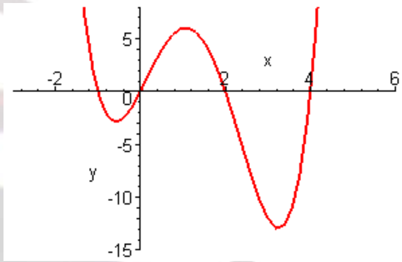
Tema 3: Aplicaciones de las Derivadas

3.1.- Crecimiento y decrecimiento de una función

Sea f una función definida en el intervalo I. Si la función f es derivable sobre el intervalo I, se verifica:

- f es creciente en I ➔ $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$
- f es decreciente en I ➔ $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I$
- f es constante en I ➔ $f'(x) = 0 \ \forall x \in I$
- f es estrictamente creciente en I ➔ $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$
- f es estrictamente decreciente en I ➔ $f'(x) < 0 \ \forall x \in I$

Una función no es siempre creciente ni siempre decreciente, sino que tiene intervalos en los que es creciente, e intervalos en los que es decreciente.



Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función f definida en [a,b], hemos de considerar:

- Los extremos a y b del intervalo
- Los puntos donde f'(x)=0.
- Los puntos donde no existe f'(x)

Tendremos así los posibles extremos de los intervalos en los que cambia de signo f'(x).

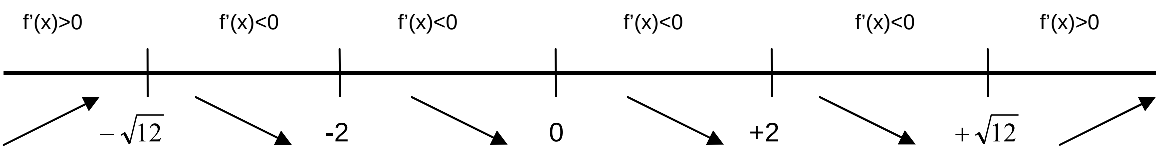
Ejemplo 1: *Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

Lo primero que tenemos que hacer es calcular la derivada de $f(x)$

$f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$ y la igualamos a cero para obtener sus raices:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} = 0 \rightarrow x^2(x^2-12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{12} \\ x = -\sqrt{12} \end{cases}$$

Dibujamos una línea recta en la que ponemos los puntos que hacen la derivada 0, y los puntos donde no está definida la derivada, -2 y 2.



$f(x)$ es creciente en el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{12}\right) \cup \left(\sqrt{12}, +\infty\right)$

$f(x)$ es decreciente en el intervalo $\left(-\sqrt{12}, -2\right) \cup (-2, 2) \cup \left(+\sqrt{12}, +\infty\right)$

Simbolizamos con ↗ que la función es creciente, y con ↘ que es decreciente.

3.2.- Máximos y Mínimos de una función.

- La función f tiene en el punto x_o un ***máximo relativo*** si existe un entorno E de x_o tal que para todo x de E se verifica: $f(x) < f(x_o)$.

- La función f tiene en el punto x_o un ***mínimo relativo*** si existe un entorno E de x_o tal que para todo x de E se verifica: $f(x) > f(x_o)$.

También podemos decir que:

- La función f posee un máximo relativo en el punto donde cambia de ser creciente a ser decreciente.

- La función f posee un mínimo relativo en el punto donde cambia de ser decreciente a ser creciente.

Si la función tiene en x_o un máximo o mínimo, se dice que f tiene un extremo en x_o, y en ese punto $f'(x_o)=0$.

- Si la desigualdad $f(x) < f(x_o)$ se verifica para todo $x \in I$, la función tiene en x_o un ***máximo absoluto*** en I.
- Si la desigualdad $f(x) > f(x_o)$ se verifica para todo $x \in I$, la función tiene en x_o un ***mínimo absoluto*** en I.

En el ejemplo anterior:

$f(x)$ tiene un máximo en $x=-\sqrt{12}$ $\quad f(-\sqrt{12})=-3\sqrt{3}$ en el punto $\left(-\sqrt{12},-3\sqrt{3}\right)$

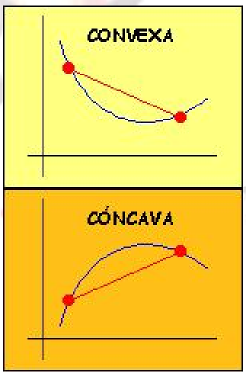
$f(x)$ tiene un mínimo en $x=\sqrt{12}$ $\quad f(\sqrt{12})=3\sqrt{3}$ en el punto $\left(\sqrt{12},3\sqrt{3}\right)$

3.3.- Concavidad y Convexidad:

Sea f una función dos veces derivable en un intervalo I, decimos que:

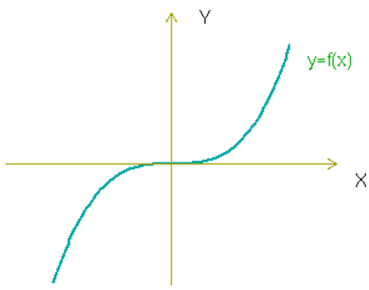
- La función f es convexa si $f''(x) \geq 0$

- La función f es cóncava si $f''(x) \leq 0$



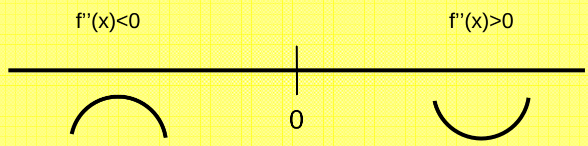
A los puntos donde una función cambia de cóncava a convexa o viceversa se les llama ***puntos de inflexión***, y en ellos ocurre que $f''(x)=0$.

En este ejemplo, la función tiene en x = 0 un punto de inflexión.



En la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ Vamos a calcular ahora los puntos de inflexión. Para ello trabajamos con la segunda derivada. $f''(x)$. Calculamos f''(x).

$f''(x)=\dfrac{8x(x^2+12)}{\left(x^2-4\right)^3}$ y la igualamos a cero $f''(x)=\dfrac{8x(x^2+12)}{\left(x^2-4\right)^3}=0$ ➔ $8x(x^2+12)=0$ ➔ x = 0



Por tanto, la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ Tiene un punto de inflexión en el punto (0,0)

3.4.- TEOREMAS IMPORTANTES:

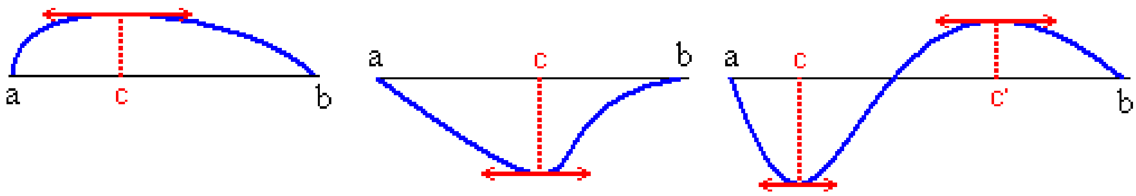
3.4.1.- Teorema de Rolle:

Sea f una función real que cumple las condiciones:

- Está definida y es contínua en [a,b]
- Es derivable en (a,b)
- f(a) = f(b)

entonces existe al menos un punto $c \in \left]a,b\right[$ tal que $f'(c)=0$

Geométricamente, quiere decir que si se cumplen todas las propiedades, entonces la curva de f tiene en c una recta tangente que es paralela al eje OX.



Ejemplo 3: Comprobar que la función f(x) = -x^2 + 2x + 5 cumple las condiciones de teorema de Rolle en el intervalo [-1,3] y que efectivamente verifica ese teorema.

La función f(x) es una función polinómica y por tanto contínua en todo $\mathbb{R}$, por tanto contínua en [-1,3], por ser polinómica es derivable en $\mathbb{R}$ y por tanto lo es también en (-1,3).
Calculamos f(-1)=2 y calculamos f(3)=2, por tanto cumple las tres propiedades del teorema de Rolle, entonces tiene que existir un c, del intervalo (-1,3) tal que f'(C)=0.
Calculamos f'(x)=-2x+2 y la igualamos a 0. ➔ x=1. Entonces en el punto x=1, la tangente a la curva es paralela al eje OX.

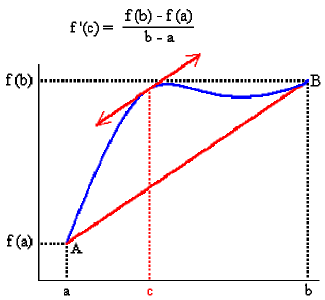
3.4.2.- Teorema del Valor medio de Lagrange.

Sea f una función real que cumple las condiciones:

- Es contínua en [a,b]
- Es derivable en (a,b)

Entonces:

existe al menos un punto $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Geométricamente, el teorema del valor medio nos dice que entre los puntos a y b existe un punto c en el que existe una recta tangente a la curva que es paralela a la recta que une los puntos a y b.

<u>*Ejemplo 4:*</u> Aplicar el teorema del valor medio a la función $[0,1] \to \mathbb{R}$, dada por f(x)=x(x-2). Halla el valor de C.

La función es contínua y derivable en todo R, por tanto en [a,b]. Calculamos f(0)=0 y f(1)=-1.

Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = -1$.

Derivamos: f'(x)= 2x-2 e igualamos a x=-1; encontramos 2x=1. ➔ x = 0,5

3.4.3.- Teorema de Cauchy:

Si f y g son funciones que cumplen las siguientes condiciones:

- Están definidas y son contínuas en [a,b]
- Son derivables en (a,b)
- $g(a) \neq g(b)$
- g'(x) no se anula en ningún punto de (a,b)

entonces, existe al menos un punto $c \in]a,b[$ tal que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

<u>*Ejemplo 5:*</u> ¿Se puede aplicar la fórmula de Cauchy a las funciones definidas por $f(x)=x^2$ y $g(x)=x^3$ en el intervalo [-1,1]?.

Ambas funciones son contínuas en [-1,1] y derivables en (-1,1), y tenemos que g(-1)=-1 no es igual a g(1)=1.
Calculamos $g'(x)= 3x^2$, pero vemos que se anula en x=0, por tanto no podemos aplicar Cauchy.

3.4.4.- Regla de L´Hôpital

Sean f y g dos funciones reales que cumplen las siguientes condiciones:

- las funciones f y g son derivables en un entorno E del punto a.
- f(a)=g(a)=0
- Existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces se cumple que: $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Si f'(a) = g'(a) = 0, siendo las funciones f'(x) y g'(x) derivables en a, se puede aplicar otra vez la regla de L'Hôpital, y así sucesivamente.

Ejemplo 6: Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{senx - x}{tgx - x}$

Este límite es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, como ambas funciones son derivables en R, y además son nulas en 0, podemos aplicar L`Hôpital, de forma que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx - x}{tgx - x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = \lim_{x\to 0}\cos^2 x\,\frac{\cos x - 1}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}(-\cos^2 x)\cdot\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{1+\cos x} = \frac{-1}{2}$$

De las 7 formas indeterminadas que vimos en el capitulo 8 de funciones y continuidad, la Regla de L'Hôpital solo es aplicable en los casos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Sin embargo todas las otras indeterminaciones pueden reducirse a estas dos.

Caso Indeterminación $0\cdot\infty$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ entonces: $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0\cdot\infty = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$, que se puede resolver con la regla de L'Hôpital.

Caso Indeterminación $\infty - \infty$

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$; entonces $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \infty - \infty$ y $\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$ que se puede resolver con L'Hôpital.

Caso de las indeterminaciones: 0º, $\infty^0, 1^\infty$

Para estas utilizaremos: $A^B = e^{B\ln A}$, de modo que las tres indeterminaciones se reducen a formas $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, que se pueden resolver mediante la regla de L'Hôpital.

3.5.- Optimización de Funciones:

Los problemas de optimización son una de las aplicaciones más inmediatas e interesantes del cálculo de derivadas. El problema es determinar los extremos relativos (máximos ó mínimos) de una función.

Procedimiento a la hora de plantear un problema:

a) Expresión de la magnitud que se desea optimizar. (Por ejemplo el área)

b) Si la expresión a optimizar tiene más de una variable, relacionarlas mediante las condiciones del enunciado.

c) Sustituir en la primera expresión, de forma que esta solo dependa de una variable, y esta será la función a optimizar f(a).

d) Imponer la condición de extremo relativo, esto es, primera derivada igual a cero y despejar la variable a. {f'(a)=0 y calcular valores de a}.

e) Mediante la segunda derivada comprobar si el extremo es máximo o mínimo:

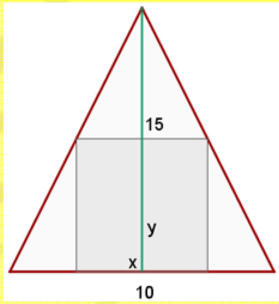
$$Si\ f''(a)\begin{cases} >0 \rightarrow \text{ a es mínimo} \\ >0 \rightarrow \text{a es máximo} \end{cases}$$

f) Calcular el resto de variables y el valor de la función optimizada.

***Ejemplo 7:* Hallar las dimensiones del mayor rectángulo inscrito en un triángulo isósceles que tiene por base 10 cm y por altura 15 cm.**

La superficie del triángulo se calcula: $S = x \cdot y$.

Al tener dos triángulos semejantes se cumple que: $\frac{x}{10} = \frac{15-y}{15}$, de donde: $x = \frac{2(15-y)}{3}$



Sustituimos en la expresión de S, y tenemos: $S = \frac{2(15-y)}{3} \cdot y = \frac{2}{3}(15y - y^2)$

Derivamos: $S' = \frac{2}{3}(15-2y)$ e igualamos a cero: $S' = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}(15-2y) = 0$

De donde obtenemos: $y = \frac{15}{2}$ y de $x = \frac{2(15-y)}{3}$, obtenemos el valor de x: $x = 5$

Para ver si es máximo o mínimo, calculamos la segunda derivada: $y'' = \frac{2}{3}(-2) = \frac{-4}{3} < 0$.

Por tanto para que el área sea máxima, ha de ocurrir que $x = 5$ e $y = \frac{15}{2}$

3.6.- Ejercicios :

1.- Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = (x-1)e^x$

2.- Hallar el conjunto de definición de la función $f(x) = \ln[(x-1)\cdot(x-2)]$

3.- Demostrar que la ecuación $x^3 - 36x + 10 = 0$ no puede tener dos raíces reales en el intervalo (-1,2).

4.- Demostrar que la ecuación $x^5 + x - 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real entre 0 y 1

5.- Se considera la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Estudiar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los extremos relativos.

6.- Encontrar las funciones polinómicas de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya segunda derivada sea x-1.

¿Cuáles de ellas tienen un mínimo relativo en el punto $\left(4, \frac{-1}{3}\right)$.

7.- Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, Hallar los coeficientes a,b,c,d sabiendo que la ecuación de la tangente a la curva en el punto de inflexión (1,0) es y=-3x+3 y que la función presenta un extremum en el punto de abscisa x=0.

8.- Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Hallar los coeficientes a,b,c,d, sabiendo que la función tiene un máximo en (0,3) un mínimo en x=2 y un punto de inflexión en (1,1).

9.- Dada la función definida en $]0,+\infty[$ $f(x)=\sqrt[x]{x}$, hallar sus máximos y mínimos.

10.- Estudiar el crecimiento y la concavidad de la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

11.- Estudiar la concavidad de la función: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$

12.- Consideremos la función la función $f(x)=x-\ln\left(x^2+1\right)$

a) Determina sus máximos, mínimos y puntos de inflexión

b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

13.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-senx}{x+sen3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\cdot senx}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x-senx}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x-1)}{\cos x-senx+x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{senx}-x-1}{2x^2-x^3}$ g) $\lim\limits_{x\to 0}tgx\cdot\ln x$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{senx}-\dfrac{1}{x}\right)$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\dfrac{1}{x}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{e}{e^x-e}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$ l) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3^x+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ m) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$ n) $\lim\limits_{x\to 0}x^{senx}$

ñ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{tgx}$

14.- Halla dos números cuya suma es 20, sabiendo que su producto es máximo. Sol.: 10,10

15.- Determina dos números cuya suma sea 24 y tales que el producto del uno por el cubo del otro sea máximo. Sol.: 18,6

16.- Descompón 100 en dos sumandos tales que el cuádruplo del primero más el cuadrado del segundo sea mínimo. Sol.:98, 2

17.- Halla la altura del cono de volumen máximo que puede inscribirse en una superficie esférica de radio R. Sol.: x=4R/3

18.- Se quiere vallar una campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 8 euros/m y la de los otros 1 euro/m, halla el área del mayor campo que puede cercarse con 2880 euros. Sol.:115200m^2

19.- De todos los triángulos isósceles de 12 cm de perímetro, halla las dimensiones de los lados del que tenga área máxima. Sol.:4,4,4.

21.- Dividir un segmento de 60 cm en dos partes, con la propiedad de que la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre ellas sea mínima. Sol.: 30cm y 30 cm.

22.- Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio 12 cm, calcula las dimensiones del que tenga área máxima. Razona el proceso. Sol.: cuadrado.

3.7.- Soluciones:

1.- Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=(x-1)e^x$

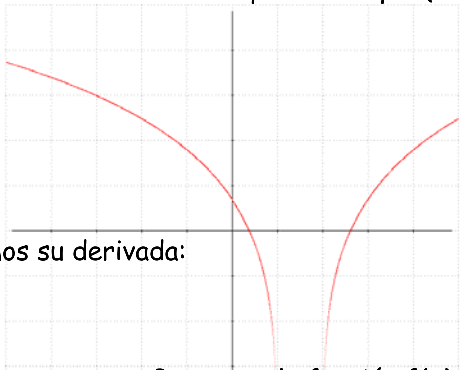
El dominio de definición de esta función es todo R.
Calculamos la derivada de la función:
$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=e^x(x+1-1)=xe^x$
Igualamos a cero, y calculamos los posibles puntos de cambio monotonía.
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	↘	Min	↗

Por tanto la función f(x)
es decreciente en $]-\infty,0]$
es creciente en $[0,+\infty[$

2.- Hallar el conjunto de definición de la función $f(x)=\ln[(x-1)\cdot(x-2)]$

El conjunto definición son los valores de la variable independiente x, para los que la variable independiente f(x) está bien definida. En este caso los valores que hacen que (x-1)(x-2)>0.



Por tanto (x-1)>0 y (x-2)>0, de donde x > 2
Y (x-1)<0 y (x-2)<0 ➔ x < 1

Por lo tanto: Dom(f)= $]-\infty,1[\,U\,]2,+\infty[$

Para los intervalos de crecimiento, calculamos su derivada:
$f'(x)=\dfrac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$ $\quad f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
f'(x)	-	A.V.	0	A.V.	+
f(x)	↘	A.V.	No Definida	A.V.	↗

Por tanto la función f(x)
es decreciente en $]-\infty,1[$
es creciente en $]2,+\infty[$

3.- Demostrar que la ecuación $x^3-36x+10=0$ ***no puede tener dos raíces reales en el intervalo (-1,2).***

Definimos la función $f(x)=x^3-36x+10$, como es polinómica su dominio de definición es todo R.
Calculamos su derivada: $f'(x)=3x^2-36$ y la igualamos a cero:

$$f'(x)=3x^2-36=0 \Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{3}$$

Estos son los posibles puntos donde la derivada cambia de signo, (y donde la función f(x) cambiaria su monotonía) y ninguno de ellos se encuentra dentro del intervalo (-1,2). Por tanto la función f no cambia su monotonía en este intervalo.
Veamos como es la derivada en el 0 por ejemplo. Vemos que f'(0)=-36, por tanto la función es decreciente en este intervalo.

Entonces la ecuación $x^3-36x+10=0$ en el intervalo (-1,2) solo puede tener una solución, porque su monotonía no cambia, y solo podría cortar con el eje OX en un punto.

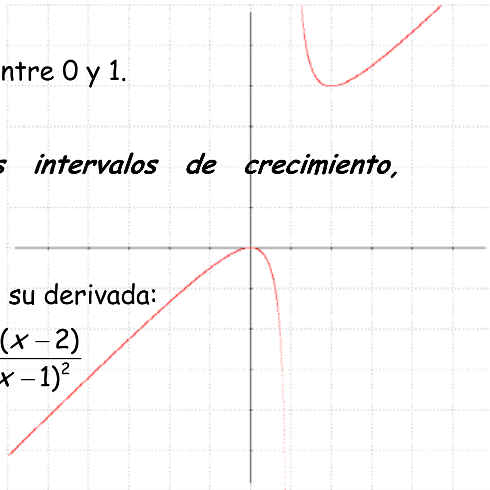
4.- Demostrar que la ecuación $x^5+x-1=0$ tiene exactamente una raíz real entre 0 y 1.

Como en el caso anterior, definimos una función $f(x)=x^5+x-1$ en el intervalo [0,1], que es contínua por ser polinómica.
Calculamos su derivada e igualamos a cero: $f'(x)=5x^4+1$, como esta derivada es siempre positiva, la función es siempre creciente. Vamos a ver si corta al eje.

Aplicamos el teorema de bolzano en el intervalo [0,1], Como f es contínua en [0,1] y como f(0)=-1 y f(1)=1, la función cambia de signo en este intervalo, entonces según Bolzano: $\exists c \in (0,1) / f(c)=0$

Por tanto esta función solo corta al eje X una vez por ser siempre creciente, y el punto de corte c está en el intervalo (0,1).

Así que la ecuación $x^5+x-1=0$ tiene solo una solución real entre 0 y 1.



5.- Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$. Estudiar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los extremos relativos.

El dominio de definición de esta función es $\Re-\{1\}$, calculamos su derivada:

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Esta derivada es cero:

$$f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$$

	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	No definida	-	0	+
f(x)	↗	Max	↘	A.V.	↘	Min	↗

Por tanto la función f(x)
es decreciente en $[0,1[\cup]1,2]$
es creciente en $]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$
Máximo Relativo (0,0)
Mínimo Relativo (2,4)

6.- Encontrar las funciones polinómicas de la forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ cuya segunda derivada sea x-1.

¿Cuáles de ellas tienen un mínimo relativo en el punto $\left(4,\frac{-1}{3}\right)$.

Calculamos la primera derivada de f(x): $f'(x)=3ax^2+2bx+c$
Y después calculamos la segunda derivada: $f'(x)=6ax+2b$
Igualamos ambas:

$$6ax+2b=x-1\Rightarrow\begin{cases}6a=1\rightarrow a=\dfrac{1}{6}\\2b=-1\rightarrow b=\dfrac{-1}{2}\end{cases}$$

Así que las funciones cuya segunda derivada es x-1 son funciones de la forma: $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+cx+d$

Si además tienen un mínimo en el $\left(4,\frac{-1}{3}\right)$, ocurre que $f(4)=-\frac{1}{3}$ y que $f'(4)=0$.

Por tanto:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ➔ $f'(4) = 48a + 8b + c = 0$ ➔ $f'(4) = \frac{48}{6} - \frac{8}{2} + c = 0$ ➔ C=-4

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ➔ $f(4) = \frac{64}{6} - \frac{16}{2} - 16 + d = \frac{-1}{3}$ ➔ $d = -11 + 8 + 16$ ➔ d=13

Por tanto la función de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya derivada segunda sea x-1 y que además tienen un mínimo en $\left(4, \frac{-1}{3}\right)$ es:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{6}x^3 + -\frac{1}{2}x^2 - 4x + 13}$$

7.- Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, Hallar los coeficientes a,b,c,d sabiendo que la ecuación de la tangente a la curva en el punto de inflexión (1,0) es y=-3x+3 y que la función presenta un extremum en el punto de abscisa x=0.

Si (1,0) es punto de inflexión: $\begin{cases} f''(1) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} f''(x) = 6ax \;\; + 2b \Rightarrow f'(1) = 6a + 2b = 0 \\ f(1) = a + b + c + d = 0 \end{cases}$

Si presenta un extremun en x=0 ➔ f'(0)=0 ➔ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f(1) = c = 0$

Si en x=1 tiene una tangente de pendiente m=-3 ➔ f'(1)=-3 ➔ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f'(1) = 3a + 2b + c = -3$

Con todas estas ecuaciones, tenemos que:

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} \begin{cases} 6a + 2b = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ c = 0 \\ 3a + 2b + c = -3 \end{cases}$$

De (1)-(3) obtenemos que: 3a=3 ➔ a=1

Sustituyendo en (1) obtenemos b=-3

Y de (2): d=3-1=2

Por tanto la función es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

8.- Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hallar los coeficientes a,b,c,d, sabiendo que la función tiene un máximo en (0,3) un mínimo en x=2 y un punto de inflexión en (1,1).

Del máximo en (0,3) $\begin{cases} f(0) = 3 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} f(0) = d = 3 \\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f'(0) = c = 0 \end{cases}$

Del mínimo en x=2 ➔ $f'(2) = 0$ ➔ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f'(2) = 6a + 4b + c = 2$

Del punto de inflexión en (1,1) ➔ $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f''(1) = 0 \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} f(1) = a + b + c + d = 1 \\ f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''(1) = 6a + 2b = 0 \end{cases}$

Con todas estas ecuaciones tenemos:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 6a+2b=0 \\ c=0 \\ d=3 \end{cases}$$

De donde:

(2)-2(1)➔ 4a-6=-2 ➔ a=1

Y de (2) b=-3

Por tanto la función es: $f(x)=x^3-3x^2+3$

9.- Dada la función definida en $]0,+\infty[$ $f(x)=\sqrt[x]{x}$ ***, hallar sus máximos y mínimos.***

Calculamos su derivada, como es una función elevada a otra, aplicamos derivación logarítmica.

$$f(x)=x^{\frac{1}{x}}$$

Aplicamos logaritmos

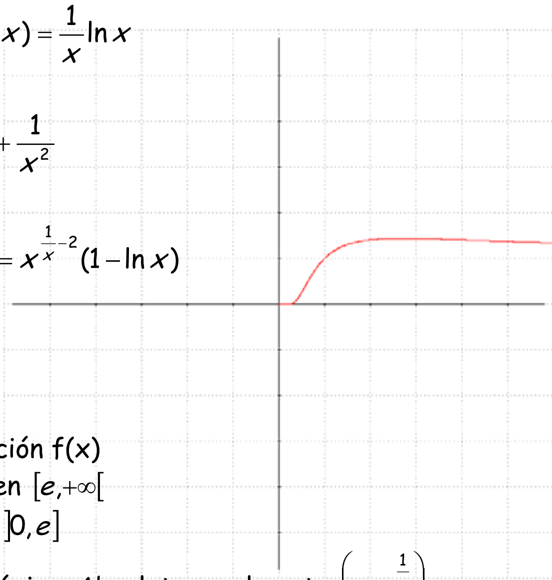
$$\ln f(x)=\ln x^{\frac{1}{x}} \rightarrow \ln f(x)=\frac{1}{x}\ln x$$

Derivamos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{-1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}$$

Despejamos:

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}\right)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$$



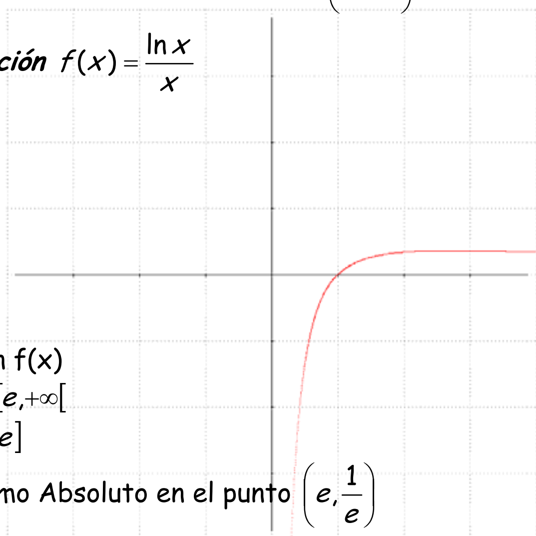
f'(x)=0 ↔ (1-lnx)=0 ➔ lnx=1 ➔ x=e

	0	e	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	↗	Max	↘

Por tanto la función f(x)
es decreciente en $[e,+\infty[$
es creciente en $]0,e]$

f presenta un máximo Absoluto en el punto $\left(e,e^{\frac{1}{e}}\right)$

10.- Estudiar el crecimiento y la concavidad de la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$



El dominio de esta función es $]0,+\infty[$
Calculamos su derivada:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2} \rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e$$

	0	e	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	↗	Max	↘

Por tanto la función f(x)
es decreciente en $[e,+\infty[$
es creciente en $]0,e]$

f presenta un máximo Absoluto en el punto $\left(e,\frac{1}{e}\right)$

Para estudiar la concavidad y convexidad utilizamos la 2ª derivada:

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{x(-1-2+2\ln x)}{x^3}=\frac{2\ln x-3}{x^3}\ \rightarrow\ f''(x)=0 \Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$$

	0	$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
f''(x)	-	0	+
f(x)	$\cup$	P.Inflexión	$\cap$

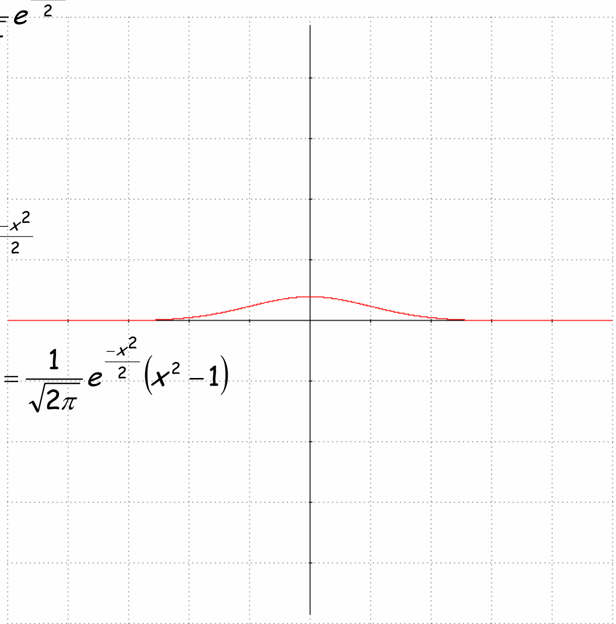
Por tanto la función f(x)

es convexa en $\left[e^{\frac{3}{2}},+\infty\right[$

es cóncava en $\left]0,e^{\frac{3}{2}}\right]$

f presenta un punto de inflexión en el punto $\left(e^{\frac{3}{2}},\frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}\right)$

11.- Estudiar la concavidad de la función: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$



El dominio de esta función es todo R.

Calculamos su primera derivada:

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Ahora calculamos su segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}+\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}\left(x^2-1\right)$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

	$-\infty$		-1		+1		$+\infty$
f''(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		$\cup$	P.Inflexión	$\cap$	P.Inflexión	$\cup$	

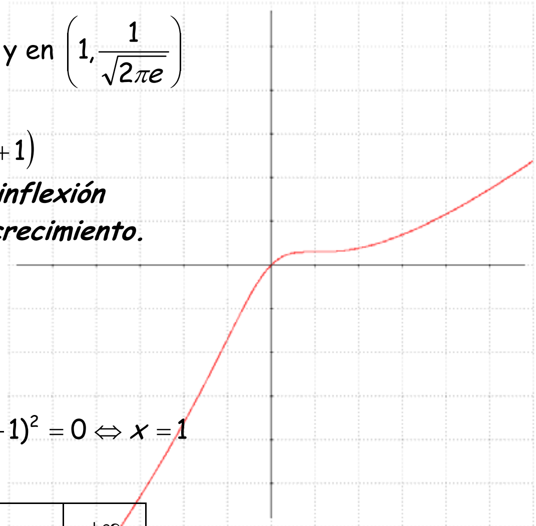
Por tanto la función es convexa en $\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$
Y es cóncava en [-1,1]

La función presenta puntos de inflexión en $\left(-1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$ y en $\left(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$

12.- Consideremos la función la función $f(x)=x-\ln\left(x^2+1\right)$

a) Determina sus máximos, mínimos y puntos de inflexión

b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.



El dominio de definición de esta función es todo R.
Calculamos su derivada:

$$f'(x)=1-\frac{2x}{x^2+1}\ \rightarrow\ f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$$

	$-\infty$		+1		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	
f(x)		$\nearrow$		$\nearrow$	

La función es siempre creciente, por tanto no tiene máximos ni mínimos.

Para ver sus puntos de inflexión calculamos la 2ª derivada:

$$f'(x)=1-\frac{2x}{x^2+1}$$
$$f''(x)=-\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$
$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

Por tanto la función presenta sendos puntos de inflexión en los puntos de abscisas x=-1 y x=1.

13.- Calcula los siguientes límites:

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-senx}{x+sen3x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+3\cos 3x}=\frac{0}{4}=0$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot senx}{x^2}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot\cos x+senx(senx)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^2 x+sen^2 x}{2x}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+1-2\cos^2 x}{2x}\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{senx+2sen2x}{2}=0$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-senx}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1+tg^2x-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{tg^2x}{1-\cos x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2tgx(1+tg^2x)}{senx}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot(1+tg^2x)^2+2tgx(2tgx(1+tg^2x))}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2+2tg^4x+2tg^2x+4tg^2x+4tg^4x}{\cos x}=\frac{2}{1}=2$$

d) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

e) $$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x-1)}{\cos x-senx+x-1}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)+xe^x}{-senx-\cos x+1}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2e^x+xe^x}{-\cos x+senx}=\frac{2}{-1}=-2$$

f) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{senx}-x-1}{2x^2-x^3}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot e^{senx}-1}{4x-3x^2}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-senx\cdot e^{senx}+\cos^2 x\cdot e^{senx}}{4-6x}=\frac{1}{4}$$

g) $$\lim_{x\to 0}tgx\cdot\ln x=0\cdot\infty=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{tgx}}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-(1+tg^2x)}{tg^2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-tg^2x}{x(1+tg^2x)}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2tgx(1+tg^2x)}{(1+tg^2x)+x(2tgx(1+tg^2x))}=\frac{0}{1}=0$$

h) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{senx}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-senx}{xsenx}\right)=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{senx+x\cos x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{\cos x+\cos x-xsenx}=\frac{0}{2}=0$$

i) $\lim_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{senx}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x-senx}{xsenx}\right)=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+xsenx-\cos x}{senx+x\cos x}=$

$\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{senx+x\cos x}{\cos x+\cos x-xsenx}=\frac{0}{2}=0$

j) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{e}{e^x-e}-\frac{1}{x-1}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 1}\left(\frac{e(x-1)-e^x+e}{(e^x-1)\cdot(x-1)}\right)=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{e-e^x}{e^x(x-1)+(e^x-1)}=$

$=\lim_{x\to 1}\frac{e-e^x}{xe^x-1}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-e^x}{e^x+xe^x}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{1+x}=\frac{-1}{2}$

k)

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+x)}\right)=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+x-1}{1+x}}{\frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{1+x}}=$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+1+\frac{1+x}{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+1+1}=\frac{1}{2}$

l) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=1^\infty=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{3^x+2^x}{2}\right)}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{3^x+2^x}{2}\right)}{x}}=e^{\ln\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{3^x+2^x}{2}\right)}{x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(3^x\ln 3+2^x\ln 2)}{2}}{\frac{3^x+2^x}{2}}=\frac{\ln 3+\ln 2}{2}=\frac{1}{2}\ln 6=\ln 6^{\frac{1}{2}}=\ln\sqrt{6}$

m) $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=1^\infty=e^{\lim_{x\to 0}\ln(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2}\ln(\cos 2x)}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{3\ln(\cos 2x)}{x^2}}=e^{-6}$

$\lim_{x\to 0}\frac{3\ln(\cos 2x)}{x^2}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-6sen2x}{\cos 2x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-3sen2x}{\cos 2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-3tg2x}{x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{-6(1+tg^2 2x)}{1}=-6$

n) $\lim_{x\to 0}x^{senx}=0^0=\lim_{x\to 0}e^{\ln x^{senx}}=e^{\lim_{x\to 0}\ln x^{senx}}=e^{\lim_{x\to 0}senx\ln x}=e^0=1$

$\lim_{x\to 0}senx\ln x=0\cdot\infty=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{senx}}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{sen^2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2x}{-x\cos x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{sen2x}{-\cos x+xsenx}$

$=\frac{0}{-1}=0$

ñ) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tgx}=\infty^0=\lim_{x\to 0}e^{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tgx}}=e^{\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tgx}}=e^{\lim_{x\to 0}tgx\ln\frac{1}{x^2}}=e^0=1$

$\lim_{x\to 0}tgx\cdot\ln\frac{1}{x^2}=0\cdot\infty=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{tgx}}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2}{x}}{\frac{-1-tg^2x}{tg^2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2tg^2x}{-x-xtg^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2tg^2x}{x+xtg^2x}$

$=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4tgx(1+tg^2x)}{1+tg^2x+2tgx(1+tg^2x)}=\frac{0}{1}=0$