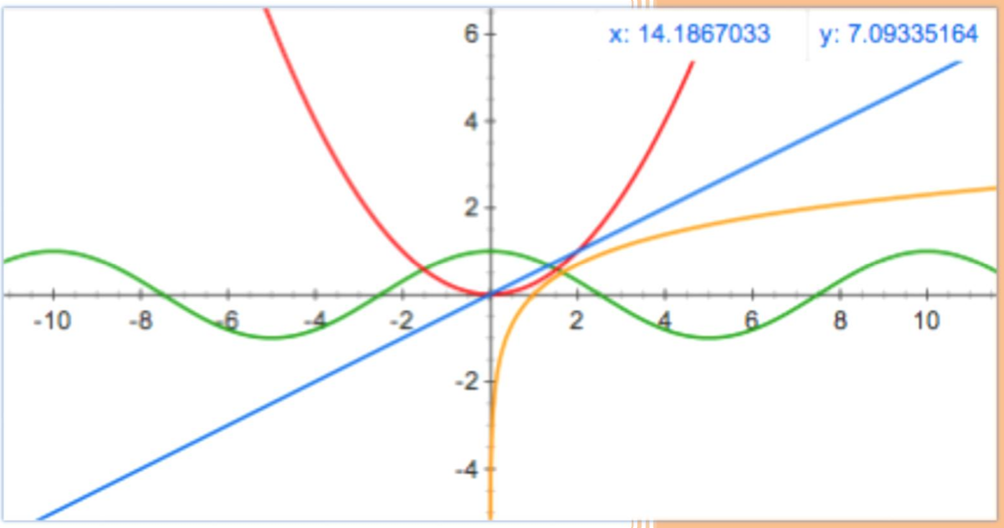
Departamento de Matemáticas
I.E. JUAN RAMÓN JIMÉNEZ
Casablanca (Marruecos)

Tema 1

Funciones: Límites y Continuidad



Raúl González Medina
I.E. Juan Ramón Jiménez
Tema 1

1.0.- Introducción

El concepto de función real de una variable real se remonta a unos 2000 años a.C., evolucionando en el tiempo desde una concepción puramente geométrica, en la que se considera que una función se identifica con una curva, hasta una concepción lógica, en la que se define función como una correspondencia entre conjuntos, pasando por una concepción algebraica, en la que una función se expresa mediante una fórmula, que en un principio (Euler, 1748) fue de tipo finito y más adelante (Fourier, 1822) se admitió que pudiera tener un número infinito de términos (la llamada "expresión analítica").

El concepto de función es uno de los más importantes no solo en matemáticas, sino en ingeniería y ciencias en general. La propiedad esencial que comparten todas las definiciones de función es que se trata de una regla que asigna a cada ente de un conjunto de partida un único ente de otro conjunto de llegada. Cuando no se plantea esta restricción, se dice que dicha regla es una relación o una correspondencia. Por ejemplo, la expresión $f(x) = \pm\sqrt{\xi}$,$\forall\ \xi \in$ R, con $\xi \geq 0$, no define una función real de la variable real no negativa ξ porque asigna a cada número real ξ, no negativo, dos números reales, $\sqrt{\xi}$ y $-\sqrt{\xi}$, mientras que la expresión $f(x) = \sqrt{\xi}$,$\forall\ \xi \in$ R, con $\xi \geq 0$, si define una función real de la variable real no negativa ξ.

En este tema, además de definir los primeros conceptos relativos a las funciones reales de una variable real, repasando brevemente algunas de las funciones elementales con las que trabajaremos en este curso, introduciremos la idea de proximidad, definiendo una topología en la recta real.

1.1.- Definición de Función real de variable Real

Dados dos conjuntos numéricos A y B, una función de A a B es una aplicación (normalmente biyectiva) que asigna a cada número del conjunto A uno y solo un número del conjunto B. La representaremos de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} f: A \to B \\ x \mapsto f(x) \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{l} f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

Ejemplo 1: $\begin{array}{l} f:[1,3] \to \mathbb{R} \\ f(x) = 3x \end{array}$

donde x es la variable independiente y $f(x)$ es la variable dependiente. Si el conjunto B es el cuerpo de los números reales, $\mathbb{R}$, decimos que la función es una función real de variable real.

Al conjunto A se le llama conjunto de definición de f o ***dominio***, $Dom(f)$, y son los valores de la variable independiente, x, para los que existe valor de la variable dependiente, $f(x)$, (la función está definida).

$$\boxed{Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \text{ existe}\}}$$

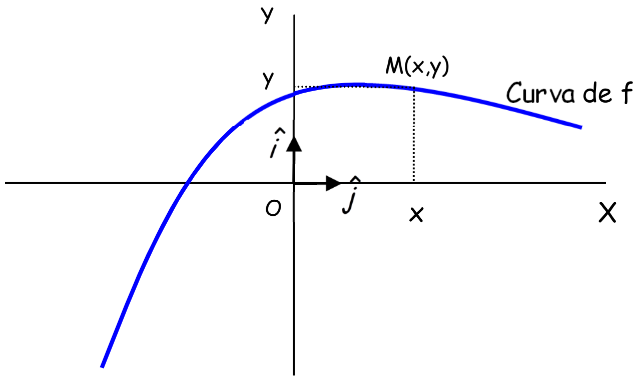
Se llama ***recorrido*** de una función f o imagen de f, $\text{Im}(f)$, al conjunto de valores que toma la variable dependiente f(x).

$$\boxed{\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y = f(x), x \in Dom(f)\}}$$

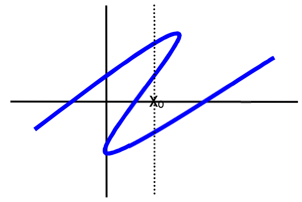
Se llama ***grafo*** de una función a un subconjunto G_f del producto cartesiano $Ax\mathbb{R}$ formado por los pares (x,y) tal que y=f(x).

$$\boxed{G_f = \{(x, f(x)) \,/\, x \in A\}}$$

Si consideramos un sistema de referencia afín, p.e. $(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath})$ podemos representar los puntos del grafo *Gf* en el plano afín. La figura del plano afín determinada por los puntos correspondientes a los elementos del grafo, recibe el nombre de ***gráfica de la función***. Es decir, es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas coordenadas verifican la ecuación ***y=f(x).***



Una función, ***nunca vuelve hacia atrás***, ya que para cada valor de x, obtenemos un solo valor de f(x).



- La función $f: A \subset R$ está <u>acotada superiormente</u>, si $\forall x \in A, \exists c \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \le c$. A los números c que cumplen esta propiedad se les llama mayorantes o cotas superiores de f.

- La función $f: A \subset R$ está <u>acotada inferiormente</u>, si $\forall x \in A, \exists c \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \ge c$. A los números c que cumplen esta propiedad se les llama minorantes o cotas inferiores de f.

Se dice que f está ***acotada*** si existen cotas superiores e inferiores, ó $\exists P \in \mathbb{R}^+ \,/\, \forall x \in A, |f(x)| \le P$

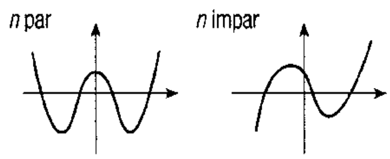
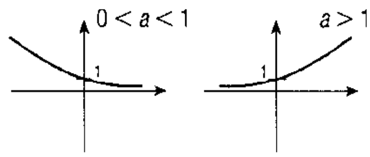
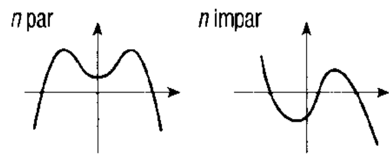
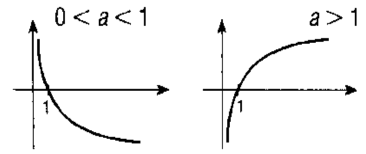
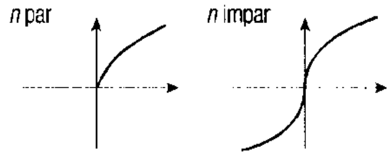
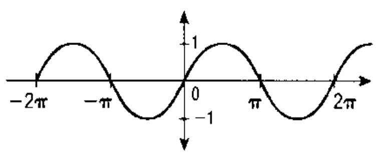
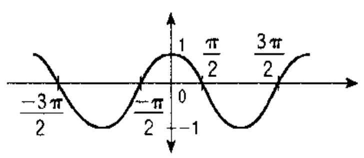
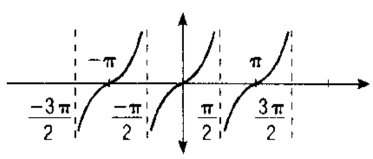
- Se llama ***supremo*** de una función *f* al menor de los mayorantes de dicha función. Se representa por sup(f).
  Si este valor lo alcanza la función en algún punto de su dominio, recibe el nombre de ***máximo absoluto***.

Por tanto, se dice que una función *f* tiene un máximo absoluto en un punto a∈*D* si se verifica que f(x)≤f(a) ∀x∈*D*,

- Se llama ***ínfimo*** de una función *f* al mayor de los minorantes de dicha función. Se representa por inf(f).
  Si este valor lo alcanza la función en algún punto de su dominio, recibe el nombre de ***mínimo absoluto***.

Por tanto, se dice que una función *f* tiene un mínimo absoluto en un punto a∈*D* si se verifica que f(x)≥f(a) ∀x∈*D*.

1.1.1.- Funciones elementales de una variable real.

MODELO		GRÁFICA	MODELO	GRÁFICA
Polinómica	$a_n > 0$		**Exponencial**	
	$a_n < 0$		**Logarítmica**	
Irracional			**sen *x***	
cos *x*			**tg *x***	

Ejemplo 2: Sea $f : A \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$

- Si $A = [0,2]$, la función está acotada superiormente: $\forall x \in A, \exists c \in \mathbb{R} / f(x) \leq 4$, y además, la función está acotada inferiormente ya que $\forall x \in A, \exists c \in \mathbb{R} / f(x) \succ -7$

Por tanto la función es Acotada, por estar acotada superior e inferiormente.

- Si $A = \mathbb{R}$, la función no está acotada superiormente ya que cualquiera que sea el número real M, siempre existe un x tal que $f(x) = x^2 \geq M$. Esta función si está acotada inferiormente porque $\forall x \in A, f(x) \geq 0$.

Por tanto la función no es acotada porque no tiene cotas superiores.

- Funciones Polinómicas, son de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_o$ y su dominio es $\mathbb{R}$.
- Funciones Racionales, son de la forma $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_o}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + b_1 x + b_o}$ su dominio es $\mathbb{R}$ menos los valores que anulan el denominador.
- Funciones Irracionales, son del tipo $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, siendo su dominio:
  - El mismo que el de $g(x)$ si n es impar
  - El conjunto de valores reales que hagan $g(x) \geq 0$ si n es par
- Funciones exponenciales, son de la forma $f(x) = a^{g(x)}$, con a>0 y a≠1, su dominio es el mismo que el de $g(x)$
- Funciones logarítmicas, son de la forma $f(x) = \log_a g(x)$, con a>0. Su dominio son los valores de x, que hacen $g(x) > 0$.
- Funciones circulares: $f(x) = senx,\ f(x) = \cos x$, su dominio es $\mathbb{R}$.

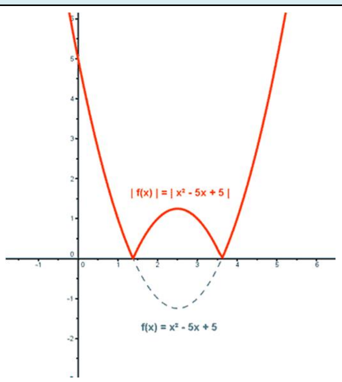
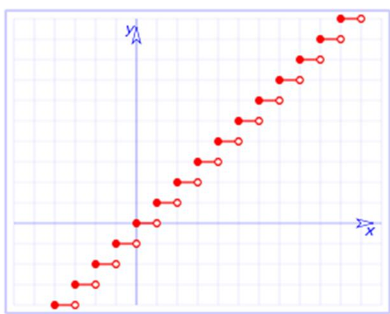
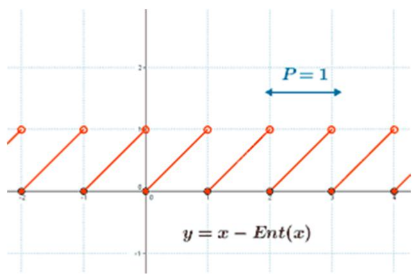
A partir de estas dos, podemos definir el resto de funciones circulares:

$$tg(x) = \frac{senx}{\cos x},\ \sec(x) = \frac{1}{\cos x} \text{ sus dominios son } \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in Z \right\}$$

$$ctg(x) = \frac{\cos x}{senx},\ \text{cosec}(x) = \frac{1}{senx} \text{ sus dominios son } \mathbb{R} - \{ k\pi, k \in Z \}$$

- Función Valor Absoluto: $f(x) = |x| = \begin{cases} \text{f(x) si x} \geq 0 \\ -\text{f(x) si x} < 0 \end{cases}$
- Función Parte entera E[x]: Es una función que hace corresponder a cada número real, el número entero inmediatamente inferior.
- Función mantisa: Función que hace corresponder a cada número el mismo número menos su parte entera.

$$f(x) = x - E(x)$$

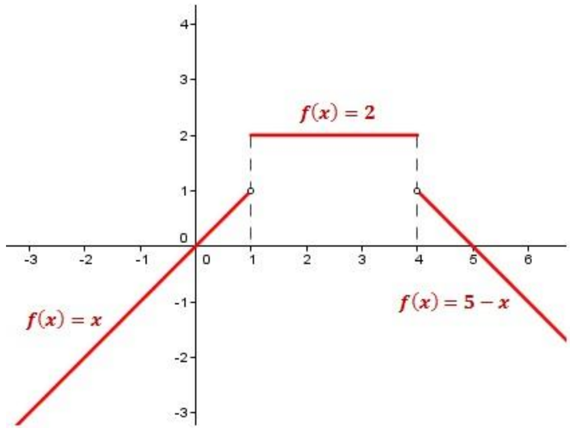
Función Valor Absoluto	*Función Parte Entera*	*Función Mantisa*
		

1.1.1.1.- Funciones definidas a trozos:

Decimos que una función está definida a trozos si su expresión algebraica depende del intervalo en el que se encuentre el número real cuya imagen se quiere calcular. A cada trozo llamaremos *rama de la función*.

Ejemplo 3: $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<1 \\ 2 & si \;\; 1\le x\le 4 \\ 5-x & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$

Si la representamos, dibujo de la derecha, observamos que la función está compuesta por tres ramas.



1.2.- Operaciones con funciones

Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dos funciones de variable real, las distintas operaciones con funciones, las podemos resumir en la siguiente tabla:

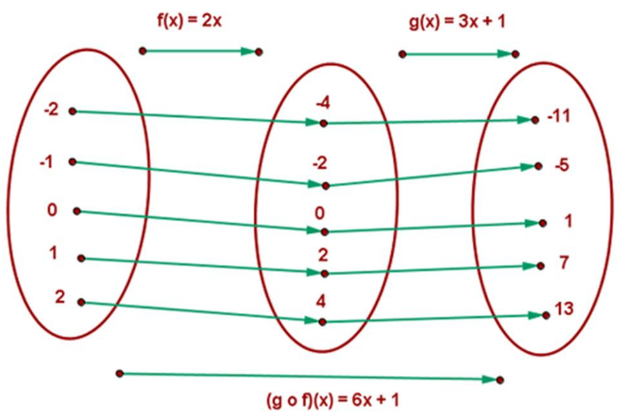
Operación	Notación	Operación	Notación
Suma	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	***Producto***	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ $(k\cdot f)(x)=k\cdot f(x) \quad \forall k\in\mathbb{R}$
Diferencia	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	***Cociente***	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$

1.2.1.- Composición de Funciones

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones, de modo que el dominio de la segunda esté incluido en el recorrido de la primera, se puede definir una nueva función que asocie a cada elemento del dominio de f(x) el valor de **g[f(x)]**, en otras palabras, componer dos funciones, es aplicar el resultado de una de ellas a la otra.

$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$: g compuesta con f

$(g\circ f)(x)=g[f(x)]$: f compuesta con g



Arriba, tenemos un ejemplo con las funciones f(x) = 2x y g(x) = 3x + 1.

Ejemplo 4: Sean $f(x)=\frac{1}{x-1}$ y $g(x)=x^2-1$, calcula la composición de f con g y la de g con f.

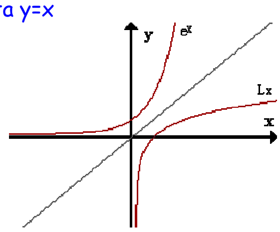
$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=\left[f(x)^2-1\right]=\left(\frac{1}{x-1}\right)^2-1=\frac{-x^2+2x}{(x-1)^2}$ $\qquad (f\circ g)(x)=f[g(x)]=\frac{1}{g(x)-1}=\frac{1}{x^2-1-1}=\frac{1}{x^2-2}$

1.2.2.- Inversa de una función

Dada una función f, se define su ***inversa*** de f o ***recíproca*** de la función f, y la representaremos por f^{-1} a la función que verifica:

$$\text{Si } f(a)=b \text{ , entonces } f^{-1}(b)=a$$

Gráficamente, una función y su inversa son simétricas respecto de la recta y=x



Y que además cumple:

- El dominio de f^{-1} es el recorrido de f.
- El recorrido de f^{-1} es el dominio de f.
- Si queremos hallar el recorrido de una función tenemos que hallar el dominio de su función inversa.
- Si dos **funciones** son **inversas** su **composición** es la **función identidad**.

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=x\ .$$

Ejemplo 5: Sean $f(x)=2^x$ y su función inversa: $f^{-1}(x)=\log_2(x)$, comprueba que realmente son funciones inversas.

$$(f\circ f^{-1})(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=f\left[\log_2 x\right]=2^{\log_2 x}=x \qquad (f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=f^{-1}(2^x)=\log_2 2^x=x\cdot\log_2 2=x$$

Es importante que se distinga bien entre la inversa de una función, $\dfrac{1}{f(x)}$, y la función inversa $f^{-1}(x)$.

1.2.2.1.- Cálculo de la función inversa o recíproca:

Dada una función $f(x)$, para calcular su inversa, seguiremos los siguientes pasos:

- ✓ Se escribe la ecuación de la función con x e y.
- ✓ Se despeja la variable x en función de la variable y.
- ✓ Se intercambian las variables.

Ejemplo 6: Calcula la función inversa de $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$.

Primero, escribimos la función con las variables x e y: $y=\dfrac{2x+3}{x-2}$

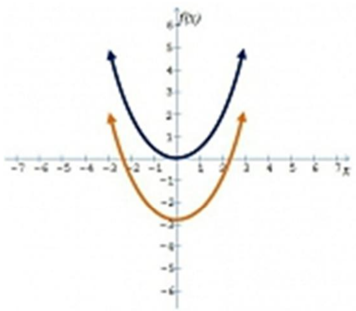
Segundo despejamos x en función de y: $y=\dfrac{2x+3}{x-2} \quad\rightarrow\quad y(x-2)=2x+3 \quad\rightarrow\quad yx-2y=2x+3 \quad\rightarrow\quad yx-2x=2y+3$

$$x(y-2)=2y+3 \quad\rightarrow\quad x=\frac{2y+3}{y-2}$$

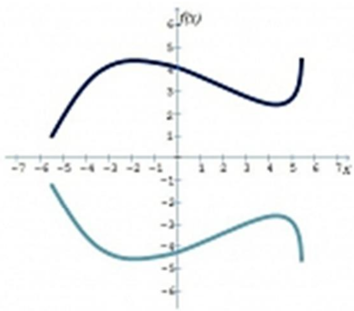
Tercero, intercambiamos las variables: $y=\dfrac{2x+3}{x-2}$

1.3.- Transformaciones de funciones

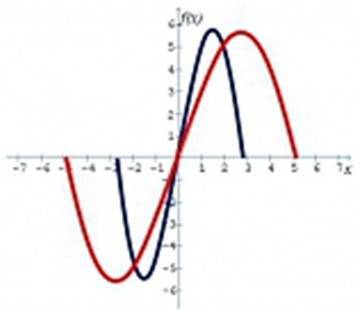
Como hemos visto en cursos anteriores, conocida la gráfica de una función, podemos trazar la gráfica de otra similar utilizando técnicas aplicadas a los modelos gráficos de cada función llamadas ***transformaciones***. Estas transformaciones afectan la forma general de la gráfica de cada función.



traslación



reflexión



expansión

Tabla Resumen de Transformaciones de Funciones

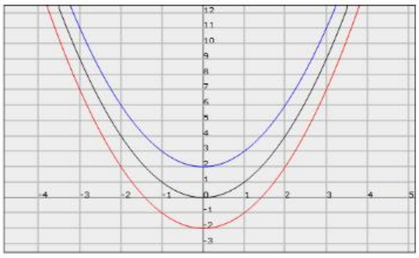
Si sumamos o restamos una constante $k \in \mathbb{R}$ a una función f, su gráfica se desplaza verticalmente.

- *Si k>0 hacia arriba*
- *Si k<0, hacia abajo*

x^2

$x^2 - 2$

$x^2 + 2$



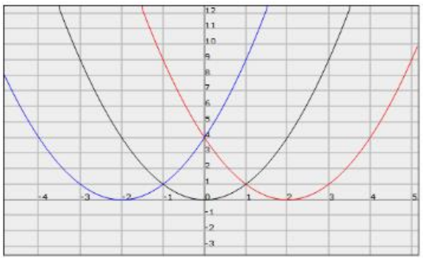
Si esa constante se añade o se quita a la variable independiente x, su gráfica se desplaza horizontalmente.

- *Si k>0 hacia la izquierda*
- *Si k<0 hacia la derecha.*

x^2

$(x-2)^2$

$(x+2)^2$



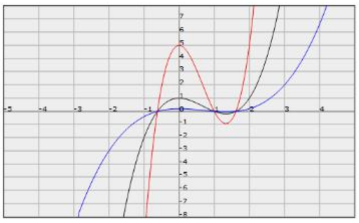
Si multiplicamos la función por una constante $k \in \mathbb{R}^*$, su gráfica se comprime o estira verticalmente.

- *Si k>1 la función se estira*
- *Si k<1, la función se comprime*

$x^3 - 2x^2 + 1$

$5(x^3 - 2x^2 + 1)$

$\frac{1}{5}(x^3 - 2x^2 + 1)$



Al multiplicar una función por una constante, los puntos de corte con el eje de abscisas no cambian.

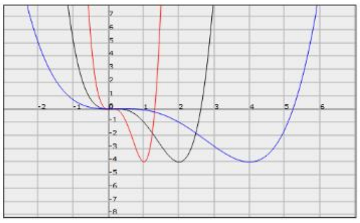
Si multiplicamos la variable independiente por una constante, la función se estira o se comprime horizontalmente.

- *Si k>1 la función se estira*
- *Si k<1, la función se comprime*

$x^4 - 3x^3 + x^2$

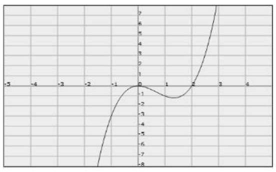
$(2x)^4 - 3(2x)^3 + (2x)^2$

$(\frac{1}{2}x)^4 - 3(\frac{1}{2}x)^3 + (\frac{1}{2}x)^2$

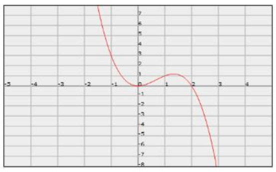


Si multiplicamos la función por un número negativo, se produce una reflexión con respecto al eje X.

$x^3 - 2x^2$



$-(x^3 - 2x^2)$

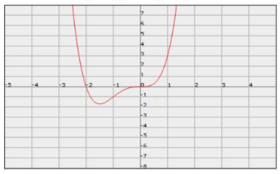


Multiplicar una función por un número negativo, convierte todos los puntos (x,y) del gráfico en (x,-y)

Si multiplicamos la variable independiente por un número negativo, se produce una reflexión con respecto al eje Y.

$x^4 - 2x^3$

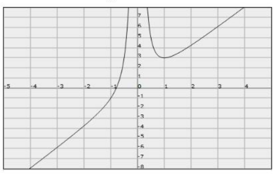
$(-x)^4 - 2(-x)^3$



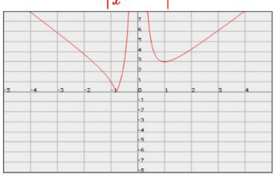
Multiplicar la variable independiente por un número negativo, convierte todos los puntos (x,y) del gráfico en (-x,y)

Hacer el valor absoluto de una función, mueve todos los puntos que están por debajo del eje x a posiciones por encima del eje x.

$\frac{1}{x^2} + 2x$

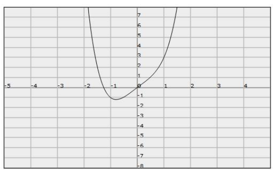


$\left|\frac{1}{x^2} + 2x\right|$

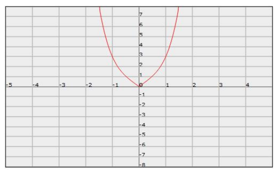


Hacer el valor absoluto de la variable independiente, hace que la parte izquierda de la gráfica sea igual que la parte derecha.

$x^4 + 2x$



$|x|^4 + 2|x|$



1.4.- Límites

Hasta ahora, en cursos anteriores hablamos de tendencias de una función, ahora utilizaremos límites.

1.4.1.- Límite de una función en un punto

El límite, L, de una función $f(x)$ en el punto x_o es el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando la variable independiente x se aproxima al valor x_o. Lo representaremos por $\lim_{x \to x_o} f(x) = L$

$x \to a$ se lee "*x tiende al valor a*" y significa que x toma valores muy próximos al valor a.

Una forma rápida de calcular este límite es sustituir directamente x por el valor x_o. $\boxed{\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)}$

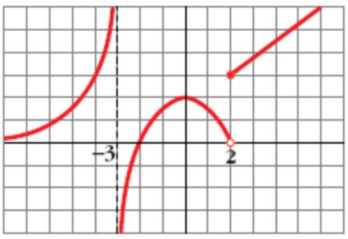
Definición: $$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Ejemplo 7: Sea f(x)=3x, calcular el límite de f(x) en el punto $x_o=2$ $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 3x = f(2) = 6$

1.4.1.1.- Límites Laterales finitos de una función:

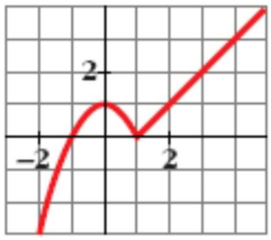
- Llamamos ***límite por la izquierda*** de una función, y lo representaremos por $\lim_{x \to a^-} f(x) = A$ al valor que toma $f(x)$ cuando nos acercamos al número ***x=a*** por números menores que a (por la izquierda).
- Llamamos ***límite por la derecha*** de una función, y lo representaremos por $\lim_{x \to a^+} f(x) = A$ al valor que toma $f(x)$ cuando nos acercamos al número ***x=a*** por números mayores que a (por la derecha).

Veamos con algunos ejemplos gráficos:



Al acercarnos a x=2 por la izquierda, la función se acerca a y=0, por tanto $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$

Al Acercarnos a x=2 por la derecha, la función se acerca a y=3, por tanto $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$



Al acercarnos a x=1 por la izquierda, la función se acerca a y=0, por tanto $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$

Al Acercarnos a x=2 por la derecha, la función se acerca a y=0, por tanto $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$

En el primer caso los límites laterales en el valor de x=2 son distintos, mientras que en el segundo ejemplo los límites laterales en el valor de x = 1 coinciden (valen cero).

Si una función está definida a trozos, se dice que f tiene límite en un punto x_o si existen los límites laterales y estos coinciden:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_o^+} f(x) = \lim_{x \to x_o} f(x) = l}$$

Si los límites laterales toman distinto valor en $x = x_o$ se dice que <u>no existe</u> el límite de $f(x)$ en $x = x_o$.

Así que en la función de la derecha no existe el límite en x=2, mientras que en la función de la derecha si existe el límite en x=1.

Ejemplo 8: Sea $f(x) = \begin{cases} 3x+1 \text{ si } x < 0 \\ x^2 + 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

Calcula el límite de f(x) en el punto $x_o=0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} 3x+1 = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2+1 = 1 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

Álgebra de límites finitos

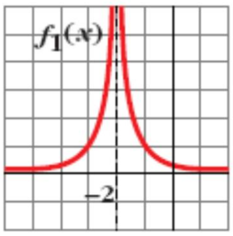
Si existen $\lim_{x \to a} f(x) = b$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, se cumplen las siguientes relaciones:

- $\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = b + c$
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} \left[\lambda \cdot f(x) \right] = \lambda \cdot \lim_{x \to a} f(x) = \lambda \cdot b$
- $\lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = a \cdot b$
- Si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$; $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{b}{c}$
- Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$; $\lim_{x \to a} \left[\frac{1}{f(x)} \right] = \frac{1}{\lim_{x \to a} f(x)} = \frac{1}{0} = \pm\infty$
- Si $\lim_{x \to a} f(x) > 0$; $\lim_{x \to a} \left[f(x) \right]^{g(x)} = \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]^{\lim_{x \to a} g(x)}$

1.4.1.2.- Límites Laterales No finitos de una función:

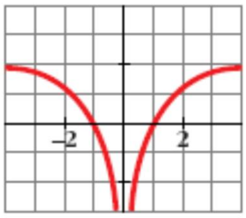
- Se dice que $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ si cuando x toma valores próximos a a , por su izquierda, $f(x)$ toma valores cada vez mayores, llegando a superar a cualquier valor, por muy grande que este sea.

- Se dice que $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ si cuando x toma valores próximos a a , por su derecha, $f(x)$ toma valores cada vez mayores, llegando a superar a cualquier valor, por muy grande que este sea.



En esta gráfica de la función $f_1(x)$ vemos que se verifica:

$\lim_{x \to 2^-} f_1(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to 2^+} f_1(x) = +\infty$



En esta gráfica de la función $f(x)$ vemos que se verifica:

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

- Se dice que $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ si cuando x toma valores próximos a a , por su izquierda, $f(x)$ toma valores cada vez "más negativos"(o sea, más pequeños).

- Se dice que $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ si cuando x toma valores próximos a a , por su derecha, $f(x)$ toma valores cada vez "más negativos"(o sea, más pequeños).

Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ entonces: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$
Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ entonces $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Si los límites laterales toman distinto valor en $x = a$ se dice que <u>no existe</u> el límite de $f(x)$ en $x = a$.

Álgebra de límites infinitos

- $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$ (Si el resultado no es $\infty-\infty$)
- Si $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a}\left[\lambda\cdot f(x)\right]=\lambda\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$
- $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$ (Si el resultado no es $0\cdot\infty$)
- Si $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$; $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ (Si el resultado no es $\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$)
- Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a}f(x)}=\dfrac{1}{0}=\pm\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)>0$; $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\left[\lim\limits_{x\to a}f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ (Si no resulta $\infty^0,1^\infty,0^0$)

Ejemplos 9: Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+6}{5x-1}=\dfrac{4-6+6}{9}=\dfrac{4}{9}$ b) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt[3]{x+4}=\sqrt[3]{4+4}=\sqrt[3]{8}=2$ c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(Sen2x+\operatorname{Cos}2x\right)=sen\pi+\cos\pi=0-1=-1$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+6}{x-1}=\dfrac{7}{0}$ $\rightarrow$ hemos de hacer los límites laterales $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+6}{x-1}=\dfrac{7}{0^+}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+6}{x-1}=\dfrac{7}{0^-}=-\infty$

Por tanto en este último caso, como los límites laterales no coinciden, la función no tiene límite cuando $x\to 1$

1.4.1.3.- Cálculo de límites

A la hora de sumar números e infinitos es importante tener en cuenta la siguiente tabla:

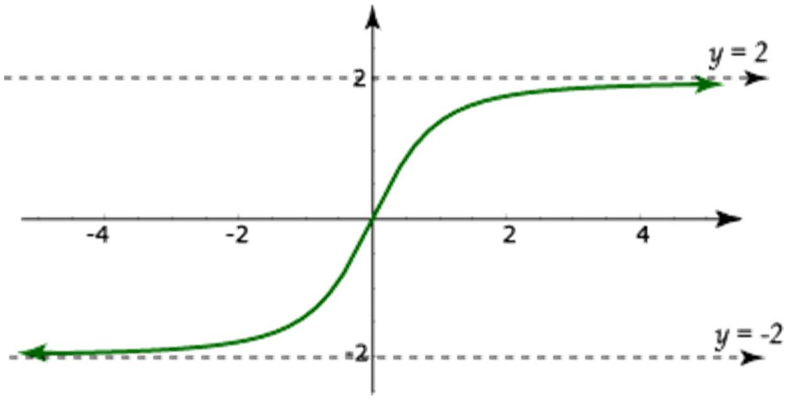
Sumas	*Productos*	*Cocientes*	*Potencias*
$(+\infty)+(l)=(+\infty)$ $(+\infty)+(+\infty)=(+\infty)$ $(-\infty)+(l)=(-\infty)$ $(-\infty)+(-\infty)=(-\infty)$ $-(-\infty)=(+\infty)$	$(+\infty)\cdot(l)=\begin{cases}(+\infty) & \text{si } l>0\\(-\infty) & \text{si } l<0\end{cases}$ $(+\infty)\cdot(+\infty)=(+\infty)$ $(-\infty)\cdot(l)=\begin{cases}(+\infty) & \text{si } l<0\\(-\infty) & \text{si } l>0\end{cases}$	$\dfrac{(l)}{(\pm\infty)}=0$ $\dfrac{(l)}{(0)}=(\pm\infty)$ si $l\neq 0$ $\dfrac{(\pm\infty)}{0}=(\pm\infty)$ $\dfrac{(0)}{(\pm\infty)}=(0)$	$(0^+)^{+\infty}=0$ $(+\infty)^{(+\infty)}=(+\infty)$ $(+\infty)^{(-\infty)}=(0)$ $(+\infty)^{(l)}=(+\infty)$ si $l>0$ $(+\infty)^{(l)}=(0)$ si $l<0$ $(l)^{(0)}=1$ si $l\neq 0$ Si $l>1\begin{cases}(l)^{(+\infty)}=(+\infty)\\(l)^{(-\infty)}=(0)\end{cases}$ Si $0<l<1\begin{cases}(l)^{(+\infty)}=(0)\\(l)^{(-\infty)}=(+\infty)\end{cases}$
Logaritmos			
$\ln(+\infty)=+\infty$ $\ln(0^+)=-\infty$			

1.4.1.- Límites en el infinito

Cuando $x\to\infty$, una función puede comportarse de diversas maneras: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l\\\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\pm\infty\end{cases}$

1.4.2.1.- Límite finito

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$ Podemos conseguir que f(x) esté tan próximo de l como queramos, agrandando x.



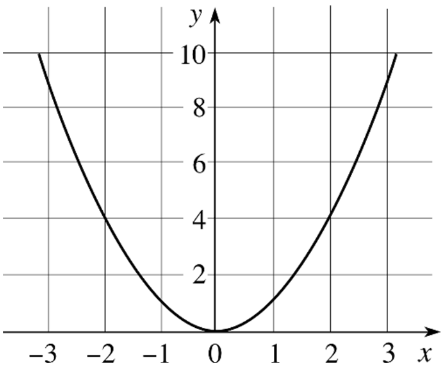
Se observa que cuanto más grande es x, más nos acercamos al valor y=2, y cuanto "más negativo" es x, más nos acercamos al valor y=-2

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = b$, se cumplen las siguientes relaciones:

- $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty} g(x) = a+b$
- $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) - \lim_{x\to+\infty} g(x) = a-b$
- $\lim_{x\to+\infty}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot \lim_{x\to+\infty} g(x) = a\cdot b$
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to+\infty} f(x)}{\lim_{x\to+\infty} g(x)} = \frac{a}{b}$ Si b ≠ 0
- $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{g(x)} = \left[\lim_{x\to+\infty} f(x)\right]^{\lim_{x\to+\infty} g(x)} = a^b$ Si f(x) > 0
- $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to+\infty} f(x)} = \sqrt[n]{a}$ Si n es impar ó n es par pero f(x) ≥ 0
- $\lim_{x\to+\infty}[\log_b f(x)] = \log_b[\lim_{x\to+\infty} f(x)] = \log_b a$ Si b > 0 y f(x) > 0.

1.4.2.2.- Límite infinito

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$, podemos conseguir que f(x) sea tan grande ó tan "negativa" como queramos simplemente con hacer x lo suficientemente grande.



En el ejemplo de la derecha, $y=x^2$, vemos que cuanto más grande es x, más grande es y, por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Y de igual modo, cuanto más "negativo" es x, más grande es la y, por tanto:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

1.4.2.3.- Comparación de Infinitos

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty$

Decimos que:

- f(x) es un ***infinito de orden superior*** a g(x) si: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ *ó* $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = 0$
- f(x) y g(x) son ***infinitos del mismo orden*** si: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$

- $\lim_{x\to+\infty} x^a$ es de orden superior a $\lim_{x\to+\infty} x^b$ si a > b
- $\lim_{x\to+\infty} a^x$ es de orden superior a $\lim_{x\to+\infty} b^x$ si a > b y a,b > 1
- $\lim_{x\to+\infty} a^x$ es de orden superior a $\lim_{x\to+\infty} x^a$ si a > 1
- $\lim_{x\to+\infty} x^a$ es de orden superior a $\lim_{x\to+\infty} \log x^a$

Los infinitos de las exponenciales son de orden superior que los infinitos de los polinomios, y éstos son de orden superior a los infinitos de los logaritmos.

$$\infty_{\text{exponencial}} > \infty_{\text{polinomio}} > \infty_{\text{logarimo}}$$

1.4.2.3.- Funciones equivalentes en un punto

Se dice que las funciones f y g son equivalentes en un punto a (a finito, $+\infty,-\infty$), si:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

Si en una expresión figura como factor o divisor una función, el límite no varía al sustituir dicha función por otra equivalente.

$x\to 0$	
Sen x	X
tg x	X
Arcsen x	X
Arctg X	X
1 - Cos X	$X^2/2$
e^x-1	X
ln (1 + x)	X
$x\to 1$	
ln (x)	X - 1
Sen (X - 1)	X - 1

1.4.2.4.- Cociente de polinomios

Cuando calculamos el límite de una función racional, o de un cociente de polinomios, es importante saber que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^p+a'x^{p-1}+\dots}{bx^q+b'x^{q-1}+\dots}=\begin{cases}\pm\infty & \text{Si } p>q\\ 0 & \text{Si } p<q\\ \frac{a}{b} & \text{Si } p=q\end{cases}$$

1.5.- Límites indeterminados

Existen 7 tipos de inderterminaciones: $\infty-\infty \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0^0 \quad (\pm\infty)\cdot 0 \quad 1^\infty \quad \infty^0$

Vamos a explicar cómo se resuelven algunas de ellas:

1.5.1.- Tipo $\infty-\infty$

La forma de resolverla es efectuar la operación y estudiar la expresión resultante. Si aparecen raíces, utilizaremos el conjugado.

Ejemplo 10:

$$\lim_{x\to3}\left[\frac{x^2-6}{x(x-3)}-\frac{1}{x-3}\right]=\infty \Rightarrow \lim_{x\to3}\left[\frac{x^2-6}{x(x-3)}-\frac{x}{x(x-3)}\right]=\lim_{x\to3}\left[\frac{x^2-6-x}{x(x-3)}\right]=\lim_{x\to3}\left[\frac{x+2}{x}\right]=\frac{5}{3}$$

1.5.2.- Tipo 0/0

Normalmente se da en el cociente de polinomios., para resolverla, tenemos que dividir numerador y denominador por la raíz que haga cero el denominador. Si aparecen raíces utilizaremos el conjugado.

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to c}\frac{P_1(x)(x-c)}{Q_1(x)(x-c)}=\lim_{x\to c}\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Ejemplo 11:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^3+2x^2+5x+10}=\frac{0}{0}\ \rightarrow\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^3+2x^2+5x+10}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)\cdot(x-2)}{(x+2)(x^2+5)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{x^2+5}=\frac{-4}{9}$$

1.5.3.- Tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Normalmente se da en el cociente de polinomios. La forma de resolverla es comparar los infinitos de numerador y denominador.

Ejemplo 12:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-7}{x^3+2x^2}=\frac{\infty}{\infty}\ \rightarrow\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-7}{x^3+2x^2}=0$$ porque el grado del numerador es menor que el del denominador

1.5.4.- Tipo $\infty\cdot 0$

Para resolver esta indeterminación, sustituiremos la variable x del límite por otra variable t. Este cambio influirá en la forma de la función resultante y en el punto en el que se calcula el límite.

Ejemplo 13:

$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ → Si hacemos el cambio de variable $t=\frac{1}{x}$, observamos que cuando $x\to 0^+$, la variable $t\to +\infty$, por tanto podemos escribir: $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to +\infty}\frac{1}{t}\cdot\ln(1+t)=\lim_{t\to +\infty}\frac{\ln(1+t)}{t}=\frac{0}{\infty}=0$

1.5.5.- Tipo 1^∞

Utilizaremos la "***regla del zapato***" ó regla del nº e. $\boxed{\lim\left(f(x)\right)^{g(x)}=e^{\lim(f(x)-1)\cdot g(x)}}$

Sabemos que $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=2{,}7172\ldots\ldots=e$, pues trataremos de convertir límites con indeterminación de este tipo en límites de esta forma.

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)+1-1\right]^{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\left[1+f(x)-1\right]^{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{g(x)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot g(x)\cdot(f(x)-1)}=\left[\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\lim_{x\to\infty} g(x)\cdot(f(x)-1)}=e^{\lim_{x\to\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)}$$

Ejemplo 14:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-7}{x^2+2}\right)^{3x}=1^{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-7}{x^2+2}\right)^{3x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2-9}{x^2+2}\right)^{3x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+2}+\frac{-9}{x^2+2}\right)^{3x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-9}{x^2+2}\right)^{3x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+2}{-9}}\right)^{3x\left(\frac{-9}{x^2+2}\right)\cdot\left(\frac{x^2+2}{-9}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+2}{-9}}\right)^{\left(\frac{x^2+2}{-9}\right)\left(\frac{-9}{x^2+2}\right)\cdot 3x}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-9}{x^2+2}\right)3x}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-27x}{x^2+2}\right)}=e^0=1$$

Éstas y el resto de indeterminaciones las resolveremos más delante de otra forma, utilizando la regla de L´Hôpital, una herramienta bastante más potente que veremos en el tema de derivación.

1.6.- Continuidad de una función en un punto

Sea f una función real definida en un intervalo I, y a un punto de I. Se dice que la función ***f es continua en el punto c*** si y solo si existe el límite de f en el punto c y éste es igual a f(c).

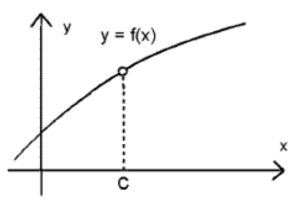
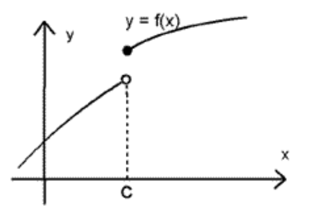
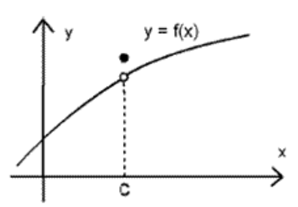
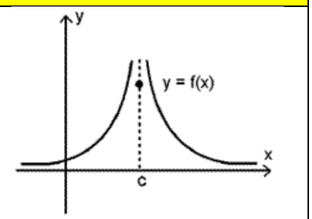
Por tanto, una función ***f es continua*** en un punto c si se cumplen estas tres propiedades:

- La función f está definida en c, es decir, existe f(c)
- Existe $\lim_{x\to c} f(x)$
- $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

La función f es continua en el punto c si es continua por la derecha y por la izquierda ó si los límites laterales coinciden:

$$\boxed{\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)}$$

Existen cuatro casos de discontinuidad:

f(x) no definida en C	***De salto***	***Evitable***	***Asintótica***
			
La función no está definida en el punto C	No coinciden los límites laterales de la función en el punto C.	No coincide el límite de la función en el punto C, con el valor de la función en el punto C.	No existe alguno de los límites laterales de la función en el punto C.
Ejemplo:	***Ejemplo:***	***Ejemplo:***	***Ejemplo:***
$f(x)=\{x-2 \text{ si } x\neq 3$	$f(x)=\begin{cases}3x-1 \text{ si } x<2\\ x^2+2 \text{ si } x\geq 2\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}3x-1 \text{ si } x\neq 1\\ 4 \text{ si } x=1\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}x \text{ si } x\leq 0\\ \text{sen}\frac{1}{x} \text{ si } x>0\end{cases}$
$f(3)=?$	$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2} 3x-1=5$ $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2} x^2+2=6$	$f(1)=4$ $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} 3x-1=2$	$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0} x=0$ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0} sen\frac{1}{x}=+\infty$

Todas las funciones elementales descritas con anterioridad son continuas en su dominio de definición, excepto:

- ***Funciones Racionales:*** Son discontinuas en los puntos que no son del dominio, es decir, donde Q(x)=0. Las *discontinuidades son de tipo asintótico o evitables*, en ningún caso pueden ser de salto.

- ***Funciones Trigonométricas:*** La tangente, la secante, la cosecante y la cotangente presentan *discontinuidades asintóticas* en los puntos que no son de su dominio.

- ***Funciones a trozos:*** Se debe estudiar la continuidad de cada una de las ramas en su dominio, y la continuidad en el punto donde cambiamos de rama, donde puede aparecer una *discontinuidad de salto.*

1.6.1.- Propiedades de las funciones continuas

- Sean f y g dos funciones continuas en un punto c, entonces:
  - ✓ $f+g$ es una función continua en c.
  - ✓ $\lambda \cdot f$ es una función continua en c.
  - ✓ $\dfrac{f}{g}$ es una función continua en c, si $g(c) \neq 0$
  - ✓ $|f|$ es una función continua en c.

- Si g es continua en a y f es continua en g(a), entonces la función $f \circ g$ es continua en a.

1.7.- Continuidad de una función en un intervalo I

Una función, f, es ***continua en un intervalo I=[a,b]*** si f es continua en cada uno de los puntos de (a,b), continua por la derecha en el punto a y continua por la izquierda en el punto b.

- ✓ Las ***funciones polinómicas*** son continuas en todo intervalo real.
- ✓ Las ***funciones racionales*** son continuas en un todo intervalo real donde no aparezcan las raíces del denominador.
- ✓ Las ***funciones trigonométricas*** sen(x), cos(x) son continuas en todo intervalo real.
- ✓ Las ***funciones tg(x), sec(x)*** son continuas en todo intervalo real donde cos(x) ≠ 0.
- ✓ Las ***funciones ctg(x), cosec(x)*** son continuas en todo intervalo real donde sen(x) ≠ 0.
- ✓ La ***función exponencial,*** a^x con a > 0 es continua en todo intervalo real.
- ✓ La ***función logarítmica***, $\log_a(x)$ con a > 0 es continua en el intervalo $(0,+\infty)$

Ejemplo 15: **Estudiar en la continuidad de la función definida en R por:** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x}{e^x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$

La función f es una función definida a trozos compuesta por dos ramas, la primera rama es el cociente de dos funciones exponenciales, que es continua, porque las funciones exponenciales son siempre continuas y e^x+1 es siempre distinto de cero, la segunda rama es una función polinómica, y por tanto continua, por tanto esta función solo puede tener problemas de continuidad en el punto en el que cambia de rama. O sea, en x=0. Estudiemos ese punto:

La función es continua en el punto x=0 si verifica las tres propiedades vistas anteriormente: $\begin{cases} \exists f(0) \\ \exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \end{cases}$

Calculamos $f(0)=\dfrac{1}{2}$;

Calculamos $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\dfrac{1}{2}$ ➔ Como los límites laterales son distintos, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y por tanto la función no es continua en x=0.

Así que la función f(x) es una función continua en $\mathbb{R}-\{0\}$, donde presenta una discontinuidad de salto finito.

1.7.1.- Teoremas Sobre Funciones Continuas

Ya hemos visto que, salvo en algunos casos, las funciones sueles ser continuas a la largo de un intervalo. Podríamos decir que una función es continua en un intervalo I si la función es continua cuando prescindimos de todos los puntos que no son de I.

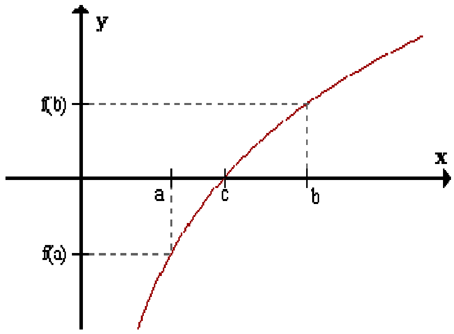
Veamos algunos teoremas que tienen que ver con la continuidad de funciones en intervalos.

1.7.1.1.- Teorema de Bolzano (Teorema demos ceros)

Si una función f continua en un intervalo [a,b] cambia de signo, es decir f(a)·f(b)<0, existe al menos un punto c del intervalo en el que la función vale 0.

$$f \text{ continua en } [a,b], \text{ y } f(a)\cdot f(b)<0, \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \text{ en el que } f(c)=0$$

Geométricamente, el teorema establece que si dos puntos (a,f(a)) y (b,f(b)) de la gráfica de una función continua están situados en diferentes lados del eje X, entonces la gráfica corta al eje X en algún punto entre a y b. Por supuesto que pueden existir varios puntos de corte con el eje X.



Este teorema, también se puede enunciar de la siguiente forma:

Si f es continua en I=[a,b] y el signo de f(a) es distinto del de f(b), entonces la ecuación f(x)=0 tiene alguna solución en (a,b).

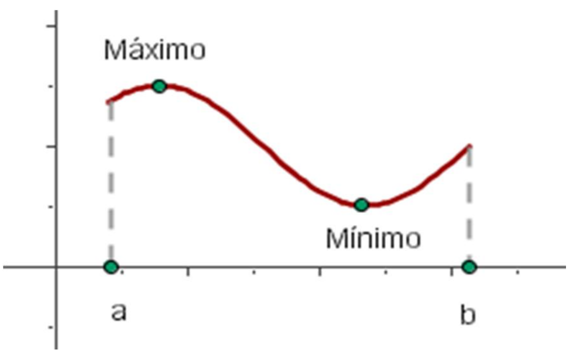
Ejemplo 16: ***Usando el teorema de Bolzano, demostrar que la ecuación $x^3+x-5=0$ tiene al menos una solución x_o tal que $1<x_o<2$.***

El teorema de Bolzano dice que si tenemos una función definida en un intervalo [a,b] cerrado y acotado, en el que la función es continua y además cambia de signo, entonces esta función pasa por el cero: $\exists c \in \left]a,b\right[\,/\, f(c)=0$.

Por tanto si definimos la función $f(x)=x^3+x-5$ en el intervalo [1,2], como la función es continua en dicho intervalo por ser polinómica, y además como f(1)=-3 y f(2)=5, entonces vemos que cambia de signo, entonces según Bolzano: $\exists c \in \left]1,2\right[\,/\, f(c)=0$.

Por lo que podemos asegurar que la ecuación $x^3+x-5=0$ tiene al menos una solución x_o tal que $1<x_o<2$

1.7.1.2.- Teorema de Weiertrass



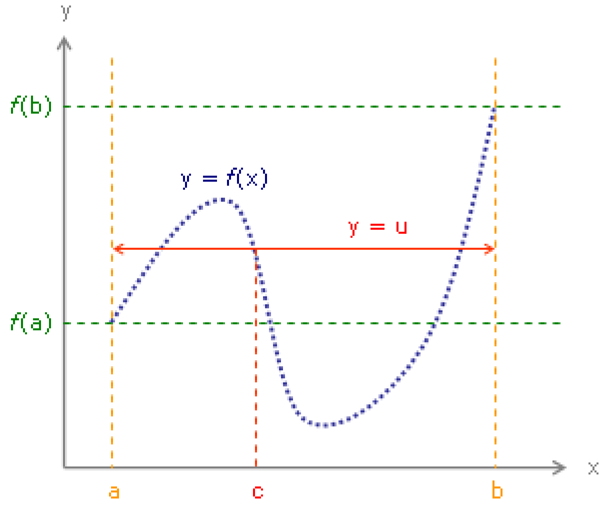
Si una función f(x) está definida y es continua en un intervalo cerrado [a,b], entonces f(x) alcanza al menos un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo [a,b].

$$f(a) \le f(x) \le f(b)$$

Es decir que hay al menos dos puntos x1 y x2 pertenecientes al intervalo [a,b] donde f alcanza valores extremos absolutos.

El ***teorema de Weierstrass*** no nos indica donde se encuentran el máximo y el mínimo, *sólo afirma que existen.*

1.7.1.3.- Teorema de los valores intermedios (Teorema de Darboux)



Si una función es continua en [a,b] $\subset \mathbb{R}$ ***y K es un número real comprendido entre f(a) y f(b), entonces existe un número c*** $\in (a,b)$ ***tal que f(c)=K.***

El teorema de los valores intermedios es una consecuencia inmediata del Teorema del Bolzano.

Otra consecuencia es:

Si f y g son dos funciones continuas en [a,b] y ocurre que f(a)<g(a) y además f(b)>g(b), entonces existe un número c $\in (a,b)$ ***tal que f(c)=g(c).***

Ejemplo 17: ***Probar que las funciones f(x)=lnx y g(x)=e^-x^ se cortan en algún punto y localizarlo aproximadamente.***

Empezamos probando con los números 1 y 2 a ver qué pasa:

$$f(1)=\ln 1=0 \quad y \quad g(1)=e^{-1}=0,37$$
$$f(2)=\ln 2=0,69 \quad y \quad g(2)=e^{-2}=0,14$$

Vemos que: $f(1)<g(1) \quad y \quad f(2)>g(2)$

Como ambas son funciones continuas en todo su dominio, y más concretamente en el intervalo [1,2], y vemos que se cumplen las condiciones del teorema de los Valores Intermedios, podemos asegurar que se cortan en algún punto c comprendido entre 1 y 2.

El ejemplo anterior, también podrá demostrarse, definiendo una nueva función h(x)=f(x)-g(x) y aplicando en ella el teorema de Bolzano.

1.8.- Ejercicios Resueltos

1.- Determinar el valor de a para que: $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)=2$

Tenemos una indeterminación del tipo $\infty-\infty$, por tanto vamos a multiplicar y dividir por el conjugado:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+ax+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+1}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}=\frac{a}{2}$$

De donde $a=4$.

2.- Calcular: $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$

Como tenemos $\infty-\infty$, multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+ax}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax}+x\right)}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+ax-x^2}{\left(\sqrt{x^2+ax}+x\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{\left(\sqrt{x^2+ax}+x\right)} = \frac{a}{2}$$

3.- Calcular el límite de la función $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$ ***, en el punto 0, en el punto 1 y en*** $+\infty$

En x = 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

En x = 1:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1-\cos 1$$

En $x=\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} = 0,$$

porque la función 1-cosx es una función acotada entre 0 y 2, y el denominador tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$.

4.- Calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x$

Utilizando la regla del "zapato" , tenemos que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}-1\right)\cdot x} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}-1\right)\cdot x} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3-2x+1}{2x-1}\right)\cdot x} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x}{2x-1}\right)} = e^2$$

5.- Calcular el valor de la constante c para que $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{cx} = e$

Utilizando la regla del "zapato":

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{cx} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x}-1\right)cx} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}\right)cx} = e^{\lim_{x\to+\infty} 3c} = e^{3c} \quad \Rightarrow c=\frac{1}{3}$$

6. - Determinar a y b para que la función real f, definida por $f(x)=\begin{cases} ae^{\frac{sen^2 x}{x}}+b\cos x & \text{si } x\le 0 \\ 3a\frac{\text{senx}}{\text{x}}+b(x-1) & \text{si } x>0 \end{cases}$

sea continua en la recta real.

Para que está función sea continua en toda la recta real, tiene que ser continua en todos los puntos de la recta real, pero vemos que para x=0, la función no está definida, así que como no es continua en x=0, no puede ser continua en toda la recta real, y por tanto no existen a y b que hagan que esta función sea continua.

7.- Calcular a y b para que la función definida por $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2} & \text{si } x\le 0 \\ ax+b & \text{si } 0<x<1 \\ 1+x\ln x & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$ ***sea continua***

La función f es una función definida a trozos compuesta por tres ramas, la primera rama es el producto de una polinómica por una exponencial, que es continua, porque las funciones exponenciales y las polinómicas son siempre continuas, la segunda rama es una función polinómica, y por tanto continua, la tercera rama es la composición de una polinómica y una logarítmica, que está bien definida porque x>1, así que también es continua siempre, por tanto esta función solo puede tener problemas de continuidad en los puntos en los que cambia de rama. O sea en x=0 y x=1. Estudiemos esos puntos:

Una función es continua en un punto x=a si ocurre: $\begin{cases} \exists f(a) \\ \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a) \end{cases}$

<u>En x=0:</u>

$f(0)=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=b$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$ ➔ Por tanto para que f sea continua en cero b=0.

<u>En x=1:</u>

$f(1)=1$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=a+b$ ➔ Por tanto para que f sea continua en uno, a+b=1.

Y para que la función sea continua, se han de cumplir las dos condiciones, por tanto f es continua si b=0 y a=1.

8.- Probar que la función definida por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3+7x-8}$ ***no es continua en x=1. Indicar que tipo de discontinuidad presenta.***

Lo primero es factorizar el denominador, y para ello utilizamos la regla de Ruffini.
$x^3+7x-8=(x-1)(x^2+x+8)$, por tanto la función:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^3+7x-8}=\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+x+8)}$$

La función no está definida en x=1, por tanto no es continua, presenta una discontinuidad de segunda especie, llamada discontinuidad asintótica.

9.- Representa gráficamente la función $f(x)=\left|x^2-2x\right|-\left|x\right|$

Para ello debemos expresar $\left|x^2-2x\right|$ y $\left|x\right|$ a trozos.

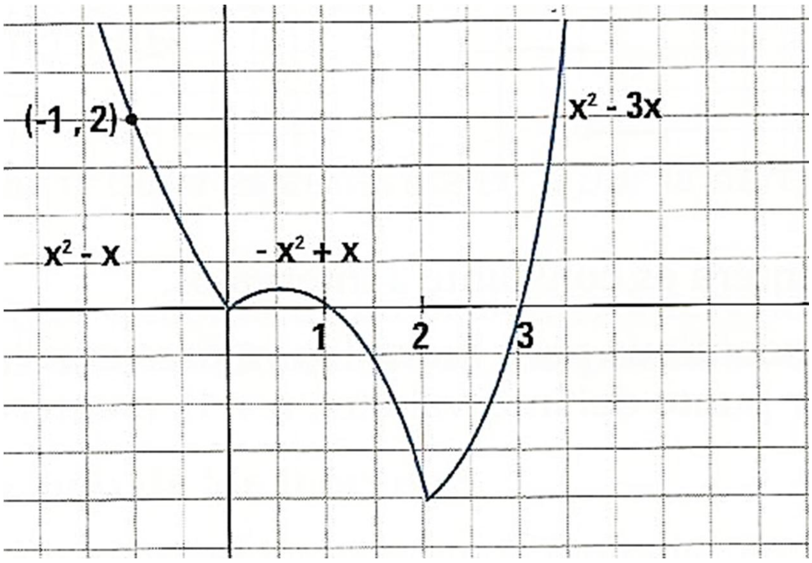
Si resolvemos la inecuación de la primera y las ponemos en funciones a trozos, obtenemos:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & si & x\le 0 \\ -x^2+2x & si & 0<x<2 \\ x^2-2x & si & 2\le x \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} -x & si & x<0 \\ x & si & x>0 \end{cases}$$

Si juntamos ambas, llegamos a:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+x & si \quad x\le 0 \\ -x^2+2x-x & si \quad 0<x<2 \\ x^2-2x-x & si \quad 2\le x \end{cases} \quad y \; operando \quad f(x)=\begin{cases} x^2-x & si \quad x\le 0 \\ -x^2+x & si \quad 0<x<2 \\ x^2-3x & si \quad 2\le x \end{cases}$$

Que dibujada queda:



10.- Resuelve la siguiente ecuación $x^2 - 2|x| - 3 = 0$

Por la definición de valor absoluto, sabemos que: $|x|=\begin{cases} -x \;\; si \;\; x<0 \\ x \;\; si \;\; x>0 \end{cases}$

Por tanto:

- Si $x\ge 0 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ \cancel{x=-1} \text{ porque } x\ge 0 \end{cases}$

- Si $x<0 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ \cancel{x=1} \text{ porque } x<0 \end{cases}$

Así que las soluciones son 3 y -3.