $y = x^4 + 4x$

a) halla y clasifica los puntos singulares.

b) calcula los puntos de inflexión.

c) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 4x^3 + 4$

$y'' = 12x^2$

$y''' = 24x$

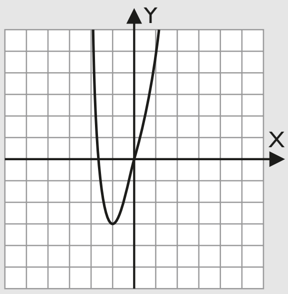
a) Máximos y mínimos relativos:

• Máximo relativo: no tiene.

• Mínimo relativo: A(–1, –3)

b) Puntos de inflexión: no tiene.

c) Gráfica:



100. Dada la función $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

a) calcula el dominio.

b) halla las simetrías.

c) determina las asíntotas.

d) halla los puntos de corte con los ejes.

e) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = \dfrac{2}{x^3}$

$y'' = -\dfrac{6}{x^4}$

$y''' = \dfrac{24}{x^5}$

a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

b) Simetrías: es simétrica respecto del eje Y

c) Asíntotas:

• Verticales: $x = 0$

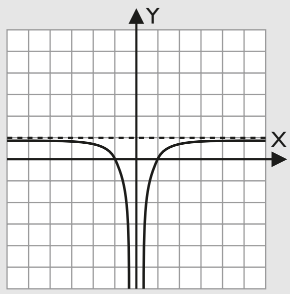
• Horizontales: $y = 1$

d) Corte con los ejes:

• Eje X: A(–1, 0); B(1, 0)

• Eje Y: no lo corta.

e) Gráfica:



101. Dada la función $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

a) calcula el dominio.

b) halla las simetrías.

c) determina las asíntotas.

d) halla los puntos de corte con los ejes.

e) halla los puntos de inflexión.

f) esboza la gráfica.

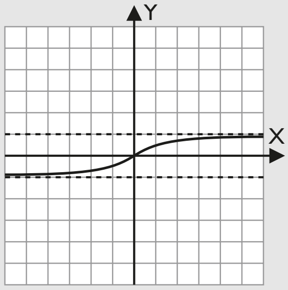
Solución:

$y' = \dfrac{4}{(x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 4}}$

$y'' = -\dfrac{12x}{(x^2 + 4)^2\sqrt{x^2 + 4}}$

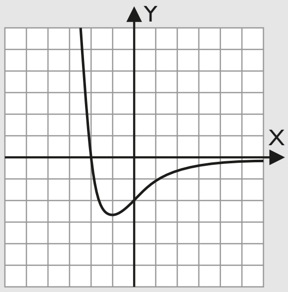
$y''' = \dfrac{48(x^2 - 1)}{(x^2 + 4)^3\sqrt{x^2 + 4}}$

a) Dom (f) = $\mathbb{R}$ = $(-\infty, +\infty)$
b) Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
c) Asíntotas:
  • Horizontales: $y = -1$, $y = 1$
d) Corte con los ejes:
  • Eje X: O(0, 0)
  • Eje Y: O(0, 0)
e) Punto de inflexión: O(0, 0)
f) Gráfica:



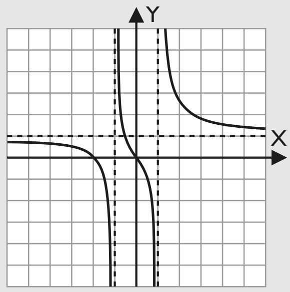
102. Dada la función $y = -(x + 2)e^{-x}$
  a) calcula las asíntotas.
  b) halla los puntos de corte con los ejes.
  c) halla los máximos y mínimos relativos.
  d) determina los puntos de inflexión.
  e) esboza la gráfica.

Solución:
$y' = (x + 1)e^{-x}$
$y'' = -xe^{-x}$
$y''' = (x - 1)e^{-x}$
a) Asíntotas:
  • Horizontales: $y = 0$
b) Corte con los ejes:
  • Eje X: A(–2, 0)
  • Eje Y: B(0, –2)
c) Máximos y mínimos relativos:
  • Máximo relativo: no tiene.
  • Mínimo relativo: C(–1, –e)
d) Punto de inflexión: D(0, –2)
e) Gráfica:



103. Dada la función $y = \dfrac{x(x + 2)}{x^2 - 1}$
  a) calcula el dominio.
  b) determina las asíntotas.
  c) halla los puntos de corte con los ejes.
  d) esboza la gráfica.

Solución:
$y' = -\dfrac{2x^2 + 2x + 2}{(x^2 - 1)^2}$
$y'' = \dfrac{4x^3 + 6x^2 + 12x + 2}{(x^2 - 1)^3}$
$y''' = -\dfrac{12x^4 + 24x^3 + 72x^2 + 24x + 12}{(x^2 - 1)^4}$
a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
b) Asíntotas:
  • Verticales: $x = -1$, $x = 1$
  • Horizontales: $y = 1$
c) Corte con los ejes:
  • Eje X: A(–2, 0); O(0, 0)
  • Eje Y: O(0, 0)
d) Gráfica:

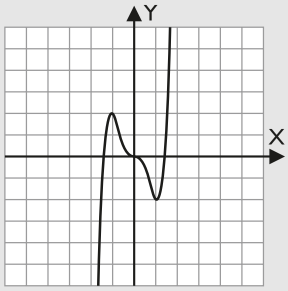


104. Dada la función $y = 3x^5 - 5x^3$
  a) determina las simetrías.
  b) calcula los puntos de corte con los ejes.
  c) halla los máximos y mínimos relativos.
  d) halla los puntos de inflexión.
  e) esboza la gráfica.

Solución:
$y' = 15x^4 - 15x^2$
$y'' = 60x^3 - 30x$
$y''' = 180x^2 - 30$
a) Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
b) Corte con los ejes:
  • Eje X: A($-\sqrt{15}/3$, 0); O(0, 0); B($\sqrt{15}/3$, 0)
  • Eje Y: O(0, 0)
c) Máximos y mínimos relativos:
  • Máximo relativo: A(–1, 2)
  • Mínimo relativo: B(1, –2)

d) Puntos de inflexión:
$C(-\sqrt{2}/2, 7\sqrt{2}/8)$; $O(0, 0)$; $D(\sqrt{2}/2, -7\sqrt{2}/8)$

e) Gráfica:



Para profundizar

105. Dada la función $y = x^3 + 3x$

a) halla los puntos de corte con los ejes.
b) calcula los máximos y mínimos relativos.
c) determina los puntos de inflexión.
d) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 3x^2 + 3$

$y'' = 6x$

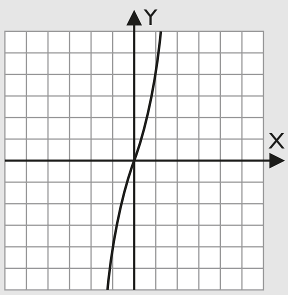
$y''' = 6$

a) Corte con los ejes:
- Eje X: $O(0, 0)$
- Eje Y: $O(0, 0)$

b) Máximos y mínimos relativos:
- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: no tiene.

c) Punto de inflexión: $O(0, 0)$

d) Gráfica:



106. Dada la función $y = x^4 + 2x^2$

a) halla los puntos de corte con los ejes.
b) calcula los máximos y mínimos relativos.
c) determina los puntos de inflexión.
d) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 4x^3 + 4x$

$y'' = 12x^2 + 4$

$y''' = 24x$

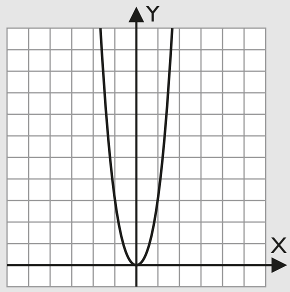
$y^{IV} = 24$

a) Corte con los ejes:
- Eje X: $O(0, 0)$
- Eje Y: $O(0, 0)$

b) Máximos y mínimos relativos:
- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: $O(0, 0)$

c) Puntos de inflexión: no tiene.

d) Gráfica:



107. Dada la función $y = \dfrac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}$

a) calcula el dominio.
b) determina las asíntotas.
c) calcula los puntos de corte con los ejes.
d) halla los máximos y mínimos relativos.
e) determina los puntos de inflexión.
f) esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = -\frac{4x - 2}{(x - 2)^3}$$

$$y'' = \frac{8x + 2}{(x - 2)^4}$$

$$y''' = -\frac{24x + 24}{(x - 2)^5}$$

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

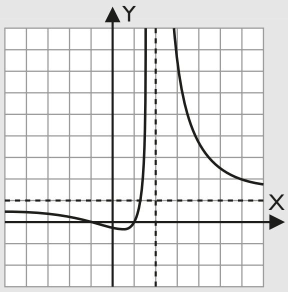
b) Asíntotas:
- Verticales: $x = 2$
- Horizontales: $y = 1$

c) Corte con los ejes:
- Eje X: $A(-1, 0)$; $B(1, 0)$
- Eje Y: $C(0, -1/4)$

d) Máximos y mínimos relativos:
- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: $D(1/2, -1/3)$

e) Punto de inflexión: $O(-1/4, -5/27)$

f) Gráfica:



108. Se considera la siguiente función:

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$$

a) Calcula los máximos y mínimos relativos.

b) Determina los intervalos de concavidad y convexidad.

c) Represéntala gráficamente.

Solución:

$y' = 6x^2 - 42x + 60$

$y'' = 12x - 42$

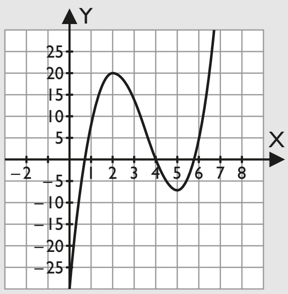
$y''' = 12$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(2, 20)
- Mínimo relativo: B(5, –7)

b) Punto de inflexión: C(7/2, 13/2)

c) Gráfica:



109. Dada la función $y = \sqrt{25 - x^2}$

a) calcula el dominio.

b) determina las asíntotas.

c) calcula los puntos de corte con los ejes.

d) halla los máximos y mínimos relativos.

e) determina los puntos de inflexión.

f) esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$y'' = -\frac{25}{(25 - x^2)\sqrt{25 - x^2}}$$

$$y''' = -\frac{75x}{(25 - x^2)^2\sqrt{25 - x^2}}$$

a) Dom (f) = [–5, 5]

b) Asíntotas: no tiene.

c) Corte con los ejes:

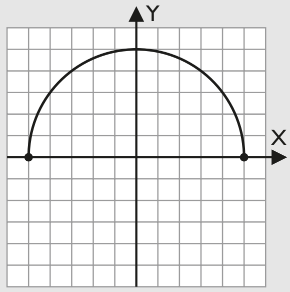
- Eje X: A(–5, 0); B(5, 0)
- Eje Y: C(0, 5)

d) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: C(0, 5)
- Mínimo relativo: no tiene.

e) Puntos de inflexión: no tiene.

f) Gráfica:



110. Dada la función $y = 3x^2 - x^3$

a) calcula los puntos de corte con los ejes.

b) halla los máximos y mínimos relativos.

c) halla los puntos de inflexión.

d) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 6x - 3x^2$

$y'' = 6 - 6x$

$y''' = -6$

a) Corte con los ejes:

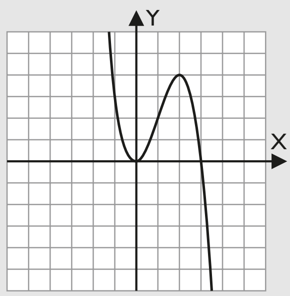
- Eje X: O(0, 0); A(3, 0)
- Eje Y: O(0, 0)

b) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: B(2, 4)
- Mínimo relativo: O(0, 0)

c) Punto de inflexión: C(1, 2)

d) Gráfica:



111. Dada la función $y = e^x - e^{-x}$

a) determina las simetrías.
b) calcula los puntos de corte con los ejes.
c) halla los máximos y mínimos relativos.
d) halla los puntos de inflexión.
e) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = e^x + e^{-x}$

$y'' = e^x - e^{-x}$

$y''' = e^x + e^{-x}$

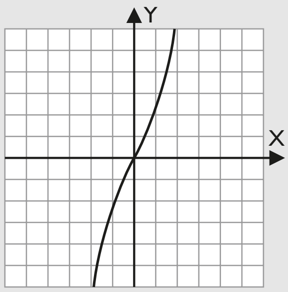
a) Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)

b) Corte con los ejes:
- Eje X: O(0, 0)
- Eje Y: O(0, 0)

c) Máximos y mínimos relativos:
- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: no tiene.

d) Punto de inflexión: O(0, 0)

e) Gráfica:



112. Dada la función $y = 5x^3 - 3x^5$

a) determina las simetrías.
b) calcula los puntos de corte con los ejes.
c) halla los máximos y mínimos relativos.
d) halla los puntos de inflexión.
e) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 15x^2 - 15x^4$

$y'' = 30x - 60x^3$

$y''' = 30 - 180x^2$

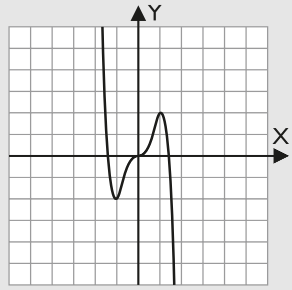
a) Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)

b) Corte con los ejes:
- Eje X: $A(-\sqrt{15}/3, 0)$; $O(0, 0)$; $B(\sqrt{15}/3, 0)$
- Eje Y: O(0, 0)

c) Máximos y mínimos relativos:
- Máximo relativo: A(1, 2)
- Mínimo relativo: B(–1, –2)

d) Puntos de inflexión:
$C(-\sqrt{2}/2, -7\sqrt{2}/8)$; $O(0, 0)$; $D(\sqrt{2}/2, 7\sqrt{2}/8)$

e) Gráfica:



113. Dada la función $y = L\,(x^2 - x - 2)$

a) determina su dominio.
b) calcula las asíntotas.
c) esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2}$$

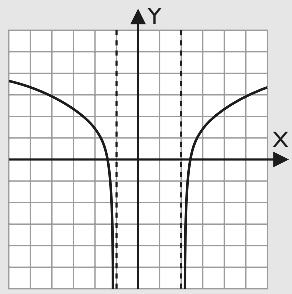
$$y'' = -\frac{2x^2 - 2x + 5}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$y''' = \frac{4x^3 - 6x^2 + 30x - 14}{(x^2 - x - 2)^3}$$

a) $\text{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

b) Asíntotas:
- Verticales: $x = -1$, $x = 2$

c) Gráfica:



114. Dada la función $y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$

a) calcula el dominio.
b) halla los puntos de corte con el eje X
c) determina los máximos y mínimos relativos.
d) halla los puntos de inflexión.
e) esboza la gráfica.

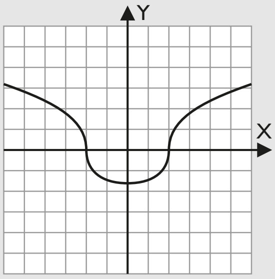
Solución:

$$y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 + 24}{9(x^2 - 4)\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}}$$

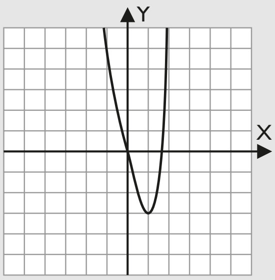
$$y''' = \frac{8x^3 + 288x}{27(x^2 - 4)^2\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}}$$

a) Dom (f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
b) Asíntotas: no tiene.
c) Corte con los ejes:
  • Eje X: $A(-2, 0)$; $B(2, 0)$
  • Eje Y: $C(0, -\sqrt[3]{4})$
d) Máximos y mínimos relativos:
  • Máximo relativo: no tiene.
  • Mínimo relativo: $C(0, -\sqrt[3]{4})$
e) Puntos de inflexión: $A(-2, 0)$; $B(2, 0)$
f) Gráfica:



115. Dada la función $y = x^4 - 4x$
  a) halla los máximos y mínimos relativos.
  b) halla los puntos de inflexión.
  c) esboza la gráfica.

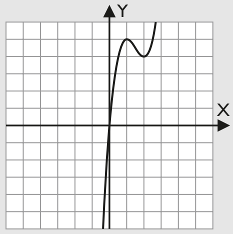
Solución:
$y' = 4x^3 - 4$
$y'' = 12x^2$
$y''' = 24x$
a) Máximos y mínimos relativos:
  • Máximo relativo: no tiene.
  • Mínimo relativo: $A(1, -3)$
b) Puntos de inflexión: no tiene.
c) Gráfica:



116. Dada la función $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$
  a) halla los máximos y mínimos relativos.
  b) halla los puntos de inflexión.
  c) esboza la gráfica.

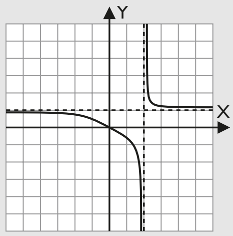
Solución:
$y' = 6x^2 - 18x + 12$
$y'' = 12x - 18$
$y''' = 12$

a) Corte con los ejes:
  • Eje X: $O(0, 0)$
  • Eje Y: $O(0, 0)$
b) Máximos y mínimos relativos:
  • Máximo relativo: $A(1, 5)$
  • Mínimo relativo: $B(2, 4)$
c) Punto de inflexión: $C(3/2, 9/2)$
d) Gráfica:



117. Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 8}}$
  a) calcula el dominio.
  b) calcula las asíntotas.
  c) halla los puntos de corte con el eje X
  d) determina los máximos y mínimos relativos.
  e) halla los puntos de inflexión.
  f) esboza la gráfica.

Solución:
$$y' = -\frac{8}{(x^3 - 8)\sqrt[3]{x^3 - 8}}$$
$$y'' = \frac{32x^2}{(x^3 - 8)^2\sqrt[3]{x^3 - 8}}$$
$$y''' = -\frac{160x^4 + 512x}{(x^3 - 8)^3\sqrt[3]{x^3 - 8}}$$
a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$
b) Asíntotas:
  • Verticales: $x = 2$
  • Horizontales: $y = 1$
c) Corte con los ejes:
  • Eje X: $O(0, 0)$
  • Eje Y: $O(0, 0)$
d) Máximos y mínimos relativos:
  • Máximo relativo: no tiene.
  • Mínimo relativo: no tiene.
e) Puntos de inflexión: no tiene.
f) Gráfica:



Paso a paso

118. Representa y analiza la función:

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

119. Internet. Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

Representa las siguientes funciones completando para cada una de ellas el formulario de los 10 apartados:

120. Representa y analiza la función:

$$y = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$$

Solución:

Ejercicio 120

$f(x) = 2x^2 - \frac{x^4}{4} \rightarrow x \mapsto -\frac{1}{4} \cdot x^4 + 2 \cdot x^2$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

1. Tipo de función : polinómica.
2. Dominio : por ser una función polinómica es toda la recta real.
   $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad : por ser una función polinómica es continua en toda la recta real.
4. Periodicidad : por ser una función polinómica no es periódica.
5. Simetrías :

$f(-x) \rightarrow -\frac{1}{4} \cdot x^4 + 2 \cdot x^2$

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ es par, simétrica respecto del eje Y

6. Asíntotas : por ser una función polinómica no tiene asíntotas.
7. Corte con los ejes :

resolver(f(x) = 0) $\rightarrow$ $\{\{x=0\}, \{x=-2\cdot\sqrt{2}\}, \{x=2\cdot\sqrt{2}\}\}$

· Eje X : O(0, 0), $A(-2\cdot\sqrt{2}, 0)$; $B(2\cdot\sqrt{2}, 0)$

O = punto(0, 0) $\rightarrow$ (0,0)

A = punto($-2\cdot\sqrt{2}$, 0) $\rightarrow$ ($-2\cdot\sqrt{2}$,0)

B = punto($2\cdot\sqrt{2}$, 0) $\rightarrow$ ($2\cdot\sqrt{2}$,0)

dibujar(O, {color = negro, tamaño_punto = 8})

dibujar(A, {color = negro, tamaño_punto = 8})

dibujar(B, {color = negro, tamaño_punto = 8})

· Eje Y : O(0, 0)

Signo :

· Positiva (+) : $(-2\cdot\sqrt{2}, 0) \cup (0, 2\cdot\sqrt{2})$

· Negativa (−) : $(-\infty, -2\cdot\sqrt{2}) \cup (2\cdot\sqrt{2}, +\infty)$

8. Máximos y mínimos relativos :

$f'(x) \rightarrow -x^3 + 4\cdot x$

resolver(f'(x) = 0) $\rightarrow$ $\{\{x=-2\}, \{x=0\}, \{x=2\}\}$

$f(0) \rightarrow 0$

O = punto(0, 0) $\rightarrow$ (0,0)

$f''(0) \rightarrow 4$

· Mínimo relativo : O(0, 0)

$f(-2) \rightarrow 4$

C = punto(−2, 4) $\rightarrow$ (−2,4)

$f''(-2) \rightarrow -8$

· Máximo relativo : A(−2, 4)

dibujar(C, {color = azul, tamaño_punto = 8})

$f(2) \rightarrow 4$

D = punto(2, 4) $\rightarrow$ (2,4)

$f''(2) \rightarrow -8$

· Máximo relativo : B(2, 4)

dibujar(D, {color = cian, tamaño_punto = 8})

Monotonía :

· Creciente : $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

· Decreciente : $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

9. Puntos de inflexión :

$f''(x) \rightarrow -3\cdot x^2 + 4$

resolver(f''(x) = 0) $\rightarrow$ $\left[\left[x = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right], \left[x = -\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right]\right]$

$f\left(-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow \frac{20}{9}$

E = punto$\left(-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right) \rightarrow \left(-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$

$f'''\left(-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow 4\cdot\sqrt{3}$

$f\left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow \frac{20}{9}$

F = punto$\left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right) \rightarrow \left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$

$f'''\left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow -4\cdot\sqrt{3}$

Puntos de inflexión : $E\left(-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$; $F\left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$

dibujar(E, {color = magenta, tamaño_punto = 8})

dibujar(F, {color = magenta, tamaño_punto = 8})

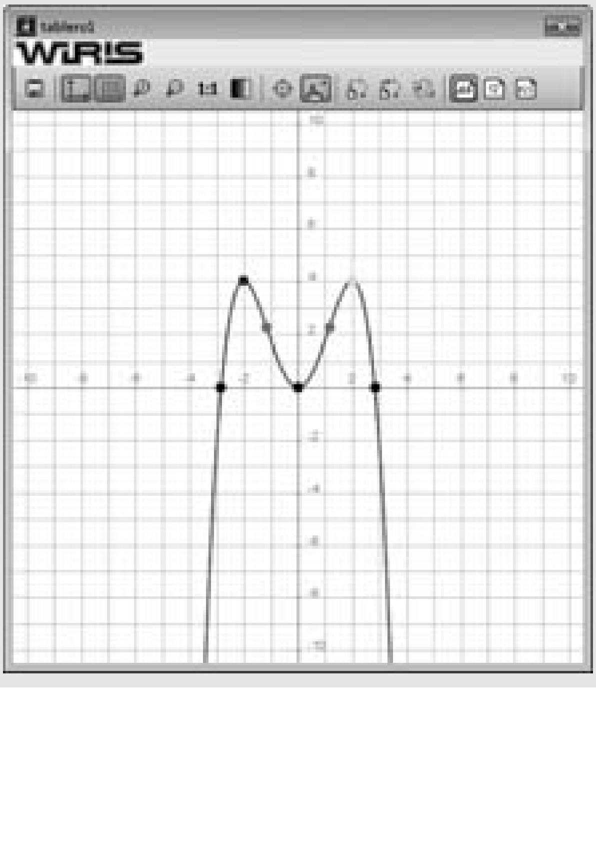
Curvatura :

· Convexa (∪) : $\left(-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}, \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right)$

· Cóncava (∩) : $\left(-\infty, -\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

10. Recorrido o imagen :

$Img(f) = (-\infty, 4]$



121. Representa y analiza la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Solución:

Ejercicio 121

$f(x) = \frac{x^2+1}{x} \rightarrow x \mapsto \frac{x^2+1}{x}$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: por ser una función racional hay que excluir las raíces del denominador.
   Dom(f) = ℝ − {0} = (−∞, 0) ∪ (0, +∞)
3. Continuidad: es discontinua en x = 0 donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: por ser una función racional no es periódica.
5. Simetrías:

$f(-x) \rightarrow \frac{-x^2-1}{x}$

f(−x) = −f(x) ⇒ es impar, simétrica respecto del origen O(0, 0)

6. Asíntotas:
   - Verticales: x = 0

dibujar(x = 0, {color=verde, anchura_linea=2})

   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas:

$x^2 + 1 \,\underline{|\, x} \rightarrow x^2+1 \,\underline{|\, x}$ cociente x, resto 1

y = x

dibujar(y = x, {color=verde, anchura_linea=2})

7. Corte con los ejes:

resolver(f(x) = 0) → {□}

   - Eje X: No lo corta.
   - Eje Y: No lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): (0, +∞)
   - Negativa (−): (−∞, 0)

8. Máximos y mínimos relativos:

$f'(x) \rightarrow \frac{x^2-1}{x^2}$

resolver(f'(x) = 0) → {{x=−1}, {x=1}}

f(−1) → −2

A = punto(−1, −2) → (−1, −2)

f''(−1) → −2

   - Máximo relativo: A(−1, −2)

dibujar(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})

f(1) → 2

B = punto(1, 2) → (1,2)

f''(1) → 2

   - Mínimo relativo: B(1, 2)

dibujar(B, {color = cian, tamaño_punto = 8})

   Monotonía:
   - Creciente: (−∞, −1) ∪ (1, +∞)
   - Decreciente: (−1, 0) ∪ (0, 1)

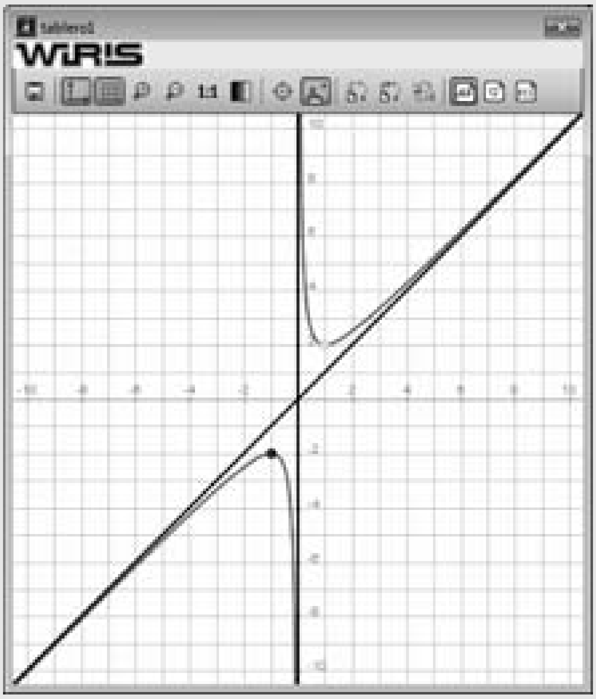
9. Puntos de inflexión:

$f''(x) \rightarrow \frac{2}{x^3}$

Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): (0, +∞)
   - Cóncava (∩): (−∞, 0)

10. Recorrido o imagen:
   Img(f) = (−∞, −2] ∪ [2, +∞)



122. Representa y analiza la función:

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$

Ejercicio 122

$f(x) = \sqrt{x^2-4} \rightarrow x \mapsto \sqrt{x^2-4}$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: por ser una función irracional de índice par, el radicando tiene que ser positivo.

resolver_inecuación(x² − 4 ≥ 0) → x≥2|x≤−2

   Dom(f) = (−∞, −2] ∪ [2, +∞)

3. Continuidad: es discontinua en x = −2, x = 2 donde tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: por ser una función irracional no es periódica.
5. Simetrías:

$f(-x) \rightarrow \sqrt{x^2-4}$

f(−x) = f(x) ⇒ es par, simétrica respecto del eje Y

6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas:

$m1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \rightarrow 1$

$b1 = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) \rightarrow 0$

y = x

dibujar(y = x, {color=verde, anchura_linea=2})

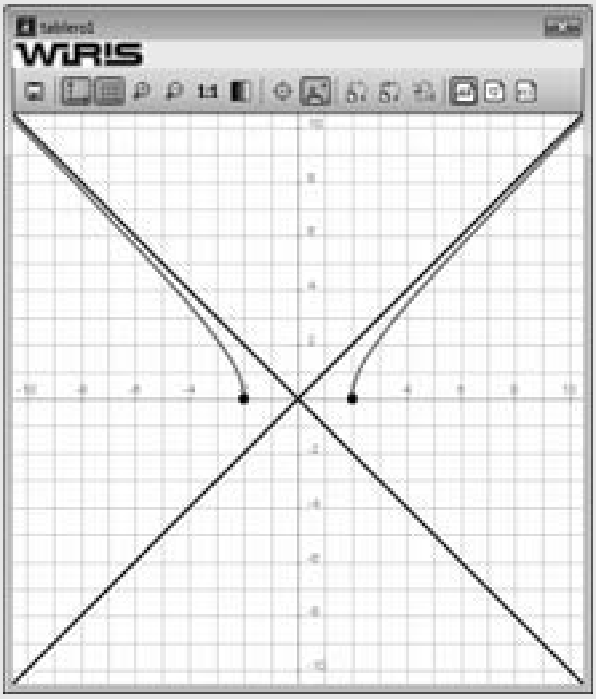
$m2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \rightarrow -1$

$b2 = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) \rightarrow +\infty$

y = −x

dibujar(y = −x, {color=verde, anchura_linea=2})

7. Corte con los ejes:
resolver(f(x) = 0) → {{x=−2}, {x=2}}
A = punto(−2, 0) → (−2,0)
B = punto(2, 0) → (2,0)
- Eje X: A(−2, 0); B(2, 0)
dibujar(A, {color = negro, tamaño_punto = 8})
dibujar(B, {color = negro, tamaño_punto = 8})
- Eje Y: No lo corta.
Signo:
- Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
- Negativa (−): Nunca.
8. Máximos y mínimos relativos:
$f'(x) \rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$
resolver(f'(x) = 0) → {[]}
$0 \notin$ Dom(f)
- Máximo relativo: No tiene.
- Mínimo relativo: No tiene.
Monotonía:
- Creciente: $(2, +\infty)$
- Decreciente: $(-\infty, -2)$
9. Puntos de inflexión:
$f''(x) \rightarrow \dfrac{-4}{(x^2-4)\cdot\sqrt{x^2-4}}$
Puntos de inflexión: no tiene.
Curvatura:
- Convexa (∪): Nunca.
- Cóncava (∩): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
10. Recorrido o imagen:
Img(f) = $[0, +\infty)$

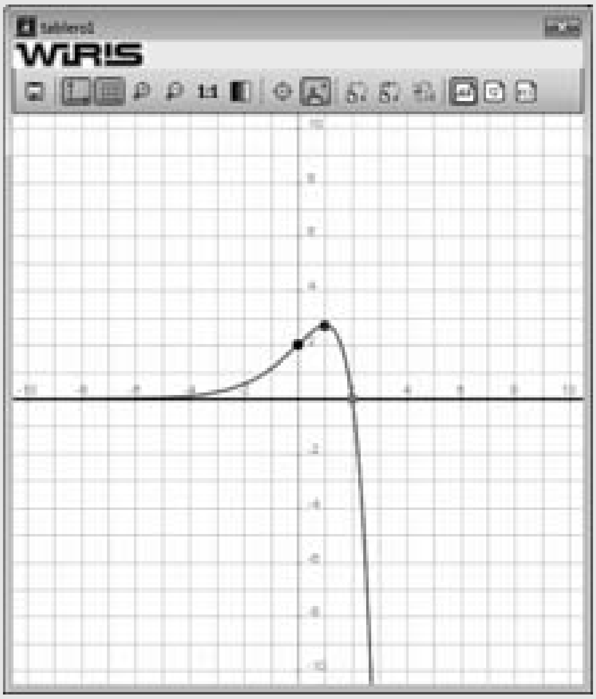


123. Representa y analiza la función:

$$y = (2 - x)e^x$$

Solución:

Ejercicio 123
$f(x) = (2 - x)\cdot e^x \rightarrow x \mapsto (-x+2)\cdot e^x$
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})
1. Tipo de función: producto de polinómica por exponencial.
2. Dominio: por ser el producto de una función polinómica por una función exponencial es toda la recta real.
Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: por ser el producto de una función polinómica por una función exponencial es continua en toda la recta real.
4. Periodicidad: por ser el producto de una función polinómica por una función exponencial no es periódica.
5. Simetrías:
$f(-x) \rightarrow (x+2)\cdot e^{-x}$
f(x) no es par, ni impar, no es simétrica respecto del origen O(0, 0) ni respecto del eje Y.
6. Asíntotas:
- Verticales: no tiene.
- Horizontales: y = 0
- Oblicuas: no tiene.
dibujar(y = 0, {color=negro, anchura_línea=2})
7. Corte con los ejes:
resolver(f(x) = 0) → {{x=2}}
A = punto(2, 0) → (2,0)
- Eje X: A(2, 0)
dibujar(A, {color = negro, tamaño_punto = 8})
f(0) → 2
B = punto(0, 2) → (0,2)
- Eje Y: B(0, 2)
dibujar(B, {color = negro, tamaño_punto = 8})
Signo:
- Positiva (+): $(-\infty, 2)$
- Negativa (−): $(2, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
$f'(x) \rightarrow (-x+1)\cdot e^x$
resolver(f'(x) = 0) → {{x=1}}
f(1) → e
C = punto(1, e) → (1,e)
f''(1) → −e
- Máximo relativo: C(1, e)
dibujar(C, {color = azul, tamaño_punto = 8})
Monotonía:
- Creciente: $(-\infty, 1)$
- Decreciente: $(1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión:
$f''(x) \rightarrow -x\cdot e^x$
resolver(f''(x) = 0) → {{x=0}}
f(0) → 2
f'''(0) → −1
Puntos de inflexión: A(2, 0)
dibujar(A, {color = magenta, tamaño_punto = 8})
Curvatura:
- Convexa (∪): $(-\infty, 0)$
- Cóncava (∩): $(0, +\infty)$
10. Recorrido o imagen:
Img(f) = $(-\infty, e]$



124. Representa y analiza la función:

$$y = L\,(x^2 - 1)$$

Solución:

Ejercicio 124

$f(x) = \ln(x^2 - 1) \;\rightarrow\; x \mapsto \ln(x^2 - 1)$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

1. Tipo de función: función logarítmica.

2. Dominio: por ser una función logarítmica $x^2 - 1 > 0$

   $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

3. Continuidad: por ser una función logarítmica es continua en todo su dominio.

4. Periodicidad: por ser una función logarítmica no es periódica.

5. Simetrías:

$f(-x) \;\rightarrow\; \ln(x^2 - 1)$

   f(x) es par, simétrica respecto del eje Y

4. Asíntotas:

   · Verticales: $x = -1$, $x = 1$

dibujar(x = −1, {color = verde, anchura_linea = 2})

dibujar(x = 1, {color = verde, anchura_linea = 2})

   · Horizontales: no tiene.

   · Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

resolver(f(x) = 0) $\rightarrow$ $\{\{x = -\sqrt{2}\}, \{x = \sqrt{2}\}\}$

A = punto$(-\sqrt{2}, 0)$ $\rightarrow$ $(-\sqrt{2}, 0)$

B = punto$(\sqrt{2}, 0)$ $\rightarrow$ $(\sqrt{2}, 0)$

   - Eje X: $A(-\sqrt{2}, 0)$; $B(\sqrt{2}, 0)$

dibujar(A, {color = negro, tamaño_punto = 8})

dibujar(B, {color = negro, tamaño_punto = 8})

   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:

   - Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

   - Negativa (−): $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$

8. Máximos y mínimos relativos:

$f'(x) \;\rightarrow\; \dfrac{2 \cdot x}{x^2 - 1}$

resolver(f'(x) = 0) $\rightarrow$ $\{\{x = 0\}\}$

$x = 0 \notin \mathrm{Dom}(f)$, no tiene máximos, ni mínimos relativos.

   Monotonía:

   · Creciente: $(1, +\infty)$

   · Decreciente: $(-\infty, -1)$

9. Puntos de inflexión:

$f''(x) \;\rightarrow\; \dfrac{-2 \cdot x^2 - 2}{x^4 - 2 \cdot x^2 + 1}$

resolver(f''(x) = 0) $\rightarrow$ $\{[\,]\}$

Puntos de inflexión: no tiene.

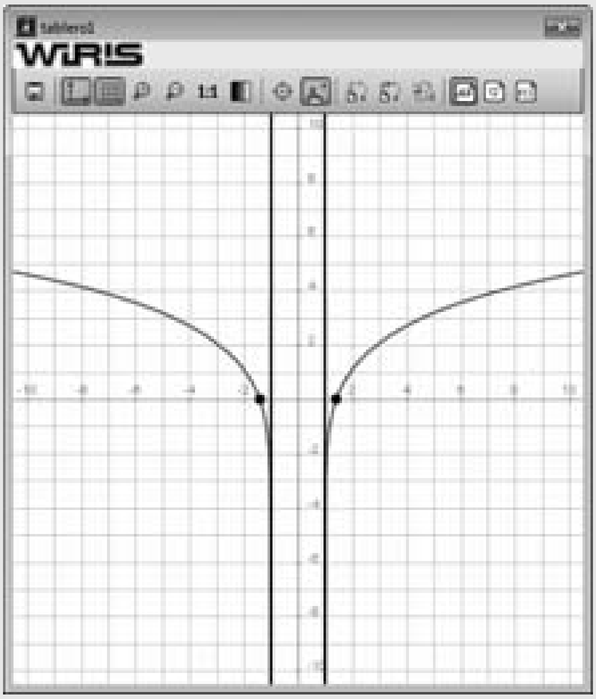
   Curvatura:

   · Convexa (∪): nunca.

   - Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

10. Recorrido o imagen:

   $\mathrm{Img}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$



125. Representa y analiza la función:

$$y = 3 \text{ sen } 2x$$

Solución:

Ejercicio 125

$f(x) = 3\ \text{sen}\ (2x) \rightarrow x \mapsto 3 \cdot \text{sen}\ (2 \cdot x)$

dibujar (f(x))

1. Tipo de función : función trigonométrica.

2. Dominio : por ser una función trigonométrica seno :

Dom(f) = $\mathbb{R}$ = $(-\infty, +\infty)$

3. Continuidad : por ser una función trigonométrica seno es continua es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$

4. Periodicidad : por ser una función trigométrica es periódica.

Periodo = $2\pi/2 = \pi$. La estudiaremos solo en el primer periodo positivo.

dibujar (f(x), 0..π, {color = rojo, anchura_linea = 2})

5. Simetrías :

$f(-x) \rightarrow 3 \cdot \text{sen}\ (-2 \cdot x)$

f(x) es impar, simétrica respecto del origen O(0, 0)

4. Asíntotas : no tiene por ser una función trigonométrica del seno.

7. Corte con los ejes :

$\text{resolver}(f(x) = 0) \rightarrow \left[\{x=0\}, \left\{x = \frac{\pi}{2}\right\}\right]$

$O = \text{punto}(0, 0) \rightarrow (0,0)$

$A = \text{punto}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

- Eje X : O(0, 0) ; $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

dibujar (O, {color = negro, tamaño_punto = 8})

dibujar (A, {color = negro, tamaño_punto = 8})

- Eje Y : o(0, 0)

Signo :

- Positiva (+) : (0, π/2)
- Negativa (−) : (π/2, 3π/2)

8. Máximos y mínimos relativos :

$f'(x) \rightarrow 6 \cdot \cos(2 \cdot x)$

$\text{resolver}(f'(x) = 0) \rightarrow \left\{\left[x = \frac{\pi}{4}\right], \left[x = -\frac{\pi}{4}\right]\right\}$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 3$

$C = \text{punto}\left(\frac{\pi}{4}, 3\right) \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow -12$

- Máximo relativo : $C\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$

dibujar (C, {color = azul, tamaño_punto = 8})

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \rightarrow -3$

$D = \text{punto}\left(\frac{3\pi}{4}, -3\right) \rightarrow \left(\frac{3 \cdot \pi}{4}, -3\right)$

$f''\left(\frac{3\pi}{4}\right) \rightarrow 12$

- Máximo relativo : $C\left(\frac{3\pi}{4}, -3\right)$

dibujar (D, {color = cian, tamaño_punto = 8})

Monotonía :

- Creciente : (0, π/4) ∪ (3π/4, π)
- Decreciente : (π/4, 3π/4)

9. Puntos de inflexión :

$f''(x) \rightarrow -12 \cdot \text{sen}\ (2 \cdot x)$

$\text{resolver}(f''(x) = 0) \rightarrow \left[\{x=0\}, \left[x = \frac{\pi}{2}\right]\right]$

dibujar (O, {color = magenta, tamaño_punto = 8})

dibujar (A, {color = magenta, tamaño_punto = 8})

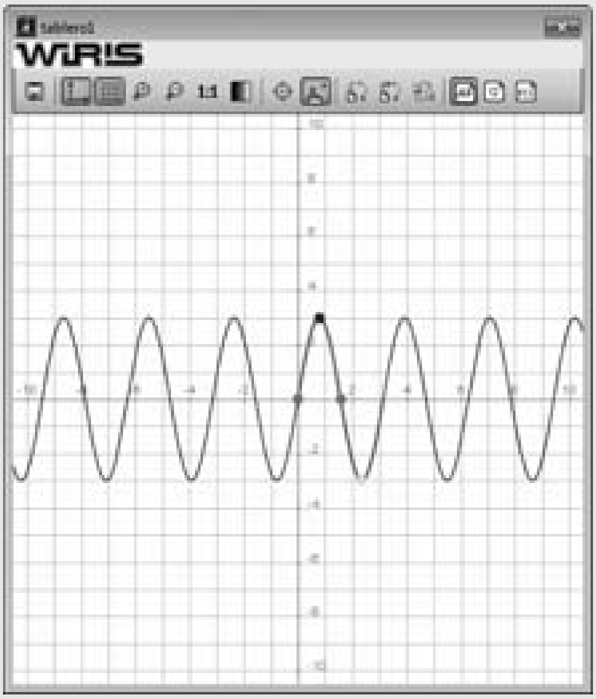
Puntos de inflexión : O(0,0) ,A(π/2,0)

Curvatura :

- Convexa (∪) : (π/2, π)
- Cóncava (∩) : (0, π/2)

10. Recorrido o imagen :

Img(f) = [−3, 3]



126. Dada la función:

$$f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}$$

se pide:

a) asíntotas.

b) máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) dibujar su gráfica.

Solución:

Ejercicio 126

$f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4} \rightarrow x \mapsto \frac{8 \cdot x}{x^2+4}$

dibujar (f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

6. Asíntotas :

- Verticales : no tiene, porque nunca se anula el denominador.
- Horizontales :

$k = \lim_{x \to +\infty} f(x) \rightarrow 0$

dibujar (y = 0, {color=verde, anchura_linea=2})

- Oblicuas : no tiene, porque el grado del numerador no es uno más que el del denominador.

8. Máximos y mínimos relativos :

$f'(x) \rightarrow \frac{-8 \cdot x^2 + 32}{x^4 + 8 \cdot x^2 + 16}$

$\text{resolver}(f'(x) = 0) \rightarrow \{\{x=-2\}, \{x=2\}\}$

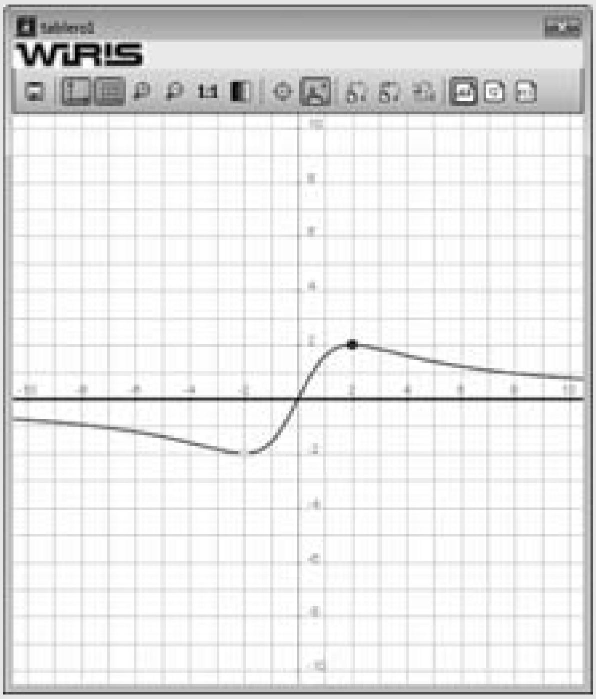
$f(-2) \rightarrow -2$

$A = \text{punto}(-2, -2) \rightarrow (-2, -2)$

$f''(x) \rightarrow \frac{16 \cdot x^3 - 192 \cdot x}{x^6 + 12 \cdot x^4 + 48 \cdot x^2 + 64}$

$f''(-2) \rightarrow \frac{1}{2}$

- Mínimo relativo : $A(-2, -2)$
dibujar(A, {color = cian, tamaño_punto = 8})
$f(2) \rightarrow 2$
B = punto(2, 2) $\rightarrow (2,2)$
$f''(2) \rightarrow -\frac{1}{2}$
- Máximo relativo : $B(2, 2)$
dibujar(B, {color = azul, tamaño_punto = 8})
Monotonía :
$f'(0) \rightarrow 2$
- Creciente : $(-2, 2)$
- Decreciente : $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



127. Dada la función:

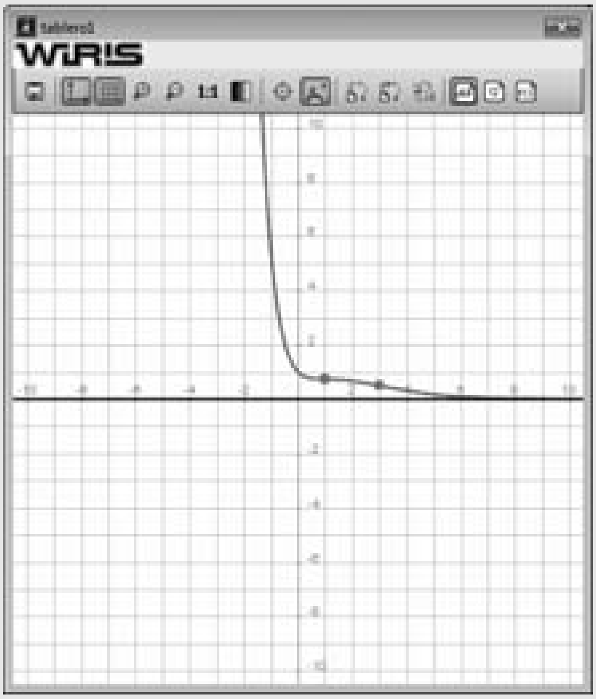
$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

dibuja la gráfica estudiando:

a) asíntotas
b) crecimiento y decrecimiento.
c) puntos de inflexión.

Solución:

Ejercicio 127
$f(x) = e^{-x} \cdot (x^2 + 1) \Rightarrow x \mapsto (x^2+1) \cdot e^{-x}$
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})
6. Asíntotas :
- Verticales : no tiene, porque en el denominador estaría e^x que nunca se anula.
- Horizontales :
$h = \lim_{x \to -\infty} f(x) \rightarrow +\infty$
$k = \lim_{x \to +\infty} f(x) \rightarrow 0$
dibujar(y = 0, {color=verde, anchura_linea=2})
- Oblicuas :
$m1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \rightarrow -\infty$
$m2 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$
no tiene asíntotas oblicuas.
8. Máximos y mínimos relativos :
$f'(x) \rightarrow (-x^2+2 \cdot x-1) \cdot e^{-x}$
resolver(f'(x) = 0) $\rightarrow$ {{x=1}}
$f(1) \rightarrow \frac{2}{e}$
A = punto$\left(1, \frac{2}{e}\right) \rightarrow \left(1, \frac{2}{e}\right)$
$f'(x) \rightarrow (x^2-4 \cdot x+3) \cdot e^{-x}$
$f'(1) \rightarrow 0$
$f'''(x) \rightarrow (-x^2+6 \cdot x-7) \cdot e^{-x}$
$f'''(1) \rightarrow \frac{-2}{e}$
$\cdot A\left(1, \frac{2}{e}\right)$ es un punto de inflexión.
dibujar(A, {color = magenta, tamaño_punto = 8})
Monotonía :
$f'(0) \rightarrow -1$
- Creciente : $(-2, 2)$
- Decreciente : $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
9. Puntos de inflexión :
$f''(x) \rightarrow (x^2-4 \cdot x+3) \cdot e^{-x}$
resolver(f''(x) = 0) $\rightarrow$ {{x=1}, {x=3}}
$f(3) \rightarrow \frac{10}{e^3}$
B = punto$\left(3, \frac{10}{e^3}\right) \rightarrow \left(3, \frac{10}{e^3}\right)$
$f'''(2) \rightarrow \frac{1}{e^2}$
Puntos de inflexión : $B\left(3, \frac{10}{e^3}\right)$
dibujar(B, {color = magenta, tamaño_punto = 8})



128. Dada la función

$$y = x^4 e^{-x}$$

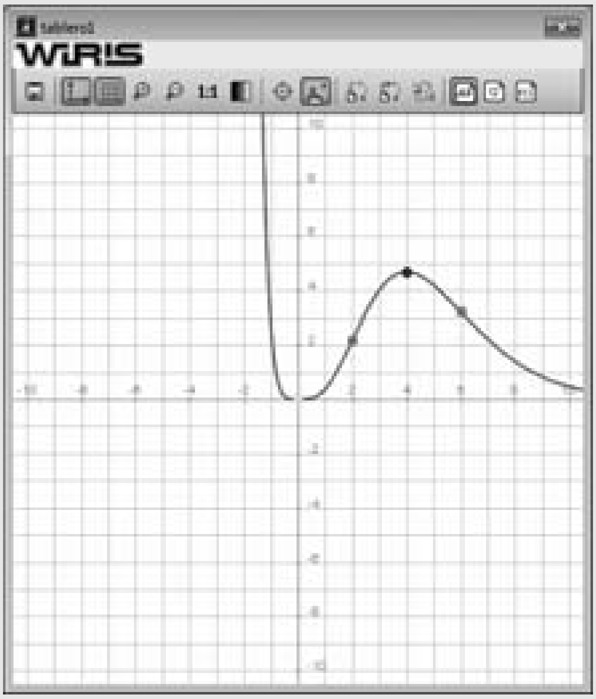
a) halla, si existen, los máximos y mínimos relativos. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) halla los puntos de inflexión.

Solución:

Ejercicio 128
$f(x) = x^4 \cdot e^{-x} \rightarrow x \mapsto x^4 \cdot e^{-x}$
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})
8. Máximos y mínimos relativos :
$f'(x) \rightarrow (-x^4 + 4 \cdot x^3) \cdot e^{-x}$
resolver(f'(x) = 0) → {{x=0}, {x=4}}
$f(0) \rightarrow 0$
O = punto(0, 0) → (0,0)
$f''(x) \rightarrow (x^4 - 8 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2) \cdot e^{-x}$
$f''(0) \rightarrow 0$
$f'''(0) \rightarrow 0$
$f''''(0) \rightarrow 24$
· Mínimo relativo : O(0, 0)
dibujar(O, {color = cian, tamaño_punto = 8})
$f(4) \rightarrow \frac{256}{e^4}$
$A = \text{punto}\left(4, \frac{256}{e^4}\right) \rightarrow \left(4, \frac{256}{e^4}\right)$
$f''(x) \rightarrow (x^4 - 8 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2) \cdot e^{-x}$
$f''(4) \rightarrow \frac{-64}{e^4}$
· Máximo relativo : O(0, 0)
dibujar(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})
Monotonía :
$f'(0) \rightarrow 0$
· Creciente : (0, 4)
· Decreciente : (−∞, 0) ∪ (4, +∞)

9. Puntos de inflexión :
$f''(x) \rightarrow (x^4 - 8 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2) \cdot e^{-x}$
resolver(f''(x) = 0) → {{x=0}, {x=2}, {x=6}}
$f(2) \rightarrow \frac{16}{e^2}$
$B = \text{punto}\left(2, \frac{16}{e^2}\right) \rightarrow \left(2, \frac{16}{e^2}\right)$
$f'''(2) \rightarrow \frac{-16}{e^2}$
$f(6) \rightarrow \frac{1296}{e^6}$
$C = \text{punto}\left(6, \frac{1296}{e^6}\right) \rightarrow \left(6, \frac{1296}{e^6}\right)$
$f'''(2) \rightarrow \frac{-16}{e^2}$
Puntos de inflexión : $B\left(2, \frac{16}{e^2}\right), C\left(6, \frac{1296}{e^6}\right)$
dibujar(B, {color = magenta, tamaño_punto = 8})
dibujar(C, {color = magenta, tamaño_punto = 8})



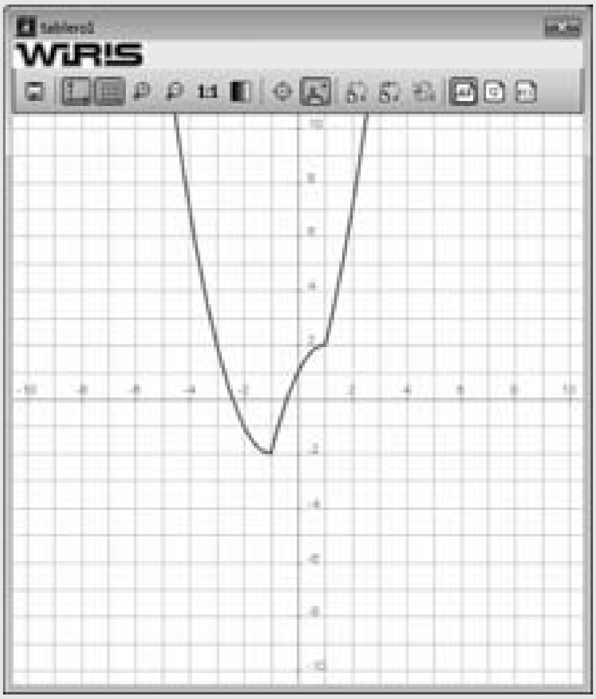
129. Dada la función:

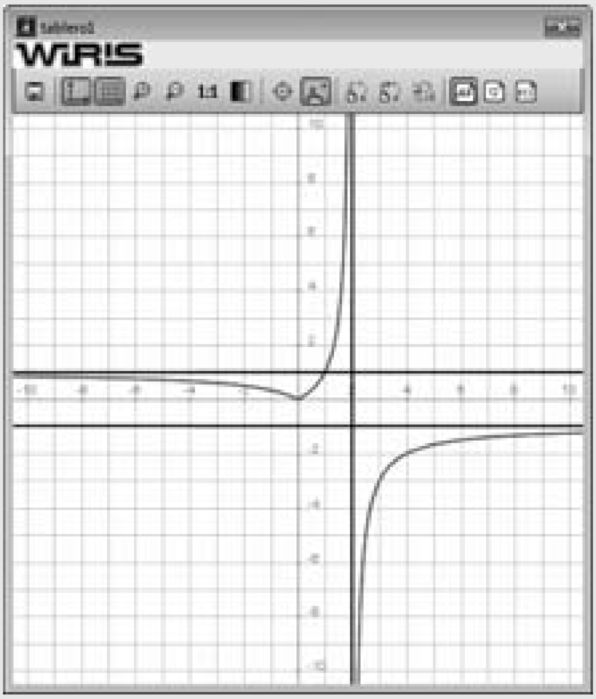
$$f(x) = 2x + |x^2 - 1|$$

dibuja la gráfica de f(x)

Solución:

Ejercicio 129
$f(x) = 2x + |x^2 - 1| \Rightarrow x \mapsto |x^2 - 1| + 2 \cdot x$
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})





130. Dibuja la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{|x|}{2 - x}$$

e indica su dominio, asíntotas e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

Ejercicio 130

$f(x) = \dfrac{|x|}{2 - x} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{1}{-x+2} \cdot |x|$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

2. Dominio :

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - 2 = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

6. Asíntotas :

· Verticales : x = 2

dibujar(x = 2, {color = verde, anchura_linea = 2})

· Horizontales :

$h = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \Rightarrow 1$

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \Rightarrow -1$

dibujar(y = −1, {color = verde, anchura_linea = 2})

dibujar(y = 1, {color = verde, anchura_linea = 2})

· Oblicuas : no tiene, porque el grado del numrador no es uno mayor que el del denominador.

8. Monotonía :

$f'(1) \Rightarrow 2$

· Creciente : $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

· Decreciente : $(-\infty, 0)$

13 Integral indefinida

1. Reglas de integración

Piensa y calcula

Calcula: a) $y = x^5,\ y' =$ b) $y' = 3x^2,\ y =$ c) $y = \cos x,\ y' =$ d) $y' = \cos x,\ y =$

Solución:
a) $y' = 5x^4$ b) $y = x^3$ c) $y' = -\text{sen } x$ d) $y = \text{sen } x$

Aplica la teoría

1. $\int 3(3x-5)^7\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.
$\dfrac{(3x-5)^8}{8} + k$

2. $\int \dfrac{dx}{(3x+5)^3}$

Solución:
Se aplica la integral de una función racional.
$-\dfrac{1}{6(3x+5)^2} + k$

3. $\int \cos \dfrac{x}{6}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$6 \text{ sen } \dfrac{x}{6} + k$

4. $\int e^x\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.
$e^x + k$

5. $\int \dfrac{dx}{x+3}$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.
$L\,|x+3| + k$

6. $\int (e^x - \text{sen } x)\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de las operaciones.
$e^x + \cos x + k$

7. $\int 2^{6x}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.
$\dfrac{2^{6x-1}}{3\,L\,2} + k$

8. $\int \dfrac{x\, dx}{x^2-1}$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.
$\dfrac{1}{2}\, L\,|x^2-1| + k$

9. $\int 2x \text{ sen } x^2\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\cos x^2 + k$

10. $\displaystyle\int \frac{7\,dx}{2\sqrt{7x+5}}$

Solución:
Se aplica la integral de una función irracional.
$\sqrt{7x+5} + k$

11. $\displaystyle\int 3\cos 3x\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\text{sen}\, 3x + k$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{9+x^2}$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\frac{1}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{3} + k$

13. $\displaystyle\int \sec^2 (3x+1)\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\frac{1}{3}\,\text{tg}\,(3x+1) + k$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\text{arc sen}\,\frac{x}{3} + k$

15. $\displaystyle\int 5\,\text{sen}\,x\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-5\cos x + k$

16. $\displaystyle\int (x^3 - 6x^2 + 1)\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.
$\frac{x^4}{4} - 2x^3 + x + k$

17. $\displaystyle\int \text{cosec}^2 (5x-1)\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\frac{1}{5}\,\text{cotg}\,(5x-1) + k$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

Solución:
Se aplica la integral de una función irracional.
$2\sqrt{x-1} + k$

19. $\displaystyle\int e^{x/2}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.
$2\,e^{x/2} + k$

20. $\displaystyle\int (\text{sen}\,x + \cos x)\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de las operaciones.
$-\cos x + \text{sen}\,x + k$

21. $\displaystyle\int \frac{3}{(x-3)^4}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función racional.
$-\frac{1}{(x-3)^3} + k$

22. $\displaystyle\int (4x+1)^5\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.
$\frac{(4x+1)^6}{24} + k$

23. $\displaystyle\int \text{cotg}\,(-2x+1)\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\frac{1}{2}\,L\,|\text{sen}\,(2x-1)| + k$

24. $\displaystyle\int 3\cdot 2^{3x}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.
$\frac{2^{3x}}{L\,2} + k$

25. $\int \frac{dx}{(2x-1)^4}$

Solución:
Se aplica la integral de una función racional.
$-\frac{1}{6(2x-1)^3} + k$

26. $\int 3 \text{ cotg } 3x \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$L\,|\text{sen } 3x| + k$

27. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+5} \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.
$L\,|x^2-3x+5| + k$

28. $\int 5 \text{ sen } 5x \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\cos 5x + k$

29. $\int 2 \text{ tg } 2x \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-L\,|\cos 2x| + k$

30. $\int 2\sqrt[5]{2x} \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función irracional.
$\frac{5x\sqrt[5]{2x}}{3} + k$

31. $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\text{arc sen } 2x + k$

32. $\int e^x \text{ sen } e^x \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\cos e^x + k$

33. $\int e^{-7x} \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.
$-\frac{e^{-7x}}{7} + k$

34. $\int \frac{dx}{1-x}$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.
$-L\,|1-x| + k$

35. $\int 2x \text{ tg } x^2 \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-L\,|\cos x^2| + k$

36. $\int \cos(5x-1) \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\frac{1}{5} \text{ sen } (5x-1) + k$

37. $\int \frac{3\,dx}{1+(3x)^2}$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\text{arc tg } 3x + k$

38. $\int \text{sen } \frac{x}{2} \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-2\cos\frac{x}{2} + k$

39. $\int (x^4-2x-5) \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.
$\frac{x^5}{5} - x^2 - 5x + k$

40. $\int e^x \cos e^x \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\text{sen } e^x + k$

2. Integración por partes

Piensa y calcula

Calcula la derivada de: $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$

Solución:
$y' = e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) = x^2e^x$

Aplica la teoría

41. $\int xe^x\, dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = x$$
$$dv = e^x dx$$

El resultado es:

$$e^x(x - 1) + k$$

42. $\int x \text{ sen } x\, dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = x$$
$$dv = \text{sen } xdx$$

El resultado es:

$$-x \cos x + \text{sen } x + k$$

43. $\int (x + 5) \cos x\, dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = x + 5$$
$$dv = \cos x\, dx$$

El resultado es:

$$(x + 5) \text{ sen } x + \cos x + k$$

44. $\int \text{sen } (Lx)\, dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = \text{sen } (Lx)$$
$$dv = dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y plantear una ecuación.
El resultado es: $\frac{x}{2}(\text{sen } (Lx) - \cos (Lx)) + k$

45. $\int \text{arc sen } x\, dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = \text{arc sen } x$$
$$dv = dx$$

El resultado es:

$$x \text{ arc sen } x + \sqrt{1 - x^2} + k$$

46. $\int x^2 e^{-x}\, dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = x^2$$
$$dv = e^{-x}dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.
El resultado es:

$$-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + k$$

47. $\int x^3 L\, x\, dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = L\, x$$
$$dv = x^3\, dx$$

El resultado es:

$$\frac{x^4}{4} L|x| - \frac{x^4}{16} + k$$

48. $\int (x^2 - 1) \text{ sen } x\, dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2 - 1$$
$$dv = \text{sen } x \, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes. El resultado es:

$$(-x^2 + 3) \cos x + 2x \text{ sen } x + k$$

49. $\int (x^2 + 1) \text{ L } x \, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \text{L } x$$
$$dv = (x^2 + 1)dx$$

El resultado es:

$$\left(\frac{x^3}{3} + x\right) \text{L } |x| - \frac{x^3}{9} - x + k$$

50. $\int x^2 \cos x \, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2$$
$$dv = \cos x \, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes. El resultado es:

$$(x^2 - 2) \text{ sen } x + 2x \cos x + k$$

51. $\int (x + 2) e^x \, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x + 2$$
$$dv = e^x dx$$

El resultado es:

$$e^x(x + 1) + k$$

52. $\int e^{-x} \text{ sen } x \, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \text{sen } x$$
$$dv = e^{-x} \, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y plantear una ecuación. El resultado es:

$$-\frac{1}{2} e^{-x}(\text{sen } x + \cos x) + k$$

53. $\int \text{L } (x + 1) \, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \text{L } (x + 1)$$
$$dv = dx$$

El resultado es:

$$(x + 1) \text{ L } |x + 1| - x + k$$

54. $\int (x^2 + 4) e^x \, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2 + 4$$
$$dv = e^x dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$e^x(x^2 - 2x + 6) + k$$

55. $\int e^x \cos x \, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \cos x$$
$$dv = e^x \, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y plantear una ecuación.

El resultado es:

$$\frac{1}{2} e^x(\text{sen } x + \cos x) + k$$

56. $\int \text{arc tg } x \, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \text{arc tg } x$$
$$dv = dx$$

El resultado es:

$$x \text{ arc tg } x - \frac{1}{2} \text{ L } |x^2 + 1| + k$$

3. Integración de funciones racionales con raíces reales en el denominador

■ Piensa y calcula

Realiza la siguiente división entera y haz la prueba: $39 \;\underline{\lfloor 5 \quad}$

Solución:

$$\begin{array}{l|l} 39 & 5 \\ \hline 4 & 7 \end{array}$$

Prueba: 39 = 5 · 7 + 4

● Aplica la teoría

57. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 3}{x}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$x - 1 + \frac{3}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} - x + 3 \text{ L } |x| + k$$

58. $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 5x - 3}{x - 1}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$3x - 2 + \frac{5}{1 - x}$$

La integral es:

$$\frac{3x^2}{2} - 2x - 5 \text{ L } |x - 1| + k$$

59. $\displaystyle\int \frac{5x + 2}{x^2 + x}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x + 1}$$

La integral es:

$$2 \text{ L } |x| + 3 \text{ L } |x + 1| + k$$

60. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x + 5}{x^3}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3}$$

La integral es:

$$\text{L } |x| + \frac{3}{x} - \frac{5}{2x^2} + k$$

61. $\displaystyle\int \frac{5x + 13}{x^2 + 6x + 9}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{5}{x + 3} - \frac{2}{(x + 3)^2}$$

La integral es:

$$5 \text{ L } |x + 3| + \frac{2}{x + 3} + k$$

62. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 8x + 10}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{1}{x + 3} + \frac{2}{(x + 3)^2} - \frac{5}{(x + 3)^3}$$

La integral es:

$$\text{L } |x + 3| - \frac{2}{x + 3} + \frac{5}{2(x + 3)^2} + k$$

63. $\int \frac{3x^2 + x - 9}{x + 2}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$3x - 5 + \frac{1}{x + 2}$$

La integral es:

$$\frac{3x^2}{2} - 5x + L\,|x + 2| + k$$

64. $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 10}{x^2 - 1}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$x - 2 + \frac{3}{x - 1} - \frac{5}{x + 1}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} - 2x + 3\,L\,|x - 1| - 5\,L\,|x + 1| + k$$

65. $\int \frac{8x + 7}{x^2 + x - 2}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{3}{x + 2} + \frac{5}{x - 1}$$

La integral es:

$$3\,L\,|x + 2| + 5\,L\,|x - 1| + k$$

66. $\int \frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 1}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{2}{x - 1} + \frac{5}{(x - 1)^2}$$

La integral es:

$$2\,L\,|x - 1| - \frac{5}{x - 1} + k$$

67. $\int \frac{x^2 - 7x + 15}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{1}{x - 2} - \frac{3}{(x - 2)^2} + \frac{5}{(x - 2)^3}$$

La integral es:

$$L\,|x - 2| + \frac{3}{x - 2} - \frac{5}{2\,(x - 2)^2} + k$$

4. Integración de funciones racionales con raíces complejas o de varios tipos

Piensa y calcula

Halla mentalmente las raíces imaginarias de la siguiente ecuación: $x^2 + 9 = 0$

Solución:

$x = \pm 3i$

Aplica la teoría

68. $\int \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 5}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = 1 \pm 2i$$

Son imaginarias simples.

La integral es:

$$L\,|x^2 - 2x + 5| + \frac{3}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{x - 1}{2} + k$$

69. $\int \frac{8x^2 - 18x + 1}{x^3 - 3x^2 + 4}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = -1 \text{ real simple}, \; x = 2 \text{ real doble.}$$

La descomposición es:

$$\frac{3}{x+1} + \frac{5}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2}$$

La integral es:

$$3\, L\,|x+1| + 5\, L\,|x-2| + \frac{1}{x-2} + k$$

70. $\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = 3 \text{ real simple.}$$

$$x = \pm 2i \text{ imaginarias simples.}$$

La descomposición es:

$$\frac{1}{x-3} + \frac{2x+1}{x^2+4}$$

La integral es:

$$L\,|x-3| + L\,|x^2+4| + \frac{1}{2}\text{ arc tg } \frac{x}{2} + k$$

71. $\int \frac{2x + 5}{x^2 + 4x + 5}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = -2 \pm i \text{ imaginarias simples.}$$

La integral es:

$$L\,|x^2 + 4x + 5| + \text{arc tg } (x+2) + k$$

5. Integración por cambio de variable o sustitución y de funciones definidas a trozos

Piensa y calcula

Resuelve mentalmente las siguientes integrales inmediatas.

a) $\int \frac{dx}{x}$ b) $\int \frac{e^x}{e^x + 3}\, dx$

Solución:

a) $L\,|x| + k$ b) $L\,|e^x + 3| + k$

Aplica la teoría

72. $\int \frac{dx}{x\,(L\,x)^2}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$L\,x = t$$

$$x = e^t$$

$$dx = e^t\, dt$$

Se obtiene:

$$-\frac{1}{L\,x} + k$$

73. $\int \frac{L\,x}{x[(L\,x)^2 - 1]}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$L\,x = t$$

$$x = e^t$$

$$dx = e^t\, dt$$

Se obtiene:

$$\frac{1}{2}\, L\,[(L\,x)^2 - 1] + k$$

74. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + 2}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$e^x = t$$
$$x = L\,t$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

Se obtiene:

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ L\,(e^x + 2) + k$$

75. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x - 4}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$e^x = t$$
$$x = L\,t$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

Se obtiene:

$$e^x + 4\,L\,|e^x - 4| + k$$

76. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x+1} = t$$
$$x + 1 = t^2$$
$$x = t^2 - 1$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$\frac{2}{3}\,(x + 2)\sqrt{x+1} + k$$

77. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+3}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x+3} = t$$
$$x + 3 = t^2$$
$$x = t^2 - 3$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x+3} - 2\,L\,|\sqrt{x+3} + 1| + k$$

78. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \sqrt{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x} = t$$
$$x = t^2$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$-2\sqrt{x} - 2\,L\,|\sqrt{x} - 1| + k$$

79. $\displaystyle\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x} = t$$
$$x = t^2$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$2\,L\,|\sqrt{x} + 1| + k$$

80. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt[6]{x} = t$$
$$x = t^6$$
$$dx = 6t^5\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\,L\,|\sqrt[6]{x} + 1| + k$$

81. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt[4]{x} = t$$
$$x = t^4$$
$$dx = 4t^3\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 4\,L\,|\sqrt[4]{x} - 1| + k$$

82. Sea $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 1 \\ -3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula $\displaystyle\int f(x)\,dx$

Solución:

$$\begin{cases} x^2/2 & \text{si } x \le 1 \\ -3x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

83. Sea $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x \le 0 \\ 1/x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Calcula $\int f(x)\,dx$

Solución:

$\begin{cases} -\cos x & \text{si } x \le 0 \\ L\,|x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$

84. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ e^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula $\int f(x)\,dx$

Solución:

$\begin{cases} x^3/3 & \text{si } x \le 1 \\ e^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

6. Integración de funciones trigonométricas

Piensa y calcula

Escribe la fórmula fundamental de la trigonometría.

Solución:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Aplica la teoría

85. $\int \text{sen } x \cos x\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x y en el cos x

La integral es: $\frac{1}{2}\,\text{sen}^2 x + k$

86. $\int \text{sen}^3 x \cos x\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x y en el cos x

La integral es: $\frac{1}{4}\,\text{sen}^4 x + k$

87. $\int \text{sen}^4 x \cos x\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el cos x

La integral es: $\frac{1}{5}\,\text{sen}^5 x + k$

88. $\int \text{sen}^3 x \cos^2 x\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x

La integral es: $-\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + k$

89. $\int \text{sen}^2 x\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es par en el sen x

La integral es: $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\,\text{sen } 2x\right) + k$

90. $\int \text{sen}^4 x\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es par en el sen x

La integral es: $\frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \cos x\left(\text{sen}^3 x + \frac{3\,\text{sen } x}{2}\right)\right] + k$

91. $\int \text{sen } 3x \text{ sen } x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{\text{sen } 4x}{2} + \text{sen } 2x\right) + k$$

92. $\int \cos 5x \cos x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\text{sen } 6x}{3} + \frac{\text{sen } 4x}{2}\right) + k$$

93. $\int \text{sen } 5x \cos 3x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{\cos 8x}{4} - \cos 2x\right) + k$$

94. $\int \sqrt{1 - x^2} \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = \text{sen } t$$

$$dx = \cos t \, dt$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(\text{arc sen } x + x\sqrt{1 - x^2}\right) + k$$

95. $\int \sqrt{16 - x^2} \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 4 \text{ sen } t$$

$$dx = 4 \cos t \, dt$$

La integral es:

$$8 \text{ arc sen } \frac{x}{4} + \frac{1}{2}x\sqrt{16 - x^2} + k$$

96. $\int \sqrt{2 - x^2} \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = \sqrt{2} \text{ sen } t$$

$$dx = \sqrt{2} \cos t \, dt$$

La integral es:

$$\text{arc sen } \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2}x\sqrt{2 - x^2} + k$$

97. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 + x^2}}$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = \text{tg } t$$

$$dx = \sec^2 t \, dt$$

La integral es:

$$-\frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} + k$$

98. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16 + x^2}}$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 4 \text{ tg } t$$

$$dx = 4 \sec^2 t \, dt$$

La integral es:

$$-\frac{\sqrt{16 + x^2}}{16x} + k$$

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

Señala la solución correcta:

1 $\int \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx$

- [ ] $\text{arc tg } 2x + k$
- [ ] $\frac{1}{2} L|4x^2+1| + k$
- [ ] $x + k$
- [x] $x - \frac{1}{2} L|4x^2+1| + k$

2 $\int \frac{2x^3-9x^2+7x}{x^2-x}\,dx$

- [ ] $2x^2 - x + k$
- [x] $x^2 - 7x + k$
- [ ] $2x^2 - 7x + L|x| + L|x-1| + k$
- [ ] $x^2 + L|x| + L|x-1| + k$

3 $\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

- [ ] $L|x| + L|x+1| + k$
- [ ] $L|x| + L|x-1| + k$
- [x] $L|x| - L|x+1| + k$
- [ ] $L|x| \cdot L|x-1| + k$

4 $\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx$

- [ ] $L|x+1| - \frac{2x+1}{2x^2+4x+2} + k$
- [x] $-\frac{2x+1}{2x^2+4x+2} + k$
- [ ] $L|x+1| - \frac{1}{2x^2+4x+2} + k$
- [ ] $-\frac{1}{2x^2+4x+2} + k$

5 $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

- [x] $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + 4\sqrt{x} - 4L|\sqrt{x}+1| + k$
- [ ] $\frac{x}{2} - \sqrt{x} + 2L|\sqrt{x}-1| + k$
- [ ] $\frac{2}{3}\sqrt{x} - x - 4L|\sqrt{x}+1| + k$
- [ ] $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} - L|\sqrt{x}+1| + k$

6 $\int \frac{x^3+2}{x^2+3x+2}\,dx$

- [ ] $\frac{x^2}{2} - 3x + L|x-1| + 6L|x-2| + k$
- [ ] $\frac{x^2-3}{2} + L|x-1| + 6L|x-2| + k$
- [x] $\frac{x^2}{2} - 3x + L|x+1| + 6L|x+2| + k$
- [ ] $\frac{x^2}{2} - 3x + L|x^2+3x+2| + k$

7 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

- [ ] $\frac{x^2}{3}\sqrt{x^2+1} + k$
- [x] $\frac{x^2-2}{3}\sqrt{x^2+1} + k$
- [ ] $(x^2-2)\sqrt{x^2+1} + k$
- [ ] $\frac{x^2-2}{3} + \sqrt{x^2+1} + k$

8 $\int e^{x+e^x}\,dx$

- [x] $e^{e^x} + k$
- [ ] $x e^x + k$
- [ ] $x e^{e^x} + k$
- [ ] $\frac{e^{e^x}}{x} + k$

9 $\int \frac{x^3+1}{x^2+4}\,dx$

- [ ] $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\text{arc tg}\frac{x}{2} + k$
- [ ] $\frac{x^2}{2} + 2L|x^2+4| + k$
- [ ] $\frac{x^2}{2} + 2L|x^2+4| + \frac{1}{2}\text{arc tg}\frac{x}{2} + k$
- [x] $\frac{x^2}{2} - 2L|x^2+4| + \frac{1}{2}\text{arc tg}\frac{x}{2} + k$

10 $\int \frac{4-2x^2}{x} L\,x\,dx$

- [ ] $4(L\,x)^2 - x^2 L\,x - \frac{x^2}{2} + k$
- [x] $2(L\,x)^2 - x^2 L\,x + \frac{x^2}{2} + k$
- [ ] $4(L\,x)^2 - x^2 - \frac{x^2}{2} + k$
- [ ] $2(L\,x)^2 - L\,x + \frac{x^2}{2} + k$

1. Reglas de integración

99. $\int 4(4x - 1)^5\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{(4x - 1)^6}{6} + k$$

100. $\int \frac{dx}{(x - 1)^5}$

Solución:
Se aplica la integral de una función racional.

$$-\frac{1}{4(x - 1)^4} + k$$

101. $\int \cos \frac{3x}{2}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{2}{3} \operatorname{sen} \frac{3x}{2} + k$$

102. $\int e^{-x}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.

$$-e^{-x} + k$$

103. $\int \frac{dx}{x - 1}$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$L\,|x - 1| + k$$

104. $\int (\cos x - e^{-x})\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de las operaciones.

$$e^{-x} + \operatorname{sen} x + k$$

105. $\int 2^{-4x}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.

$$-\frac{2^{-4x}}{4\,L\,2} + k$$

106. $\int \frac{x\, dx}{x^2 + 9}$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$\frac{1}{2}\, L\,|x^2 + 9| + k$$

107. $\int \operatorname{sen}(5 - 2x)\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{2} \cos(2x - 5) + k$$

108. $\int \frac{3\, dx}{\sqrt{3x}}$

Solución:
Se aplica la integral de una función irracional.

$$2\sqrt{3x} + k$$

109. $\int x \cos(x^2 + 1)\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen}(x^2 + 1) + k$$

110. $\int \frac{dx}{3 + x^2}$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}}{3} x + k$$

111. $\int x \sec^2 x^2\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} x^2 + k$$

112. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}}$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\text{arc sen } \frac{\sqrt{2}}{2} x + k$$

113. $\int 5 \text{ sen } 7x \, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{5}{7} \cos 7x + k$$

114. $\int (10x^4 + 2x^3 - x - 1) \, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función polinómica.

$$2x^5 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} - x + k$$

115. $\int \text{cosec}^2 (3 - 4x) \, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{4} \text{ cotg } (3 - 4x) + k$$

116. $\int \sqrt[5]{x^3} \, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{5x \sqrt[5]{x^3}}{8} + k$$

117. $\int e^{x/3} \, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función exponencial.

$$3e^{x/3} + k$$

118. $\int (\text{sen } x - \cos x) \, dx$

Solución:

Se aplica la integral de las operaciones.

$$-\cos x - \text{sen } x + k$$

119. $\int \left(3x^2 + 1 - \frac{1}{x + 2} + \frac{8}{x^5}\right) dx$

Solución:

Se aplica la integral de las operaciones.

$$x^3 + x - L\,|x + 2| - \frac{2}{x^4} + k$$

120. $\int (2x - 1)^3 \, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{(2x - 1)^4}{8} + k$$

121. $\int (-x \text{ cotg } x^2) \, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{1}{2} L\,|\text{sen } x^2| + k$$

122. $\int 5 \cdot 7^{-5x} \, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función exponencial.

$$-\frac{7^{-5x}}{L\,7} + k$$

123. $\int \frac{dx}{(x + 7)^2}$

Solución:

Se aplica la integral de una función racional.

$$-\frac{1}{x + 7} + k$$

124. $\int 2x \text{ cotg } x^2 \, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$L\,|\text{sen } x^2| + k$$

125. $\int \frac{3x^2 + 5}{x^3 + 5x - 1} dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$L |x^3 + 5x - 1| + k$$

126. $\int \text{sen } (3x + 2) \, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica

$$-\frac{1}{3} \cos (3x + 2) + k$$

127. $\int \text{tg } \frac{x}{4} \, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-2 \, L \left|\cos \frac{x}{2} + 1\right| + k$$

128. $\int \sqrt[3]{5x + 1} \, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{3(5x + 1)\sqrt[3]{5x + 1}}{20} + k$$

129. $\int \frac{7 \, dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$7 \text{ arc sen } \frac{x}{2} + k$$

130. $\int e^{-x} \text{ sen } e^{-x} \, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\cos e^{-x} + k$$

131. $\int e^{5x} \, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función exponencial.

$$\frac{e^{5x}}{5} + k$$

132. $\int \frac{5 \, dx}{5x + 4}$

Solución:

Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$L |5x + 4| + k$$

133. $\int \text{tg } (4x + 5) \, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{1}{4} L |\cos (4x + 5)| + k$$

134. $\int \cos (4 - x) \, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\text{sen } (4 - x) + k$$

135. $\int \frac{6 \, dx}{1 + (2x)^2}$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$3 \text{ arc tg } 2x + k$$

136. $\int \text{sen } \frac{4x}{5} \, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{5}{4} \cos \frac{4x}{5} + k$$

137. $\int \left(x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 8x + 1\right) dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{4} - 4x^2 + x + k$$

138. $\int e^{-x} \cos e^{-x}\, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\text{sen } e^{-x} + k$$

139. Calcula tres primitivas de la función:

$$y = \text{sen } x$$

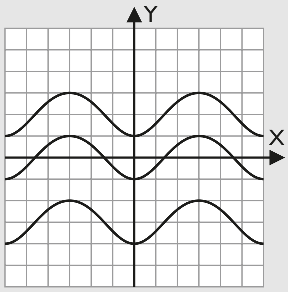
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

Solución:

$y = -\cos x$

$y = 2 - \cos x$

$y = -3 - \cos x$



Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

140. Dada la función:

$$y = \cos x$$

a) calcula su integral indefinida.

b) halla la primitiva que pasa por el punto P(0, 3)

c) dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

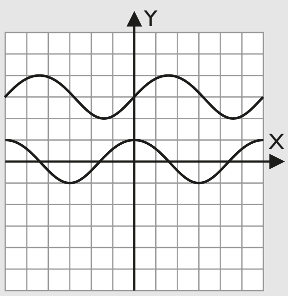
Solución:

a) $\int \cos x\, dx = \text{sen } x + k$

b) $\text{sen } 0 + k = 3 \Rightarrow k = 3$

$y = 3 + \text{sen } x$

c)



2. Integración por partes

141. $\int x\, e^{3x}\, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x$$

$$dv = e^{3x}\, dx$$

El resultado es:

$$e^{3x}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) + k$$

142. $\int (x - 1) \text{ sen } x\, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x - 1$$

$$dv = \text{sen } x\, dx$$

El resultado es:

$$(-x + 1) \cos x + \text{sen } x + k$$

143. $\int (x - 2) \cos x\, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x - 2$$

$$dv = \cos x\, dx$$

El resultado es:

$$(x - 2) \text{ sen } x + \cos x + k$$

144. $\int x\, L\,(x + 5)\, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = L\,(x + 5)$$

$$dv = x\, dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}(x^2 - 25)\, L\,|x + 5| - \frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2} + k$$

145. $\int x \text{ arc tg } x\, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \text{arc tg } x$$
$$dv = x\, dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}(x^2 + 1) \text{ arc tg } x - \frac{x}{2} + k$$

146. $\int x^2 e^{-3x}\, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2$$
$$dv = e^{-3x}\, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$-\frac{1}{27}e^{-3x}(9x^2 + 6x + 2) + k$$

147. $\int x^4 \text{ L } x\, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \text{L } x$$
$$dv = x^4\, dx$$

El resultado es:

$$\frac{x^5}{5} \text{ L } |x| - \frac{x^5}{25} + k$$

148. $\int (x^2 + 3) \text{ sen } x\, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2 + 3$$
$$dv = \text{sen } x\, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$(x^2 + 1) \cos x + 2x \text{ sen } x + k$$

149. $\int (x^2 - 1) \text{ L } x\, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \text{L } x$$
$$dv = (x^2 - 1)dx$$

El resultado es:

$$\left(\frac{x^3}{3} - x\right) \text{L } |x| - \frac{x^3}{9} + x + k$$

150. $\int (x^2 - 1) \cos x\, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2 - 1$$
$$dv = \cos x\, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$(x^2 - 3) \text{ sen } x + 2x \cos x + k$$

151. $\int (x - 1)\, e^x\, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x - 1$$
$$dv = e^x\, dx$$

El resultado es:

$$e^x(x - 2) + k$$

152. $\int e^{2x} \text{ sen } x\, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \text{sen } x$$
$$dv = e^{2x}\, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y planear una ecuación.

El resultado es: $\frac{1}{5}e^{2x}(2 \text{ sen } x - \cos x) + k$

153. $\int L\,(x-1)\,dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = L\,(x-1)$$
$$dv = dx$$

El resultado es:

$$(x-1)\,L\,|x-1| - x + k$$

154. $\int (x^2-3)\,e^x\,dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2-3$$
$$dv = e^x dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$e^x(x^2-2x-1) + k$$

155. $\int e^{-x}\cos x\,dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \cos x$$
$$dv = e^{-x}\,dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y plantear una ecuación.

El resultado es:

$$\frac{1}{2}\,e^{-x}(\operatorname{sen} x - \cos x) + k$$

156. $\int \operatorname{arc\,tg} 2x\,dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \operatorname{arc\,tg} 2x$$
$$dv = dx$$

El resultado es:

$$x\operatorname{arc\,tg} 2x - \frac{1}{4}\,L\,|4x^2+1| + k$$

3. Integración de funciones racionales con raíces reales en el denominador

157. $\int \frac{x^2+x-2}{x}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. La descomposición es:

$$x + 1 - \frac{2}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} + x - 2\,L\,|x| + k$$

158. $\int \frac{x^2-6x+2}{5-x}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. La descomposición es:

$$-x + 1 - \frac{3}{5-x}$$

La integral es:

$$-\frac{x^2}{2} + x + 3\,L\,|x-5| + k$$

159. $\int \frac{3x-4}{x^2-4}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples. La descomposición es:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2} + \frac{5}{x+2}\right)$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\,(L\,|x-2| + 5\,L\,|x+2|) + k$$

160. $\int \frac{5x^2-2x-3}{x^3}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. El denominador tiene una raíz real múltiple. La descomposición es:

$$\frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$$

La integral es:

$$5\,L\,|x| + \frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2} + k$$

161. $\int \frac{4x - 11}{x^2 - 6x + 9}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{4}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2}$$

La integral es:

$$4\,L\,|x-3| - \frac{1}{x-3} + k$$

162. $\int \frac{-2x^2 + 14x - 31}{x^3 - 9x^2 - 27x + 27}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$-\frac{2}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2} - \frac{7}{(x-3)^3}$$

La integral es:

$$-2\,L\,|x-3| - \frac{2}{x-3} + \frac{7}{2(x-3)^2} + k$$

163. $\int \frac{2x^2 - 10x + 13}{x - 3}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$2x - 4 + \frac{1}{x-3}$$

La integral es:

$$x^2 - 4x + L\,|x-3| + k$$

164. $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 6x - 2}{x^2 - x}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x-1}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} - x + 2\,L\,|x| + 3\,L\,|x-1| + k$$

165. $\int \frac{11x + 13}{x^2 + x - 6}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{4}{x+3} + \frac{7}{x-2}$$

La integral es:

$$4\,L\,|x+3| + 7\,L\,|x-2| + k$$

166. $\int \frac{3x - 1}{x^2 + 2x + 1}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{3}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2}$$

La integral es:

$$3\,L\,|x+1| + \frac{4}{x+1} + k$$

167. $\int \frac{3x^2 + 8x + 5}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{3}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)^3}$$

La integral es:

$$3\,L\,|x+2| + \frac{4}{x+2} - \frac{1}{2(x+2)^2} + k$$

4. Integración de funciones racionales con raíces complejas o de varios tipos

168. $\int \frac{2x - 3}{x^2 + 2x + 10}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = -1 \pm 3i$$

Son imaginarias simples.

La integral es:

$$L\,|x^2 + 2x + 10| - \frac{5}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{x + 1}{3} + k$$

169. $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 18x + 25}{x^3 + 3x^2 - 4}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$x = 1$ real simple.

$x = -2$ real doble.

La descomposición es:

$$\frac{5}{x - 1} - \frac{3}{x + 2} + \frac{1}{(x + 2)^2}$$

La integral es:

$$5\,L\,|x - 1| - 3\,L\,|x + 2| - \frac{1}{x + 2} + k$$

170. $\displaystyle\int \frac{2x^2 + x + 7}{x^3 + 2x^2 + 9x + 18}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$x = -2$ real simple.

$x = \pm 3i$ imaginarias simples.

La descomposición es:

$$\frac{1}{x + 2} + \frac{x - 1}{x^2 + 9}$$

La integral es:

$$L\,|x + 2| + \frac{1}{2}\,L\,|x^2 + 9| - \frac{1}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{3} + k$$

171. $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2 - 4x + 8}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$x = 2 \pm 2i$ imaginarias simples.

La integral es:

$$\frac{3}{2}\,L\,|x^2 - 4x + 8| + 3\,\text{arc tg}\,\frac{x - 2}{2} + k$$

5. Integración por cambio de variable o sustitución y de funciones definidas a trozos

172. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,L\,x}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$Lx = t$$
$$x = e^t$$
$$dx = e^t\,dt$$

Se obtiene:

$$L\,(L\,x) + k$$

173. $\displaystyle\int \frac{L\,x}{x\,[(L\,x)^2 + 1]}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$Lx = t$$
$$x = e^t$$
$$dx = e^t\,dt$$

Se obtiene:

$$\frac{1}{2}\,L\,[(L\,x)^2 + 1] + k$$

174. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x - 3}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$e^x = t$$
$$x = L\,t$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

Se obtiene:

$$-\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\,L\,|e^x - 3| + k$$

175. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x + 5}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$e^x = t$$
$$x = L\,t$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

Se obtiene:

$$e^x - 5\,L\,|e^x + 5| + k$$

176. $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x-1} = t$$
$$x - 1 = t^2$$
$$x = t^2 + 1$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x-1} + k$$

177. $\int \frac{dx}{2-\sqrt{x-3}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x-3} = t$$
$$x - 3 = t^2$$
$$x = t^2 + 3$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$-2\sqrt{x-3} - 4\,L\,|\sqrt{x-3} - 2| + k$$

178. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x} = t$$
$$x = t^2$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} - 2\,L\,|\sqrt{x} + 1| + k$$

179. $\int \frac{dx}{2x-\sqrt{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x} = t$$
$$x = t^2$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$L\,|2\sqrt{x} - 1| + k$$

180. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt[6]{x} = t$$
$$x = t^6$$
$$dx = 6t^5\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\,L\,|\sqrt[6]{x} - 1| + k$$

181. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt[4]{x} = t$$
$$x = t^4$$
$$dx = 4t^3\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\,L\,|\sqrt[4]{x} + 1| + k$$

182. Sea $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula $\int f(x)\,dx$

Solución:

$$\begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ -x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

183. Sea $f(x) = \begin{cases} 2/x & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

Calcula $\int f(x)\,dx$

Solución:

$$\begin{cases} 2\,L\,|x| & \text{si } x < 0 \\ \text{sen } x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

184. Sea $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x \le 1 \\ e^{x/2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula $\int f(x)\,dx$

Solución:

$$\begin{cases} -1/x & \text{si } x \le 1 \\ 2e^{x/2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

6. Integración de funciones trigonométricas

185. $\int \text{sen } x \cos^2 x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x

La integral es:

$$-\frac{1}{3}\cos^3 x + k$$

186. $\int \text{sen } x \cos^3 x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x y en el cos x

La integral es:

$$-\frac{1}{4}\cos^4 x + k$$

187. $\int \text{sen } x \cos^4 x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x

La integral es:

$$-\frac{1}{5}\cos^5 x + k$$

188. $\int \text{sen}^2 x \cos^3 x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el cos x

La integral es:

$$\frac{\text{sen } x}{5}\left(-\cos^4 x + \frac{\cos^2 x}{3} + \frac{2}{3}\right) + k$$

189. $\int \text{tg}^2 x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas. Es par en el sen x y en el cos x

La integral es: $(-x + \text{tg } x) + k$

190. $\int \cos^4 x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es par en el cos x

La integral es:

$$\frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} + \text{sen } x \cos x\left(\cos^2 x + \frac{3}{2}\right)\right] + k$$

191. $\int \text{sen } 4x \cos x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 3x}{3}\right) + k$$

192. $\int \text{sen } 5x \text{ sen } 3x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{\text{sen } 8x}{4} + \text{sen } 2x\right) + k$$

193. $\int \cos 6x \cos 4x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\text{sen } 10x}{5} + \text{sen } 2x\right) + k$$

194. $\int \sqrt{9 - x^2} \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 3 \text{ sen } t$$
$$dx = 3 \cos t \, dt$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(9 \text{ arc sen } \frac{x}{3} + x\sqrt{9 - x^2}\right) + k$$

195. $\displaystyle\int \sqrt{25 - x^2}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 5 \text{ sen } t$$
$$dx = 5 \cos t \, dt$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(25 \text{ arc sen } \frac{x}{5} + x\sqrt{25 - x^2}\right) + k$$

196. $\displaystyle\int \sqrt{3 - x^2}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = \sqrt{3} \text{ sen } t$$
$$dx = \sqrt{3} \cos t \, dt$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(3 \text{ arc sen } \frac{\sqrt{3}}{3} x + x\sqrt{3 - x^2}\right) + k$$

197. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 + x^2}}$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 2 \text{ tg } t$$
$$dx = 2 \sec^2 t \, dt$$

La integral es:

$$-\frac{\sqrt{4 + x^2}}{4x} + k$$

198. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25 + x^2}}$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 5 \text{ tg } t$$
$$dx = 5 \sec^2 t \, dt$$

La integral es:

$$-\frac{\sqrt{25 + x^2}}{25x}$$

Para ampliar

199. Calcula tres primitivas de la función:

$$y = x$$

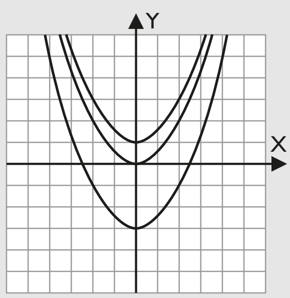
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

Solución:

$y = \dfrac{x^2}{2}$

$y = \dfrac{x^2}{2} + 1$

$y = \dfrac{x^2}{2} - 3$



Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

200. Dada la función:

$$y = -x + 1$$

a) calcula su integral indefinida:

b) halla la primitiva que pasa por el punto P(4, – 1)

c) dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

Solución:

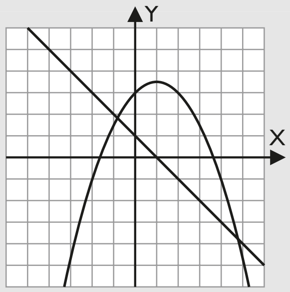
a) $\displaystyle\int (-x + 1)\, dx = -\frac{x^2}{2} + x + k$

b) $-\dfrac{4^2}{2} + 4 + k = -1$

$k = 3$

$y = -\dfrac{x^2}{2} + x + 3$

c)



201. Halla la integral de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} x + k & \text{si } x < -2 \\ x^2/2 + k & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

202. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. La descomposición es:

$$x + 3 + \frac{1}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} + 3x + L\,|x| + k$$

203. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x^3 - 4x$$

Solución:

Es la integral de un polinomio.

$$\frac{x^4}{4} - 2x^2 + k$$

204. Calcula la integral indefinida:

$$\int \frac{1}{1 + e^x}\,dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = L\,t$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

La integral es:

$$x - L\,|e^x + 1| + k$$

205. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x\,L\,x$$

Solución:

Se calcula por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = L\,x$$

$$dv = x\,dx$$

El resultado es:

$$\frac{x^2}{2}\left(L\,|x| - \frac{1}{2}\right) + k$$

206. Calcula la integral de la función:

$$y = e^{x + 2}$$

Solución:

Es la integral de una función exponencial.

$$e^{x + 2} + k$$

207. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = (1 + x)\,e^x$$

Solución:

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = 1 + x$$

$$dv = e^x\,dx$$

El resultado es:

$$xe^x + k$$

208. Calcula:

$$\int \frac{2x^3 - x^2 - 12x - 3}{x^2 - x - 6}\,dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$2x + 1 + \frac{1}{5}\left(\frac{6}{x - 3} - \frac{1}{x + 2}\right)$$

La integral es:

$$x^2 + x + \frac{6}{5}\,L\,|x - 3| - \frac{1}{5}\,L\,|x + 2| + k$$

209. Halla una función f(x) sabiendo que:

$$f'(x) = x^2e^x$$

Solución:

Se calcula por partes; hay que aplicar dos veces el método. La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2$$

$$dv = e^x\,dx$$

El resultado es:

$$e^x(x^2 - 2x + 2) + k$$

210. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \sqrt{x - 1}$$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{2}{3}(x - 1)\sqrt{x - 1} + k$$

211. Calcula:

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx$$

Solución:

Se calcula por partes; tiene que aplicarse dos veces el método:

La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2$$
$$dv = x\,e^{x^2}$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + k$$

212. Calcula:

$$\int \frac{x\,dx}{e^{x^2}}\,dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^{x^2} = t \Rightarrow 2x\,e^{x^2}\,dx = dt$$

$$x\,dx = \frac{dt}{2t}$$

La integral es:

$$-\frac{1}{2}e^{-x^2} + k$$

213. Calcula una primitiva de la función:

$$y = \frac{1}{1 - x^2}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 1}\right)$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(L\,|x + 1| - L\,|x - 1|\right) + k$$

214. Calcula una primitiva de la función:

$$y = \sqrt{x}$$

Solución:

Es la integral de una función irracional.

$$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$$

Problemas

215. Calcula tres primitivas de la función:

$$y = -x$$

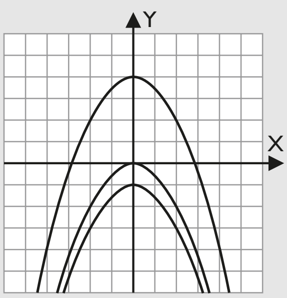
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

Solución:

$$y = -\frac{x^2}{2}$$

$$y = -\frac{x^2}{2} + 3$$

$$y = -\frac{x^2}{2} - 1$$



Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

216. Dada la función: $y = e^x$

a) calcula su integral indefinida.

b) halla la primitiva que pasa por el punto P(1, 1)

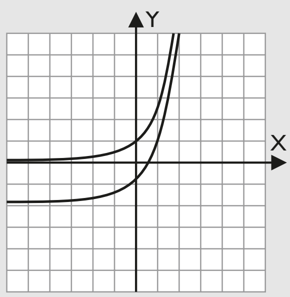
c) dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

Solución:

a) $\int e^x\,dx = e^x + k$

b) $e^1 + k = 1 \Rightarrow k = 1 - e \Rightarrow y = e^x + 1 - e$

c)



217. Halla la integral de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 1 \\ e^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} -x^2/2 + k & \text{si } x \le 1 \\ e^x + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

218. Calcula:

$$\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1 - e^x}}$$

Solución:

Es la integral de una función irracional.

$$-2\sqrt{1 - e^x} + k$$

219. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^x}$$

mediante un cambio de variable.

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = L\,t$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

La integral es:

$$x - L\,|e^x - 1| + k$$

220. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{2x}{x - 1}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$2 + \frac{2}{x - 1}$$

La integral es:

$$2x + 2\,L\,|x - 1| + k$$

221. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Solución:

Es la integral de una función logarítmica.

$$\frac{1}{2}\,L\,|x^2 + 1| + k$$

222. Calcula $\displaystyle\int \frac{1}{x + 1}\,dx$

Solución:

Es la integral de una función logarítmica.

$$L\,|x + 1| + k$$

223. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$$

Solución:

Es la integral de un polinomio.

$$\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} + 3x^2 + k$$

224. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$x - 3 + \frac{2}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} - 3x + 2\,L\,|x| + k$$

225. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3x - 9}{x + 2}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$4x - 5 + \frac{1}{x + 2}$$

La integral es:

$$2x^2 - 5x + L\,|x + 2| + k$$

226. Calcula:

$$\int \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 1}\,dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$1 + \frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$$

La integral es:

$$x + 2\,L\,|x - 1| - L\,|x + 1| + k$$

227. Calcula:

$$\int (x^2 + 5)\, e^{-x}\, dx$$

Solución:

Se calcula por partes, hay que aplicar dos veces el método.

La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2 + 5$$
$$dv = e^{-x}\, dx$$

El resultado es:

$$-e^{-x}(x^2 + 2x + 7) + k$$

228. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{16}{(x+1)^2}$$

Solución:

Es la integral de una función racional.

$$-\frac{16}{x+1} + k$$

229. Calcula la integral de la función:

$$y = e^{-x}$$

Solución:

Es la integral de una función exponencial.

$$-e^{-x} + k$$

230. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = xe^{2x}$$

Solución:

Se calcula por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x$$
$$dv = 2e^{2x}\, dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2} e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + k$$

231. Calcula:

$$\int x \cos x^2\, dx$$

Solución:

Es la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + k$$

232. Sea la integral:

$$\int e^{2x} \operatorname{sen} e^x\, dx$$

a) Intégrala mediante el cambio $t = e^x$

b) Calcula la constante de integración para que la función integral pase por el origen de coordenadas.

Solución:

a) Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = L\, t$$
$$e^{2x} = t^2$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

Luego hay que hacerla por partes.

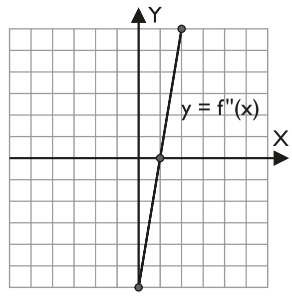
La integral es:

$$-e^x \cos e^x + \operatorname{sen} e^x + k$$

b) Para $x = 0$, $y = 0$

$$-e^0 \cos e^0 + \operatorname{sen} e^0 + k = 0$$
$$-\cos 1 + \operatorname{sen} 1 + k = 0$$
$$k = \cos 1 - \operatorname{sen} 1$$

233. La recta que pasa por los puntos (0, –6) y (1, 0) (observa el dibujo) es la gráfica de la función derivada segunda f'' de una cierta función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se sabe que el origen pertenece a la curva y = f(x) y que en ese punto la recta tangente tienen pendiente igual a 3. Determina una expresión de la función f



Solución:

$f''(x) = 6x - 6$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + k_1$

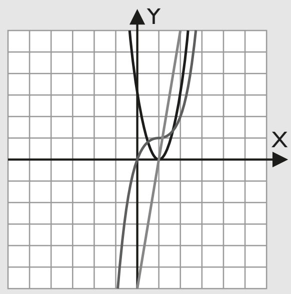
$f'(0) = 3 \Rightarrow k_1 = 3$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + k_2$

$f(0) = 0 \Rightarrow k_2 = 0$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$



234. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$x^2 - x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1}$$

La integral es:

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + L\,|x| - L\,|x + 1| + k$$

235. Calcula:

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2}\,dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$1 + \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 1}$$

La integral es:

$$x + L\,|x - 2| - L\,|x + 1| + k$$

236. Calcula la integral de la función:

$$y = \frac{x^2}{x^3 - 2}$$

Solución:

Es la integral de una función logarítmica.

$$\frac{1}{3}\,L\,|x^3 - 2| + k$$

237. Calcula la integral de la función:

$$y = \frac{1}{x^2 + 2}$$

Solución:

Es la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{2}}{2}x + k$$

238. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = (x + 1)e^{2x}$$

Solución:

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = x + 1$$
$$dv = e^{2x}\,dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}e^{2x}\left(x + \frac{1}{2}\right) + k$$

239. Calcula:

$$\int x \text{ sen } x \cos x\,dx$$

Solución:

Se llama I a la integral buscada.

Se aplica la integración por partes.

$$u = x \text{ sen } x$$
$$dv = \cos x\,dx$$

Se obtiene la siguiente ecuación:

$$I = x \text{ sen}^2 x - \int \text{sen}^2 x - I$$

Se resuelve la integral trigonométrica que es par en el seno.

$$\int \text{sen}^2 x = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\text{sen } 2x$$

Queda:

$$2I = x \text{ sen}^2 x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\text{sen } 2x + k$$

$$I = \frac{x \text{ sen}^2 x}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\text{sen } 2x + k$$

240. Calcula:

$$\int \frac{e^{3x}}{2 + e^x}\,dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = L\,t$$
$$e^{3x} = t^3$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + 4\,L\,|e^x + 2| + k$$

241. Calcula una primitiva de la función:

$$f(x) = x\,L\,(1 + x^2)$$

Solución:

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = L\,(1 + x^2)$$

$$dv = x\,dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}\left[(x^2 + 1)\,L\,|x^2 + 1| - x^2\right] + k$$

242. Calcula:

$$\int x\sqrt{1 + x^2}\,dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{1}{3}(x^2 + 1)\sqrt{1 + x^2} + k$$

Para profundizar

243. Calcula tres primitivas de la función:

$$y = e^x$$

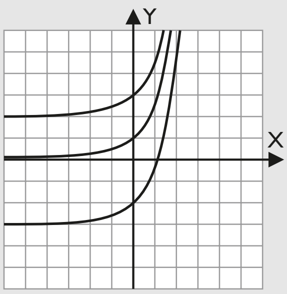
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

Solución:

$y = e^x$

$y = e^x + 2$

$y = e^x - 3$



Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

244. Dada la función:

$$y = \text{sen } x$$

a) calcula su integral indefinida.

b) halla la primitiva que pasa por el punto $P(\pi, 3)$

c) dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

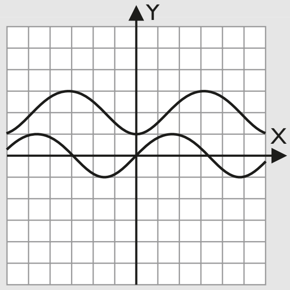
Solución:

a) $\int \text{sen } x\,dx = -\cos x + k$

b) $-\cos \pi + k = 3 \Rightarrow k = 2$

$y = -\cos x + 2$

c)



245. Halla la integral de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x \le -1 \\ e^x & \text{si } -1 < x < 2 \\ \cos x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} -\cos x & \text{si } x \le -1 \\ e^x & \text{si } -1 < x < 2 \\ \text{sen } x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

246. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

Solución:

Es la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\text{ arc tg } \frac{\sqrt{3}}{3}x + k$$

247. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = xe^{-x}$$

Solución:

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = x$$

$$dv = e^{-x}\,dx$$

El resultado es: $-e^{-x}(x + 1) + k$

248. Calcula la integral de la función:

$$y = \frac{2x + 2}{1 - x}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$-2 - \frac{4}{x - 1}$$

La integral es:

$$-2x - 4\,L\,|x - 1| + k$$

249. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

Solución:

Es la integral de una función logarítmica.

$$L|x-1| + k$$

250. Calcula:

$$\int x^2 \, L\, x \, dx$$

donde L x denota el logaritmo neperiano de un número positivo **x**

Solución:

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = L\, x$$

$$dv = x^2\, dx$$

El resultado es:

$$\frac{x^3}{3}\left(L|x| - \frac{1}{3}\right) + k$$

251. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = 2 + x - x^2$$

Solución:

Es la integral de un polinomio.

$$-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + k$$

252. Halla una función f(x) sabiendo que:

$$f'(x) = x^2 e^x$$

Solución:

Se calcula por partes; hay que aplicar dos veces el método. La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2$$

$$dv = e^x\, dx$$

El resultado es:

$$e^x(x^2 - 2x + 2) + k$$

253. Calcula:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right)$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}(L|x+1| - L|x+3|) + k$$

254. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$$

Usa el cambio de variable $\sqrt{x} = t$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$$

Luego hay que hacerla por partes.

La integral es:

$$2\operatorname{sen}\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + k$$

255. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Solución:

Es la integral de una función racional.

$$-\frac{1}{x} + k$$

256. Haciendo el cambio de variable $e^x = t$, calcula:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 1}$$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = L\, t$$

$$e^{2x} = t^2$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}(L|e^x - 1| - L|e^x + 1| + k$$

257. Calcula:

$$f(x) = \int \frac{x^3 - 2x + 3}{x - x^2}\, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$-x - 1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x - 1}$$

La integral es:

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 3 \, L\,|x| - 2 \, L\,|x - 1| + k$$

258. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x\sqrt{5 - x^2}$$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$-\frac{1}{3}(5 - x^2)\sqrt{5 - x^2} + k$$

259. Calcula una primitiva de la función:

$$y = \operatorname{tg} x$$

Solución:

Es la integral de una función trigonométrica.

$$-\,L\,|\cos x| + k$$

260. Calcula:

$$\int x^3 e^{x^2}\, dx$$

Solución:

Se calcula por partes; hay que aplicar dos veces el método.

La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2$$

$$dv = xe^{x^2}\, dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + k$$

261. Calcula una primitiva de la función:

$$y = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$-1 + \frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x - 2}$$

La integral es:

$$-x + L\,|x + 2| - L\,|x - 2| + k$$

262. Utiliza el cambio de variable L x = t para calcular la integral:

$$\int \frac{1 + L\,x^2 + (L\,x)^2}{x(1 + L\,x)}\, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$L\,x = t \Rightarrow x = e^t$$

$$dx = e^t\, dt$$

$$I = \int \frac{1 + 2t + t^2}{e^t(1 + t)}\, e^t\, dt = \int \frac{1 + 2t + t^2}{1 + t}\, dt =$$

$$= \int \frac{(1 + t)^2}{1 + t}\, dt = \int (t + 1)\, dt = \frac{1}{2}t^2 + t + k =$$

$$= \frac{1}{2}(L\,x)^2 + L\,x + k$$

263. Calcula la integral:

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de la función racional.

$$I = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + k$$

Paso a paso

264. Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int\left(e^{5x} + \cos\frac{x}{3}\right)dx$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

265. Calcula la integral:

$$F(x) = \int(2x - 5)\,dx$$

Halla la primitiva que pase por el punto P(4, 3).

Representa la primitiva obtenida para comprobar que pasa por dicho punto.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

266. Calcula la integral:

$$\int\cos 2x\,dx$$

Sustituye la constante **k** por los números enteros de –10 a 10. Representa la familia de funciones que obtienes. ¿Qué observas en las gráficas?

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

267. Calcula la integral:

$$\int\frac{3x^2 - 11x + 15}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\,dx$$

y haz la descomposición en fracciones simples del integrando.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

268. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

269. $\int x\cos x\,dx$

Solución:

Ejercicio 269

$$\int x\cdot\cos(x)\,dx \Rightarrow \cos(x) + x\cdot\operatorname{sen}(x)$$

270. $\int L\,x\,dx$

Solución:

Ejercicio 270

$$\int \ln x\,dx \Rightarrow x\cdot\ln(x) - x$$

271. $\int x^2 e^x\,dx$

Solución:

Ejercicio 271

$$\int x^2\cdot e^x\,dx \Rightarrow (x^2 - 2\cdot x + 2)\cdot e^x$$

272. $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$

Solución:

Ejercicio 272

$$\int e^x\cdot\operatorname{sen}(x)\,dx \Rightarrow \frac{e^x\cdot\operatorname{sen}(x)}{2} - \frac{e^x\cdot\cos(x)}{2}$$

En los siguientes ejercicios haz la descomposición en fracciones simples del integrando y calcula la integral.

273. $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}\,dx$

Solución:

Ejercicio 273

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}\,dx \rightarrow \ln(|x^2+1|) + 3\cdot x$$

$$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}\right) \rightarrow \{\{3,1\},\{2\cdot x, x^2+1\}\}$$

274. $\displaystyle\int \frac{12x + 1}{x^2 + x - 6}\,dx$

Solución:

Ejercicio 274

$$\int \frac{12x + 1}{x^2 + x - 6}\,dx \rightarrow 7\cdot\ln(|-x-3|) + 5\cdot\ln(|x-2|)$$

$$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{12x + 1}{x^2 + x - 6}\right) \rightarrow \{\{5, x-2\},\{7, x+3\}\}$$

275. $\displaystyle\int \frac{3x + 5}{x^2 - 4x + 13}\,dx$

Solución:

Ejercicio 275

$$\int \frac{3x + 5}{x^2 - 4x + 13}\,dx \rightarrow \frac{3\cdot\ln(|x^2-4\cdot x+13|)}{2} + \frac{11\cdot\operatorname{atan}\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right)}{3}$$

$$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{3x + 5}{x^2 - 4x + 13}\right) \rightarrow \{\{3\cdot x+5, x^2-4\cdot x+13\}\}$$

276. $\displaystyle\int \frac{5x^2 - 21x + 12}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5}\,dx$

Solución:

Ejercicio 276

$$\int \frac{5x^2 - 21x + 12}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5}\,dx \rightarrow 3\cdot\ln(|-x+1|) + 2\cdot\ln(|x-5|) + \frac{-1}{x-1}$$

$$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{5x^2 - 21x + 12}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5}\right) \rightarrow \{\{2, x-5\},\{1, x^2-2\cdot x+1\},\{3, x-1\}\}$$

277. $\displaystyle\int \frac{5x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 + x - 2}\,dx$

Solución:

Ejercicio 277

$$\int \frac{5x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 + x - 2}\,dx \rightarrow 3\cdot\ln(|x-2|) + \ln(|x^2+1|)$$

$$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{5x^2 - 21x + 12}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5}\right) \rightarrow \{\{2, x-5\},\{1, x^2-2\cdot x+1\},\{3, x-1\}\}$$

278. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2 - x)(x - 1)}\,dx$

Solución:

Ejercicio 278

$$\int \frac{1}{(x^2 - x)\cdot(x - 1)}\,dx \rightarrow \ln(|x|) - \ln(|-x+1|) - \frac{1}{x-1}$$

$$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{1}{(x^2 - x)\cdot(x - 1)}\right) \rightarrow \{\{1, x\},\{1, x^2-2\cdot x+1\},\{-1, x-1\}\}$$

279. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}\,dx$

Solución:

Ejercicio 279

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}\,dx \rightarrow -\frac{\ln(|x^2+1|)}{2} + \operatorname{atan}(x) + \frac{x^2}{2}$$

$$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}\right) \rightarrow \{\{x, 1\},\{-x+1, x^2+1\}\}$$

Calcula las siguientes integrales:

280. $\displaystyle\int \frac{L\,x}{x}\,dx$

Solución:

Ejercicio 280

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx \rightarrow \frac{\ln(x)^2}{2}$$

281. $\displaystyle\int \frac{6}{e^x + 3}\,dx$

Solución:

Ejercicio 281

$$\int \frac{6}{e^x + 3}\,dx \rightarrow 2\cdot\ln(|e^x|) - 2\cdot\ln(|e^x+3|)$$

282. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x + 1}}$

Solución:

Ejercicio 282

$$\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x+1}}\, dx \rightarrow \ln(|-\sqrt{x+1}+1|) - \ln(|\sqrt{x+1}+1|)$$

283. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$

Solución:

Ejercicio 283

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}\, dx \rightarrow 6 \cdot \ln(|\sqrt[6]{x} - 1|) + (2 \cdot \sqrt[6]{x}^{3} + 3 \cdot \sqrt[6]{x}^{2}) + 6 \cdot \sqrt[6]{x}$$

284. $\int |x|\, dx$

Solución:

Ejercicio 284

$$\int |x|\, dx \rightarrow \frac{x \cdot |x|}{2}$$

285. $\int \text{sen}^2\, x \cos x\, dx$

Solución:

Ejercicio 285

$$\int (\text{sen}\, x)^2 \cdot \cos(x)\, dx \rightarrow \frac{\text{sen}(x)^3}{3}$$

286. $\int \cos^3 x\, dx$

Solución:

Ejercicio 286

$$\int (\cos x)^3\, dx \rightarrow -\frac{\text{sen}(x)^3}{3} + \text{sen}(x)$$

287. $\int \cos^2 x\, dx$

Solución:

Ejercicio 287

$$\int (\cos(x))^2\, dx \rightarrow \frac{\text{sen}(2 \cdot x)}{4} + \frac{x}{2}$$

288. $\int \cos 4x \cos 3x\, dx$

Solución:

Ejercicio 288

$$\int \cos(4x) \cdot \cos(3x)\, dx \rightarrow \frac{\text{sen}(x)}{2} + \frac{\text{sen}(7 \cdot x)}{14}$$

289. $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$

Solución:

Ejercicio 289

$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx \rightarrow \frac{x \cdot \sqrt{-x^2+4}}{2} + 2 \cdot \text{asen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

290. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9 + x^2}}$

Solución:

Ejercicio 290

$$\int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{9 + x^2}}\, dx \rightarrow \frac{-1 \cdot \sqrt{x^2+9}}{9 \cdot x}$$

291. $\int x^3\, L\, x\, dx$

Solución:

Ejercicio 291

$$\int x^3 \cdot \ln(x)\, dx \rightarrow \frac{x^4 \cdot \ln(x)}{4} - \frac{x^4}{16}$$

292. $\displaystyle\int \frac{L\,x}{x^2}\,dx$

Solución:

Ejercicio 292

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx \Rightarrow -\frac{\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}$$

293. $\displaystyle\int e^{-x}(x^2+1)\,dx$

Solución:

Ejercicio 293

$$\int e^{-x}\cdot(x^2+1)\,dx \Rightarrow (-x^2-2\cdot x-3)\cdot e^{-x}$$

294. $\displaystyle\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Solución:

Ejercicio 294

$$\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow -4\cdot\ln(|-\sqrt{x}-1|)+4\cdot\sqrt{x}$$

295. $\displaystyle\int \frac{L(L\,x)}{x\,L\,x}\,dx$

Solución:

Ejercicio 295

$$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x\cdot\ln(x)}\,dx \Rightarrow \frac{\ln(\ln(x))^2}{2}$$

296. Calcula la integral:

$$F(x) = \int (3x^2 - 4x - 1)\,dx$$

Halla la primitiva que pase por el punto P(2, 1). Representa la primitiva obtenida para comprobar que pasa por dicho punto.

Solución:

Ejercicio 296

$f(x) = 3x^2 - 4x - 1 \Rightarrow x \mapsto 3\cdot x^2-4\cdot x-1$

$F(x) = \int f(x)\,dx \Rightarrow x \mapsto x^3-2\cdot x^2-x$

P = punto(2, 1) ⇒ (2,1)

Sustituimos el punto P(2, 1)

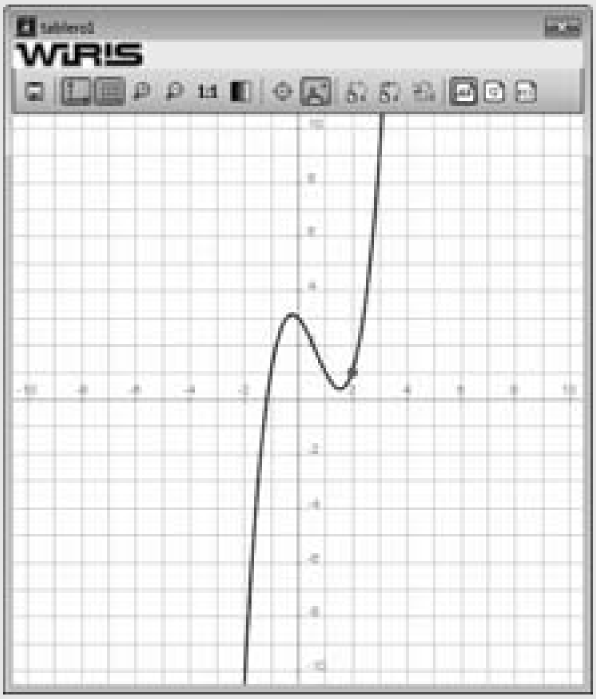
resolver(F(2)+k = 1) ⇒ {{k=3}}

La función es :

$F(x) = F(x) + 3 \Rightarrow x \mapsto x^3-2\cdot x^2-x+3$

dibujar(F(x), {color=azul, anchura_linea=2})

dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})



297. Calcula la integral:

$$\int x \text{ sen } 2x \, dx$$

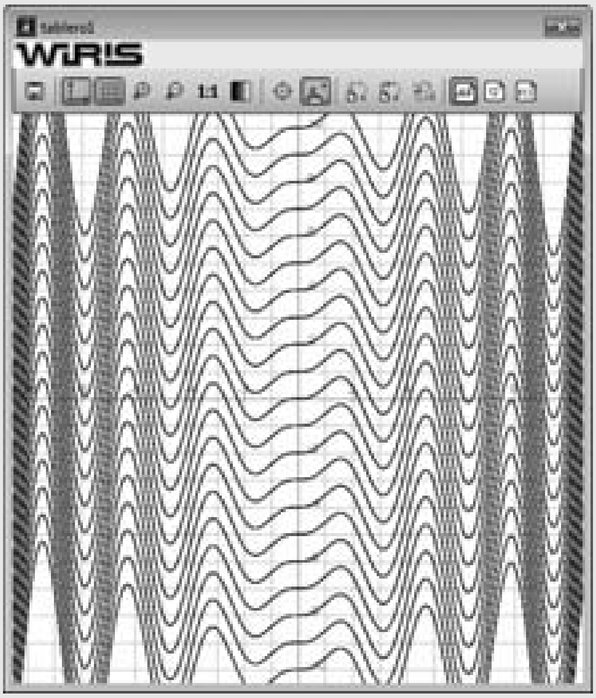
Sustituye la constante **k** por los números: –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 y 5. Representa la familia de funciones que obtienes. ¿Qué observas en las gráficas?

Solución:

Ejercicio 297

$$\int x \cdot \text{sen}(2x)\,dx \rightarrow \frac{\text{sen}(2\cdot x)}{4} - \frac{x\cdot\cos(2\cdot x)}{2}$$

$$\text{aplicar\_función}\left(k \mapsto \text{dibujar}\left(\frac{\text{sen}(2\cdot x)}{4} - \frac{x\cdot\cos(2\cdot x)}{2} + k\right), -10..10\right)$$



298. Calcula la integral:

$$\int \text{sen } 3x \cos 2x \, dx$$

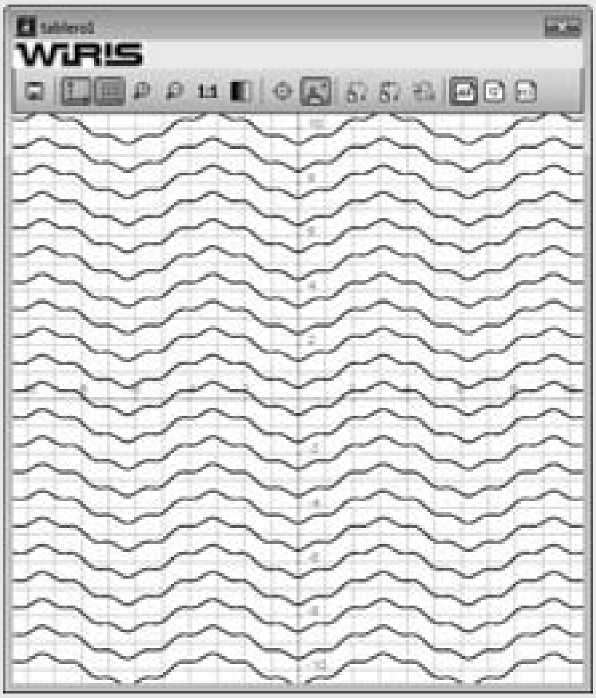
Sustituye la constante **k** por los números: –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 y 5. Representa la familia de funciones que obtienes. ¿Qué observas en las gráficas?

Solución:

Ejercicio 298

$$\int \text{sen}(3x) \cdot \cos(2x)\,dx \rightarrow -\frac{8\cdot\cos(x)^5}{5} + 2\cdot\cos(x)^3 - \cos(x)$$

$$\text{aplicar\_función}\left(k \mapsto \text{dibujar}\left(-\frac{8\cdot\cos(x)^5}{5} + 2\cdot\cos(x)^3 - \cos(x) + k\right), -10..10\right)$$



13 Integral indefinida

1. Reglas de integración

Piensa y calcula

Calcula: a) $y = x^5,\ y' =$ b) $y' = 3x^2,\ y =$ c) $y = \cos x,\ y' =$ d) $y' = \cos x,\ y =$

Solución:
a) $y' = 5x^4$ b) $y = x^3$ c) $y' = -\text{sen } x$ d) $y = \text{sen } x$

Aplica la teoría

1. $\int 3(3x - 5)^7\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.
$\frac{(3x-5)^8}{8} + k$

2. $\int \frac{dx}{(3x+5)^3}$

Solución:
Se aplica la integral de una función racional.
$-\frac{1}{6(3x+5)^2} + k$

3. $\int \cos \frac{x}{6}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$6 \text{ sen } \frac{x}{6} + k$

4. $\int e^x\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.
$e^x + k$

5. $\int \frac{dx}{x+3}$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.
$L\,|x + 3| + k$

6. $\int (e^x - \text{sen } x)\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de las operaciones.
$e^x + \cos x + k$

7. $\int 2^{6x}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.
$\frac{2^{6x-1}}{3\,L\,2} + k$

8. $\int \frac{x\,dx}{x^2 - 1}$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.
$\frac{1}{2}\,L\,|x^2 - 1| + k$

9. $\int 2x \text{ sen } x^2\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\cos x^2 + k$

10. $\displaystyle\int \frac{7\,dx}{2\sqrt{7x+5}}$

Solución:
Se aplica la integral de una función irracional.
$\sqrt{7x+5} + k$

11. $\displaystyle\int 3\cos 3x\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\operatorname{sen} 3x + k$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{9+x^2}$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3} + k$

13. $\displaystyle\int \sec^2(3x+1)\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x+1) + k$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{3} + k$

15. $\displaystyle\int 5\operatorname{sen} x\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-5\cos x + k$

16. $\displaystyle\int (x^3 - 6x^2 + 1)\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.
$\frac{x^4}{4} - 2x^3 + x + k$

17. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2(5x-1)\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\frac{1}{5}\operatorname{cotg}(5x-1) + k$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

Solución:
Se aplica la integral de una función irracional.
$2\sqrt{x-1} + k$

19. $\displaystyle\int e^{x/2}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.
$2e^{x/2} + k$

20. $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x + \cos x)\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de las operaciones.
$-\cos x + \operatorname{sen} x + k$

21. $\displaystyle\int \frac{3}{(x-3)^4}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función racional.
$-\frac{1}{(x-3)^3} + k$

22. $\displaystyle\int (4x+1)^5\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.
$\frac{(4x+1)^6}{24} + k$

23. $\displaystyle\int \operatorname{cotg}(-2x+1)\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\frac{1}{2}L|\operatorname{sen}(2x-1)| + k$

24. $\displaystyle\int 3\cdot 2^{3x}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.
$\frac{2^{3x}}{L\,2} + k$

25. $\int \frac{dx}{(2x-1)^4}$

Solución:
Se aplica la integral de una función racional.
$-\frac{1}{6(2x-1)^3} + k$

26. $\int 3 \cot g\, 3x\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$L\,|\text{sen } 3x| + k$

27. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+5}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.
$L\,|x^2 - 3x + 5| + k$

28. $\int 5 \text{ sen } 5x\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\cos 5x + k$

29. $\int 2 \text{ tg } 2x\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-L\,|\cos 2x| + k$

30. $\int 2 \sqrt[5]{2x}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función irracional.
$\frac{5x \sqrt[5]{2x}}{3} + k$

31. $\int \frac{2\, dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\text{arc sen } 2x + k$

32. $\int e^x \text{ sen } e^x\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\cos e^x + k$

33. $\int e^{-7x}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.
$-\frac{e^{-7x}}{7} + k$

34. $\int \frac{dx}{1-x}$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.
$-L\,|1 - x| + k$

35. $\int 2x \text{ tg } x^2\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-L\,|\cos x^2| + k$

36. $\int \cos (5x - 1)\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\frac{1}{5} \text{ sen } (5x - 1) + k$

37. $\int \frac{3\, dx}{1 + (3x)^2}$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\text{arc tg } 3x + k$

38. $\int \text{sen } \frac{x}{2}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-2 \cos \frac{x}{2} + k$

39. $\int (x^4 - 2x - 5)\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.
$\frac{x^5}{5} - x^2 - 5x + k$

40. $\int e^x \cos e^x\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\text{sen } e^x + k$

2. Integración por partes

Piensa y calcula

Calcula la derivada de: $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$

Solución:
$y' = e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) = x^2e^x$

Aplica la teoría

41. $\int xe^x\,dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = x$$
$$dv = e^x dx$$

El resultado es:

$$e^x(x - 1) + k$$

42. $\int x \text{ sen } x\,dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = x$$
$$dv = \text{sen } x dx$$

El resultado es:

$$-x \cos x + \text{sen } x + k$$

43. $\int (x + 5) \cos x\,dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = x + 5$$
$$dv = \cos x\,dx$$

El resultado es:

$$(x + 5)\text{ sen } x + \cos x + k$$

44. $\int \text{sen } (Lx)\,dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = \text{sen } (Lx)$$
$$dv = dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y plantear una ecuación.
El resultado es: $\frac{x}{2}(\text{sen } (Lx) - \cos (Lx)) + k$

45. $\int \text{arc sen } x\,dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = \text{arc sen } x$$
$$dv = dx$$

El resultado es:

$$x \text{ arc sen } x + \sqrt{1 - x^2} + k$$

46. $\int x^2 e^{-x}\,dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = x^2$$
$$dv = e^{-x}dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.
El resultado es:

$$-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + k$$

47. $\int x^3 \text{ L } x\,dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = \text{L } x$$
$$dv = x^3\,dx$$

El resultado es:

$$\frac{x^4}{4}\text{ L }|x| - \frac{x^4}{16} + k$$

48. $\int (x^2 - 1) \text{ sen } x\,dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2 - 1$$
$$dv = \text{sen } x\, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes. El resultado es:

$$(-x^2 + 3) \cos x + 2x \text{ sen } x + k$$

49. $\int (x^2 + 1) \text{ L } x\, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \text{L } x$$
$$dv = (x^2 + 1)dx$$

El resultado es:

$$\left(\frac{x^3}{3} + x\right) \text{L } |x| - \frac{x^3}{9} - x + k$$

50. $\int x^2 \cos x\, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2$$
$$dv = \cos x\, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes. El resultado es:

$$(x^2 - 2) \text{ sen } x + 2x \cos x + k$$

51. $\int (x + 2)\, e^x\, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x + 2$$
$$dv = e^x dx$$

El resultado es:

$$e^x(x + 1) + k$$

52. $\int e^{-x} \text{ sen } x\, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \text{sen } x$$
$$dv = e^{-x}\, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y plantear una ecuación. El resultado es:

$$-\frac{1}{2}\, e^{-x}(\text{sen } x + \cos x) + k$$

53. $\int \text{L } (x + 1)\, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \text{L } (x + 1)$$
$$dv = dx$$

El resultado es:

$$(x + 1) \text{ L } |x + 1| - x + k$$

54. $\int (x^2 + 4)\, e^x\, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2 + 4$$
$$dv = e^x dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$e^x(x^2 - 2x + 6) + k$$

55. $\int e^x \cos x\, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \cos x$$
$$dv = e^x\, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y plantear una ecuación.

El resultado es:

$$\frac{1}{2}\, e^x(\text{sen } x + \cos x) + k$$

56. $\int \text{arc tg } x\, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \text{arc tg } x$$
$$dv = dx$$

El resultado es:

$$x \text{ arc tg } x - \frac{1}{2} \text{ L } |x^2 + 1| + k$$

3. Integración de funciones racionales con raíces reales en el denominador

■ Piensa y calcula

Realiza la siguiente división entera y haz la prueba: 39 | 5

Solución:

39 | 5
4 7

Prueba: $39 = 5 \cdot 7 + 4$

● Aplica la teoría

57. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 3}{x}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$x - 1 + \frac{3}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} - x + 3\,L\,|x| + k$$

58. $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 5x - 3}{x - 1}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$3x - 2 + \frac{5}{1 - x}$$

La integral es:

$$\frac{3x^2}{2} - 2x - 5\,L\,|x - 1| + k$$

59. $\displaystyle\int \frac{5x + 2}{x^2 + x}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x + 1}$$

La integral es:

$$2\,L\,|x| + 3\,L\,|x + 1| + k$$

60. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x + 5}{x^3}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3}$$

La integral es:

$$L\,|x| + \frac{3}{x} - \frac{5}{2x^2} + k$$

61. $\displaystyle\int \frac{5x + 13}{x^2 + 6x + 9}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{5}{x + 3} - \frac{2}{(x + 3)^2}$$

La integral es:

$$5\,L\,|x + 3| + \frac{2}{x + 3} + k$$

62. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 8x + 10}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{1}{x + 3} + \frac{2}{(x + 3)^2} - \frac{5}{(x + 3)^3}$$

La integral es:

$$L\,|x + 3| - \frac{2}{x + 3} + \frac{5}{2(x + 3)^2} + k$$

63. $\displaystyle\int \frac{3x^2 + x - 9}{x + 2}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$3x - 5 + \frac{1}{x + 2}$$

La integral es:

$$\frac{3x^2}{2} - 5x + L\,|x + 2| + k$$

64. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 10}{x^2 - 1}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$x - 2 + \frac{3}{x - 1} - \frac{5}{x + 1}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} - 2x + 3\,L\,|x - 1| - 5\,L\,|x + 1| + k$$

65. $\displaystyle\int \frac{8x + 7}{x^2 + x - 2}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{3}{x + 2} + \frac{5}{x - 1}$$

La integral es:

$$3\,L\,|x + 2| + 5\,L\,|x - 1| + k$$

66. $\displaystyle\int \frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 1}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{2}{x - 1} + \frac{5}{(x - 1)^2}$$

La integral es:

$$2\,L\,|x - 1| - \frac{5}{x - 1} + k$$

67. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 7x + 15}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{1}{x - 2} - \frac{3}{(x - 2)^2} + \frac{5}{(x - 2)^3}$$

La integral es:

$$L\,|x - 2| + \frac{3}{x - 2} - \frac{5}{2\,(x - 2)^2} + k$$

4. Integración de funciones racionales con raíces complejas o de varios tipos

Piensa y calcula

Halla mentalmente las raíces imaginarias de la siguiente ecuación: $x^2 + 9 = 0$

Solución:

$x = \pm 3i$

Aplica la teoría

68. $\displaystyle\int \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 5}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = 1 \pm 2i$$

Son imaginarias simples.

La integral es:

$$L\,|x^2 - 2x + 5| + \frac{3}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{x - 1}{2} + k$$

69. $\displaystyle\int \frac{8x^2 - 18x + 1}{x^3 - 3x^2 + 4}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = -1 \text{ real simple, } x = 2 \text{ real doble.}$$

La descomposición es:

$$\frac{3}{x+1} + \frac{5}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2}$$

La integral es:

$$3\,L\,|x+1| + 5\,L\,|x-2| + \frac{1}{x-2} + k$$

70. $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = 3 \text{ real simple.}$$

$$x = \pm 2i \text{ imaginarias simples.}$$

La descomposición es:

$$\frac{1}{x-3} + \frac{2x+1}{x^2+4}$$

La integral es:

$$L\,|x-3| + L\,|x^2+4| + \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{2} + k$$

71. $\displaystyle\int \frac{2x + 5}{x^2 + 4x + 5}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = -2 \pm i \text{ imaginarias simples.}$$

La integral es:

$$L\,|x^2 + 4x + 5| + \text{arc tg}\,(x+2) + k$$

5. Integración por cambio de variable o sustitución y de funciones definidas a trozos

Piensa y calcula

Resuelve mentalmente las siguientes integrales inmediatas.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x}$ b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + 3}\,dx$

Solución:

a) $L\,|x| + k$ b) $L\,|e^x + 3| + k$

Aplica la teoría

72. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,(L\,x)^2}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$L\,x = t$$

$$x = e^t$$

$$dx = e^t\,dt$$

Se obtiene:

$$-\frac{1}{L\,x} + k$$

73. $\displaystyle\int \frac{L\,x}{x[(L\,x)^2 - 1]}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$L\,x = t$$

$$x = e^t$$

$$dx = e^t\,dt$$

Se obtiene:

$$\frac{1}{2}\,L\,[(L\,x)^2 - 1] + k$$

74. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + 2}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$e^x = t$$
$$x = L\,t$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

Se obtiene:

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\,L\,(e^x + 2) + k$$

75. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x - 4}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$e^x = t$$
$$x = L\,t$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

Se obtiene:

$$e^x + 4\,L\,|e^x - 4| + k$$

76. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x+1} = t$$
$$x + 1 = t^2$$
$$x = t^2 - 1$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$\frac{2}{3}\,(x + 2)\sqrt{x+1} + k$$

77. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+3}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x+3} = t$$
$$x + 3 = t^2$$
$$x = t^2 - 3$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x+3} - 2\,L\,|\sqrt{x+3} + 1| + k$$

78. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \sqrt{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x} = t$$
$$x = t^2$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$-2\sqrt{x} - 2\,L\,|\sqrt{x} - 1| + k$$

79. $\displaystyle\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x} = t$$
$$x = t^2$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$2\,L\,|\sqrt{x} + 1| + k$$

80. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt[6]{x} = t$$
$$x = t^6$$
$$dx = 6t^5\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\,L\,|\sqrt[6]{x} + 1| + k$$

81. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt[4]{x} = t$$
$$x = t^4$$
$$dx = 4t^3\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 4\,L\,|\sqrt[4]{x} - 1| + k$$

82. Sea $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 1 \\ -3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula $\displaystyle\int f(x)\,dx$

Solución:

$$\begin{cases} x^2/2 & \text{si } x \le 1 \\ -3x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

83. Sea $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x \le 0 \\ 1/x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Calcula $\int f(x)\,dx$

Solución:

$\begin{cases} -\cos x & \text{si } x \le 0 \\ L\,|x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$

84. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ e^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula $\int f(x)\,dx$

Solución:

$\begin{cases} x^3/3 & \text{si } x \le 1 \\ e^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

6. Integración de funciones trigonométricas

Piensa y calcula

Escribe la fórmula fundamental de la trigonometría.

Solución:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Aplica la teoría

85. $\int \text{sen } x \cos x\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x y en el cos x

La integral es: $\frac{1}{2}\,\text{sen}^2 x + k$

86. $\int \text{sen}^3 x \cos x\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x y en el cos x

La integral es: $\frac{1}{4}\,\text{sen}^4 x + k$

87. $\int \text{sen}^4 x \cos x\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el cos x

La integral es: $\frac{1}{5}\,\text{sen}^5 x + k$

88. $\int \text{sen}^3 x \cos^2 x\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x

La integral es: $-\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + k$

89. $\int \text{sen}^2 x\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es par en el sen x

La integral es: $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\,\text{sen } 2x\right) + k$

90. $\int \text{sen}^4 x\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es par en el sen x

La integral es: $\frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \cos x\left(\text{sen}^3 x + \frac{3\,\text{sen } x}{2}\right)\right] + k$

91. $\int \text{sen } 3x \text{ sen } x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{\text{sen } 4x}{2} + \text{sen } 2x\right) + k$$

92. $\int \cos 5x \cos x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\text{sen } 6x}{3} + \frac{\text{sen } 4x}{2}\right) + k$$

93. $\int \text{sen } 5x \cos 3x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{\cos 8x}{4} - \cos 2x\right) + k$$

94. $\int \sqrt{1 - x^2} \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = \text{sen } t$$

$$dx = \cos t \, dt$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(\text{arc sen } x + x\sqrt{1 - x^2}\right) + k$$

95. $\int \sqrt{16 - x^2} \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 4 \text{ sen } t$$

$$dx = 4 \cos t \, dt$$

La integral es:

$$8 \text{ arc sen } \frac{x}{4} + \frac{1}{2}x\sqrt{16 - x^2} + k$$

96. $\int \sqrt{2 - x^2} \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = \sqrt{2} \text{ sen } t$$

$$dx = \sqrt{2} \cos t \, dt$$

La integral es:

$$\text{arc sen } \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2}x\sqrt{2 - x^2} + k$$

97. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 + x^2}}$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = \text{tg } t$$

$$dx = \sec^2 t \, dt$$

La integral es:

$$-\frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} + k$$

98. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16 + x^2}}$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 4 \text{ tg } t$$

$$dx = 4 \sec^2 t \, dt$$

La integral es:

$$-\frac{\sqrt{16 + x^2}}{16x} + k$$

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

Señala la solución correcta:

1 $\int \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx$

- ❑ arc tg $2x + k$
- ❑ $\frac{1}{2} L|4x^2+1| + k$
- ❑ $x + k$
- ☒ $x - \frac{1}{2} L|4x^2+1| + k$

2 $\int \frac{2x^3-9x^2+7x}{x^2-x}\,dx$

- ❑ $2x^2 - x + k$
- ☒ $x^2 - 7x + k$
- ❑ $2x^2 - 7x + L|x| + L|x-1| + k$
- ❑ $x^2 + L|x| + L|x-1| + k$

3 $\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

- ❑ $L|x| + L|x+1| + k$
- ❑ $L|x| + L|x-1| + k$
- ☒ $L|x| - L|x+1| + k$
- ❑ $L|x| \cdot L|x-1| + k$

4 $\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx$

- ❑ $L|x+1| - \frac{2x+1}{2x^2+4x+2} + k$
- ☒ $-\frac{2x+1}{2x^2+4x+2} + k$
- ❑ $L|x+1| - \frac{1}{2x^2+4x+2} + k$
- ❑ $-\frac{1}{2x^2+4x+2} + k$

5 $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

- ☒ $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + 4\sqrt{x} - 4L|\sqrt{x}+1| + k$
- ❑ $\frac{x}{2} - \sqrt{x} + 2L|\sqrt{x}-1| + k$
- ❑ $\frac{2}{3}\sqrt{x} - x - 4L|\sqrt{x}+1| + k$
- ❑ $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} - L|\sqrt{x}+1| + k$

6 $\int \frac{x^3+2}{x^2+3x+2}\,dx$

- ❑ $\frac{x^2}{2} - 3x + L|x-1| + 6L|x-2| + k$
- ❑ $\frac{x^2-3}{2} + L|x-1| + 6L|x-2| + k$
- ☒ $\frac{x^2}{2} - 3x + L|x+1| + 6L|x+2| + k$
- ❑ $\frac{x^2}{2} - 3x + L|x^2+3x+2| + k$

7 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

- ❑ $\frac{x^2}{3}\sqrt{x^2+1} + k$
- ☒ $\frac{x^2-2}{3}\sqrt{x^2+1} + k$
- ❑ $(x^2-2)\sqrt{x^2+1} + k$
- ❑ $\frac{x^2-2}{3} + \sqrt{x^2+1} + k$

8 $\int e^{x+e^x}\,dx$

- ☒ $e^{e^x} + k$
- ❑ $x\,e^x + k$
- ❑ $x\,e^{e^x} + k$
- ❑ $\frac{e^{e^x}}{x} + k$

9 $\int \frac{x^3+1}{x^2+4}\,dx$

- ❑ $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\text{arc tg}\,\frac{x}{2} + k$
- ❑ $\frac{x^2}{2} + 2L|x^2+4| + k$
- ❑ $\frac{x^2}{2} + 2L|x^2+4| + \frac{1}{2}\text{arc tg}\,\frac{x}{2} + k$
- ☒ $\frac{x^2}{2} - 2L|x^2+4| + \frac{1}{2}\text{arc tg}\,\frac{x}{2} + k$

10 $\int \frac{4-2x^2}{x} L\,x\,dx$

- ❑ $4(L\,x)^2 - x^2 L\,x - \frac{x^2}{2} + k$
- ☒ $2(L\,x)^2 - x^2 L\,x + \frac{x^2}{2} + k$
- ❑ $4(L\,x)^2 - x^2 - \frac{x^2}{2} + k$
- ❑ $2(L\,x)^2 - L\,x + \frac{x^2}{2} + k$

Ejercicios y problemas

1. Reglas de integración

99. $\int 4(4x - 1)^5\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{(4x - 1)^6}{6} + k$$

100. $\int \frac{dx}{(x - 1)^5}$

Solución:
Se aplica la integral de una función racional.

$$-\frac{1}{4(x - 1)^4} + k$$

101. $\int \cos \frac{3x}{2}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{2}{3} \operatorname{sen} \frac{3x}{2} + k$$

102. $\int e^{-x}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.

$$-e^{-x} + k$$

103. $\int \frac{dx}{x - 1}$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$L\, |x - 1| + k$$

104. $\int (\cos x - e^{-x})\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de las operaciones.

$$e^{-x} + \operatorname{sen} x + k$$

105. $\int 2^{-4x}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.

$$-\frac{2^{-4x}}{4\, L\, 2} + k$$

106. $\int \frac{x\, dx}{x^2 + 9}$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$\frac{1}{2}\, L\, |x^2 + 9| + k$$

107. $\int \operatorname{sen}\, (5 - 2x)\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{2} \cos\, (2x - 5) + k$$

108. $\int \frac{3\, dx}{\sqrt{3x}}$

Solución:
Se aplica la integral de una función irracional.

$$2\sqrt{3x} + k$$

109. $\int x \cos\, (x^2 + 1)\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen}\, (x^2 + 1) + k$$

110. $\int \frac{dx}{3 + x^2}$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}}{3} x + k$$

111. $\int x \sec^2 x^2\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} x^2 + k$$

112. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}}$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\text{arc sen } \frac{\sqrt{2}}{2} x + k$$

113. $\int 5 \text{ sen } 7x \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{5}{7} \cos 7x + k$$

114. $\int (10x^4 + 2x^3 - x - 1) \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.

$$2x^5 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} - x + k$$

115. $\int \text{cosec}^2 (3 - 4x) \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{4} \text{cotg } (3 - 4x) + k$$

116. $\int \sqrt[5]{x^3} \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{5x \sqrt[5]{x^3}}{8} + k$$

117. $\int e^{x/3} \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.

$$3e^{x/3} + k$$

118. $\int (\text{sen } x - \cos x) \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de las operaciones.

$$-\cos x - \text{sen } x + k$$

119. $\int \left(3x^2 + 1 - \frac{1}{x + 2} + \frac{8}{x^5}\right) dx$

Solución:
Se aplica la integral de las operaciones.

$$x^3 + x - L\,|x + 2| - \frac{2}{x^4} + k$$

120. $\int (2x - 1)^3 \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{(2x - 1)^4}{8} + k$$

121. $\int (-x \text{ cotg } x^2) \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{1}{2} L\,|\text{sen } x^2| + k$$

122. $\int 5 \cdot 7^{-5x} \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.

$$-\frac{7^{-5x}}{L\,7} + k$$

123. $\int \frac{dx}{(x + 7)^2}$

Solución:
Se aplica la integral de una función racional.

$$-\frac{1}{x + 7} + k$$

124. $\int 2x \text{ cotg } x^2 \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$L\,|\text{sen } x^2| + k$$

125. $\displaystyle\int \frac{3x^2+5}{x^3+5x-1}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$L\,|x^3+5x-1|+k$$

126. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3x+2)\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica

$$-\frac{1}{3}\cos(3x+2)+k$$

127. $\displaystyle\int \operatorname{tg}\frac{x}{4}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-2\,L\left|\cos\frac{x}{2}+1\right|+k$$

128. $\displaystyle\int \sqrt[3]{5x+1}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{3(5x+1)\sqrt[3]{5x+1}}{20}+k$$

129. $\displaystyle\int \frac{7\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$7\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2}+k$$

130. $\displaystyle\int e^{-x}\operatorname{sen} e^{-x}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\cos e^{-x}+k$$

131. $\displaystyle\int e^{5x}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.

$$\frac{e^{5x}}{5}+k$$

132. $\displaystyle\int \frac{5\,dx}{5x+4}$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$L\,|5x+4|+k$$

133. $\displaystyle\int \operatorname{tg}(4x+5)\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{1}{4}L\,|\cos(4x+5)|+k$$

134. $\displaystyle\int \cos(4-x)\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\operatorname{sen}(4-x)+k$$

135. $\displaystyle\int \frac{6\,dx}{1+(2x)^2}$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$3\operatorname{arc\,tg}2x+k$$

136. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\frac{4x}{5}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{5}{4}\cos\frac{4x}{5}+k$$

137. $\displaystyle\int \left(x^3+\frac{3}{4}x^2-8x+1\right)dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{4}-4x^2+x+k$$

138. $\int e^{-x} \cos e^{-x}\, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\text{sen } e^{-x} + k$$

139. Calcula tres primitivas de la función:

$$y = \text{sen } x$$

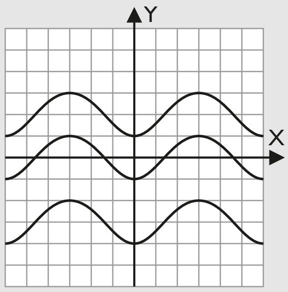
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

Solución:

$y = -\cos x$

$y = 2 - \cos x$

$y = -3 - \cos x$



Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

140. Dada la función:

$$y = \cos x$$

a) calcula su integral indefinida.

b) halla la primitiva que pasa por el punto P(0, 3)

c) dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

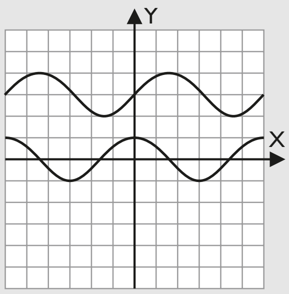
Solución:

a) $\int \cos x\, dx = \text{sen } x + k$

b) $\text{sen } 0 + k = 3 \Rightarrow k = 3$

$y = 3 + \text{sen } x$

c)



2. Integración por partes

141. $\int x\, e^{3x}\, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x$$

$$dv = e^{3x}\, dx$$

El resultado es:

$$e^{3x}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) + k$$

142. $\int (x - 1) \text{ sen } x\, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x - 1$$

$$dv = \text{sen } x\, dx$$

El resultado es:

$$(-x + 1) \cos x + \text{sen } x + k$$

143. $\int (x - 2) \cos x\, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x - 2$$

$$dv = \cos x\, dx$$

El resultado es:

$$(x - 2) \text{ sen } x + \cos x + k$$

144. $\int x\, L\,(x + 5)\, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = L\,(x + 5)$$

$$dv = x\, dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}\,(x^2 - 25)\, L\,|x + 5| - \frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2} + k$$

145. $\int x \text{ arc tg } x\, dx$

Solución:
Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = \text{arc tg } x$$
$$dv = x\, dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}(x^2 + 1) \text{ arc tg } x - \frac{x}{2} + k$$

146. $\int x^2 e^{-3x}\, dx$

Solución:
Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = x^2$$
$$dv = e^{-3x}\, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.
El resultado es:

$$-\frac{1}{27} e^{-3x}(9x^2 + 6x + 2) + k$$

147. $\int x^4 \text{ L } x\, dx$

Solución:
Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = \text{L } x$$
$$dv = x^4\, dx$$

El resultado es:

$$\frac{x^5}{5} \text{ L } |x| - \frac{x^5}{25} + k$$

148. $\int (x^2 + 3) \text{ sen } x\, dx$

Solución:
Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = x^2 + 3$$
$$dv = \text{sen } x\, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.
El resultado es:

$$(x^2 + 1) \cos x + 2x \text{ sen } x + k$$

149. $\int (x^2 - 1) \text{ L } x\, dx$

Solución:
Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = \text{L } x$$
$$dv = (x^2 - 1)dx$$

El resultado es:

$$\left(\frac{x^3}{3} - x\right) \text{L } |x| - \frac{x^3}{9} + x + k$$

150. $\int (x^2 - 1) \cos x\, dx$

Solución:
Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = x^2 - 1$$
$$dv = \cos x\, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.
El resultado es:

$$(x^2 - 3) \text{ sen } x + 2x \cos x + k$$

151. $\int (x - 1)\, e^x\, dx$

Solución:
Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = x - 1$$
$$dv = e^x\, dx$$

El resultado es:

$$e^x(x - 2) + k$$

152. $\int e^{2x} \text{ sen } x\, dx$

Solución:
Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = \text{sen } x$$
$$dv = e^{2x}\, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y planear una ecuación.

El resultado es: $\frac{1}{5} e^{2x}(2 \text{ sen } x - \cos x) + k$

153. $\int L\,(x-1)\,dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = L\,(x-1)$$
$$dv = dx$$

El resultado es:

$$(x-1)\,L\,|x-1| - x + k$$

154. $\int (x^2-3)\,e^x\,dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2-3$$
$$dv = e^x dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$e^x(x^2-2x-1) + k$$

155. $\int e^{-x}\cos x\,dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \cos x$$
$$dv = e^{-x}\,dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y plantear una ecuación.

El resultado es:

$$\frac{1}{2}\,e^{-x}(\operatorname{sen} x - \cos x) + k$$

156. $\int \operatorname{arc\,tg} 2x\,dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \operatorname{arc\,tg} 2x$$
$$dv = dx$$

El resultado es:

$$x\operatorname{arc\,tg} 2x - \frac{1}{4}\,L\,|4x^2+1| + k$$

3. Integración de funciones racionales con raíces reales en el denominador

157. $\int \frac{x^2+x-2}{x}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. La descomposición es:

$$x + 1 - \frac{2}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} + x - 2\,L\,|x| + k$$

158. $\int \frac{x^2-6x+2}{5-x}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. La descomposición es:

$$-x + 1 - \frac{3}{5-x}$$

La integral es:

$$-\frac{x^2}{2} + x + 3\,L\,|x-5| + k$$

159. $\int \frac{3x-4}{x^2-4}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples. La descomposición es:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2} + \frac{5}{x+2}\right)$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\,(L\,|x-2| + 5\,L\,|x+2|) + k$$

160. $\int \frac{5x^2-2x-3}{x^3}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. El denominador tiene una raíz real múltiple. La descomposición es:

$$\frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$$

La integral es:

$$5\,L\,|x| + \frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2} + k$$

161. $\int \frac{4x-11}{x^2-6x+9}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{4}{x-3}+\frac{1}{(x-3)^2}$$

La integral es:

$$4\,L\,|x-3|-\frac{1}{x-3}+k$$

162. $\int \frac{-2x^2+14x-31}{x^3-9x^2-27x+27}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$-\frac{2}{x-3}+\frac{2}{(x-3)^2}-\frac{7}{(x-3)^3}$$

La integral es:

$$-2\,L\,|x-3|-\frac{2}{x-3}+\frac{7}{2(x-3)^2}+k$$

163. $\int \frac{2x^2-10x+13}{x-3}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$2x-4+\frac{1}{x-3}$$

La integral es:

$$x^2-4x+L\,|x-3|+k$$

164. $\int \frac{x^3-2x^2+6x-2}{x^2-x}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$x-1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x-1}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2}-x+2\,L\,|x|+3\,L\,|x-1|+k$$

165. $\int \frac{11x+13}{x^2+x-6}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{4}{x+3}+\frac{7}{x-2}$$

La integral es:

$$4\,L\,|x+3|+7\,L\,|x-2|+k$$

166. $\int \frac{3x-1}{x^2+2x+1}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{3}{x+1}-\frac{4}{(x+1)^2}$$

La integral es:

$$3\,L\,|x+1|+\frac{4}{x+1}+k$$

167. $\int \frac{3x^2+8x+5}{x^3+6x^2+12x+8}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{3}{x+2}-\frac{4}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+2)^3}$$

La integral es:

$$3\,L\,|x+2|+\frac{4}{x+2}-\frac{1}{2(x+2)^2}+k$$

4. Integración de funciones racionales con raíces complejas o de varios tipos

168. $\int \frac{2x-3}{x^2+2x+10}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = -1 \pm 3i$$

Son imaginarias simples.

La integral es:

$$L|x^2 + 2x + 10| - \frac{5}{3} \text{ arc tg } \frac{x+1}{3} + k$$

169. $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 18x + 25}{x^3 + 3x^2 - 4}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$x = 1$ real simple.

$x = -2$ real doble.

La descomposición es:

$$\frac{5}{x-1} - \frac{3}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}$$

La integral es:

$$5\, L|x-1| - 3\, L|x+2| - \frac{1}{x+2} + k$$

170. $\displaystyle\int \frac{2x^2 + x + 7}{x^3 + 2x^2 + 9x + 18}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$x = -2$ real simple.

$x = \pm 3i$ imaginarias simples.

La descomposición es:

$$\frac{1}{x+2} + \frac{x-1}{x^2+9}$$

La integral es:

$$L|x+2| + \frac{1}{2} L|x^2 + 9| - \frac{1}{3} \text{ arc tg } \frac{x}{3} + k$$

171. $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2 - 4x + 8}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$x = 2 \pm 2i$ imaginarias simples.

La integral es:

$$\frac{3}{2} L|x^2 - 4x + 8| + 3 \text{ arc tg } \frac{x-2}{2} + k$$

5. Integración por cambio de variable o sustitución y de funciones definidas a trozos

172. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\, L\, x}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$Lx = t$$
$$x = e^t$$
$$dx = e^t\, dt$$

Se obtiene:

$$L(L\, x) + k$$

173. $\displaystyle\int \frac{L\, x}{x\,[(L\, x)^2 + 1]}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$Lx = t$$
$$x = e^t$$
$$dx = e^t\, dt$$

Se obtiene:

$$\frac{1}{2} L[(L\, x)^2 + 1] + k$$

174. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x - 3}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$e^x = t$$
$$x = L\, t$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

Se obtiene:

$$-\frac{x}{3} + \frac{1}{3} L|e^x - 3| + k$$

175. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x + 5}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$e^x = t$$
$$x = L\, t$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

Se obtiene:

$$e^x - 5\, L|e^x + 5| + k$$

176. $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x-1} = t$$
$$x - 1 = t^2$$
$$x = t^2 + 1$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x-1} + k$$

177. $\int \frac{dx}{2-\sqrt{x-3}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x-3} = t$$
$$x - 3 = t^2$$
$$x = t^2 + 3$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$-2\sqrt{x-3} - 4\,L\,|\sqrt{x-3} - 2| + k$$

178. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x} = t$$
$$x = t^2$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} - 2\,L\,|\sqrt{x} + 1| + k$$

179. $\int \frac{dx}{2x-\sqrt{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x} = t$$
$$x = t^2$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$L\,|2\sqrt{x} - 1| + k$$

180. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt[6]{x} = t$$
$$x = t^6$$
$$dx = 6t^5\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\,L\,|\sqrt[6]{x} - 1| + k$$

181. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt[4]{x} = t$$
$$x = t^4$$
$$dx = 4t^3\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\,L\,|\sqrt[4]{x} + 1| + k$$

182. Sea $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula $\int f(x)\,dx$

Solución:

$$\begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ -x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

183. Sea $f(x) = \begin{cases} 2/x & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

Calcula $\int f(x)\,dx$

Solución:

$$\begin{cases} 2\,L\,|x| & \text{si } x < 0 \\ \text{sen } x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

184. Sea $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x \le 1 \\ e^{x/2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula $\int f(x)\,dx$

Solución:

$$\begin{cases} -1/x & \text{si } x \le 1 \\ 2e^{x/2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

6. Integración de funciones trigonométricas

185. $\int \text{sen } x \cos^2 x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x

La integral es:

$$-\frac{1}{3}\cos^3 x + k$$

186. $\int \text{sen } x \cos^3 x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x y en el cos x

La integral es:

$$-\frac{1}{4}\cos^4 x + k$$

187. $\int \text{sen } x \cos^4 x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x

La integral es:

$$-\frac{1}{5}\cos^5 x + k$$

188. $\int \text{sen}^2 x \cos^3 x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el cos x

La integral es:

$$\frac{\text{sen } x}{5}\left(-\cos^4 x + \frac{\cos^2 x}{3} + \frac{2}{3}\right) + k$$

189. $\int \text{tg}^2 x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas. Es par en el sen x y en el cos x

La integral es: $(-x + \text{tg } x) + k$

190. $\int \cos^4 x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es par en el cos x

La integral es:

$$\frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} + \text{sen } x \cos x\left(\cos^2 x + \frac{3}{2}\right)\right] + k$$

191. $\int \text{sen } 4x \cos x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 3x}{3}\right) + k$$

192. $\int \text{sen } 5x \text{ sen } 3x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{\text{sen } 8x}{4} + \text{sen } 2x\right) + k$$

193. $\int \cos 6x \cos 4x \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\text{sen } 10x}{5} + \text{sen } 2x\right) + k$$

194. $\int \sqrt{9 - x^2} \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 3 \text{ sen } t$$

$$dx = 3 \cos t \, dt$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(9 \text{ arc sen } \frac{x}{3} + x\sqrt{9 - x^2}\right) + k$$

195. $\int \sqrt{25 - x^2}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 5 \text{ sen } t$$

$$dx = 5 \cos t \, dt$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(25 \text{ arc sen } \frac{x}{5} + x\sqrt{25 - x^2}\right) + k$$

196. $\int \sqrt{3 - x^2}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = \sqrt{3} \text{ sen } t$$

$$dx = \sqrt{3} \cos t \, dt$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(3 \text{ arc sen } \frac{\sqrt{3}}{3} x + x\sqrt{3 - x^2}\right) + k$$

197. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 + x^2}}$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 2 \text{ tg } t$$

$$dx = 2 \sec^2 t \, dt$$

La integral es:

$$-\frac{\sqrt{4 + x^2}}{4x} + k$$

198. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25 + x^2}}$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 5 \text{ tg } t$$

$$dx = 5 \sec^2 t \, dt$$

La integral es:

$$-\frac{\sqrt{25 + x^2}}{25x}$$

Para ampliar

199. Calcula tres primitivas de la función:

$$y = x$$

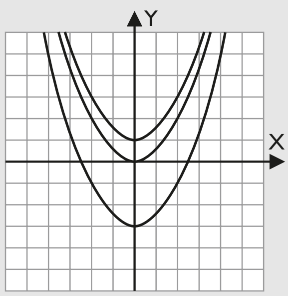
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

Solución:

$$y = \frac{x^2}{2}$$

$$y = \frac{x^2}{2} + 1$$

$$y = \frac{x^2}{2} - 3$$



Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

200. Dada la función:

$$y = -x + 1$$

a) calcula su integral indefinida:

b) halla la primitiva que pasa por el punto P(4, – 1)

c) dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

Solución:

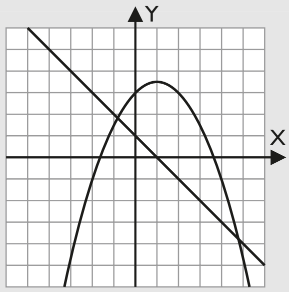
a) $\int (-x + 1)\, dx = -\frac{x^2}{2} + x + k$

b) $-\frac{4^2}{2} + 4 + k = -1$

$k = 3$

$y = -\frac{x^2}{2} + x + 3$

c)



201. Halla la integral de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\int f(x)\, dx = \begin{cases} x + k & \text{si } x < -2 \\ x^2/2 + k & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

202. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. La descomposición es:

$$x + 3 + \frac{1}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} + 3x + L|x| + k$$

203. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x^3 - 4x$$

Solución:

Es la integral de un polinomio.

$$\frac{x^4}{4} - 2x^2 + k$$

204. Calcula la integral indefinida:

$$\int \frac{1}{1 + e^x}\, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = L\, t$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

La integral es:

$$x - L|e^x + 1| + k$$

205. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x\, L\, x$$

Solución:

Se calcula por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = L\, x$$

$$dv = x\, dx$$

El resultado es:

$$\frac{x^2}{2}\left(L|x| - \frac{1}{2}\right) + k$$

206. Calcula la integral de la función:

$$y = e^{x + 2}$$

Solución:

Es la integral de una función exponencial.

$$e^{x + 2} + k$$

207. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = (1 + x)\, e^x$$

Solución:

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = 1 + x$$

$$dv = e^x\, dx$$

El resultado es:

$$xe^x + k$$

208. Calcula:

$$\int \frac{2x^3 - x^2 - 12x - 3}{x^2 - x - 6}\, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$2x + 1 + \frac{1}{5}\left(\frac{6}{x - 3} - \frac{1}{x + 2}\right)$$

La integral es:

$$x^2 + x + \frac{6}{5} L|x - 3| - \frac{1}{5} L|x + 2| + k$$

209. Halla una función f(x) sabiendo que:

$$f'(x) = x^2 e^x$$

Solución:

Se calcula por partes; hay que aplicar dos veces el método. La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2$$

$$dv = e^x\, dx$$

El resultado es:

$$e^x(x^2 - 2x + 2) + k$$

210. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} + k$$

211. Calcula:

$$\int x^3 e^{x^2}\, dx$$

Solución:

Se calcula por partes; tiene que aplicarse dos veces el método:

La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2$$
$$dv = x\, e^{x^2}$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2} e^{x^2}(x^2 - 1) + k$$

212. Calcula:

$$\int \frac{x\, dx}{e^{x^2}}\, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^{x^2} = t \Rightarrow 2x\, e^{x^2}\, dx = dt$$

$$x\, dx = \frac{dt}{2t}$$

La integral es:

$$-\frac{1}{2} e^{-x^2} + k$$

213. Calcula una primitiva de la función:

$$y = \frac{1}{1-x^2}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(L\,|x+1| - L\,|x-1|\right) + k$$

214. Calcula una primitiva de la función:

$$y = \sqrt{x}$$

Solución:

Es la integral de una función irracional.

$$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$$

Problemas

215. Calcula tres primitivas de la función:

$$y = -x$$

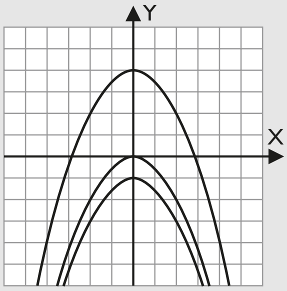
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

Solución:

$$y = -\frac{x^2}{2}$$

$$y = -\frac{x^2}{2} + 3$$

$$y = -\frac{x^2}{2} - 1$$



Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

216. Dada la función: $y = e^x$

a) calcula su integral indefinida.

b) halla la primitiva que pasa por el punto P(1, 1)

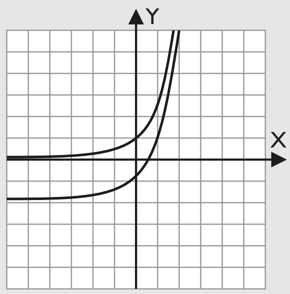
c) dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

Solución:

a) $\int e^x\, dx = e^x + k$

b) $e^1 + k = 1 \Rightarrow k = 1 - e \Rightarrow y = e^x + 1 - e$

c)



217. Halla la integral de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 1 \\ e^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} -x^2/2 + k & \text{si } x \le 1 \\ e^x + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

218. Calcula:

$$\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1 - e^x}}$$

Solución:

Es la integral de una función irracional.

$$-2\sqrt{1 - e^x} + k$$

219. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^x}$$

mediante un cambio de variable.

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = L\,t$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

La integral es:

$$x - L\,|e^x - 1| + k$$

220. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{2x}{x - 1}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$2 + \frac{2}{x - 1}$$

La integral es:

$$2x + 2\,L\,|x - 1| + k$$

221. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Solución:

Es la integral de una función logarítmica.

$$\frac{1}{2}\,L\,|x^2 + 1| + k$$

222. Calcula $\int \frac{1}{x + 1}\,dx$

Solución:

Es la integral de una función logarítmica.

$$L\,|x + 1| + k$$

223. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$$

Solución:

Es la integral de un polinomio.

$$\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} + 3x^2 + k$$

224. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$x - 3 + \frac{2}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} - 3x + 2\,L\,|x| + k$$

225. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3x - 9}{x + 2}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$4x - 5 + \frac{1}{x + 2}$$

La integral es:

$$2x^2 - 5x + L\,|x + 2| + k$$

226. Calcula:

$$\int \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 1}\,dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$1 + \frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$$

La integral es:

$$x + 2\,L\,|x - 1| - L\,|x + 1| + k$$

227. Calcula:

$$\int (x^2 + 5)\, e^{-x}\, dx$$

Solución:

Se calcula por partes, hay que aplicar dos veces el método.

La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2 + 5$$

$$dv = e^{-x}\, dx$$

El resultado es:

$$-e^{-x}(x^2 + 2x + 7) + k$$

228. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{16}{(x+1)^2}$$

Solución:

Es la integral de una función racional.

$$-\frac{16}{x+1} + k$$

229. Calcula la integral de la función:

$$y = e^{-x}$$

Solución:

Es la integral de una función exponencial.

$$-e^{-x} + k$$

230. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = xe^{2x}$$

Solución:

Se calcula por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x$$

$$dv = 2e^{2x}\, dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2} e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + k$$

231. Calcula:

$$\int x \cos x^2\, dx$$

Solución:

Es la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + k$$

232. Sea la integral:

$$\int e^{2x} \operatorname{sen} e^x\, dx$$

a) Intégrala mediante el cambio $t = e^x$

b) Calcula la constante de integración para que la función integral pase por el origen de coordenadas.

Solución:

a) Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = L\, t$$

$$e^{2x} = t^2$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

Luego hay que hacerla por partes.

La integral es:

$$-e^x \cos e^x + \operatorname{sen} e^x + k$$

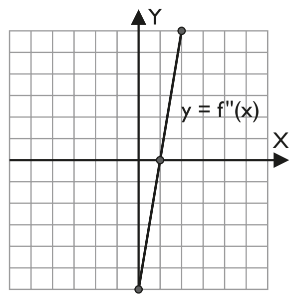
b) Para $x = 0,\ y = 0$

$$-e^0 \cos e^0 + \operatorname{sen} e^0 + k = 0$$

$$-\cos 1 + \operatorname{sen} 1 + k = 0$$

$$k = \cos 1 - \operatorname{sen} 1$$

233. La recta que pasa por los puntos (0, –6) y (1, 0) (observa el dibujo) es la gráfica de la función derivada segunda f'' de una cierta función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se sabe que el origen pertenece a la curva y = f(x) y que en ese punto la recta tangente tienen pendiente igual a 3. Determina una expresión de la función f



Solución:

$f''(x) = 6x - 6$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + k_1$

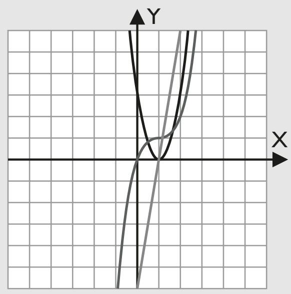
$f'(0) = 3 \Rightarrow k_1 = 3$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + k_2$

$f(0) = 0 \Rightarrow k_2 = 0$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$



234. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$x^2 - x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1}$$

La integral es:

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + L\,|x| - L\,|x + 1| + k$$

235. Calcula:

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2}\,dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$1 + \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 1}$$

La integral es:

$$x + L\,|x - 2| - L\,|x + 1| + k$$

236. Calcula la integral de la función:

$$y = \frac{x^2}{x^3 - 2}$$

Solución:

Es la integral de una función logarítmica.

$$\frac{1}{3}\,L\,|x^3 - 2| + k$$

237. Calcula la integral de la función:

$$y = \frac{1}{x^2 + 2}$$

Solución:

Es la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{2}}{2}x + k$$

238. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = (x + 1)e^{2x}$$

Solución:

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = x + 1$$

$$dv = e^{2x}\,dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}e^{2x}\left(x + \frac{1}{2}\right) + k$$

239. Calcula:

$$\int x\,\text{sen}\,x\,\cos x\,dx$$

Solución:

Se llama I a la integral buscada.

Se aplica la integración por partes.

$$u = x\,\text{sen}\,x$$

$$dv = \cos x\,dx$$

Se obtiene la siguiente ecuación:

$$I = x\,\text{sen}^2\,x - \int \text{sen}^2\,x - I$$

Se resuelve la integral trigonométrica que es par en el seno.

$$\int \text{sen}^2\,x = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2x$$

Queda:

$$2I = x\,\text{sen}^2\,x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2x + k$$

$$I = \frac{x\,\text{sen}^2\,x}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\,\text{sen}\,2x + k$$

240. Calcula:

$$\int \frac{e^{3x}}{2 + e^x}\,dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = L\,t$$

$$e^{3x} = t^3$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + 4\,L\,|e^x + 2| + k$$

241. Calcula una primitiva de la función:

$$f(x) = x \, L\,(1 + x^2)$$

Solución:

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = L\,(1 + x^2)$$
$$dv = x\,dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}\left[(x^2 + 1)\,L\,|x^2 + 1| - x^2\right] + k$$

242. Calcula:

$$\int x\sqrt{1 + x^2}\,dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{1}{3}(x^2 + 1)\sqrt{1 + x^2} + k$$

Para profundizar

243. Calcula tres primitivas de la función:

$$y = e^x$$

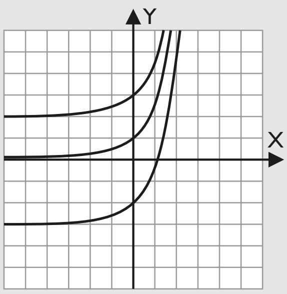
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

Solución:

$y = e^x$

$y = e^x + 2$

$y = e^x - 3$



Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

244. Dada la función:

$$y = \text{sen } x$$

a) calcula su integral indefinida.

b) halla la primitiva que pasa por el punto $P(\pi, 3)$

c) dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

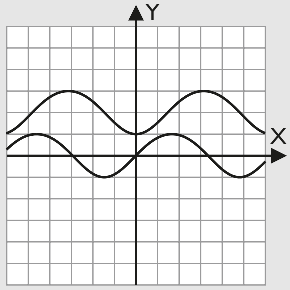
Solución:

a) $\int \text{sen } x\,dx = -\cos x + k$

b) $-\cos \pi + k = 3 \Rightarrow k = 2$

$y = -\cos x + 2$

c)



245. Halla la integral de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x \le -1 \\ e^x & \text{si } -1 < x < 2 \\ \cos x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} -\cos x & \text{si } x \le -1 \\ e^x & \text{si } -1 < x < 2 \\ \text{sen } x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

246. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

Solución:

Es la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{3}}{3}x + k$$

247. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = xe^{-x}$$

Solución:

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = x$$
$$dv = e^{-x}\,dx$$

El resultado es: $-e^{-x}(x + 1) + k$

248. Calcula la integral de la función:

$$y = \frac{2x + 2}{1 - x}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$-2 - \frac{4}{x - 1}$$

La integral es:

$$-2x - 4\,L\,|x - 1| + k$$

249. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x - 1}$$

Solución:

Es la integral de una función logarítmica.

$$L\,|x - 1| + k$$

250. Calcula:

$$\int x^2\, L\, x\, dx$$

donde L x denota el logaritmo neperiano de un número positivo **x**

Solución:

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = L\, x$$
$$dv = x^2\, dx$$

El resultado es:

$$\frac{x^3}{3}\left(L\,|x| - \frac{1}{3}\right) + k$$

251. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = 2 + x - x^2$$

Solución:

Es la integral de un polinomio.

$$-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + k$$

252. Halla una función f(x) sabiendo que:

$$f'(x) = x^2\, e^x$$

Solución:

Se calcula por partes; hay que aplicar dos veces el método. La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2$$
$$dv = e^x\, dx$$

El resultado es:

$$e^x(x^2 - 2x + 2) + k$$

253. Calcula:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 3}\right)$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}(L\,|x + 1| - L\,|x + 3|) + k$$

254. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{x}$$

Usa el cambio de variable $\sqrt{x} = t$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$$

Luego hay que hacerla por partes.

La integral es:

$$2 \operatorname{sen} \sqrt{x} - 2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + k$$

255. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Solución:

Es la integral de una función racional.

$$-\frac{1}{x} + k$$

256. Haciendo el cambio de variable $e^x = t$, calcula:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 1}$$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = L\, t$$
$$e^{2x} = t^2$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}(L\,|e^x - 1| - L\,|e^x + 1| + k$$

257. Calcula:

$$f(x) = \int \frac{x^3 - 2x + 3}{x - x^2}\, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$-x - 1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x-1}$$

La integral es:

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 3\,L\,|x| - 2\,L\,|x-1| + k$$

258. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x\sqrt{5 - x^2}$$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$-\frac{1}{3}(5 - x^2)\sqrt{5 - x^2} + k$$

259. Calcula una primitiva de la función:

$$y = \operatorname{tg} x$$

Solución:

Es la integral de una función trigonométrica.

$$-\,L\,|\cos x| + k$$

260. Calcula:

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx$$

Solución:

Se calcula por partes; hay que aplicar dos veces el método.

La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2$$

$$dv = xe^{x^2}\,dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + k$$

261. Calcula una primitiva de la función:

$$y = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$-1 + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}$$

La integral es:

$$-x + L\,|x+2| - L\,|x-2| + k$$

262. Utiliza el cambio de variable L x = t para calcular la integral:

$$\int \frac{1 + L\,x^2 + (L\,x)^2}{x(1 + L\,x)}\,dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$L\,x = t \Rightarrow x = e^t$$

$$dx = e^t\,dt$$

$$I = \int \frac{1 + 2t + t^2}{e^t(1+t)}\,e^t\,dt = \int \frac{1 + 2t + t^2}{1+t}\,dt =$$

$$= \int \frac{(1+t)^2}{1+t}\,dt = \int (t+1)\,dt = \frac{1}{2}t^2 + t + k =$$

$$= \frac{1}{2}(L\,x)^2 + L\,x + k$$

263. Calcula la integral:

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$$

Solución:

Se aplica la integral de la función racional.

$$I = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + k$$

Paso a paso

264. Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int\left(e^{5x} + \cos\frac{x}{3}\right)dx$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

265. Calcula la integral:

$$F(x) = \int(2x - 5)\,dx$$

Halla la primitiva que pase por el punto P(4, 3).

Representa la primitiva obtenida para comprobar que pasa por dicho punto.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

266. Calcula la integral:

$$\int \cos 2x\,dx$$

Sustituye la constante **k** por los números enteros de –10 a 10. Representa la familia de funciones que obtienes. ¿Qué observas en las gráficas?

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

267. Calcula la integral:

$$\int\frac{3x^2 - 11x + 15}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\,dx$$

y haz la descomposición en fracciones simples del integrando.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

268. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

269. $\int x \cos x\,dx$

Solución:

Ejercicio 269

$$\int x\cdot\cos(x)\,dx \Rightarrow \cos(x) + x\cdot\operatorname{sen}(x)$$

270. $\int L\,x\,dx$

Solución:

Ejercicio 270

$$\int \ln x\,dx \Rightarrow x\cdot\ln(x) - x$$

271. $\int x^2 e^x\,dx$

Solución:

Ejercicio 271

$$\int x^2\cdot e^x\,dx \Rightarrow (x^2 - 2\cdot x + 2)\cdot e^x$$

272. $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$

Solución:

Ejercicio 272

$$\int e^x\cdot\operatorname{sen}(x)\,dx \Rightarrow \frac{e^x\cdot\operatorname{sen}(x)}{2} - \frac{e^x\cdot\cos(x)}{2}$$

En los siguientes ejercicios haz la descomposición en fracciones simples del integrando y calcula la integral.

273. $\int \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} dx$

Solución:

Ejercicio 273

$\int \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} dx \rightarrow \ln(|x^2+1|)+3\cdot x$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}\right) \rightarrow \{\{3,1\},\{2\cdot x, x^2+1\}\}$

274. $\int \frac{12x + 1}{x^2 + x - 6} dx$

Solución:

Ejercicio 274

$\int \frac{12x + 1}{x^2 + x - 6} dx \rightarrow 7\cdot\ln(|-x-3|)+5\cdot\ln(|x-2|)$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{12x + 1}{x^2 + x - 6}\right) \rightarrow \{\{5,x-2\},\{7,x+3\}\}$

275. $\int \frac{3x + 5}{x^2 - 4x + 13} dx$

Solución:

Ejercicio 275

$\int \frac{3x + 5}{x^2 - 4x + 13} dx \rightarrow \frac{3\cdot\ln(|x^2-4\cdot x+13|)}{2} + \frac{11\cdot\text{atan}\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\right)}{3}$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{3x + 5}{x^2 - 4x + 13}\right) \rightarrow \{\{3\cdot x+5, x^2-4\cdot x+13\}\}$

276. $\int \frac{5x^2 - 21x + 12}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5} dx$

Solución:

Ejercicio 276

$\int \frac{5x^2 - 21x + 12}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5} dx \rightarrow 3\cdot\ln(|-x+1|)+2\cdot\ln(|x-5|)+\frac{-1}{x-1}$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{5x^2 - 21x + 12}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5}\right) \rightarrow \{\{2,x-5\},\{1,x^2-2\cdot x+1\},\{3,x-1\}\}$

277. $\int \frac{5x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 + x - 2} dx$

Solución:

Ejercicio 277

$\int \frac{5x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 + x - 2} dx \rightarrow 3\cdot\ln(|x-2|)+\ln(|x^2+1|)$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{5x^2 - 21x + 12}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5}\right) \rightarrow \{\{2,x-5\},\{1,x^2-2\cdot x+1\},\{3,x-1\}\}$

278. $\int \frac{1}{(x^2 - x)(x - 1)} dx$

Solución:

Ejercicio 278

$\int \frac{1}{(x^2 - x)\cdot(x - 1)} dx \rightarrow \ln(|x|)-\ln(|-x+1|)-\frac{1}{x-1}$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{1}{(x^2 - x)\cdot(x - 1)}\right) \rightarrow \{\{1,x\},\{1,x^2-2\cdot x+1\},\{-1,x-1\}\}$

279. $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} dx$

Solución:

Ejercicio 279

$\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} dx \rightarrow -\frac{\ln(|x^2+1|)}{2}+\text{atan}(x)+\frac{x^2}{2}$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}\right) \rightarrow \{\{x,1\},\{-x+1,x^2+1\}\}$

Calcula las siguientes integrales:

280. $\int \frac{L\,x}{x} dx$

Solución:

Ejercicio 280

$\int \frac{\ln x}{x} dx \rightarrow \frac{\ln(x)^2}{2}$

281. $\int \frac{6}{e^x + 3} dx$

Solución:

Ejercicio 281

$\int \frac{6}{e^x + 3} dx \rightarrow 2\cdot\ln(|e^x|)-2\cdot\ln(|e^x+3|)$

282. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

Solución:

Ejercicio 282

$$\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x+1}}\, dx \rightarrow \ln(|-\sqrt{x+1}+1|) - \ln(|\sqrt{x+1}+1|)$$

283. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$

Solución:

Ejercicio 283

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}\, dx \rightarrow 6 \cdot \ln(|\sqrt[6]{x} - 1|) + (2 \cdot \sqrt[6]{x^3} + 3 \cdot \sqrt[6]{x^2}) + 6 \cdot \sqrt[6]{x}$$

284. $\int |x|\, dx$

Solución:

Ejercicio 284

$$\int |x|\, dx \rightarrow \frac{x \cdot |x|}{2}$$

285. $\int sen^2\, x \cos x\, dx$

Solución:

Ejercicio 285

$$\int (sen\, x)^2 \cdot \cos(x)\, dx \rightarrow \frac{sen(x)^3}{3}$$

286. $\int \cos^3 x\, dx$

Solución:

Ejercicio 286

$$\int (\cos x)^3\, dx \rightarrow -\frac{sen(x)^3}{3} + sen(x)$$

287. $\int \cos^2 x\, dx$

Solución:

Ejercicio 287

$$\int (\cos(x))^2\, dx \rightarrow \frac{sen(2 \cdot x)}{4} + \frac{x}{2}$$

288. $\int \cos 4x \cos 3x\, dx$

Solución:

Ejercicio 288

$$\int \cos(4x) \cdot \cos(3x)\, dx \rightarrow \frac{sen(x)}{2} + \frac{sen(7 \cdot x)}{14}$$

289. $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$

Solución:

Ejercicio 289

$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx \rightarrow \frac{x \cdot \sqrt{-x^2+4}}{2} + 2 \cdot asen\left(\frac{x}{2}\right)$$

290. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9 + x^2}}$

Solución:

Ejercicio 290

$$\int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{9 + x^2}}\, dx \rightarrow \frac{-1 \cdot \sqrt{x^2+9}}{9 \cdot x}$$

291. $\int x^3\, L\, x\, dx$

Solución:

Ejercicio 291

$$\int x^3 \cdot \ln(x)\, dx \rightarrow \frac{x^4 \cdot \ln(x)}{4} - \frac{x^4}{16}$$

292. $\int \frac{\text{L } x}{x^2} \, dx$

Solución:

Ejercicio 292

$\int \frac{\ln(x)}{x^2} \, dx \rightarrow -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$

293. $\int e^{-x}(x^2 + 1) \, dx$

Solución:

Ejercicio 293

$\int e^{-x} \cdot (x^2 + 1) \, dx \rightarrow (-x^2 - 2 \cdot x - 3) \cdot e^{-x}$

294. $\int \frac{2}{1 + \sqrt{x}} \, dx$

Solución:

Ejercicio 294

$\int \frac{2}{1 + \sqrt{x}} \, dx \rightarrow -4 \cdot \ln(|-\sqrt{x} - 1|) + 4 \cdot \sqrt{x}$

295. $\int \frac{\text{L}(\text{L } x)}{x \text{ L } x} \, dx$

Solución:

Ejercicio 295

$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x \cdot \ln(x)} \, dx \rightarrow \frac{\ln(\ln(x))^2}{2}$

296. Calcula la integral:

$$F(x) = \int (3x^2 - 4x - 1) \, dx$$

Halla la primitiva que pase por el punto P(2, 1). Representa la primitiva obtenida para comprobar que pasa por dicho punto.

Solución:

Ejercicio 296

$f(x) = 3x^2 - 4x - 1 \Rightarrow x \mapsto 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 1$

$F(x) = \int f(x) \, dx \Rightarrow x \mapsto x^3 - 2 \cdot x^2 - x$

P = punto(2, 1) ⇒ (2,1)

Sustituimos el punto P(2, 1)

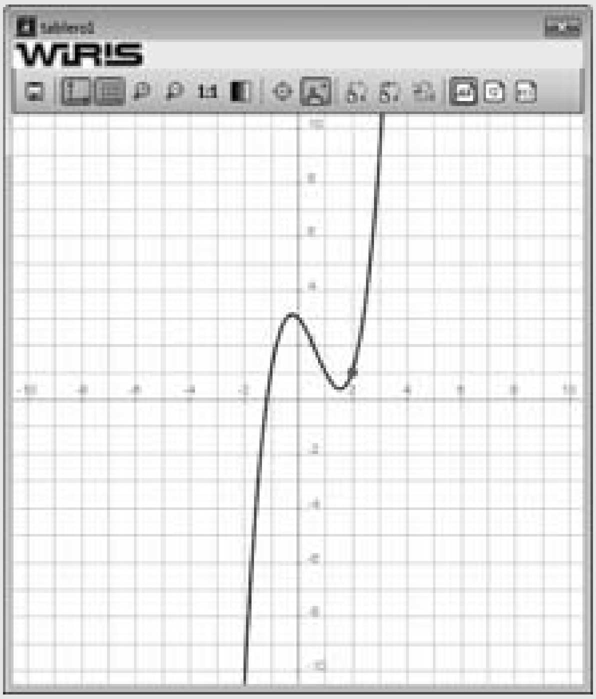
resolver(F(2) + k = 1) ⇒ {{k=3}}

La función es :

$F(x) = F(x) + 3 \Rightarrow x \mapsto x^3 - 2 \cdot x^2 - x + 3$

dibujar(F(x), {color=azul, anchura_linea=2})

dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})



297. Calcula la integral:

$$\int x \text{ sen } 2x \, dx$$

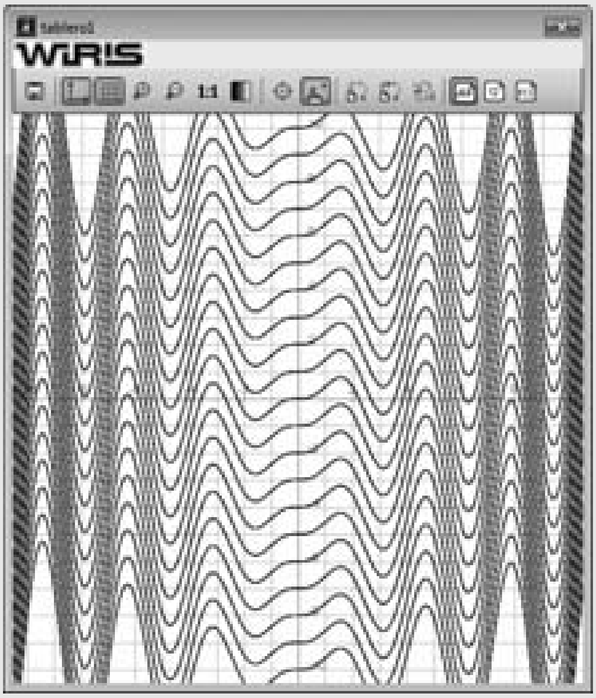
Sustituye la constante **k** por los números: –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 y 5. Representa la familia de funciones que obtienes. ¿Qué observas en las gráficas?

Solución:

Ejercicio 297

$$\int x \cdot \text{sen}(2x)\,dx \rightarrow \frac{\text{sen}(2 \cdot x)}{4} - \frac{x \cdot \cos(2 \cdot x)}{2}$$

$$\text{aplicar\_función}\left(k \mapsto \text{dibujar}\left(\frac{\text{sen}(2 \cdot x)}{4} - \frac{x \cdot \cos(2 \cdot x)}{2} + k\right), -10..10\right)$$



298. Calcula la integral:

$$\int \text{sen } 3x \cos 2x \, dx$$

Sustituye la constante **k** por los números: –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 y 5. Representa la familia de funciones que obtienes. ¿Qué observas en las gráficas?

Solución:

Ejercicio 298

$$\int \text{sen}(3x) \cdot \cos(2x)\,dx \rightarrow -\frac{8 \cdot \cos(x)^5}{5} + 2 \cdot \cos(x)^3 - \cos(x)$$

$$\text{aplicar\_función}\left(k \mapsto \text{dibujar}\left(-\frac{8 \cdot \cos(x)^5}{5} + 2 \cdot \cos(x)^3 - \cos(x) + k\right), -10..10\right)$$