Alumn@:			Nota
Curso:	**2º Bachillerato**	**Examen Final**	
Fecha:	***10 de Diciembre de 2015***	**1º Evaluación**	

Instrucciones:

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.
b) Tienes que realizar únicamente los cuatro ejercicios.
c) La puntuación de cada pregunta es de 2,5 puntos.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
f) La mala o nula explicación de cada ejercicio implica una penalización de hasta el 25% de la nota.

1.- Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13,5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el mínimo posible.

2.- Sabiendo que $\lim_{x \to 0} \dfrac{ax^2 + bx + 1 - \cos(x)}{sen(x^2)}$ es finito e igual a 1, calcula los valores de a y b.

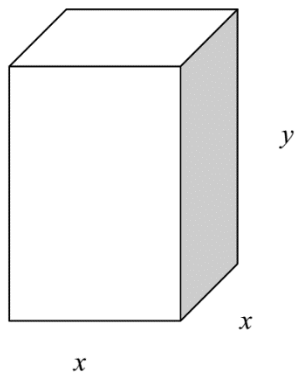
3.- Halla los valores de a, b y c sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{x + c}$ tiene una asíntota vertical en x=1, una asíntota oblicua de pendiente 2, y un extremo local de abscisa $x = 3$.

4.- Calcula las siguientes integrales: **(1 punto + 1,5 puntos)**

a) $\displaystyle\int \frac{7x - 3}{2 + 3x^2}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$

Nota: Para la integral del apartado b) se recomienda el cambio de variable: $t = tg\, x$

1.- Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13,5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el mínimo posible.



Para construir el depósito de la figura, necesitamos una superficie de chapa igual a:

$$S = x^2 + 4xy$$

Tenemos una función que depende de dos variables, x e y.

Según el enunciado el volumen del depósito ha de ser de 13,5 m^3, por tanto:

$$V = x^2 \cdot y = 13{,}5$$

Despejando y de la expresión, tenemos: $y = \dfrac{13{,}5}{x^2}$

Si sustituimos en la expresión de S:

$$S = x^2 + 4 \cdot x . \frac{13{,}5}{x^2} = x^2 + \frac{54}{x}$$

Ya tenemos la expresión que queremos minimizar.

Si derivamos e igualamos a cero:

$$S'(x) = 2x - \frac{54}{x^2} \quad \rightarrow \quad S'(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad 2x - \frac{54}{x^2} = 0$$

Obtenemos una ecuación, cuya solución es:

$$2x - \frac{54}{x^2} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 2x = \frac{54}{x^2} \quad \leftrightarrow \quad 2x^3 = 54 \quad \leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

Por tanto $x = 3m$ $y = 1{,}5m$ y las ***dimensiones del depósito serían 3 x 3 x 1,5 metros***

Y solo faltaría comprobar que es un mínimo, para ello calculamos la segunda derivada:

$$S''(x) = \frac{6x^2 \cdot x^2 - 2x(2x^3 - 54)}{x^4} = \frac{6x^3 - 4x^3 + 108}{x^3} = \frac{2x^3 + 108}{x^3}$$

Y vemos como es su signo:

$$S''(3) = \frac{2 \cdot 27 + 108}{27} = 6 > 0 \quad \rightarrow \quad \textit{Mínimo}$$

Por tanto X=3 es un mínimo.

2.- Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{sen(x^2)}$ es finito e igual a 1, calcula los valores de a y b.

$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{sen(x^2)}=\frac{0}{0}$, Como estamos en condiciones a aplicar la regla de L'Hopital, la aplicamos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{sen(x^2)}=\frac{0}{0}\overset{L'Hopital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2ax+b+sen(x)}{2x\cos(x^2)}=\frac{0+b+0}{0}$$

Como el enunciado dice que es finito, tiene que ocurrir que b sea cero (b=0) para que podamos aplicar de nuevo la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2ax+b+sen(x)}{2x\cos(x^2)}=\frac{0}{0}\overset{L'Hopital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2a+\cos(x)}{2\cos(x^2)-4x^2sen(x^2)}=\frac{2a+1}{2}$$

Como dice que su valor es 1;

$$\frac{2a+1}{2}=1 \quad\rightarrow\quad 2a=1 \quad\rightarrow\quad a=\frac{1}{2}$$

Luego los valores de a y b son:

$$a=\frac{1}{2} \qquad y \qquad b=0$$

3.- Halla los valores de *a*, *b* y *c* sabiendo que la gráfica de la función $f(x)=\frac{ax^2+b}{x+c}$ tiene una asíntota vertical en x=1, una asíntota oblicua de pendiente 2, y un extremo local de abscisa *x* = 3.

Las asíntotas verticales son puntos de no dominio que anulan el denominador, por tanto:

$$x+c=0 \quad\rightarrow\quad 1+c=0 \quad\rightarrow\quad c=-1$$

Además si tiene una asíntota oblícua de pendiente 2, tiene que ocurrir:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2 \quad\rightarrow\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{ax^2+b}{x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2+b}{x(x-1)}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'Hopital}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2ax}{2x+1}\frac{\infty}{\infty}\overset{L'Hopital}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2a}{2}=2$$

Por tanto:

$$a=2$$

Tener un extremo en el punto de abscisa x=3, implica que su derivada es nula.

Derivamos la función: $f(x)=\frac{2x^2+b}{x-1}$

$$f'(x)=\frac{4x(x-1)-2x^2-b}{(x-1)^2}=\frac{4x^2-4x-2x^2-b}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x-b}{(x-1)^2}$$

Sustituimos en 3:

$$f'(3)=\frac{18-12-b}{4}=0 \quad \leftrightarrow \quad 6-b=0 \quad \leftrightarrow \quad b=6$$

Y obtenemos b=6. Por tanto los valores de a, b y c son:

$$a=2 \qquad b=6 \qquad c=-1$$

4.- Calcula las siguientes integrales:

a) $\int\left(x^3-\frac{x^2+1}{x}\right)dx=\int x^3dx-\int\frac{x^2}{x}dx-\int\frac{1}{x}dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-\ln|x|+C$

b)
$$\int\frac{7x-3}{2+3x^2}\,dx=\int\frac{7x}{2+3x^2}dx-\int\frac{3}{2+3x^2}dx=\frac{7}{6}\int\frac{6x}{2+3x^2}dx-\frac{3}{\sqrt{3}}\int\frac{\sqrt{3}dx}{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}x\right)^2}=$$
$$=\frac{7}{6}\ln\left(2+3x^2\right)-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}Arctg\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right)=\frac{7}{6}\ln\left(2+3x^2\right)-\frac{\sqrt{6}}{2}Arctg\left(\frac{\sqrt{6}x}{2}\right)+C$$

c)
$$\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\begin{bmatrix} t=tgx & dt=(1+tg^2x)dx=(1+t^2)dx \quad \rightarrow \quad dx=\frac{dt}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} & \end{bmatrix}=*$$

Veamos el desarrollo del coseno

$$t=\frac{senx}{\cos x}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-1} \quad \leftrightarrow \quad t^2=\frac{1}{\cos^2 x}-1 \quad \leftrightarrow \quad t^2+1=\frac{1}{\cos^2 x} \quad \leftrightarrow \quad \cos^2 x=\frac{1}{t^2+1} \quad \leftrightarrow \quad \cos x=\sqrt{\frac{1}{t^2+1}}$$

Y por tanto:

$$*=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{2+t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{2+t^2}=\int\frac{dt}{\left(\sqrt{2}\right)^2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}Arctg\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

Y deshaciendo el cambio:

$$\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{2}Arctg\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C$$