Nombre:			Nota
Curso:	2º Bachillerato	Examen IX – Final 2ª ev	
Fecha:	*10 de Marzo de 2016*	La mala o nula explicación de cada ejercicio implica una penalización de hasta el 25% de la nota.	

1.- a) **(1 punto)** Para cada número real a, la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene determinante $|A|=(a-1)^3$. A partir de este hecho, halla el determinante de las siguientes matrices, e indica las propiedades que utilices en cada caso:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 2a & 2 & 2 & 2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) **(1,5 puntos)** Estudia el rango de la matriz A según los valores de t: $A=\begin{pmatrix} t & t & 0 \\ t & 1 & t \\ t & 1 & 3-t \end{pmatrix}$

2.- **(2,5 puntos)** Sea g la función tal que $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ y su derivada es igual a

$$g'(x)=\frac{senx}{x} \qquad con \;\; x>0 .$$

a) Halla la recta tangente a la gráfica de g en el punto $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.

b) Sea $h(x)=\dfrac{g(x)}{x}$, calcula $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

c) Determina $\int x^2 g'(x)dx$.

3.- **(2,5 puntos)** Sea $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$

a) Determina el dominio de f.
b) Halla sus asíntotas.
c) Determina los extremos relativos y estudia su monotonía.
d) Dibuja la gráfica de f destacando los elementos hallados anteriormente.

4.- **(2,5 puntos)** Hallar una matriz X que cumpla la condición $X \cdot B+B=B^{-1}$, siendo B:

$$B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.- a) (1 punto) Para cada número real a, la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **tiene determinante** $|A|=(a-1)^3$ **. A partir de este hecho, halla el determinante de las siguientes matrices, e indica las propiedades que utilices en cada caso:**

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 2a & 2 & 2 & 2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) (1,5 puntos) Estudia el rango de la matriz A según los valores de t:

$$A=\begin{pmatrix} t & t & 0 \\ t & 1 & t \\ t & 1 & 3-t \end{pmatrix}$$

a) El determinante de la matriz B es igual a $|A|=(a-1)^3=(-1)^3=-1$, simplemente cambiando *a* por *0*.

b) El determínate de la matriz B es igual a $|B|=|A|=(a-1)^3$ porque hay una propiedad que dice que si a una fila (fila 1) le sumamos otra (fila 2) el determinante no cambia.

c) El determinante de la matriz C es igual a $|B|=2\cdot(a-1)^3=2\cdot|A|$ porque hay una propiedad que dice que si multiplicamos una fila (fila 1) por un número (el 2 en este caso) el determinante aparece multiplicado por dicho número.

b) Primero vamos a calcular el determinante de A:

$$|A|=\begin{vmatrix} t & t & 0 \\ t & 1 & t \\ t & 1 & 3-t \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} t & 0 & 0 \\ t & 1-t & t \\ t & 1-t & 3-t \end{vmatrix}=t\begin{vmatrix} 1-t & t \\ 1-t & 3-t \end{vmatrix}=t(1-t)(3-2t)$$

Lo igualamos a cero, para ver que valores lo anulan: obtenemos que t=1, que t=0 y que t=3/2 lo hacen.

Por tanto si t≠1, t≠0 y t≠3/2 el rango de A es 3.

Si t=1 ➔ $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ➔ $|A|=0$ ➔ Rang(A)≤3, y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$ ➔ Rang(A)=2

Si t=3/2 ➔ $A=\begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$ ➔ $|A|=0$ ➔ Rang(A)≤3, y como $\begin{vmatrix} 3/2 & 0 \\ 1 & 3/2 \end{vmatrix}=7/2$ ➔ Rang(A)=2

Si t=0 ➔ $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ➔ $|A|=0$ ➔ Rang(A)≤3, y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3\neq 0$ ➔ Rang (A) = 2

$$\text{Por tanto}\begin{cases} Rang(A)=3 \text{ si } t\neq 0, t\neq 1 \text{ y } t\neq \dfrac{3}{2} \\ Rang(A)=2 \text{ si } t=0,\ t=1 \text{ y } t=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

2.- (2,5 puntos) Sea *g* la función tal que $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ y su derivada es igual a

$$g'(x)=\frac{senx}{x} \qquad con \ \ x>0\,.$$

- **a) (0,5p) Halla la recta tangente a la gráfica de *g* en el punto $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.**
- **b) (1 p) Sea $h(x)=\dfrac{g(x)}{x}$, calcula $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.**
- **c) (1 p) Determina $\int x^2 g'(x)dx$.**

a) La recta tangente a una curva en un punto $x=x_o$ viene dada por: $y-g(x_0)=g'(x_0)\cdot(x-x_0)$, por tanto necesitamos $g(x_o)$ y $g'(x_o)$.

$$g(x_o)=g\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=0 \qquad\qquad g'(x_o)=g'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

Con esto la recta tangente es:

$$y-0=\frac{2}{\pi}\cdot\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right) \qquad\qquad y=\frac{2}{\pi}x-1 \quad \rightarrow \quad r_{tg}: 2x-\pi y-\pi=0$$

b) Lo primero será calcular h'(x); $h'(x)=\dfrac{\frac{senx}{x}\cdot x-g(x)}{x^2}=\dfrac{senx-g(x)}{x^2}$ y luego sustituir $\dfrac{\pi}{2}$:

$$h'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\frac{sen\frac{\pi}{2}-g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}^2}=\frac{1-0}{\frac{\pi^2}{4}}=\frac{4}{\pi^2}$$

c) $\displaystyle\int x^2 g'(x)dx=\int x^2\frac{senx}{x}dx=\int xsenxdx$

Que calcularemos por Partes $\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$, haciendo: $\begin{bmatrix} u=x & du=dx \\ dv=senxdx & v=-\cos x\end{bmatrix}$

$$\int x^2 g'(x)dx=\int xsenxdx-x\cdot\cos x+\int \cos xdx=-x\cdot\cos x+senx+K$$

3.- (2,5 puntos) Sea $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$

- **a) (0,5p) Determina el dominio de f.**
- **b) (0,75p) Halla sus asíntotas.**
- **c) (0,75 p) Determina los extremos relativos y estudia su monotonía.**
- **d) (0,5p) Dibuja la gráfica de f destacando los elementos hallados anteriormente.**

a) Se intentamos resolver la ecuación $x^2-x+1=0$, nos encontramos con que sus soluciones son complejas. Por tanto si sustituimos x por 1, tenemos: $1^2-1+1=1>0$, por tanto el dominio de la función f, es el conjunto de los números reales.

$$Dom(f)=\mathbb{R}$$

b) *f* presenta una ***asíntota vertical*** en un punto de abscisa $x=a$ si ocurre que $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, por tanto como el dominio son todos los números reales, no tiene asíntotas verticales.

f presenta una ***asíntota horizontal*** en y=k, si ocurre que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=K$, por tanto:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2-x+1} = +\infty$$

Por tanto, la función *f* no tiene asíntota horizontal.

Como no tiene asíntota horizontal, Veamos si presenta asíntotas oblicuas. Para ello estudiamos $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1 = m$$

y vemos que es finito y distinto de cero, así que estudiamos otro límite, el límite: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1}-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = -\frac{1}{2} = n$$

Por tanto, la recta $y=mx+n$ es una ***asíntota oblicua*** de la función f(x). Asíntota oblicua en $y=x-\frac{1}{2}$

Veamos que ocurre en -∞.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{(-x)^2-(-x)+1}}{-x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = -\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = -1 = m$$

Y

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-x+1}-(-x)\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-x+1}+x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{(-x)^2-(-x)+1}+(-x)\right] =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}-x\right] = \infty-\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{1}{2} = n$$

Por tanto tiene otra asíntota oblicua en la dirección $y=-x+\frac{1}{2}$

Así que la función f(x) presenta: $\begin{cases} \text{Asíntota Oblícua en la dirección } y = x-\frac{1}{2} \\ \text{Asíntota Oblícua en la dirección } y = -x+\frac{1}{2} \end{cases}$

Para calcular los límites en -∞, cambiamos las x por (-x) y calculamos el límite en +∞

c) Para estudiar sus extremos nos servimos de su derivada, así que lo primero será calcularla:

$$\text{Si } f(x)=\sqrt{x^2-x+1} \quad \rightarrow \quad f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

Igualándola a cero obtenemos los posibles extremos:

$$f'(x)=0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}=0 \quad \leftrightarrow \quad 2x-1=0 \quad \leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$

Calculamos la segunda derivada:

$$\text{Si } f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} \quad \rightarrow \quad f''(x)=\frac{1}{2}\frac{2\sqrt{x^2-x+1}-(2x-1)\cdot\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}}{\left(2\sqrt{x^2-x+1}\right)^2}=\frac{3}{4\cdot\left(x^2-x+1\right)^{3/2}}$$

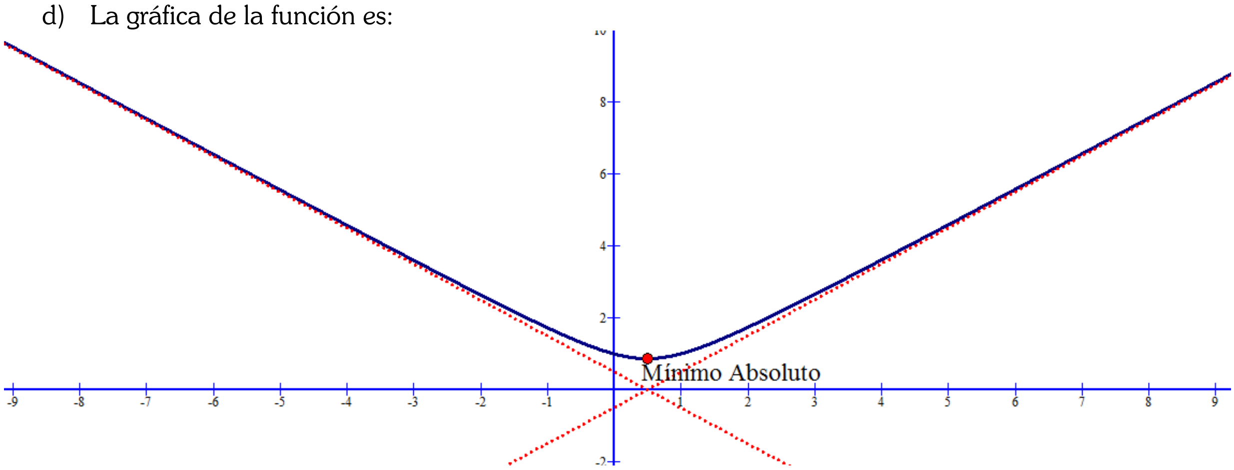
Y si sustituimos x=1/2:

$$f''(\tfrac{1}{2})=\frac{3}{4\cdot(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1)^{3/2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}>0$$

Por tanto, como la segunda derivada es positiva en x=1/2, podemos afirmar que la función posee un mínimo en dicho punto.

Por tanto la función ***f* es decreciente** en el intervalo $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ punto en el que presenta un ***mínimo absoluto*** $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ por ser el punto más bajo de la gráfica y ***f* es creciente** en el intervalo $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

d) La gráfica de la función es:



4.- (2,5 puntos) Hallar una matriz *X* que cumple la condición $X\cdot B+B=B^{-1}$, siendo *B*:

$$B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Tenemos que

$$XB+B=B^{-1}$$

Si sacamos factor común B, por la derecha, tenemos

$$(X+I)B=B^{-1}$$

multiplicando por la derecha en ambas partes de la igualdad por B^{-1} (El producto de matrices no es conmutativo) tenemos:

$$(X+I)B\cdot B^{-1}=B^{-1}\cdot B^{-1} \quad \rightarrow \quad (X+I)I=\left(B^{-1}\right)^2 \quad \rightarrow \quad X+I=\left(B^{-1}\right)^2$$

de donde despejando X:

$$X=\left(B^{-1}\right)^2-I$$

Calculamos la matriz inversa de B mediante: $B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot Adj(B)^t$

Para ello, lo primero es hacer su determinante.

$$|B|=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

Después hacemos su transpuesta, y luego su adjunta,

$$B^t=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad Adj\left(B^t\right)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

y por fin escribimos su inversa:

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot Adj(B)^t=\frac{1}{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si la elevamos al cuadrado, tendremos:

$$\left(B^{-1}\right)^2=B^{-1}\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y finalmente calculamos la matriz X:

$$X=\left(B^{-1}\right)^2-I=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$