# Tema 1: Funciones, Límites y Continuidad

**1.1.- Función Real de variable Real:** Una función numérica de una variable real es una ley que hace corresponder a cada elemento de un conjunto A un número real. La representaremos de la siguiente forma:

$$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

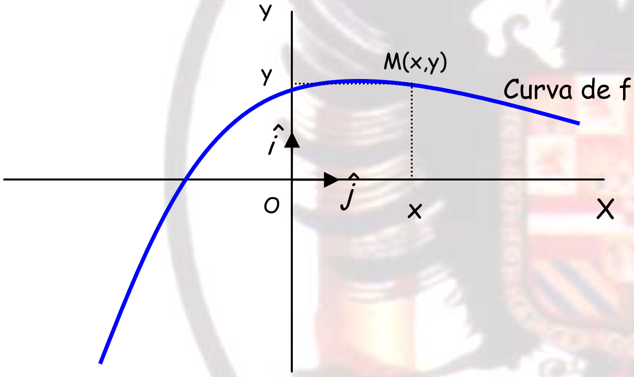
Ejemplo 1: $f : [1,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$

donde $x$ es la variable independiente y $f(x)$ es la variable dependiente.

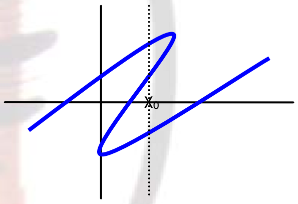
Al conjunto A se le llama conjunto de definición de $f$ o ***dominio*** (son los valores de x para los que la función está definida).

Se llama ***recorrido*** de una función f, al conjunto de valores que toma la variable dependiente f(x).

Respecto a un sistema de referencia ($O,\hat{i},\hat{j}$) del plano, el conjunto de puntos *M(x,y)* del plano tales que $x \in A, y = f(x)$, se llama gráfica o curva de la función $f$.




Una función, ***nunca vuelve hacia atrás***, ya que para cada valor de x, obtenemos un solo valor de f(x).




- La función $f : A \subset R$ está acotada superiormente, si $\forall x \in A, \exists c \in \mathbb{R} / f(x) \leq c$. A los números c que cumplen esta propiedad se les llama mayorantes o cotas superiores de $f$.

- La función $f : A \subset R$ está acotada inferiormente, si $\forall x \in A, \exists c \in \mathbb{R} / f(x) \geq c$. A los números c que cumplen esta propiedad se les llama minorantes o cotas inferiores de $f$.

$f$ se dice que f está ***acotada*** si existen cotas superiores e inferiores, ó $\exists P \in \mathbb{R}^{+} / \forall x \in A, |f(x)| \leq P$

*Ejemplo 2:* Sea $f : A \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$

- Si $A = [0,2]$, la función está acotada superiormente: $\forall x \in A, \exists c \in \mathbb{R} / f(x) \leq 4$, y además, la función está acotada inferiormente ya que $\forall x \in A, \exists c \in \mathbb{R} / f(x) \succ -7$

Por tanto la función es Acotada, por estar acotada superior e inferiormente.

- Si $A = \mathbb{R}$, la función no está acotada superiormente ya que cualquiera que sea el número real M, siempre existe un x tal que $f(x) = x^2 \geq M$. Esta función si está acotada inferiormente porque $\forall x \in A, f(x) \geq 0$.

Por tanto la función no es acotada porque no tiene cotas superiores.

## 1.2.- Operaciones con funciones:

| OPERACIÓN | NOTACIÓN | OPERACIÓN | NOTACIÓN |
|---|---|---|---|
| Suma y diferencia | $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ | Cociente | $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ |
| Producto | $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$<br>$(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$ | Composición | $(f \circ g)(x) = f(g(x))$<br>No es conmutativa. |

### 1.2.1.- Composición de funciones:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones, componer dos funciones, es aplicar el resultado de una de ellas a la otra.

$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$: g compuesta con f $\qquad$ $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$: f compuesta con g

**Ejemplo 3:** Sean $f(x) = \frac{1}{x-1}$ y $g(x) = x^2 - 1$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = [f(x)^2 - 1] = \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 - 1 = \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2} \qquad (f \circ g)(x) = f[g(x)] = \frac{1}{g(x)-1} = \frac{1}{x^2-1-1} = \frac{1}{x^2-2}$$

## 1.3.- Inversa de una función:

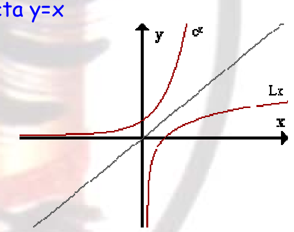
Dada una función $f$, se define su inversa y se representa por $f^{-1}$, como la función que verifica: $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$.

Para calcular la función inversa despejamos x en función de y.

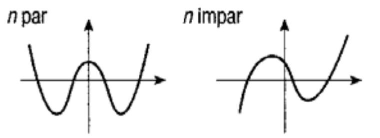
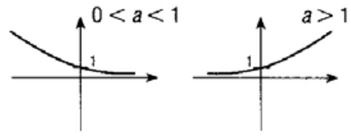
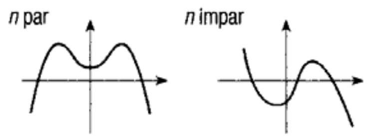
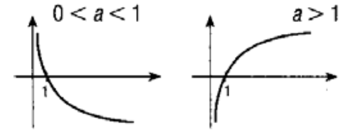
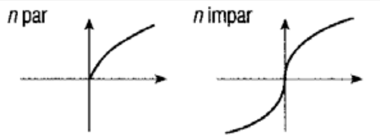
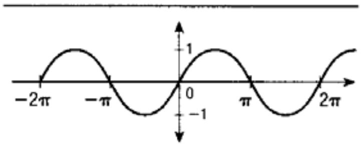
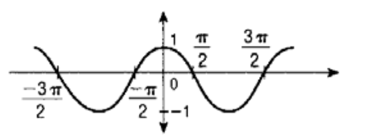
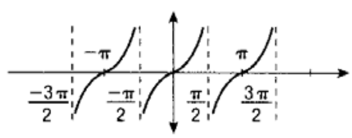
**Ejemplo 4:** Sean $f(x) = 2^x$ y su función inversa: $f^{-1}(x) = \log_2(x)$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f[\log_2 x] = 2^{\log_2 x} = x$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(2^x) = \log_2 2^x = x \log_2 2 = x$$

Gráficamente, una función y su inversa son simétricas respecto de la recta y=x




## 1.4.- Funciones elementales de una variable real:

| MODELO | | GRÁFICA | MODELO | GRÁFICA |
|---|---|---|---|---|
| Polinómica | $a_n > 0$ |   | Exponencial |   |
| | $a_n < 0$ |   | Logarítmica |   |
| Irracional | |   | sen x |   |
| cos x | |   | tg x |   |

- Funciones Polinómicas, son de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ...... + a_1 x + a_o$ y su dominio es R.
- Funciones Racionales, son de la forma $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ...... + a_1 x + a_o}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ...... + b_1 x + b_o}$ su dominio es R menos los valores que anulan el denominador.
- Funciones Irracionales, son del tipo $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, siendo su dominio:
  - El mismo que el de $g(x)$ si n es impar
  - El conjunto de valores reales que hagan $g(x) \geq 0$ si n es par
- Funciones exponenciales, son de la forma $f(x) = a^{g(x)}$, con a > 0 y a ≠ 1, su dominio es el mismo que el de $g(x)$.
- Funciones logarítmicas, son de la forma $f(x) = \log_a g(x)$, con a > 0. Su dominio son los valores que hacen $g(x) > 0$.
- Funciones circulares: $f(x) = senx, f(x) = \cos x$, su dominio es $\mathbb{R}$.

A partir de estas dos, podemos definir el resto de funciones circulares:

$$tg(x) = \frac{senx}{\cos x},\ \sec(x) = \frac{1}{\cos x} \text{ sus dominios son } \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}(2k+1), k \in Z\right\}$$

$$ctg(x) = \frac{\cos x}{senx}, \cos ec(x) = \frac{1}{senx} \text{ sus dominios son } \mathbb{R} - \{k\pi, k \in Z\}$$

- Función Valor Absoluto: $f(x) = |x| = \begin{cases} \text{f(x) si } x \geq 0 \\ -\text{f(x) si } x < 0 \end{cases}$

## 1.5.- Funciones definidas a trozos:

Decimos que una función está definida a trozos si su expresión algebraica depende del intervalo en el que se encuentre el número real cuya imagen se quiere calcular. A cada trozo llamaremos *rama de la función*.

Ejemplo 5: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x < 0 \\ x^2 + 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

## 1.6.- Limite de una función en un punto:

- ✓ Se dice que f tiene en el punto $x_o$ el límite l, si $\lim_{x \to l} f(x) = l$
- ✓ Una forma más rápida de calcular este límite es sustituir directamente x por el valor $x_o$.

$$\lim_{x \to l} f(x) = f(x_o)$$

Ejemplo 6: Sea f(x)=3x, calcular el límite de f(x) en el punto $x_o$=2

$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 3x = f(2) = 6$

### 1.6.1.- Límites laterales:

Si la función está definida a trozos, se dice que f tiene límite en un punto $x_o$ si existen los límites laterales y estos coinciden:

$$\lim_{x \to l^-} f(x) = \lim_{x \to l^+} f(x) = \lim_{x \to l} f(x) = l$$

Ejemplo 7: Sea $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 \text{ si } x < 0 \\ x^2 + 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

calcular el límite de f(x) en el punto $x_o$=0

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} 3x + 1 = 1 \\ \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 + 1 = 1 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

### 1.6.2.- Cálculo de límites:

- $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$ (Si el resultado no es $\infty-\infty$)
- Si $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to a}[\lambda\cdot f(x)]=\lambda\cdot\lim_{x\to a}f(x)$
- $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$ (Si el resultado no es $0\cdot\infty$)
- Si $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$; $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$ (Si el resultado no es $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$)
- Si $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{\lim_{x\to a}f(x)}=0$
- Si $\lim_{x\to a}f(x)=0$; $\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{\lim_{x\to a}f(x)}=\frac{1}{0}=\infty$
- Si $\lim_{x\to a}f(x)>0$; $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^{\lim_{x\to a}g(x)}$ (Si no resulta $\infty^0, 1^\infty, 0^0$)

## 1.7.- Límites en el infinito:

Cuando $x\to\infty$, una función puede comportarse de diversas maneras: $\begin{cases}\lim_{x\to\infty}f(x)=l\\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\pm\infty\end{cases}$

### 1.7.1.- Límite finito:

$\lim_{x\to\infty}f(x)=l$ Podemos conseguir que f(x) esté tan próximo de $l$ como queramos, agrandando x.

### Operaciones con los límites finitos:

Si $\lim_{x\to\infty}f(x)=a$ y $\lim_{x\to\infty}g(x)=b$, se cumplen las siguientes relaciones:

- $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to+\infty}f(x)+\lim_{x\to+\infty}g(x)=a+b$
- $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to+\infty}f(x)-\lim_{x\to+\infty}g(x)=a-b$
- $\lim_{x\to+\infty}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to+\infty}f(x)\cdot\lim_{x\to+\infty}g(x)=a\cdot b$
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to+\infty}f(x)}{\lim_{x\to+\infty}g(x)}=\frac{a}{b}$ Si b ≠ 0
- $\lim_{x\to+\infty}(f(x))^{g(x)}=\left[\lim_{x\to+\infty}f(x)\right]^{\lim_{x\to+\infty}g(x)}=a^b$ Si f(x) > 0
- $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to+\infty}f(x)}=\sqrt[n]{a}$ Si n es impar ó n es par pero f(x) ≥ 0
- $\lim_{x\to+\infty}[\log_b f(x)]=\log_b[\lim_{x\to+\infty}f(x)]=\log_b a$ Si b > 0 y f(x) > 0.

### 1.7.2.- Límite infinito

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\pm\infty$ Podemos conseguir que f(x) sea tan grande ó tan "negativa" como queramos simplemente con hacer $x$ lo suficientemente grande.

### 1.7.3.- Funciones equivalentes en un punto:

| $x \to 0$ | |
|---|---|
| Sen x | X |
| tg x | X |
| Arcsen x | X |
| Arctg X | X |
| 1 - Cos X | $X^2/2$ |
| $e^x - 1$ | X |
| ln (1 + x) | X |
| $x \to 1$ | |
| ln (x) | X - 1 |
| Sen (X - 1) | X - 1 |

Se dice que las funciones f y g son equivalentes en un punto a (a finito, $+\infty, -\infty$), si:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Si en una expresión figura como factor o divisor una función, el límite no varia al sustituir dicha función por otra equivalente.

### 1.7.4.- Cociente de Polinomios:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ax^p + a'x^{p-1} + \dots}{bx^q + b'x^{q-1} + \dots} = \begin{cases} \pm\infty & \text{Si } p > q \\ 0 & \text{Si } p < q \\ \frac{a}{b} & \text{Si } p = q \end{cases}$$

## 1.8.- Cálculo de Límites:

| *Sumas* | *Productos* | *Cocientes* | *Potencias* |
|---|---|---|---|
| $(+\infty) + (l) = (+\infty)$<br>$(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$<br>$(-\infty) + (l) = (-\infty)$<br>$(-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$<br>$-(-\infty) = (+\infty)$ | $(+\infty)\cdot(l) = \begin{cases} (+\infty) \text{ si } l > 0 \\ (-\infty) \text{ si } l < 0 \end{cases}$<br>$(+\infty)\cdot(+\infty) = (+\infty)$<br>$(-\infty)\cdot(l) = \begin{cases} (+\infty) \text{ si } l < 0 \\ (-\infty) \text{ si } l > 0 \end{cases}$ | $\frac{(l)}{(\pm\infty)} = 0$<br>$\frac{(l)}{(0)} = (\pm\infty) \text{ si } l \neq 0$<br>$\frac{(\pm\infty)}{0} = (\pm\infty)$<br>$\frac{(0)}{(\pm\infty)} = (0)$ | $(+\infty)^{(+\infty)} = (+\infty)$<br>$(+\infty)^{(-\infty)} = (0)$<br>$(+\infty)^{(l)} = (+\infty) \text{ si } l > 0$<br>$(+\infty)^{(l)} = (0) \text{ si } l < 0$<br>$(l)^{(0)} = 1 \text{ si } l \neq 0$<br>$\text{Si } l > 1 \begin{cases} (l)^{(+\infty)} = (+\infty) \\ (l)^{(-\infty)} = (0) \end{cases}$<br>$\text{Si } 0 < l < 1 \begin{cases} (l)^{(+\infty)} = (0) \\ (l)^{(-\infty)} = (+\infty) \end{cases}$ |

## 1.9.- Límites indeterminados:

Existen 7 tipos de inderterminaciones: $\infty - \infty \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0^0 \quad (\pm\infty)\cdot 0 \quad 1^\infty \quad \infty^0$

Vamos a explicar como se resuelven algunas de ellas:

**Tipo** $\infty - \infty$

La forma de resolverla es efectuar la operación y estudiar la expresión resultante. Si aparecen raíces, utilizaremos el conjugado.

*Ejemplo 8:*

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{x^2-6}{x(x-3)} - \frac{1}{x-3}\right] = \infty \Rightarrow \lim_{x\to 3}\left[\frac{x^2-6}{x(x-3)} - \frac{x}{x(x-3)}\right] = \lim_{x\to 3}\left[\frac{x^2-6-x}{x(x-3)}\right] = \lim_{x\to 3}\left[\frac{x+2}{x}\right] = \frac{5}{3}$$

**Tipo 0/0**

Normalmente se da en el cociente de polinomios., para resolverla, tenemos que dividir numerador y denominador por la raíz que haga cero el denominador. Si aparecen raíces utilizaremos el conjugado.

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to c}\frac{P_1(x)(x-c)}{Q_1(x)(x-c)}=\lim_{x\to c}\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

***Ejemplo 9:***

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^3+2x^2+5x+10}=\frac{0}{0}\rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^3+2x^2+5x+10}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)\cdot(x-2)}{(x+2)(x^2+5)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{x^2+5}=\frac{-4}{9}$$

**Tipo** $\frac{\infty}{\infty}$

Normalmente se da en el cociente de polinomios. La forma de resolverla es comparar los infinitos de numerador y denominador.

***Ejemplo 10:***

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-7}{x^3+2x^2}=\frac{\infty}{\infty}\rightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-7}{x^3+2x^2}=0$$ porque el grado del numerador es menor que el del denominador

**Tipo** $\infty\cdot 0$

Esta indeterminación la transformaremos en una del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

**Tipo** $1^{\infty}$

Utilizaremos la "***regla del zapato***" ó regla del nº e. $\boxed{\lim(f(x))^{g(x)}=e^{\lim(f(x)-1)\cdot g(x)}}$

Sabemos que $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=2{,}7172......=e$, pues trataremos de convertir límites con indeterminación de este tipo en límites de esta forma.

***Ejemplo 11:***

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-7}{x^2+2}\right)^{3x}=1^{\infty}\rightarrow \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-7}{x^2+2}\right)^{3x}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+2-9}{x^2+2}\right)^{3x}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+2}+\frac{-9}{x^2+2}\right)^{3x}=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{-9}{x^2+2}\right)^{3x}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+2}{-9}}\right)^{3x\left(\frac{-9}{x^2+2}\right)\cdot\left(\frac{x^2+2}{-9}\right)}=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+2}{-9}}\right)^{\left(\frac{x^2+2}{-9}\right)\left(\frac{-9}{x^2+2}\right)\cdot 3x}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-9}{x^2+2}\right)3x}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-27x}{x^2+2}\right)}=e^0=1$$

Estas y el resto de indeterminaciones las resolveremos más delante de otra forma, utilizando la regla de L´Hôpital.

## 1.10.- Continuidad de una función en un punto:

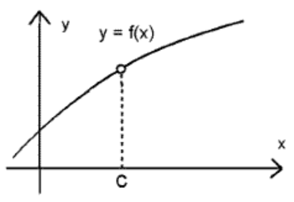
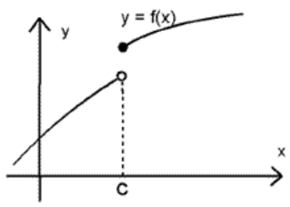
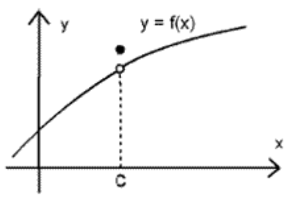
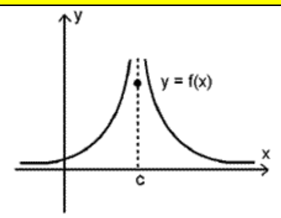
Sea f una función real definida en un intervalo I, y a un punto de I. Se dice que la función ***f es continua en el punto c*** si y solo si existe el límite de f en el punto c y éste es igual a f(c).

Por tanto, una función f es continua en el punto c si se cumple:

- La función f está definida en c, es decir, existe f(c)
- Existe $\lim_{x\to c}f(x)$
- $\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$

La función f es continua en el punto c si es continua por la derecha y por la izquierda ó si los límites laterales coinciden: $\boxed{\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)}$

Existen cuatro casos de discontinuidad:

| *f(x) no definida en C* | *De salto* | *Evitable* | *Asintótica* |
|---|---|---|---|
|   |   |   |   |
| La función no está definida en el punto C | No coinciden los límites laterales de la función en el punto C. | No coincide el límite de la función en el punto C, con el valor de la función en el punto C. | No existe alguno de los límites laterales de la función en el punto C. |
| *Ejemplo:* | *Ejemplo:* | *Ejemplo:* | *Ejemplo:* |
| $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \neq 3 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ | $f(x) = \begin{cases} 3x-1 \text{ si } x < 2 \\ x^2+2 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$ | $f(x) = \begin{cases} 3x-1 \text{ si } x \neq 1 \\ 4 \text{ si } x = 1 \end{cases}$ | $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \leq 0 \\ \text{sen}\frac{1}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$ |
| $f(3) = ?$ | $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} 3x - 1 = 5$<br>$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 + 2 = 6$ | $f(1) = 4$<br>$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 3x - 1 = 2$ | $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} x = 0$<br>$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} sen\frac{1}{x} = +\infty$ |

Todas las funciones elementales descritas con anterioridad son continuas en su dominio de definición, excepto:

- ***Funciones Racionales:*** Son discontinuas en los puntos que no son del dominio, es decir, donde Q(x)=0. Las discontinuidades son de tipo asintótico o evitables, en ningún caso pueden ser de salto.

- ***Funciones Trigonométricas:*** La tangente, la secante, la cosecante y la cotangente presentan discontinuidades asintóticas en los puntos que no son de su dominio.

- ***Funciones a trozos:*** Se debe estudiar la continuidad de cada rama en su dominio, y la continuidad en el punto donde cambiamos de rama, donde puede aparecer una discontinuidad de salto.

## 1.11.- Propiedades de las funciones contínuas:

Sean f y g dos funciones contínuas en un punto c, entonces:

- ✓ $f + g$ es una función contínua en c.
- ✓ $\lambda \cdot f$ es una función contínua en c.
- ✓ $\frac{f}{g}$ es una función contínua en c, si $g(c) \neq 0$
- ✓ $|f|$ es una función contínua en c.

## 1.12.- Continuidad en un intervalo:

La función f es ***continua en el intervalo I=(a,b)*** si es continua en todo punto de (a,b).

La función es ***contínua en el intervalo I=[a,b]*** si es continua en todo punto de (a,b), continua por la derecha en el punto a y continua por la izquierda en el punto b.

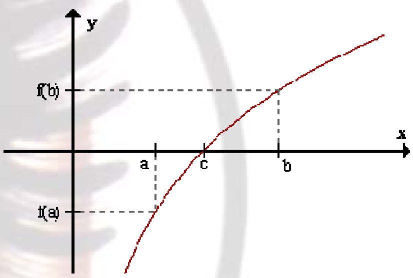
- ✓ Las ***funciones polinómicas*** son continuas en todo intervalo real.
- ✓ Las ***funciones racionales*** son continuas en un todo intervalo real donde no aparezcan las raíces del denominador.
- ✓ Las ***funciones trigonométricas*** sen(x), cos(x) son continuas en todo intervalo real.
- ✓ Las ***funciones tg(x), sec(x)*** son continuas en todo intervalo real donde $\cos(x) \neq 0$.
- ✓ Las ***funciones ctg(x), cosec(x)*** son continuas en todo intervalo real donde $\text{sen}(x) \neq 0$.
- ✓ La ***función exponencial,*** $a^x$ con $a > 0$ es continua en todo intervalo real.
- ✓ La ***función logarítmica***, $\log_a(x)$ con $a > 0$ es continua en el intervalo $(0,+\infty)$

## 1.13.- Teorema de Weiertrass:

Si una función es contínua en un intervalo I=[a,b], cerrado y acotado, entonces alcanza en él, al menos una vez su máximo y mínimo absolutos.

## 1.14.- Teorema de los Ceros de Bolzano:

Si una función f contínua en un intervalo [a,b] cambia de signo, es decir f(a)·f(b)<0, existe al menos un punto ***c*** del intervalo en el que la función vale 0.




f contínua en [a,b], y f(a)·f(b)<0, ➔ $\exists\, c \in (a,b)$ en el que f(***c***)=0

*Geométricamente, el teorema establece que si dos puntos (a,f(a)) y (b,f(b)) de la gráfica de una función continua están situados en diferentes lados del eje X, entonces la gráfica corta al eje X en algún punto entre a y b. Por supuesto que pueden existir varios puntos de corte con el eje X.*

*Ejemplo 12:* ***Calcular a y b para que la función definida por*** $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2} & \text{si } x \le 0 \\ ax+b & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1+x\ln x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ ***sea continua***

La función f es una función definida a trozos compuesta por tres ramas, la primera rama es el producto de una polinómica por una exponencial, que es contínua, porque las funciones exponenciales y las polinómicas son siempre contínuas, la segunda rama es una función polinómica, y por tanto contínua, la tercera rama es la composición de una polinómica y una logarítmica, que está bien definida porque x>1, así que también es contínua siempre, por tanto esta función solo puede tener problemas de continuidad en los puntos en los que cambia de rama. O sea en x=0 y x=1. Estudiemos esos puntos:

Una función es contínua en un punto x=a si ocurre: $\begin{cases} \exists f(a) \\ \exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \end{cases}$

En x=0:

$f(0)=0;\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = b;\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ ➔ Por tanto para que f sea contínua en cero b=0.

En x=1:

$f(1)=1;\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1;\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a+b$ ➔ Por tanto para que f sea contínua en uno, a+b=1.

Y para que la función sea contínua, se han de cumplir las dos condiciones, por tanto f es contínua si b=0 y a=1.

## 1.15.- Ejercicios:

1.- Determinar el valor de a para que: $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)=2$

2.- Calcular: $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$

3.- Calcular el límite de la función $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$, en el punto 0, en el punto 1 y en $+\infty$

4.- Calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x$

5.- Calcular el valor de la constante c para que $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{cx}=e$

6.- Estudiar en el cuerpo real la continuidad de la función definida por: $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x}{e^x+1} & \text{si } x\le 0\\ x^2+1 & \text{si } x>0\end{cases}$

7.- Determinar a y b para que la función real f, definida por $f(x)=\begin{cases}ae^{\frac{sen^2x}{x}}+b\cos x & \text{si } x\le 0\\ 3a\frac{senx}{x}+b(x-1) & \text{si } x>0\end{cases}$ sea continua en la recta real.

8.- Probar que la función definida por $f(x)=\frac{x^2+1}{x^3+7x-8}$ no es continua en x=1. Indicar que tipo de discontinuidad presenta.

9.- Usando el teorema de Bolzano, demostrar que la ecuación $x^3+x-5=0$ tiene al menos una solución $x_o$ tal que $1<x_o<2$.

10.- Sea $f:[-1,3]\to\Re$, la función definida por: $f(x)=\left|x^2-4\right|$

a) Es f contínua en [1,-3]?
b) Enuncia un teorema en virtud del cual se puede afirmar que la función f alcanza sus extremos absolutos en el intervalo [-1,3].

11.- Enunciar el teorema de bolzano. Sea la función $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$. Se tiene que f(-3)=4 y f(-1)=-2, pero la gráfica de f no corta el eje de abcisas en el intervalo [-3,-1]. Razonar si esto contradice el teorema de Bolzano.

12.- Probar que las gráficas $f(x)=\ln x$ y $g(x)=e^{-x}$ se cortan en algún punto del intervalo [1,e].



## 1.16.- Soluciones:

***1.- Determinar el valor de a para que:*** $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)=2$

Tenemos una indeterminación del tipo $\infty-\infty$, por tanto vamos a multiplicar y dividir por el conjugado:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+ax+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+1}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}=\frac{a}{2}$$

De donde $a=4$.

***2.- Calcular:*** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$

Como tenemos $\infty-\infty$, multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+ax}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+ax-x^2}{\left(\sqrt{x^2+ax}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{\left(\sqrt{x^2+ax}+x\right)}=\frac{a}{2}$$

***3.- Calcular el límite de la función*** $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$***, en el punto 0, en el punto 1 y en*** $+\infty$

En x = 0:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

En x = 1:

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\cos x}{x^2}=1-\cos 1$$

En $x=\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}=0,$$

porque la función 1-cosx es una función acotada entre 0 y 2, y el denominador tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$.

***4.- Calcular el siguiente límite:*** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^x$

Utilizando la regla del "zapato", tenemos que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}-1\right)\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}-1\right)\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3-2x+1}{2x-1}\right)\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x}{2x-1}\right)}=e^2$$

***5.- Calcular el valor de la constante c para que*** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{cx}=e$

Utilizando la regla del "zapato":

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{cx}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x}-1\right)cx}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}\right)cx}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}3c}=e^{3c}\quad\rightarrow\quad c=\frac{1}{3}$$

***6.- Estudiar en la continuidad de la función definida en R por:*** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{e^x+1} & \text{si } x\le 0\\ x^2+1 & \text{si } x>0\end{cases}$

La función f es una función definida a trozos compuesta por dos ramas, la primera rama es el cociente de dos funciones exponenciales, que es contínua, porque las funciones exponenciales son siempre contínuas y $e^x+1$ es siempre distinto de cero, la segunda rama es una función polinómica, y por tanto contínua, por tanto esta función solo puede tener problemas de continuidad en el punto en el que cambia de rama. O sea, en x=0. Estudiemos ese punto:

La función es contínua en el punto x=0 si ocurre: $\begin{cases}\exists f(0)\\ \exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)\\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\end{cases}$

$f(0)=\dfrac{1}{2};\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1;\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\dfrac{1}{2}$ ➔ Por tanto la función no es contínua en x=0.

Así que la función f(x) es una función contínua en $\Re-\{0\}$, donde presenta una discontinuidad de salto.

***7.- Determinar a y b para que la función real f, definida por*** $f(x)=\begin{cases} ae^{\frac{sen^2 x}{x}}+b\cos x & \text{si } x\le 0\\ 3a\dfrac{senx}{x}+b(x-1) & \text{si } x>0\end{cases}$ ***sea continua en la recta real.***

Para que está función sea contínua en toda la recta real, tiene que ser contínua en todos los puntos de la recta real, pero vemos que para x=0, la función no está definida, así que como no es contínua en x=0, no puede ser contínua en toda la recta real, y por tanto no existen a y b que hagan que esta función sea contínua.

***8- Probar que la función definida por*** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3+7x-8}$ ***no es continua en x=1. Indicar que tipo de discontinuidad presenta.***

Lo primero es factorizar el denominador, y para ello utilizamos la regla de Ruffini.
$x^3+7x-8=(x-1)(x^2+x+8)$, por tanto la función:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^3+7x-8}=\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+x+8)}$$

La función no está definida en x=1, por tanto no es contínua, presenta una discontinuidad de segunda especie, llamada discontinuidad asintótica.

***9.- Usando el teorema de Bolzano, demostrar que la ecuación*** $x^3+x-5=0$ ***tiene al menos una solución*** $x_o$ ***tal que*** $1<x_o<2$.

El teorema de Bolzano dice que si tenemos una función definida en un intervalo [a,b] cerrado y acotado, en el que la función es contínua y además cambia de signo, entonces esta función pasa por el cero: $\exists c\in\,]a,b[\,/\,f(c)=0$ .

Por tanto si definimos la función $f(x)=x^3+x-5$ en el intervalo [1,2], como la función es contínua en dicho intervalo por ser polinómica, y además: f(1)=-3 y f(2)=5, entonces vemos que cambia de signo, entonces según bolzano: $\exists c\in ]1,2[ / f(c)=0$.

Por lo que podemos asegurar que la ecuación $x^3+x-5=0$ tiene al menos una solución $x_o$ tal que $1<x_o<2$

***10- Sea $f:[-1,3]\to\Re$, la función definida por: $f(x)=\left|x^2-4\right|$***

***a) Es f contínua en [-1,3]?***

***b) Enuncia un teorema en virtud del cual se puede afirmar que la función f alcanza sus extremos absolutos en el intervalo [-1,3].***

La función f(x) es la composición de la función valor absoluto y una función polinómica, por tanto es contínua porque ambas son contínuas y la composición de funciones también lo es.
Así que si f es contínua en todo R, también lo será en el intervalo [-1,3].

El teorema que me asegura que una función alcanza sus extremos absolutos en un intervalo es el teorema de Weiertrass: "Una función f contínua en un intervalo cerrado y acotado [a,b], alcanza en este intervalo, al menos una vez su máximo y mínimo absolutos".

***11- Enunciar el teorema de Bolzano. Sea la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$. Se tiene que f(-3)=4 y f(-1)=-2, pero la gráfica de f no corta el eje de abscisas en el intervalo [-3,-1]. Razonar si esto contradice el teorema de Bolzano.***

El teorema de Bolzano dice: "Sea f una función definida en un intervalo [a,b] cerrado y acotado, en el que la función es contínua y en el que además la función cambia de signo, entonces esta función pasa por el cero: $\exists c\in ]a,b[ / f(c)=0$"

No contradice el Teorema de Bolzano, porque este teorema exige que la función sea contínua en el intervalo, y esta función no es contínua en [-3,-1], porque en x=-2 no está definida, y por tanto no es contínua.

***12.- Probar que las gráficas $f(x)=\ln x$ y $g(x)=e^{-x}$ se cortan en algún punto del intervalo [1,e].***

Lo que hacemos es crear una nueva función $h(x)=f(x)-g(x)=\ln x-e^{-x}$, en los puntos donde h(x)=0, son los puntos en los que las gráficas de las funciones f y g se cortan.

Así que estudiamos la función $h(x)=\ln x-e^{-x}$ en el intervalo [1,e].

La función h(x) es un función contínua por se la diferencia de dos funciones que son contínuas en [1,e]. Veamos si h(x) cambia de signo en este intervalo:
$h(1)=-\dfrac{1}{e}$ y $h(e)=1-\dfrac{1}{e^e}>0$, por tanto vemos que la función cambia de signo. Entonces según el teorema de Bolzano $\exists c\in ]a,b[ / h(c)=0$, bien pues si $h(c)=f(c)-g(c)=0$, entonces ocurre que $f(c)=g(c)$, y el punto c es el punto de corte de ambas funciones.