Nombre:			Nota
Curso:	2º Bachillerato	Examen IV	
Fecha:	*29 de Noviembre de 2015*	La mala o nula explicación de cada ejercicio implica una penalización de hasta el 25% de la nota.	

1.- La línea recta que pasa por los puntos (0,-6) y (1,0) es la gráfica de la función derivada segunda *f''* de una cierta función *f*. Se sabe que el origen pertenece a la curva *y=f(x)* y que en ese punto la recta tangente tiene pendiente igual a 3. Determina la función *f*. **(2,5 puntos)**

2.- ***(1p+1p+0,5p)***

a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función definida para x > 0 por: $f(x)=\dfrac{1+x^2}{x}$

b) Halla las regiones de crecimiento y de decrecimiento de f indicando sus máximos y mínimos locales y globales, si los hay.

c) Esboza la gráfica de f.

3.- Determina a, b y c para que la curva $y=\dfrac{a}{x^2+bx+c}$ verifique las siguientes condiciones: ***(2,5 puntos)***

a) Presenta una asíntota horizontal en y=0.
b) x=-3 y x=1 son asíntotas verticales suyas.
c) Tiene un máximo en el punto (-1,-2)

<u>A elegir uno</u>

4.-

a) Enunciar el teorema de Rolle. ***(0,5 puntos)***

b) Determinar a, b, c para que la función f, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot senx+b\cdot\cos x+c & si \quad x<\dfrac{\pi}{2} \\ sen^2x-a\cos x & si \quad x\geq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Satisfaga la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,\pi]$ ***(2 puntos)***

5.- Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones 80 cm x 50 cm un cuadrado de lado x y doblando convenientemente se construye una caja (abierta). Calcular x para que volumen de dicha caja sea máximo.

Solución Examen IV

1.- La línea recta que pasa por los puntos (0,-6) y (1,0) es la gráfica de la función derivada segunda f'' de una cierta función f. Se sabe que el origen pertenece a la curva y=f(x) y que en ese punto la recta tangente tiene pendiente igual a 3. Determina una expresión de la función f. **(2,5 puntos)**

Sol: $f(x)=x^3-3x^2+3x$

Si la segunda derivada es una línea recta, quiere decir que la función, es una función polinómica de grado 3, luego f será de la forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, además con los datos del problema sabemos que: f''(0)=-6, f''(1)=0 porque la segunda derivada pasa por esos puntos, además si la función pasa por el origen, tenemos que f(0)=0, y si además en ese punto la recta tangente tiene pendiente igual a 3, tenemos que f'(0)=3.

Si calculamos la primera y la segunda derivada, con estos datos podemos escribir un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \\ f'(x)=3ax^2+2bx+c \\ f''(x)=6ax+2b \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \quad \leftrightarrow \quad d=0 \\ f'(0)=3 \quad \leftrightarrow \quad c=3 \\ f''(0)=-6 \quad \leftrightarrow \quad 2b=-6 \quad \leftrightarrow \quad b=-3 \\ f''(1)=0 \quad \leftrightarrow \quad 6a+2b=0 \quad \leftrightarrow \quad 6a=6 \quad \leftrightarrow \quad a=1 \end{cases}$$

Cuya solución es d=0; c=3; b=-3 y a=1,

Y por tanto la función *f* buscada es:

$$f(x)=x^3-3x^2+3x$$

2.- ***(1p+1p+0,5p)***

a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función definida para x > 0 por: $f(x)=\dfrac{1+x^2}{x}$

b) Halla las regiones de crecimiento y de decrecimiento de *f* indicando sus máximos y mínimos locales y globales, si los hay.

c) Esboza la gráfica de *f*.

a) f presenta una asíntota vertical en un punto de abscisa x=a si ocurre que $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, por tanto:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+x^2}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

La función f tiene una asíntota vertical en cero por la derecha.

f presenta una asíntota horizontal en y=k, si ocurre que $\lim_{x\to +\infty} f(x)=K$, por tanto:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{1+x^2}{x}=+\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Como no tiene asíntota horizontal, estudiamos el límite $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1+x^2}{x^2}=1$ y vemos que es finito y distinto de cero, así que estudiamos otro límite, el límite:

$$\lim_{x\to +\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{1+x^2}{x}-1\cdot x=\lim_{x\to +\infty}\frac{1+x^2}{x}-\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0$$

Por tanto, la recta $y=x$ es una asíntota oblicua de la función f(x).

Así que la función f(x) presenta: $\begin{cases} \textit{Asíntota Vertical en } x=0 \\ \textit{Asíntota Oblícua en la dirección } y=x \end{cases}$

b) Para trabajar la monotonía de la función, nos ayudamos de su derivada:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-(1+x^2)\cdot 1}{x^2}=\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

Que igualando a cero nos da dos soluciones:

$$f'(x)=0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{x^2-1}{x^2}=0 \quad \leftrightarrow \quad x^2-1=0 \quad \leftrightarrow \quad x=\pm 1$$

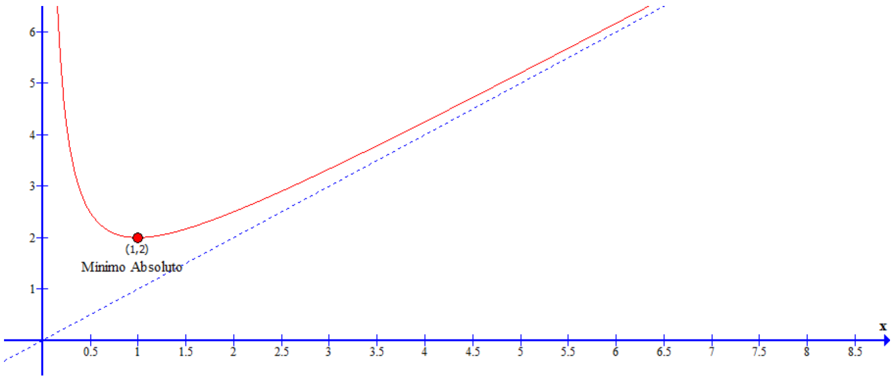
Como la función está definida en $(0,+\infty)$, la solución x=-1 quedaría descartada.

Si nos ayudamos de la tabla:

x	0	+1	+∞
f'(x)	-		+
f(x)	↘	Mín	↗

Vemos que la función es ***decreciente en*** el intervalo ***(0,1)*** y ***creciente en*** el intervalo ***(1,+∞)***, y en el punto ***(1,2)*** la función presenta un ***mínimo absoluto***, puesto que los límites en el 0 y en el $+\infty$ de la función son $+\infty$.

c) Con los datos obtenidos, el boceto de nuestra gráfica sería:



3.- Determina a, b y c para que la curva $y=\dfrac{a}{x^2+bx+c}$ verifique las siguientes condiciones:

(2,5 puntos)

a) Presenta una asíntota horizontal en y=0.
b) x=-3 y x=1 son asíntotas verticales suyas.
c) Tiene un máximo en el punto (-1,-2)

Si x=-3 y x=1 son asíntotas verticales de la función, son puntos que no pertenecen al dominio y puntos que son raíz del polinomio de segundo grado del denominador, por tanto, el denominador sería:

$$(x+3)\cdot(x-1)=x^2+2x-3$$

Por tanto, si lo comparamos con x^2+bx+c, tenemos que b=2 y c=-3

Solo nos faltaría encontrar el valor de a, y para ello utilizamos que la función pasa por el punto (-1,-2):

$$f(-1)=\frac{a}{(-1)^2+2(-1)-3}=\frac{a}{1-2-3}=\frac{a}{-4}=-2$$

Por tanto:

Solución Examen IV

$a=8$

Y la función pedida es:

$$y=\frac{8}{x^2+2x-3}$$

4.-

a) Enunciar el teorema de Rolle. ***(0,5 puntos)***

b) Determinar a, b, c para que la función f, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot senx+b\cdot\cos x+c & si \quad x<\dfrac{\pi}{2} \\ sen^2x-a\cos x & si \quad x\geq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

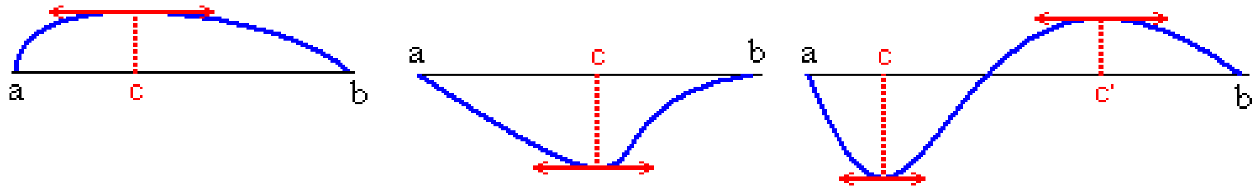
satisfaga la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,\pi]$ ***(2 puntos)***

a) El teorema de Rolle dice que: Sea f una función real de variable real que cumple las condiciones:

- Está definida y es continua en [a,b]
- Es derivable en (a,b)
- f(a) = f(b)

entonces existe al menos un punto $c\in\,]a,b[$ tal que $f'(c)=0$

Geométricamente, quiere decir que si se cumplen todas las condiciones del Teorema, entonces la curva de f tiene en el punto c del intervalo (a,b) una recta tangente que es paralela al eje OX.



b) Para que la función $f(x)=\begin{cases} a\cdot senx+b\cdot\cos x+c & si \quad x<\dfrac{\pi}{2} \\ sen^2x-a\cos x & si \quad x\geq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ satisfaga la hipótesis del dicho teorema, ha de ocurrir:

✓ Que la función sea continua en $[0,\pi]$, por tanto, como es una función definida a trozos compuesta por dos ramas en las que aparecen funciones circulares siempre continuas, ha de ser continua en el punto donde cambia de rama. Estudiamos los límites laterales en $x=\frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(a\cdot senx+b\cdot\cos x+c\right)=a+c \\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(sen^2x-a\cos x\right)=1 \end{array}\right\}$$ Así que f será continua si $a+c=1$

✓ Que la función sea derivable en $(0,\pi)$, por tanto, como es derivable en todo $\mathbb{R}$ también lo será en el punto donde cambia de rama:

$$f'(x)=\begin{cases} a\cdot\cos x-b\cdot senx & si \quad x<\dfrac{\pi}{2} \\ 2\cdot senx\cdot\cos x+asenx & si \quad x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Calculamos las derivadas laterales en $x=\frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} f'\left(\frac{\pi}{2}\right)^- = a\cos\frac{\pi}{2} - b sen\frac{\pi}{2} = -b \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)^+ = 2\cdot sen\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + a sen\frac{\pi}{2} = a \end{array}\right\} \text{Así que f será derivable si } a=-b$$

- ✓ Que $f(0)=f(\pi)$ implica que $b+c=a$

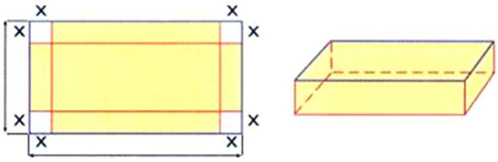
Para que la función verifique el Teorema de Rolle se deben de cumplir las tres condiciones: $\begin{cases} a+c=1 \\ a=-b \\ b+c=a \end{cases}$

Así que resolviendo el sistema obtenemos:

$$a=\frac{1}{3} \qquad b=-\frac{1}{3} \qquad c=\frac{2}{3}$$

Por tanto la función $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}\cdot senx - \frac{1}{3}\cdot\cos x + \frac{2}{3} & si \quad x<\frac{\pi}{2} \\ sen^2 x - \frac{1}{3}\cos x & si \quad x\geq\frac{\pi}{2} \end{cases}$

5.- Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones 80 cm x 50 cm un cuadrado de lado x y doblando convenientemente, se construye una caja (abierta). Calcular x para que el volumen de dicha caja sea máximo. **(2,5 puntos)**



El volumen de la caja viene dado por el producto de la superficie de la base por la altura.

$$V(x)=(80-2x)\cdot(50-2x)\cdot x = 4x^3-260x^2+4000x$$

Si derivamos con respecto a x:

$$V'(x)=12x^2-520x+4000$$

E igualamos a cero, obtenemos:

$$V'(x)=12x^2-520x+4000=0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1=10 \\ x_2=\frac{100}{3} \end{cases}$$

Desechamos la segunda solución porque 50-2x es negativo

Así que x=10 cm.

Si derivamos por segunda vez, obtenemos $V''(x)=24x-520 \quad \leftrightarrow \quad V''(10)=-280<0$

Por tanto x=10 es un máximo

6.- De todas las rectas que pasan por el punto (1,2) calcula aquella que corta con los ejes de coordenadas positivos y que forma un triángulo de área mínima. Calcula también dicha área.