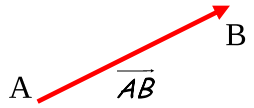
Tema 9: Vectores en el Espacio

9.1.- Vectores Fijos:

Un vector fijo del plano $\overrightarrow{AB}$ es un segmento orientado que tiene su origen en punto A y su extremo en el punto B.

Un vector viene caracterizado por su módulo, dirección y sentido.



- ***Módulo:*** Es la distancia entre los puntos A y B, lo representaremos por $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, y cuyo valor es: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2 + (B_z - A_z)^2}$

- ***Dirección:*** Es la dirección de la recta que pasa por A y B y la de todas las rectas paralelas a ella.

- ***Sentido:*** Es el recorrido de la recta cuando nos trasladamos de A a B. (Vemos que en cada recta hay dos sentidos, el que va de A a B y el que va de B a A.)

9.2.- Producto de un vector por un escalar:

El producto de un escalar K, distinto de cero, por un vector $\vec{u}$ es otro vector $\overrightarrow{ku}$ con:

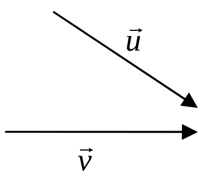
- ***Dirección:*** La misma que $\vec{u}$
- ***Sentido:*** el mismo que $\vec{u}$ o su opuesto dependiendo de si k es positivo o negativo.
- ***Módulo:*** Proporcional al de $\vec{u}$. $\|k\cdot u\| = |k|\cdot\|u\|$

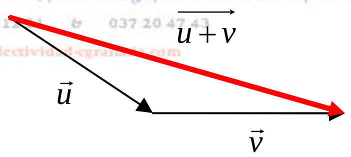
9.3.- Suma de Vectores:

5.3.1.- Matemáticamente: Sean $\vec{u}(x,y,z)$ y $\vec{v}(x',y',z')$ dos vectores, la suma de ambos da como resultado otro vector $\overrightarrow{u+v}$ de componentes: $\overrightarrow{u+v} = (x+x', y+y', z+z')$

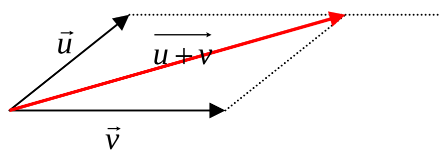
5.3.2.- Gráficamente: Sean $\vec{u}(x,y,z)$ y $\vec{v}(x',y',z')$ dos vectores, la suma gráfica de ambos se obtiene de dos formas:

a) Situamos el origen de $\vec{v}$ sobre el extremo de $\vec{u}$. El vector suma es aquel cuyo origen es el de $\vec{v}$ y cuyo extremo es el de $\vec{u}$.





b) Si hacemos que $\vec{v}$ y $\vec{u}$ tengan origen común, sumamos mediante la ***regla del paralelogramo***, y su diagonal es el vector suma.



9.4.- Base de un espacio Vectorial:

- Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots\ldots, \vec{v}_n\}$ se dice que son ***linealmente independientes (l.i.)*** (o que el sistema es libre), si dada la siguiente expresión:

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots\ldots + \alpha_n \cdot v_n = 0$$

Se verifica que:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots\ldots = \alpha_n = 0$$

- Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots\ldots, \vec{v}_n\}$ se dice que son ***linealmente dependientes (l.d.)*** (o que el sistema es ligado), si dada la siguiente expresión:

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots\ldots + \alpha_n \cdot v_n = 0$$

existe algún escalar no nulo. ($\exists \alpha_i \neq 0$)

- Los vectores u,v,w forman una base de R^3 ó son linealmente independientes, si y solo sí,

det(u,v,w)≠0

Ejemplo 9.1.- **¿Forman los vectores (1,1,1),(2,1,-1) y (1,0,5) una base de R^3?**

Para que 3 vectores de R^3 formen una base, tiene que ocurrir que sean l.i. Para comprobarlo, calculamos su determinante. (no es necesario que sean S.G.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$ ➔ Los vectores son l.i. y forman una base de R^3

9.5.- Producto escalar.

Dados dos vectores no nulos del plano, se llama producto escalar al número real obtenido como producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman: $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot Cos\alpha}$

Propiedades:

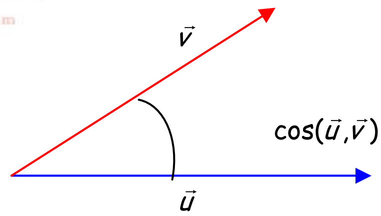
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(\lambda \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \leftrightarrow$ $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares (u ortogonales) o alguno de ellos es nulo.

$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ y $\lambda \in R$

9.6 Aplicaciones del producto escalar:

- Calculo del ángulo entre dos vectores:

$$Cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \;➔\; \alpha = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$



$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

- Comprobar si dos vectores, no nulos, son ortogonales. $\vec{u} \perp \vec{v} \leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

9.7.- Base ortogonal:

Un conjunto de vectores forman una ***base ortogonal***, cuando dichos forman una base y además son ortogonales dos a dos.

$$\boxed{B_{ortogonal} = Base \quad + \quad \perp}$$

9.8.- Base ortonormal:

- ✓ Un vector $\vec{u}$ se dice normado o unitario si $\|\vec{u}\| = 1$

- ✓ Dado un vector cualquiera no nulo $\vec{v}$, podemos obtener un vector unitario con la misma dirección y sentido que éste, simplemente dividiéndolo por su módulo: $\hat{v} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

Un conjunto de vectores forman una ***base ortonormal***, cuando dichos vectores forman una base, son ortogonales dos a dos y además son unitarios.

La base ortonormal canónica de R^3 es la formada por los vectores $B\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ó $\{\hat{i},\hat{j},\hat{k}\}$

Sea $B = \{\hat{i},\hat{j},\hat{k}\}$, una base ortonormal de V, (x_1,y_1,z_1) y (x_2,y_2,z_2) las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respecto de la base ortonormal B. La forma analítica del producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es:

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}$$

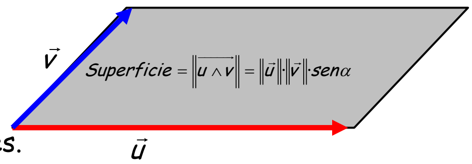
Respecto de una base ortonormal, el módulo del vector $\vec{u}(x,y,z)$ es: $\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Y el ángulo formado se obtiene: $\boxed{\alpha = \arccos\dfrac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}}$

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ serán perpendiculares (ortogonales) si y solo sí $\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2 = 0$

9.9.- Producto vectorial

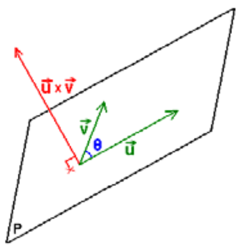
El producto vectorial de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es otro vector que lo representaremos por $\overrightarrow{u \wedge v}$ y que está caracterizado por:



a) Su módulo viene dado por $\|\overrightarrow{u \wedge v}\| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot sen\alpha$

y es igual al área del paralelogramo formado por ambos vectores.

b) Su dirección es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$



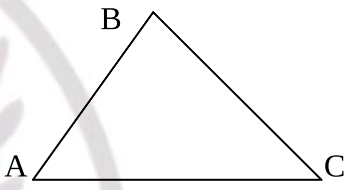
Si los vectores $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ y $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ están referidos a una base ortonormal B, el vector $\overrightarrow{u\wedge v}$ viene dado por:

$$\boxed{\overrightarrow{u\wedge v}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}$$

Propiedades:

- $\overrightarrow{u\wedge v}=-\overrightarrow{v\wedge u}$
- No cumple en general la propiedad asociativa.
- $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$
- $\lambda(\vec{u}\wedge\vec{v})=(\lambda\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(\lambda\vec{v})$ con $\lambda\in\Re$
- $\vec{u}\wedge 0=0$
- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos, $\overrightarrow{u\wedge v}=0$ en particular $\overrightarrow{u\wedge u}=0$

9.10 Aplicaciones del producto vectorial:



- Cálculo del área de un triángulo de vértices A,B,C.

$$A_T=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$$

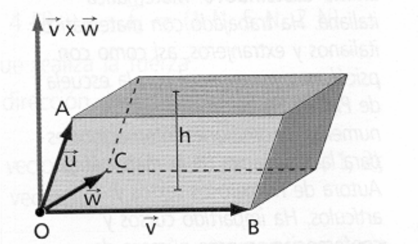
- Obtención de un vector perpendicular a otros dos a la vez, es decir, el vector $\overrightarrow{u\wedge v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ simultáneamente.

9.11.- Producto Mixto

Se llama producto mixto de 3 vectores $\vec{u}$,$\vec{v}$ y $\vec{w}$ y se designa por $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ al escalar que se obtiene al operarlos de la siguiente forma:

$$\boxed{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})}$$

El valor absoluto del producto mixto de tres vectores $\vec{u}$,$\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al volumen del paralelepípedo que tiene por aristas a los vectores $\vec{u}$,$\vec{v}$ y $\vec{w}$.



Interpretación geométrica del producto mixto:

$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|=V_{paralelepípedo}$

$$V=[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$$

El Volumen del tetraedro OABC es igual a: $V=\frac{1}{6}[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$

Como consecuencia, OABC son ***coplanarios***, si y solo si, el volumen del paralelepípedo es nulo, es decir, el producto mixto de los vectores $\vec{u}$,$\vec{v}$ y $\vec{w}$ es cero.

9.12.- Ejercicios

1.- ¿Para qué valores de α son linealmente independientes los vectores (2,-3,1);(-4,6,-2) y(α ,1,2)?.

2.- Considera estos 3 vectores u(1,1,1); v(2,2,a) y w(2,0,0).
a) Halla los valores de a para los que los vectores anteriores son linealmente independientes.
b) Determina los valores de a para que los vectores u+v y u-w sean ortogonales.

3.- Determina los valores de a y b, con a>0, para que los vectores $v_1(a,b,b)$; $v_2(b,a,b)$ y $v_3(b,b,a)$ sean unitarios y ortogonales dos a dos.

4.- Encuentra el valor del parámetro a para que los vectores $v_1(1,a,2)$, $v_2(2,a,1)$ y $v_3(1,1,1)$ formen una base.
Si a=1, escriba el vector w(6,0,2) como combinación lineal de los vectores anteriores.

5.- Dado el vector u(-2,2,-4), hallar las coordenadas de los siguientes vectores:
a) Unitarios y de la misma dirección que u.
b) Paralelos a u y de módulo 6

6.- Dados los vectores $u_1(2,0,0)$; $u_2(0,1,-3)$ y $u_3=a\cdot u_1+b\cdot u_2$, ¿Qué relación deben satisfacer a y b para que el módulo de u_3 valga la unidad?.

7.- Determina un vector v de R^3, sabiendo que:
a) La suma de sus coordenadas es 3.
b) V es combinación lineal de los vectores (2,2,2) y (-1,1,0)
c) Los vectores (1,0,1);(0,1,0) y v son linealmente independientes.

8.- Hallar los valores de x que hacen que los siguientes vectores constituyan una base del espacio vectorial R^3: u(x,0,1); v(1,x,2) y w(x,1,1). Expresar el vector t = (-1,0,3) como combinación lineal de $\{u,v,w\}$ para x=0.

9.- Hallar el área del triángulo de vértices A(1,1,1), B(0,2,5) y C(4,0,2)

10.- Hallar un vector que sea perpendicular, a la vez, a los vectores $\vec{u}=(1,0,-1)$ y $\vec{v}=(2,3,1)$

11.- ¿Para qué valores de α son linealmente independientes los vectores (2,-3,1);(-4,6,-2) y(α ,1,2)?.

12.- Dada la base $B=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(0,\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)\right\}$ comprobar si es normada, ortogonal u ortonormal.

13.- Hallar un vector perpendicular a $\vec{v}=(2,3,4)$ y $\vec{w}=(-1,3,-5)$ y que sea unitario.

14.- Sean los vectores $\vec{v}_1(0,1,0)$; $\vec{v}_2(2,1,-1)$ y $\vec{v}_3(2,3,-1)$:
¿Son los vectores linealmente independientes?
¿Para qué valores de a el vector (4,a+3,-2) puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$?.

9.13.- Soluciones

1.- ¿Para qué valores de α son linealmente independientes los vectores (2,-3,1);(-4,6,-2) y(α ,1,2)?.

3 Vectores son linealmente independientes (l.i.) cuando su determinante es distinto de cero. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 6 & -2 \\ \alpha & 1 & 2 \end{vmatrix} = (24 - 4 + 6\alpha) - (6\alpha - 4 + 24) = 20 + 6\alpha - 6\alpha - 20 = 0$$

Por tanto, como el determinante es 0, son linealmente dependientes. Por lo que no existe ningún valor de α para que sean linealmente independientes.

Si observamos el vector (2,-3,1) y el (-4,6,-2) vemos que ambos son proporcionales, y por tanto linealmente dependientes. Así que estos vectores no serán nunca l.i.

2.- Considera estos 3 vectores u(1,1,1); v(2,2,a) y w(2,0,0).

a) Halla los valores de a para los que los vectores anteriores son linealmente independientes.

Igual que en el ejercicio anterior, para que sean l.i. su determinante ha de ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & a \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 2a - 4 \neq 0; \Rightarrow a \neq 2$$

Por tanto si $a \neq 2$ entonces los vectores son l.i.

Y Si a=2, los vectores u y v son proporcionales, y por tanto linealmente dependientes (l.d.).

b) Determina los valores de a para que los vectores u+v y u-w sean ortogonales.

Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es igual a cero. Por tanto:

$(u+v)\cdot(u-w) = (-3+3+1+a) = 1 + a = 0$ ➔ de donde a=-1

Por lo que si a= -1, entonces (u+v) y (u-w) son ortogonales.

3.- Determina los valores de a y b, con a>0, para que los vectores v_1(a,b,b); v_2(b,a,b) y v_3(b,b,a) sean unitarios y ortogonales dos a dos.

Para que un vector sea unitario, tiene que ocurrir que su módulo sea la unidad, o sea, que su módulo sea igual a 1.

Haciendo que los 3 vectores sean unitarios, obtenemos la misma ecuación:

$$a^2 + 2b^2 = 1$$

Y para que sean ortogonales dos a dos, los productos escalares $v_1 \cdot v_2 = 0$, $v_1 \cdot v_3 = 0$ y $v_2 \cdot v_3 = 0$. De donde obtenemos la misma ecuación:

$$2ab + b^2 = 0$$

Si resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones: $\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 1 \\ 2ab + b^2 = 0 \end{cases}$ obtenemos: (b=0, a=±1, pero como a>0, entonces a=1) y (b=2/3 y a=1/3)

4.- Encuentra el valor del parámetro a para que los vectores v_1(1,a,2), v_2(2,a,1) y v_3(1,1,1) formen una base.

Para que un conjunto de vectores formara una base, tenia que ocurrir que los vectores fueran linealmente independientes (l.i.) y además sistema de generadores (S.G.). Como en este caso nos dan 3 vectores y estamos en el espacio vectorial R^3, es suficiente con que estos 3 vectores sean l.i., y para ello su determinante ha de ser distinto de cero.

$\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+4+a)-(2a+a+2a) = 2a+4-4a-1 = 3-2a$ ➔ Si igualamos a cero obtenemos $a=\frac{3}{2}$, Por tanto si $a \neq \frac{3}{2}$, entonces los vectores son l.i. y forman una base.

Si a=1, escriba el vector w(6,0,2) como combinación lineal de los vectores anteriores.

Si a=1 ➔ $w(6,0,2) = \alpha(1,1,2) + \beta(2,1,1) + \gamma(1,1,1)$, de donde: $\begin{cases} 6 = \alpha + 2\beta + \gamma \\ 0 = \alpha + \beta + \gamma \\ 2 = 2\alpha + \beta + \gamma \end{cases}$.

Resolviendo el sistema obtenemos: $\alpha = 2, \beta = 6, \gamma = -8$

Por tanto: $w = 2v_1 + 6v_2 - 8v_3$

5.- Dado el vector u(-2,2,-4), hallar las coordenadas de los siguientes vectores:
a) Unitarios y de la misma dirección que u.

Un vector es unitario si su módulo es igual a uno, por tanto para calcular un vector unitario con la misma dirección de otro, lo único que tenemos que hacer es dividir el vector por su módulo:

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(-2,2,-4)}{\sqrt{24}} = \frac{(-2,2,-4)}{2\sqrt{6}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$

b) Paralelos a u y de módulo 6

Para que sean paralelos y de módulo 6, lo que tenemos que hacer es multiplicar el vector unitario por 6, y tenemos un vector paralelo (con la misma dirección) y de módulo 6·1=6.

$$\vec{w} = 6\hat{u} = \left(\frac{-6}{\sqrt{6}}, \frac{6}{\sqrt{6}}, \frac{-12}{\sqrt{6}}\right)$$

6.- Dados los vectores $u_1(2,0,0)$; $u_2(0,1,-3)$ y $u_3=a\cdot u_1+b\cdot u_2$, ¿Qué relación deben satisfacer a y b para que el módulo de u_3 valga la unidad?.

Para que el módulo de u_3 sea la unidad:

$u_3(x,y,z) = a(2,0,0) + b(0,1,-3)$ de donde: $\begin{cases} x = 2a \\ y = b \\ z = -3b \end{cases}$, el módulo tiene que se 1:

$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{4a^2+b^2+9b^2} = 1$ ➔ $\boxed{4a^2+10b^2=1}$ y esta es la relación entre a y b.

7.- Determina un vector v de R^3, sabiendo que:

- ***La suma de sus coordenadas es 3.***
- ***V es combinación lineal de los vectores (2,2,2) y (-1,1,0)***
- ***Los vectores (1,0,1);(0,1,0) y v son linealmente independientes.***

Si la suma de sus coordenadas es tres, tenemos : $x+y+z=3$

Si es combinación lineal: $v(x,y,z)=\alpha(2,2,2)+\beta(-1,1,0)$

Y si son linealmente dependientes, entonces: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix}=0$ de donde $z-x=0$ y de donde Z=X.

Si metemos esto en la primera ecuación y despejamos y obtenemos $y=3-2x$

Y sustituyendo en la combinación lineal, obtenemos:
$v(x,3-2x,x)=\alpha(2,2,2)+\beta(-1,1,0)$, sistema que resolviendo nos da como solución:

$(z=1,\alpha=\frac{1}{2},\beta=0)$, por tanto el vector pedido es: $\boxed{V=(1,1,1)}$

8.- Hallar los valores de x que hacen que los siguientes vectores constituyan una base del espacio vectorial R^3: u(x,0,1); v(1,x,2) y w(x,1,1). Expresar el vector t = (-1,0,3) como combinación lineal de $\{u,v,w\}$ para x=0.

Para que 3 vectores de R^3 formen una base, lo único que tengo que hacer comprobar que son l.i., y si lo son pues "safi", es suficiente.

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 2 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix}=(x^2+1)-(x^2-2x)=2x+1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Así que para que estos 3 vectores formen una base ha de ocurrir que x sea distinto de ½: $x\neq\frac{1}{2}$.

Si x=0, entonces $(-1,0,3)=\alpha(0,0,1)+\beta(1,0,2)+\gamma(0,1,1)$, de donde:

$\left\{\begin{array}{r} -1=\beta \\ 0=\gamma \\ 3=\alpha+2\beta+\gamma \end{array}\right.$ y resolviendo obtenemos: $\alpha=5$

Así que:

$$\boxed{(-1,0,3)=5\vec{v}_1-\vec{v}_2}$$

9.- Hallar el área del triángulo de vértices A(1,1,1), B(0,2,5) y C(4,0,2)

Para hallar el área de un triángulo lo hacemos con: $S_T = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$. Lo primero es calcular los vectores $\overrightarrow{AB} = (-1,1,4)$ y $\overrightarrow{AC} = (3,-1,1)$ ➔ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\hat{i} + 13\hat{j} - 2\hat{k}$ y de aquí calculamos la superficie: $S_T = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{25 + 169 + 4} = \frac{\sqrt{198}}{2}$

10.- Hallar un vector que sea perpendicular, a la vez, a los vectores $\vec{u} = (1,0,-1)$ ***y*** $\vec{v} = (2,3,1)$

Para hallar un vector perpendicular a ambos, hemos de hacer el producto vectorial.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k} = (-3,-3,3)$$

11.- ¿Para qué valores de α ***son linealmente independientes los vectores (2,-3,1);(-4,6,-2) y(***α ***,1,2)?.***

3 Vectores son linealmente independientes (l.i.) cuando su determinante es distinto de cero. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 6 & -2 \\ \alpha & 1 & 2 \end{vmatrix} = (24 - 4 + 6\alpha) - (6\alpha - 4 + 24) = 20 + 6\alpha - 6\alpha - 20 = 0$$

Por tanto, como el determinante es 0, son linealmente dependientes. Por lo que no existe ningún valor de α para que sean linealmente independientes.

Si observamos el vector (2,-3,1) y el (-4,6,-2) vemos que ambos son proporcionales, y por tanto linealmente dependientes. Así que estos vectores no serán nunca l.i.

12.- Dada la base $B = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(0,\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)\right\}$ ***comprobar si es normada, ortogonal u ortonormal.***

Para que sea ortogonal, tiene que ocurrir que sus vectores sean perpendiculares, y para ello el producto escalar de todos los vectores ha de ser nulo.

$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(0,\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ➔ Por tanto, como este producto no es nulo, los vectores no son perpendiculares y por tanto no son ortogonales. Si no son ortogonales, tampoco son ortonormales.

Vamos a ver si la base es normada, para que sea normada, sus vectores han de ser unitarios, o sea, tiene que tener todos módulo uno.

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{b}_1| = \sqrt{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}} = \sqrt{5} = 1 \\ |\vec{b}_2| = \sqrt{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}} = \sqrt{5} = 1 \\ |\vec{b}_3| = \sqrt{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}} = \sqrt{5} = 1 \end{array}\right\}$$ ➔ por tanto la base B es normada.

13.- Hallar un vector perpendicular a $\vec{v} = (2,3,4)$ y $\vec{w} = (-1,3,-5)$ y que sea unitario.

Para encontrar un vector que sea perpendicular a otros dos, lo que hacemos es calcular su producto vectorial.

$$\vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \hat{i}(-15-12) - \hat{j}(-10+4) + \hat{k}(6+3) = -27\hat{i} + 6\hat{j} + 9\hat{k}$$

Como lo que nos piden es un vector unitario perpendicular a ambos, lo que vamos a hacer es normalizar este vector.

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{-27\hat{i}+6\hat{j}+9\hat{k}}{\sqrt{729+36+81}} = \frac{-27\hat{i}+6\hat{j}+9\hat{k}}{\sqrt{846}} = \frac{-9\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}}{\sqrt{94}} = \frac{-9\sqrt{94}}{94}\hat{i} + \frac{2\sqrt{94}}{94}\hat{j} + \frac{3\sqrt{94}}{94}\hat{k}$$

14.- Sean los vectores $\vec{v}_1(0,1,0)$; $\vec{v}_2(2,1,-1)$ y $\vec{v}_3(2,3,-1)$:

a) ¿Son los vectores linealmente independientes?

Para que tres vectores sean linealmente dependientes, su determinante tiene que ser igual a cero.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto son linealmente dependientes.

a) ¿Para qué valores de a el vector (4,a+3,-2) puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$?.

$$(4, a+3, -2) = \alpha(0,1,0) + \beta(2,1,-1) + \gamma(2,3,-1)$$

De donde: $$\begin{cases} 4 = 2\beta + 2\gamma \\ a+3 = \alpha + \beta + 3\gamma \\ -2 = -\beta - \gamma \end{cases}$$

Este sistema es S.C.I. porque la primera y la tercera ecuación son proporcionales.

$$\begin{cases} \beta = 2 - \gamma \\ a+3 = \alpha + 2 - \gamma + 3\gamma = \alpha + 2 + 2\gamma \end{cases}$$ ➔ $a = \alpha + 2\gamma - 1$

Pero como α, γ tienen infinitos valores, entonces a también.

De donde a puede ser cualquier número real.