Nombre:	Solución		Nota
Curso:	2º Bachillerato	Examen Integración	
Fecha:	4 de Febrero de 2016	La mala o nula explicación de cada ejercicio implica una penalización de hasta el 25% de la nota.	

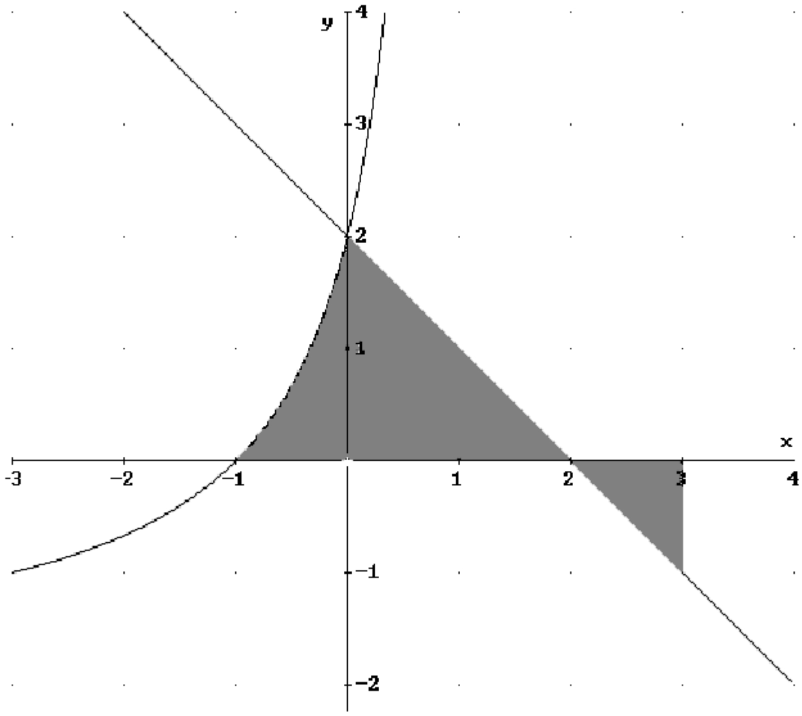
Atención:

- Elija 4 de las 5 cuestiones.
- Responder a las 5 implica una nota máxima de 11 puntos.

1.- Calcula la integral: $\int \frac{x-4}{x^3-x^2-x-2}dx$

2.- Calcula el valor de la integral: $\int_{-1}^{3} \left(x^2+5\right) \cdot e^{-x} dx$

3.- Halla el área del recinto rayado que aparece en la figura adjunta sabiendo que la parte curva tiene como ecuación $y = \frac{2x+2}{1-x}$



4.- Calcula las siguientes integrales:

$a) \int \cos(5x+1)dx \qquad b) \int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}dx \qquad c) \int_0^1 x \cdot e^{-3x}dx$

5.- Calcula la siguiente integral: $\int \frac{dx}{2x\left(x+\sqrt{x}\right)}$ con la ayuda del cambio de variable $t=\sqrt{x}$

1.- Calcula la integral: $\int \frac{x-4}{x^3-x^2-x-2}dx$

Hacemos Ruffini en el denominador: $x^3-x^2-x-2=(x-2)\cdot(x^2+x+1)$

Hecho esto, utilizamos el método de Hermite:

$$\frac{x-4}{x^3-x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Operando:

$$x-4=A\left(x^2+x+1\right)+\left(Bx+C\right)\left(x-2\right)$$

Y rompiendo paréntesis:

$$x-4=Ax^2+Ax+A+Bx^2-2Bx+cx-2c$$

Si agrupamos y comparamos los grados:

$$x-4=\left(A+B\right)x^2+\left(A-2B+C\right)x+\left(A-2C\right)$$

Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-2B+C=1 \\ A-2C=-4 \end{cases} \quad \text{cuyas soluciones son:} \begin{cases} A=-\frac{2}{7} \\ B=\frac{2}{7} \\ C=\frac{13}{7} \end{cases}$$

Con esto, llegamos a:

$$\int \frac{x-4}{x^3-x^2-x-2}dx=\int \frac{-2/7}{x-2}dx+\int \frac{2/7x+13/7}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{7}\left[\int \frac{-2}{x-2}dx+\int \frac{2x+13}{x^2+x+1}dx\right]$$

Y Operando un poco:

$$\int \frac{x-4}{x^3-x^2-x-2}dx=\frac{1}{7}\left[\int \frac{-2}{x-2}dx+\int \frac{2x+1+12}{x^2+x+1}dx\right]=\frac{1}{7}\left[\int \frac{-2}{x-2}dx+\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\int \frac{12}{x^2+x+1}dx\right]$$

Integrando obtenemos:

$$\int \frac{x-4}{x^3-x^2-x-2}dx=\frac{1}{7}\left[-2\ln\left|x-2\right|+\ln\left|x^2+x+1\right|+\int \frac{12}{x^2+x+1}dx\right]$$

Integremos la última parte, a parte, valga la redundancia.

$$\int \frac{12}{x^2+x+1}dx=12\int \frac{dx}{x^2+x+1}=12\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=12\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}=12\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)Arctg\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=$$

$$=\frac{24}{\sqrt{3}}Arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)=8\sqrt{3}Arctg\left(\frac{\sqrt{3}\left(2x+1\right)}{3}\right)$$

Por tanto nuestra integral será:

$$\int \frac{x-4}{x^3-x^2-x-2}dx=\frac{1}{7}\left[-2\ln\left|x-2\right|+\ln\left|x^2+x+1\right|+8\sqrt{3}Arctg\left(\frac{\sqrt{3}\left(2x+1\right)}{3}\right)\right]+K$$

2.- Calcula el valor de la integral: $\int_{-1}^{3}\left(x^2+5\right)\cdot e^{-x}dx$

Calculamos Primero la primitiva, por partes:

$$I=\int\left(x^2+5\right)\cdot e^{-x}dx=\begin{bmatrix} u=x^2+5 & du=2x\cdot dx \\ dv=e^{-x} & v=-e^{-x}\end{bmatrix}=-\left(x^2+5\right)\cdot e^{-x}+2\int x\cdot e^{-x}dx$$

Si separamos la segunda integral:

$$I_2=\int x\cdot e^{-x}dx=\begin{bmatrix} u=x & du=dx \\ dv=e^{-x} & v=-e^{-x}\end{bmatrix}=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}=-e^{-x}\left(x+1\right)$$

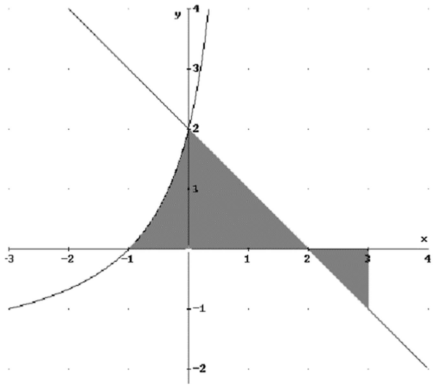
Por tanto:

$$I=\int\left(x^2+5\right)\cdot e^{-x}dx=-\left(x^2+5\right)\cdot e^{-x}-2e^{-x}(x+1)=-e^{-x}\left(x^2+2x+7\right)$$

Y ahora para la integral definida utilizamos la regla de Barrow:

$$\int_{-1}^{3}\left(x^2+5\right)\cdot e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\left(x^2+2x+7\right)\right]_{-1}^{3}=\left(-e^{-3}(22)\right)-\left(-e(6)\right)=\frac{6e^4-22}{e^3}$$

3.- Halla el área del recinto rayado que aparece en la figura adjunta sabiendo que la parte curva tiene como ecuación $y=\dfrac{2x+2}{1-x}$



Como podemos observar en la figura, tenemos tres recintos; llamamos A_1 al área del recinto a la derecha del 0, llamamos A_2 al área del recinto entre 0 y 2, y A_3 al área entre 2 y 3.

En cada uno de los recintos intervienen distintas gráficas:

Así en el recinto 1, el área la calculamos como el área de la parábola entre x=-1 y x=0:

$A_1=\int_{-1}^{0}\frac{2x+2}{1-x}dx$ como el denominador y el numerador tienen el mismo grado realizamos la división euclídea y llegamos a:

$$A_1=\int_{-1}^{0}\frac{2x+2}{1-x}dx=\int_{-1}^{0}\left(-2+\frac{4}{1-x}\right)dx=\left[-2x-4\ln|1-x|\right]_{-1}^{0}=4\ln 2-2$$

En el recinto 2, necesitamos la ecuación de la recta, así que la calculamos: Pasa por (0,2) y (2,0): $y=2-x$, por tanto el área de este recinto será:

$$A_2=\int_{0}^{2}(2-x)dx=\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_0^2=2$$

En el recinto 3 el área también viene dada por la recta $y=2-x$

$$A_3=-\int_{2}^{3}(2-x)dx=-\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_2^3=-\left[\left(6-\frac{9}{2}\right)-(4-2)\right]=\frac{1}{2}$$

Por tanto, el área pedida será: $A=A_1+A_2+A_3=4\cdot\ln 2+\frac{1}{2}$

4.- Calcula las siguientes integrales:

$$a)\int \cos(5x+1)dx \qquad b)\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}dx \qquad c)\int_0^1 x\cdot e^{-3x}dx$$

$$a)\int \cos(5x+1)dx = \frac{1}{5}\int 5\cos(5x+1)dx = \frac{1}{5}sen(5x+1)+K$$

$$b)\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}dx = \int (x+2)^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{(x+2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{x+2}}+K$$

Para el apartado c), primero calculamos la primitiva (por partes) y luego hacemos Barrow.

$$I = \int x\cdot e^{-3x}dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-3x} & v = -\frac{e^{-3x}}{3} \end{bmatrix} = -\frac{x\cdot e^{-3x}}{3}+\frac{1}{3}\int e^{-3x}dx = -\frac{x\cdot e^{-3x}}{3}-\frac{e^{-3x}}{9} = -\frac{e^{-3x}}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right) =$$

$$= -\frac{e^{-3x}(3x+1)}{9}+K$$

Y ahora calculamos la integral definida:

$$\int_0^1 x\cdot e^{-3x}dx = \left[-\frac{e^{-3x}(3x+1)}{9}\right]_0^1 = \left(\frac{e^{-3}(3+1)}{9}\right)-\left(\frac{-1}{9}\right) = \frac{1}{9}\left(1-\frac{4}{e^3}\right)$$

5.- Calcula la siguiente integral: $\int \frac{dx}{2x\left(x+\sqrt{x}\right)}$ **con el cambio de variable** $t=\sqrt{x}$

Hacemos el cambio de variable: $t=\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad x=t^2 \qquad dx = 2tdt$; Con lo que:

$$\int \frac{dx}{2x\left(x+\sqrt{x}\right)} = \int \frac{2t}{2t^2(t^2+t)}dt = \int \frac{dt}{t^2(t+1)}$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t+1} = \frac{A\cdot t\cdot(t+1)+B(t+1)+C\cdot t^2}{t^2(t+1)}$$

Y sustituyendo los valores de las raíces de los denominadores más otro valor que puede ser t=1, llegamos a:

$$\begin{aligned} &Si\ t=0 \quad \rightarrow \quad 1=B \\ &Si\ t=-1 \quad \rightarrow \quad 1=C \\ &Si\ t=1 \quad \rightarrow \quad 2A+2B+C=1 \quad \rightarrow \quad A=-1 \end{aligned}$$

Con lo cual, y usando el método de Hermite:

$$\int \frac{dt}{t^2(t+1)} = \int \frac{-1}{t}dt+\int \frac{1}{t^2}dt+\int \frac{1}{t+1}dt = -\ln|t|-\frac{1}{t}+\ln|t+1|+K$$

Y deshaciendo el cambio de variable:

$$\int \frac{dx}{2x\left(x+\sqrt{x}\right)} = -\ln\left|\sqrt{x}\right|-\frac{1}{\sqrt{x}}+\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+K$$