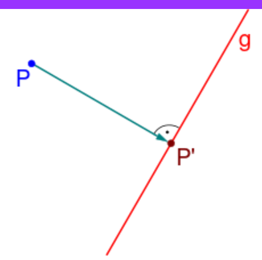
12.5.- Proyecciones Ortogonales

12.5.1.- Proyección ortogonal de un punto sobre una recta



La proyección ortogonal de un punto P sobre una recta r, será otro punto P' perteneciente a la recta y tal que el vector $\overrightarrow{PP'}$ que una los puntos P y P' es perpendicular al vector director de la recta.

Para hallar la proyección ortogonal de un punto sobre una recta dada por la ecuación:

$$r : \frac{x-p_x}{v_x} = \frac{y-p_y}{v_y} = \frac{z-p_z}{v_z}$$

debemos seguir los siguientes pasos:

1. Determinar la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto P. Para ello, utilizamos el vector director de la recta como vector normal del plano y utilizamos la ecuación del plano dado su vector normal y un punto:

$$v_x\cdot(x-p_x)+v_y\cdot(y-p_y)+v_z\cdot(z-p_z)=0$$

2. El punto que estamos buscando (la proyección ortogonal) es el punto de intersección entre la recta y el plano. Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y del plano.

$$v_x\left(a_x+v_xt-p_x\right)+v_y\left(a_y+v_yt-p_y\right)+v_z\left(a_z+v_zt-p_z\right)=0$$

de donde hallamos el valor de t que nos permitirá calcular las coordenadas del punto Q:

$$t=\frac{v_x(p_x-a_x)+v_y(p_y-a_y)+v_z(p_z-a_z)}{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

Ejemplo 7: **Halla la proyección ortogonal del punto P(1,2,–1) sobre la recta r de ecuación:** $r : \frac{x+2}{3} = y-1 = \frac{z+1}{2}$

En primer lugar, hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto P:
El vector normal de dicho plano será el vector director de la recta: dr=(3,1,2) , y la ecuación del plano es de la forma: 3x + y + 2z + k = 0
Como debe pasar por el punto P (1,2,–1):

$$3\cdot 1+2+2\cdot(\ )-1+k=0 \Rightarrow 3+2-2+k=0 \Rightarrow k=-3$$

Tenemos: $\pi : 3x + y + 2z - 3 = 0$

Resolvemos el sistema, pasando primero la ecuación de la recta a su forma paramétrica: $r \equiv \begin{cases} x=-2+3t \\ y=1+t \\ z=-1+2t \end{cases}$

$$3(-2+3t)+(1+t)+2(-1+2t)-3=0 \quad\rightarrow\quad 14t-10=0 \quad\rightarrow\quad t=\frac{5}{7}$$

y sustituyendo el valor de t en la ecuación paramétrica, obtenemos: $\left\{x=\frac{1}{7}, y=\frac{12}{7}, z=\frac{3}{7}\right\}$

Así, la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r será el punto $P'\left(\frac{1}{7},\frac{12}{7},\frac{3}{7}\right)$

Aunque también se podría hacer de esta otra manera:

1. Como Q pertenece a la recta, sus coordenadas deben verificar la ecuación de la recta:

$$q_1=a_1+v_1\cdot t \qquad q_2=a_2+v_2\cdot t \qquad q_3=a_3+v_3\cdot t$$

2. El vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a la recta, por tanto, el producto escalar de dicho vector con el vector director cela recta es cero:

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}=0 \quad\Rightarrow\quad v_1\left(q_1-p_1\right)+v_2\cdot\left(q_2-p_2\right)+v_3\left(q_3-p_3\right)=0$$

3. Resolvemos la ecuación resultante:

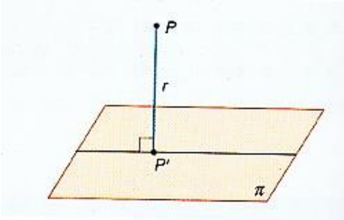
$$v_1 \cdot (a_1 + v_1 \cdot t - p_1) + v_2 \cdot (a_2 + v_2 \cdot t - p_2) + v_3 \cdot (a_3 + v_3 \cdot t - p_3) = 0$$

4. De donde hallamos el valor de t que nos permitirá calcular las coordenadas del punto Q:

$$t = \frac{v_1 (p_1 - a_1) + v_2 (p_2 - a_2) + v_3 (p_3 - a_3)}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

12.5.2.- Proyección ortogonal de un punto sobre un plano

La proyección ortogonal de un punto P sobre un plano π es otro punto Q perteneciente al plano, y tal que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular al plano.



Para hallar la proyección ortogonal de un punto sobre un plano dado por la ecuación:

$$\pi : A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$$

Debemos de seguir los siguientes pasos:

1. Determinar la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

Para ello, utilizamos el vector normal al plano como vector director de la recta: $r: \begin{cases} x = p_1 + At \\ y = p_2 + Bt \\ z = p_3 + Ct \end{cases}$

2. El punto que estamos buscando (la proyección ortogonal) es el punto de intersección entre la recta con el plano.

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y del plano.

$$A \cdot (p_1 + At) + B(p_2 + Bt) + C(p_3 + Ct) + D = 0$$

De donde:

$$t = -\frac{D + Ap_1 + Bp_2 + Cp_3}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Ejemplo 8: **Halla la proyección ortogonal del punto P(-1,3,2) sobre el plano** $\pi : x - 2y + 3z - 1 = 0$

En primer lugar, calculamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por P:

El vector director de dicha recta es el vector normal del plano: $\vec{v} = (1, -2, 3)$

La ecuación de la recta que pasa por P y con vector director $\vec{v}$ es: $r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

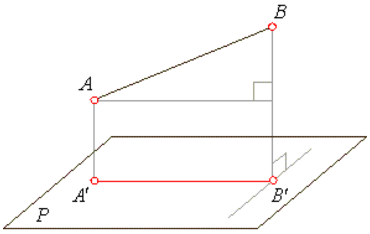
Determinamos el punto de intersección del plano con la recta:

$$\pi : x - 2y + 3z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (-1+t) - 2(3-2t) + 3(2+3t) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 14t - 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad t = \frac{1}{14}$$

Sustituyendo el valor de t, tenemos: $\begin{cases} x = -\dfrac{9}{14} \\ y = \dfrac{16}{7} \\ z = \dfrac{29}{14} \end{cases}$

Por tanto la proyección ortogonal del punto P(-1,3,2) sobre el plano π es el punto $Q\left(-\frac{9}{14}, \frac{16}{7}, \frac{29}{14}\right)$

12.5.3.- Proyección ortogonal de una recta sobre un plano



La proyección ortogonal de una recta r sobre un plano π es otra recta s que está contenida en el plano, y tal que el plano π' que contiene a las dos rectas es perpendicular al plano π.

Para hallar la proyección ortogonal de una recta sobre un plano, hallamos la ecuación del plano que contiene a r y que además es perpendicular al plano dado π. La ecuación de la recta vendrá dada en forma implícita como intersección de los planos π y π'.

Ejemplo 9: **Halla la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano** $\pi : x-2y+3z-1=0$

En primer lugar, calculamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por P:

El vector director de dicha recta es el vector normal del plano: $\vec{v}=(1,-2,3)$

La ecuación de la recta que pasa por P y con vector director $\vec{v}$ es: $r:\begin{cases} x=-1+t \\ y=3-2t \\ z=2+3t \end{cases}$

Determinamos el punto de intersección del plano con la recta:

$$\pi : x-2y+3z-1=0 \quad \Rightarrow \quad (-1+t)-2(3-2t)+3(2+3t)-1=0 \quad \Rightarrow \quad 14t-1=0 \quad \leftrightarrow \quad t=\frac{1}{14}$$

Sustituyendo el valor de t, tenemos: $\begin{cases} x=-\frac{9}{14} \\ y=\frac{16}{7} \\ z=\frac{29}{14} \end{cases}$

Por tanto la proyección ortogonal del punto P(-1,3,2) sobre el plano π es el punto $Q\left(-\frac{9}{14},\frac{16}{7},\frac{29}{14}\right)$

Otra forma de calcular la proyección ortogonal de una recta sobre un plano, que puede resultar interesante dependiendo del problema al que nos enfrentamos, sería la siguiente:

- Obtener la intersección de la recta *r* con el plano π, que es un punto al que llamaremos P.
- Calculamos la proyección ortogonal de un punto cualquiera de r sobre el plano π, llamémoslo Q.
- Obtenemos la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos P y Q.

Dicha recta será la proyección ortogonal buscada.

Actividades Propuestas:

1.- Halla la proyección ortogonal del punto P(0,3,1) sobre la recta $r:\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{2}$

2.- Halla la proyección ortogonal del punto P(4,0,3) sobre el plano $\pi : 3x-2y+z-2=0$

3.- Halla la proyección ortogonal de la recta $r:\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{2}$ sobre el plano $\pi : 3x-2y+z-2=0$