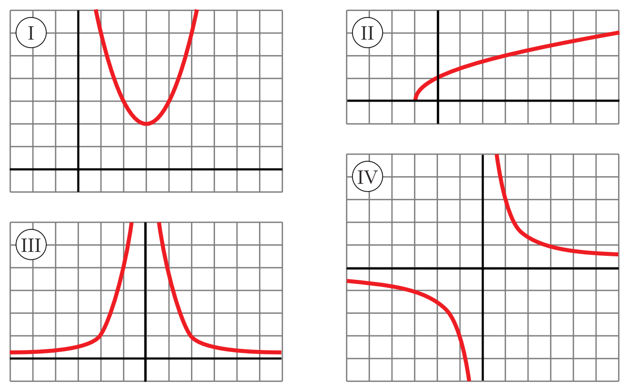
5 FUNCIONES ELEMENTALES

Página 118

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

Problema 1

Las siguientes gráficas corresponden a funciones, algunas de las cuales conoces y otras no. En cualquier caso, vas a trabajar con ellas.



■ **Las ecuaciones correspondientes a estas gráficas son:**

a) $y = \dfrac{4}{x^2}$ **b)** $y = \sqrt{x+1}$ **c)** $y = \dfrac{3}{x}$ **d)** $y = x^2 - 6x + 11$

Asigna a cada gráfica su ecuación haciendo uso, sucesivamente, de:

- **el conocimiento que ya tienes de algunas de ellas;**
- **la comprobación, mediante cálculo mental, de algunos de sus puntos;**
- **y, en caso de necesidad, recurriendo a la calculadora para obtener varios de sus puntos.**

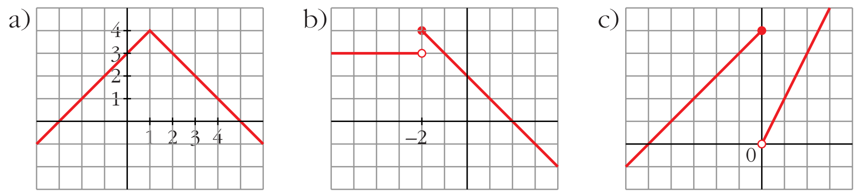
a) $\Leftrightarrow$ III b) $\Leftrightarrow$ II c) $\Leftrightarrow$ IV d) $\Leftrightarrow$ I

Página 119

Problema 2

■ **Teniendo en cuenta los pasos descritos antes, representa gráficamente las siguientes funciones:**

a) $y = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 5 - x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ **b)** $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -2 \\ 2 - x & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$ **c)** $y = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x \le 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$



Página 121

1. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ **b)** $y = \sqrt{x - 1}$ **c)** $y = \sqrt{1 - x}$

d) $y = \sqrt{4 - x^2}$ **e)** $y = \sqrt{x^2 - 4}$ **f)** $y = 1/\sqrt{x^2 - 1}$

g) $y = 1/\sqrt{x - 1}$ **h)** $y = 1/\sqrt{1 - x}$ **i)** $y = 1/\sqrt{4 - x^2}$

j) $y = 1/\sqrt{x^2 - 4}$ **k)** $y = x^3 - 2x + 3$ **l)** $y = \dfrac{1}{x}$

m) $y = \dfrac{1}{x^2}$ **n)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ **ñ)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}$

o) $y = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

p) El área de un cuadrado de lado variable, l, es $A = l^2$.

a) $\mathbb{R}$ b) $[1, \infty)$ c) $(-\infty. 1]$

d) $[-2, 2]$ e) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ f) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

g) $(1, \infty)$ h) $(-\infty, 1)$ i) $(-2, 2)$

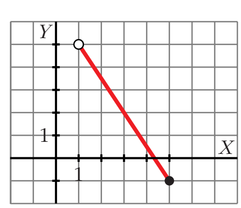
j) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ k) $\mathbb{R}$ l) $\mathbb{R} - \{0\}$

m) $\mathbb{R} - \{0\}$ n) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ ñ) $\mathbb{R}$

o) $\mathbb{R} - \{-1\}$ p) $l > 0$

Página 122

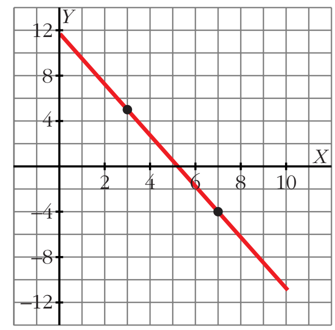
1. Representa la siguiente función: $y = -2x + 7$, $x \in (1, 4]$.



2. **Una función lineal f cumple: $f(3) = 5$, $f(7) = -4$, $D(f) = [0, 10]$. ¿Cuál es su expresión analítica? Represéntala.**

$$m = \frac{-4-5}{7-3} = -\frac{9}{4}$$

$$y = 5 - \frac{9}{4}(x-3) = -\frac{9}{4}x + \frac{47}{4}, \quad x \in [0, 10]$$



Página 123

1. **Por un recibo de gas en el que se han consumido 10 m^3 se han pagado 50 euros y por 16 m^3 se han pagado 71 euros. ¿Cuánto habrá que pagar por un consumo de gas de 15 m^3?**

$$m = \frac{71-50}{16-10} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

$y = 50 + 3{,}5(x - 10) = 3{,}5x + 15$

La recta es $f(x) = 3{,}5x + 15$; luego $f(15) = 67{,}5$ euros.

2. **El consumo de gasolina de cierto automóvil, por cada 100 km, depende de la velocidad a la que va. A 60 km/h consume 5,7 l y a 90 km/h consume 7,2 l. Estima cuánto consumirá si recorre 100 km a 70 km/h.**

$$m = \frac{7{,}2-5{,}7}{90-60} = \frac{1{,}5}{30} = 0{,}05$$

$y = 5{,}7 + 0{,}05(x - 60) = 0{,}05x + 2{,}7$

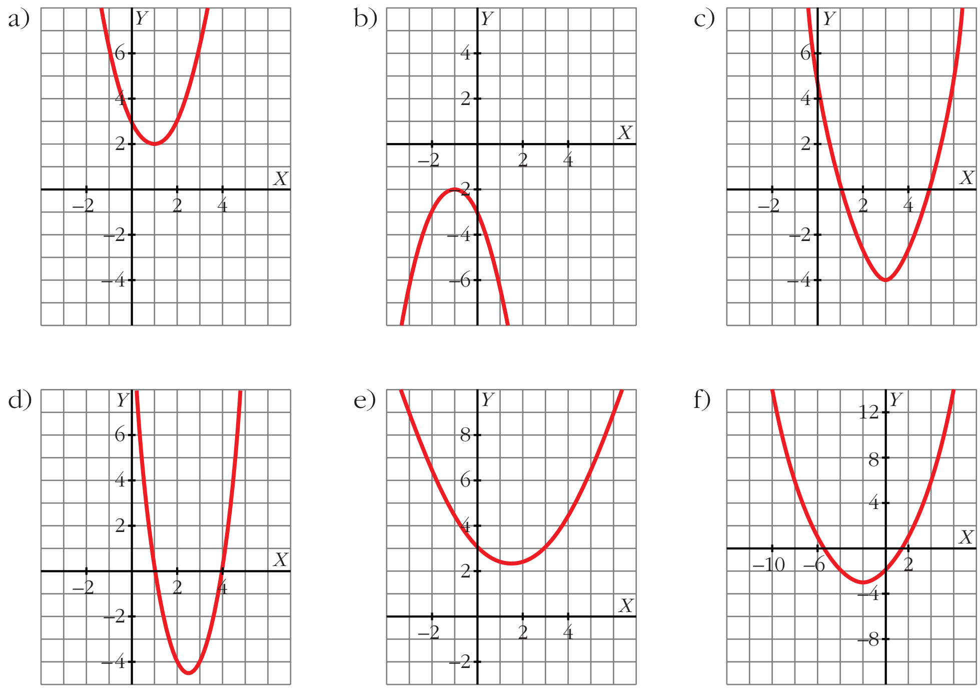
La recta es $f(x) = 0{,}05x + 2{,}7$; por tanto, $f(70) = 6{,}2$ litros.

Página 124

1. **Representa las parábolas:**

a) $y = x^2 - 2x + 3$ **b)** $y = -x^2 - 2x - 3$ **c)** $y = x^2 - 6x + 5$

d) $y = 2x^2 - 10x + 8$ **e)** $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$ **f)** $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$

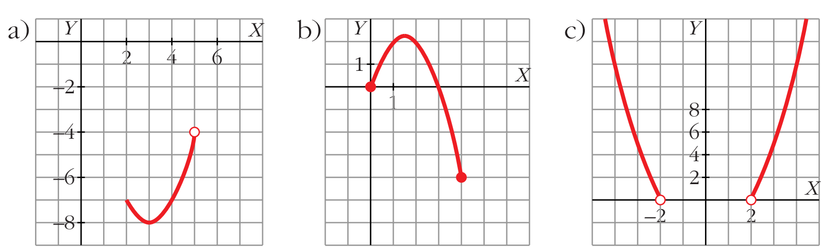


2. **Representa las funciones:**

a) $y = x^2 - 6x + 1, \quad x \in [2, 5)$

b) $y = -x^2 + 3x, \quad x \in [0, 4]$

c) $y = x^2 - 4, \quad x \in (-\infty, -2) \cup (2, -\infty)$

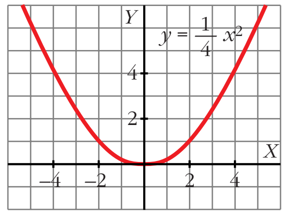


Página 125

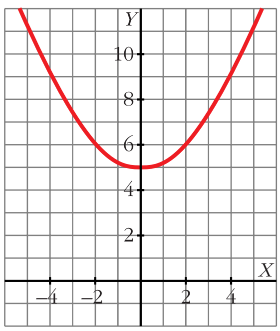
1. **Representa** $y = \frac{1}{4}x^2$. **A partir de ella, representa:**

a) $y = \frac{1}{4}x^2 + 5$

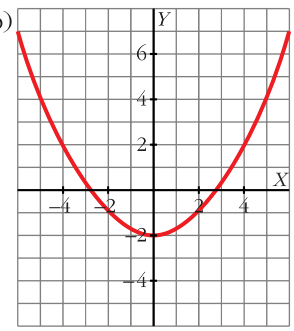
b) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$



a)



b)

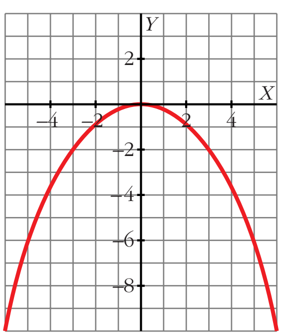


2. **Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, representa:**

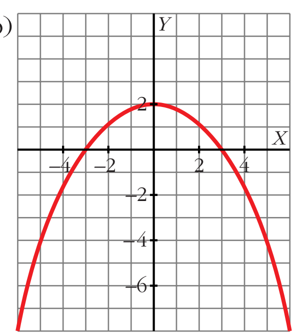
a) $y = -\dfrac{1}{4}x^2$

b) $y = -\dfrac{1}{4}x^2 + 2$

a)



b)



Página 126

1. **Representa** $y = f(x) = \dfrac{1}{4}x^2$ **para** $x \geq 1$.

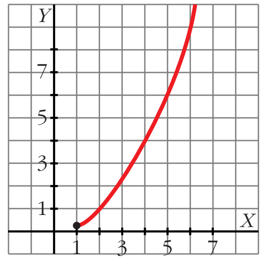
A partir de ella, representa:

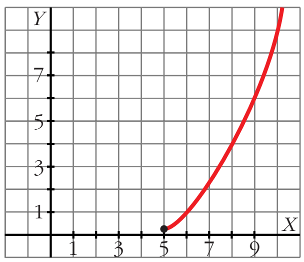
a) $y = f(x - 5)$

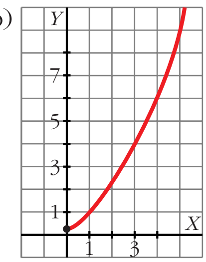
b) $y = f(x + 1)$

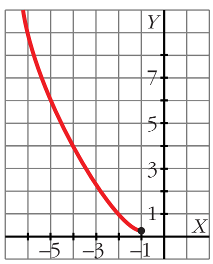
c) $y = f(-x)$

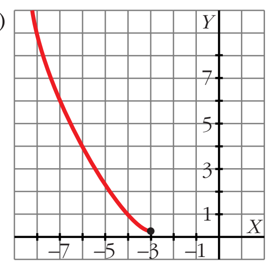
d) $y = f(-x + 2)$



a)


b)


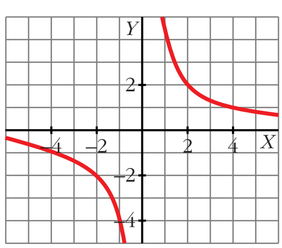
c)


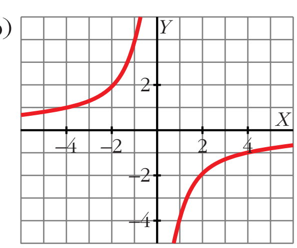
d)


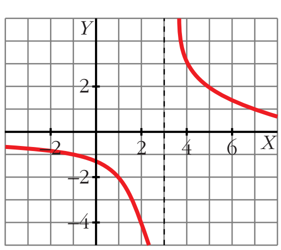
Página 127

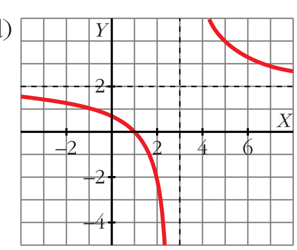
1. Representa:

a) $y = \dfrac{4}{x}$ **b)** $y = -\dfrac{4}{x}$ **c)** $y = \dfrac{4}{x-3}$ **d)** $y = \dfrac{4}{x-3} + 2$

a)


b)


c)


d)


2. Representa estas funciones:

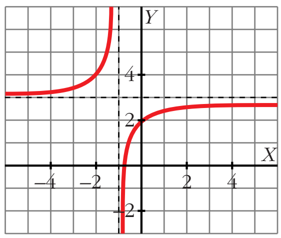
a) $y = \dfrac{3x + 2}{x + 1}$

b) $y = \dfrac{4x + 3}{x + 1}$

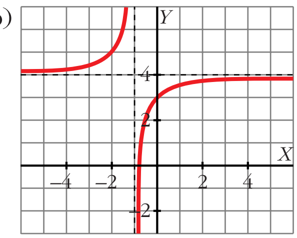
c) $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

d) $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

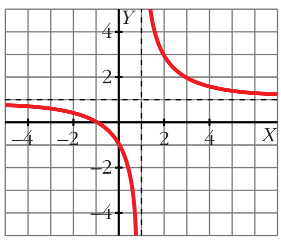
a)



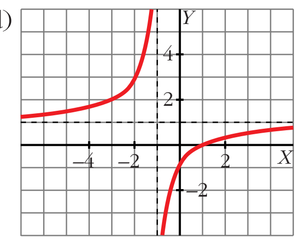
b)



c)



d)



Página 128

1. Representa las siguientes funciones:

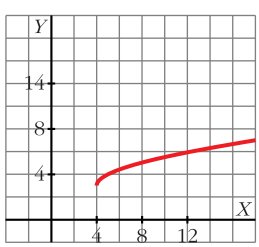
a) $y = 3 + \sqrt{x - 4}$

b) $y = \sqrt{2 - x}$

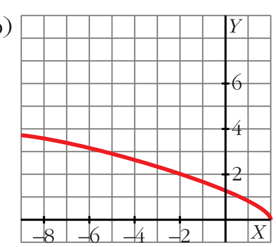
c) $y = \sqrt[3]{-x}$

d) $y = \sqrt[3]{-x} + 2$

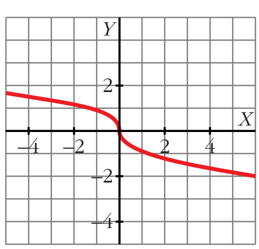
a)



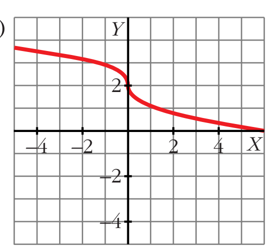
b)



c)



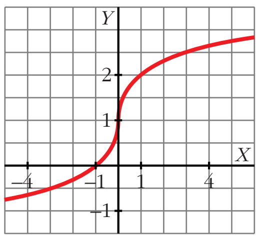
d)

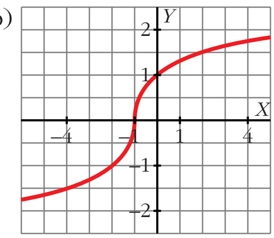


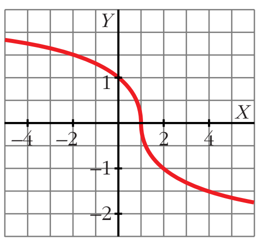
2. **Representa:**

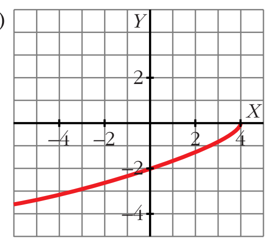
a) $y = \sqrt[3]{x} + 1$ **b)** $y = \sqrt[3]{x + 1}$

c) $y = \sqrt[3]{-x + 1}$ **d)** $y = -\sqrt{4 - x}$

a)


b)


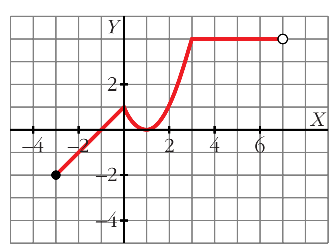
c)


d)


Página 129

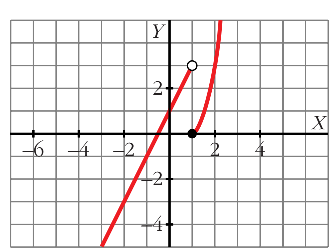
1. **Representa esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \in [-3, 0) \\ x^2 - 2x + 1 & x \in [0, 3] \\ 4 & x \in (3, 7) \end{cases}$$



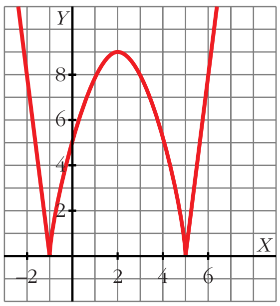
2. **Haz la representación gráfica de la siguiente función:**

b) $g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 1 \\ x^2 - 1 & x \geq 1 \end{cases}$

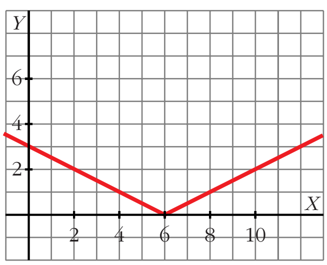


Página 130

1. Representa: $y = |-x^2 + 4x + 5|$



2. Representa gráficamente: $y = \left|\frac{x}{2} - 3\right|$

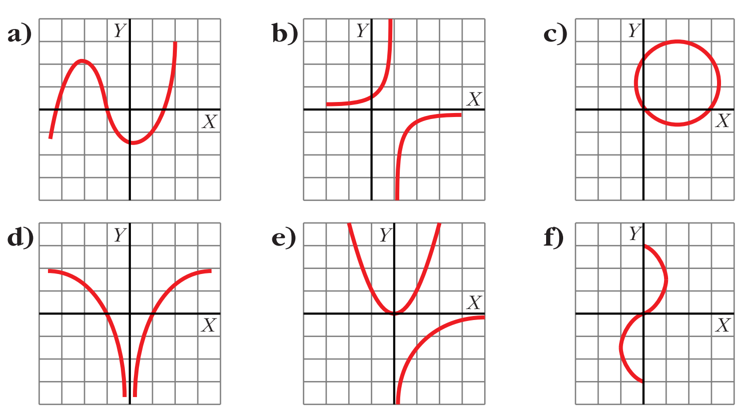


Página 135

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **¿Cuáles de estas gráficas son funciones?**



Son funciones a), b) y d).

2 **Indica si los valores de x: 0; –2; 3,5; $\sqrt{2}$; –0,25 pertenecen al dominio de estas funciones:**

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **b)** $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

c) $y = x - \sqrt{2}$ **d)** $y = \sqrt{x^2 + 4}$

e) $y = \sqrt{x - 3}$ **f)** $y = \sqrt{7 - 2x}$

a) 3,5; $\sqrt{2}$ b) Todos salvo –2

c) Todos d) Todos

e) 3,5 f) Todos

3 **Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{3}{x^2 + x}$ **b)** $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

c) $y = \dfrac{x - 1}{2x + 1}$ **d)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$

e) $y = \dfrac{2}{5x - x^2}$ **f)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 2}$

a) $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$ b) $\mathbb{R} - \{2\}$

c) $\mathbb{R} - \{-1/2\}$ d) $\mathbb{R}$

e) $\mathbb{R} - \{0, 5\}$ f) $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

4 **Halla el dominio de definición de estas funciones:**

a) $y = \sqrt{3 - x}$ **b)** $y = \sqrt{2x - 1}$

c) $y = \sqrt{-x - 2}$ **d)** $y = \sqrt{-3x}$

a) $(-\infty, 3]$ b) $[1/2, +\infty)$

c) $(-\infty, -2]$ d) $(-\infty, 0]$

5 **Halla el dominio de definición de estas funciones:**

a) $y = \sqrt{x^2 - 9}$ **b)** $= \sqrt{x^2 + 3x + 4}$

c) $y = \sqrt{12x - 2x^2}$ **d)** $y = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$

e) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x}}$ **f)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x}}$

g) $y = \dfrac{-1}{x^3 - x^2}$ **h)** $y = \dfrac{2x}{x^4 - 1}$

a) $x^2 - 9 \geq 0 \ \rightarrow \ (x + 3)\ (x - 3) \geq 0 \ \rightarrow$ *Dominio* $= (+\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

b) $x^2 + 3x + 4 \geq 0 \ \rightarrow$ *Dominio* $= \mathbb{R}$

c) $12x - 2x^2 \geq 0 \ \rightarrow \ 2x(6 - x) \geq 0 \ \rightarrow$ *Dominio* $= [0, 6]$

d) $x^2 - 4x - 5 \geq 0 \ \rightarrow \ (x + 1)\ (x - 5) \geq 0 \ \rightarrow$ *Dominio* $= (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

e) $4 - x > 0 \ \rightarrow \ 4 > x \ \rightarrow$ *Dominio* $= (-\infty, 4)$

f) $x^2 - 3x > 0 \ \rightarrow \ x(x - 3) > 0 \ \rightarrow$ *Dominio* $= (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

g) $x^3 - x^2 = 0 \ \rightarrow \ x^2(x - 1) = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 0, \ x_2 = 1 \ \rightarrow$ *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0, 1\}$

h) $x^4 - 1 = 0 \ \rightarrow \ x^4 = 1 \ \rightarrow \ x = \pm\sqrt[4]{1} = \pm 1 \ \rightarrow$ *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

6 Di cuál es la pendiente de cada una de las siguientes rectas:

a) $y = 2x - 5$ b) $2x - y + 1 = 0$ c) $y = -x + 5$ d) $y = 5$

a) 2 b) 2 c) -1 d) 0

7 Escribe las ecuaciones de las siguientes rectas:

a) Pasa por $P(1, -5)$ y $Q(10, 11)$.

b) Pasa por $(-7, 2)$ y su pendiente es $-0{,}75$.

c) Corta a los ejes en $(3{,}5; 0)$ y $(0, -5)$.

d) Es paralela a $3x - y + 1 = 0$ y pasa por $(-2, -3)$.

a) $m = \dfrac{11 - (-5)}{10 - 1} = \dfrac{16}{9}$

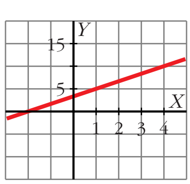
$$y = -5 + \frac{16}{9}(x - 1) = \frac{16}{9}x - \frac{61}{9}$$

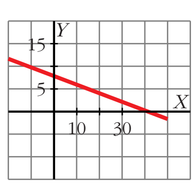
b) $y = 2 - 0{,}75(x + 7) = -0{,}75x - 3{,}25$

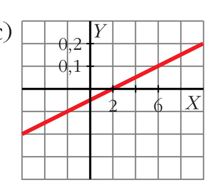
c) $\dfrac{x}{3{,}5} + \dfrac{y}{-5} = 1 \ \Rightarrow \ y = 1{,}43x - 5$

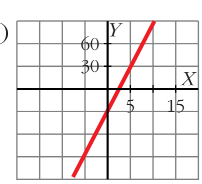
d) $m = 3; \ \ y = -3 + 3(x + 2) = 3x + 3$

8 Elige dos puntos en cada una de estas rectas y escribe su ecuación:

a)


b)


c)


d)


a) $y = \dfrac{5}{3}x + \dfrac{10}{3}$

b) $y = -\dfrac{1}{5}x + 8$

c) $y = 0{,}025x - 0{,}05$

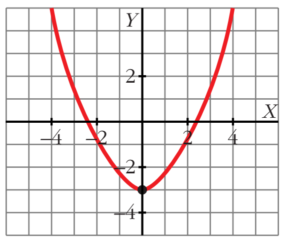
d) $y = 12x - 30$

9 **Representa las siguientes parábolas hallando el vértice, los puntos de corte con los ejes de coordenadas y algún punto próximo al vértice:**

a) $y = 0{,}5x^2 - 3$ **b)** $y = -x^2 + 3$

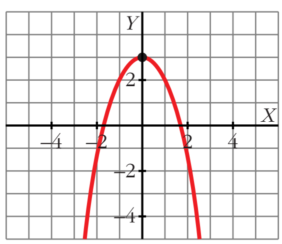
c) $y = 2x^2 - 4$ **d)** $y = -\dfrac{3x^2}{2}$

a)



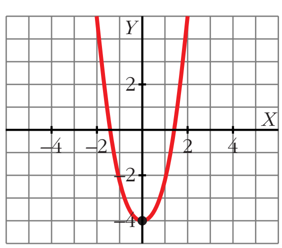
Vértice: (0, –3). Corte con los ejes: $(-\sqrt{6}, 0)$, $(\sqrt{6}, 0)$, (0, –3)

b)



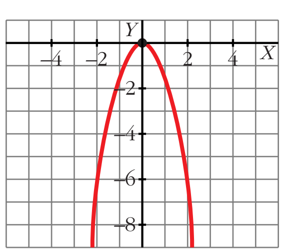
Vértice: (0, 3). Corte con los ejes: $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$, (0, 3)

c)



Vértice: (0, –4). Corte con los ejes: $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, (0, –4)

d)



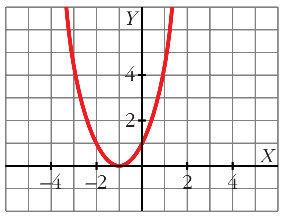
Vértice: (0, 0). Corte con los ejes: (0, 0)

10 **Representa las siguientes funciones:**

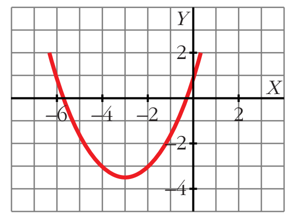
a) $y = x^2 + 2x + 1$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{2} + 3x + 1$

c) $y = -x^2 + 3x - 5$ **d)** $y = \dfrac{x^2}{3} + 3x + 6$

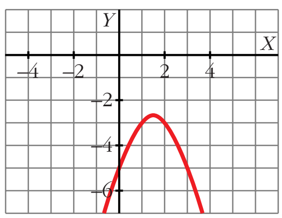
a)



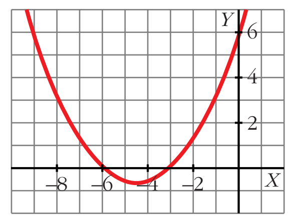
b)



c)



d)

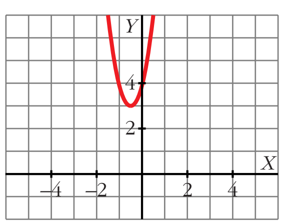


11 **En las siguientes parábolas, halla el vértice y comprueba que ninguna de ellas corta al eje de abscisas. Obtén algún punto a la derecha y a la izquierda del vértice y represéntalas gráficamente:**

a) $y = 4(x^2 + x + 1)$ **b)** $y = 5(x + 2)^2 + 1$

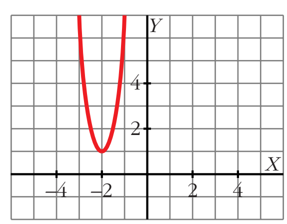
c) $y = -x^2 - 2$ **d)** $y = -\dfrac{3}{4}(x^2 + 2)$

a)



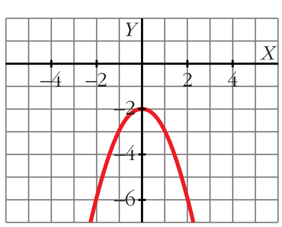
Vértice: $\left(-\dfrac{1}{2}, 3\right)$

b)



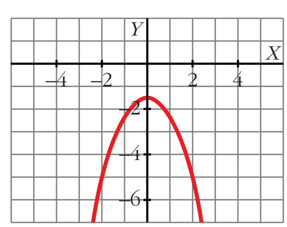
Vértice: $(-2, 1)$

c)



Vértice: $(0, -2)$

d)



Vértice: $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$

Página 136

12 **Estima mediante interpolación lineal el valor correspondiente a $x = 1\,000$ y a $x = 1\,558$, conociendo estos valores:**

x	825	2 015
y	2 500	4 516

$$y = 2\,500 + \frac{144}{85}(x - 825)$$

$$y(1\,000) = 2\,796{,}47$$

$$y(1\,558) = 3\,741{,}79$$

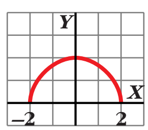
13 **Calcula mediante interpolación lineal el valor de y que falta en esta tabla:**

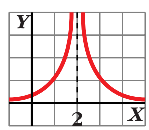
x	47	59	112
y	18	…	37

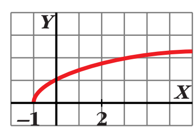
$$y = 18 + \frac{19}{65}(x - 47)$$

$$y(59) = \frac{1\,398}{65}$$

14 **Observando la gráfica de estas funciones, indica cuál es su dominio de definición y su recorrido:**







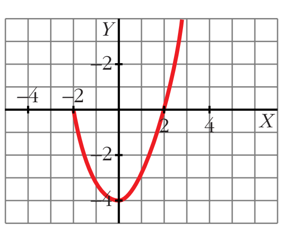
Los dominios son, por orden: $[-2, 2]$; $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ y $[-1, +\infty)$.

Los recorridos son, por orden: $[0, 2]$, $(0, +\infty)$ y $[0, +\infty)$.

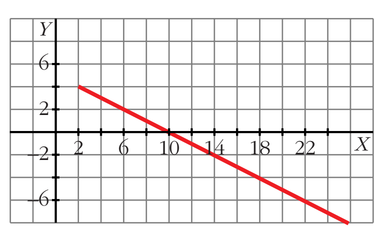
15 **Representa las siguientes funciones en las que se ha restringido voluntariamente su dominio:**

a) $y = x^2 - 4$, **si** $x \in [-2, 3]$ **b)** $y = 5 - \dfrac{x}{2}$, **si** $x \in [2, +\infty)$

a)

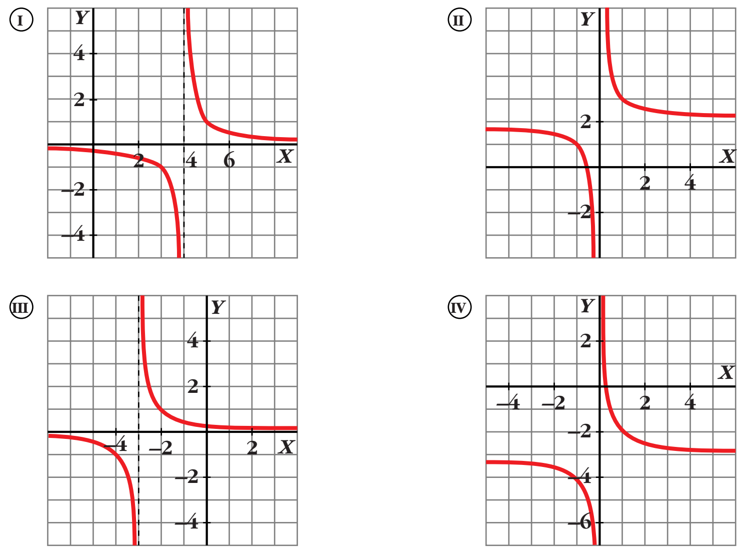


b)

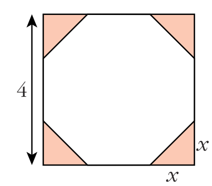


16 **Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones analíticas:**

a) $y = \dfrac{1}{x} + 2$ **b)** $y = \dfrac{1}{x + 3}$ **c)** $y = \dfrac{1}{x} - 3$ **d)** $y = \dfrac{1}{x - 4}$



17 **De un cuadrado de 4 cm de lado, se cortan en las esquinas triángulos rectángulos isósceles cuyos lados iguales miden x.**



a) Escribe el área del octógono que resulta en función de x.

b) ¿Cuál es el dominio de esa función? ¿Y su recorrido?

a) $A(x) = 16 - 2x^2$

b) Dominio: $(0, 2)$. Recorrido: $(8, 16)$

18 **Una empresa fabrica envases con forma de prisma de dimensiones x, $x/2$ y $2x$ cm.**

a) Escribe la función que da el volumen del envase en función de x.

b) Halla su dominio sabiendo que el envase más grande tiene 1 l de volumen. ¿Cuál es su recorrido?

a) $V(x) = x^3$

b) Domini: $(0, 10)$. Recorrido: $(0, 1\,000)$

PARA RESOLVER

19 **La factura de la energía eléctrica de una familia ha sido en noviembre 95 € por 375 kW h de consumo, y en enero 130,4 € por 552 kW h. ¿Cuánto tendrán que pagar si consumen 420 kW h?**

$y = 95 + 0{,}2(x - 375)$

$y(420) = 100$ euros

20 **Las ventas obtenidas por una empresa han sido de 28 000 € con unos gastos en publicidad de 3 000 € y de 39 000 € con unos gastos publicitarios de 5 000 €. Estima cuáles serán las ventas si se invierte en publicidad 4 000 €.**

$y = 28\,000 + 5{,}5(x - 3\,000)$

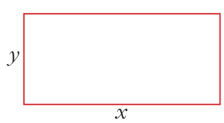
$y(4\,000) = 33\,500$ euros

21 **El precio del billete de una línea de cercanías depende de los kilómetros recorridos. Por 57 km he pagado 2,85 euros y por 168 km, 13,4 euros. Calcula el precio de un billete para una distancia de 100 km.**

$$y = 2{,}85 + 0{,}095(x - 57)$$

$$y(100) = 6{,}94 \text{ euros}$$

22 **Un rectángulo tiene 20 cm de perímetro. Escribe la función que da el área de ese rectángulo en función de su base *x*. ¿Cuál es el dominio de esa función?**



$2x + 2y = 20; \quad A = x \cdot y$

$A(x) = 10x - x^2; \quad D = (0,\ 10)$

23 **Los gastos fijos mensuales de una empresa por la fabricación de *x* televisores son $G = 3\,000 + 25x$, en miles de euros, y los ingresos mensuales son $I = 50x - 0{,}02x^2$, también en miles de euros.**

¿Cuántos televisores deben fabricarse para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo?

La función *Beneficio* viene dada por la expresión:

$$B = I - G = 50x - 0{,}02x^2 - 3\,000 - 25x = -0{,}02x^2 + 25x - 3\,000$$

Se trata de una parábola con las ramas hacia abajo.

El máximo de la función se encuentra en el vértice:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-25}{-0{,}04} = 625$$

El beneficio máximo se obtendrá para 625 televisores.

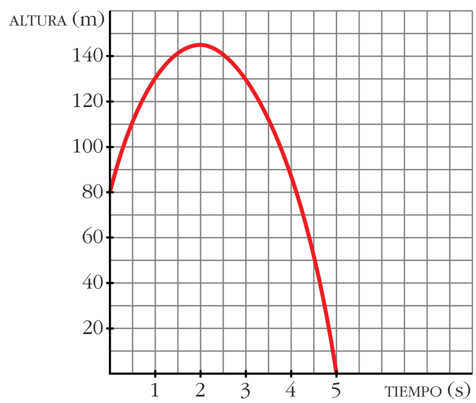
Página 137

24 **Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio. La altura que alcanza viene dada por la fórmula $h = 80 + 64t - 16t^2$ (*t* en segundos y *h* en metros).**

a) Dibuja la gráfica en el intervalo [0, 5].

b) Halla la altura del edificio.

c) ¿En qué instante alcanza su máxima altura?

a) 

b) 80 metros.

c) 2 segundos.

25 **El precio de venta de un artículo viene dado por $p = 12 - 0{,}01x$ (x = número de artículos fabricados; p = precio, en cientos de euros).**

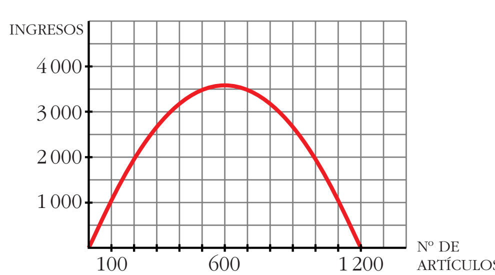
a) Si se fabrican y se venden 500 artículos, ¿cuáles serán los ingresos obtenidos?

b) Representa la función *Nº de artículos-Ingresos* obtenidos.

c) ¿Cuántos artículos se deben fabricar para que los ingresos sean máximos?

a) Si se venden 500 artículos, su precio será:

$$12 - 0{,}01 \cdot 500 = 7 \text{ cientos de euros} \rightarrow \text{Ingresos} = 350\,000 \text{ €}$$

b) 

$$I(x) = p \cdot x = 12x - 0{,}01x^2$$

c) Deben fabricar 600 artículos para obtener los ingresos máximos (360 000 euros).

26 **Un fabricante vende mensualmente 100 electrodomésticos a 400 euros cada uno y sabe que por cada 10 euros de subida venderá 2 electrodomésticos menos.**

a) ¿Cuáles serán los ingresos si sube los precios 50 euros?

b) Escribe la función que relaciona la subida de precio con los ingresos mensuales.

c) ¿Cuál debe ser la subida para que los ingresos sean máximos?

a) En este caso vendería 90 electrodomésticos a 450 euros cada uno; luego los ingresos serían de $450 \cdot 90 = 40\,500$ euros.

b) $I(x) = (400 + 10x)\,(100 - 2x) = -20x^2 + 200x + 40\,000$

(x = decenas de euros)

c) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{-40} = 5 \;\to\; 50 \text{ euros}$$

27 **El coste de producción de x unidades de un producto es igual a $(1/4)x^2 + 35x + 25$ euros y el precio de venta de una unidad es $50 - x/4$ euros.**

a) Escribe la función que nos da el beneficio total si se venden las x unidades producidas.

b) Halla el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo.

☛ ***Los ingresos por la venta de x unidades son $x(50 - x/4)$ euros.***

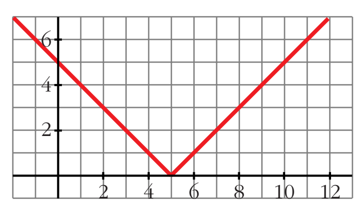
a) $B(x) = 50x - \dfrac{x^2}{4} - \left(\dfrac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right) = -\dfrac{x^2}{2} + 15x - 25$

b) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola: $x = \dfrac{-15}{-1} = 15$

Deben venderse 15 unidades.

28 **Representa la función $y = |x - 5|$ y comprueba que su expresión analítica en intervalos es:**

$$y = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x < 5 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

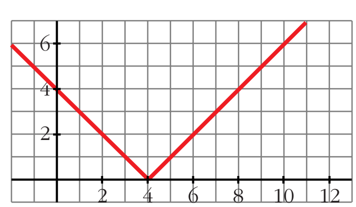


29 **Representa las siguientes funciones y defínelas por intervalos:**

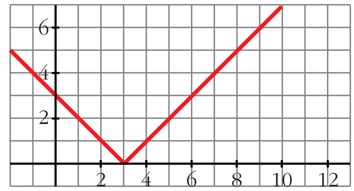
a) $y = |4 - x|$

b) $y = |x - 3|$

a) $y = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 4 \\ -4 + x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$



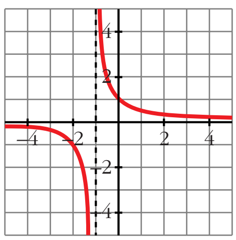
b) $y = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$



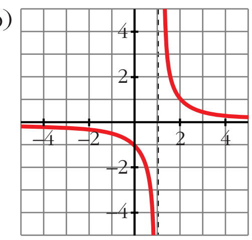
30 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x-1}$ **c)** $y = \dfrac{-1}{x}$ **d)** $y = \dfrac{-1}{x-3}$

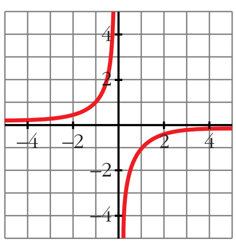
a)



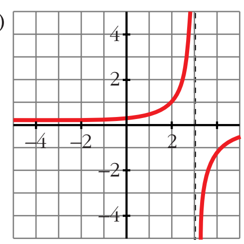
b)



c)



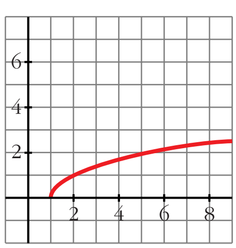
d)



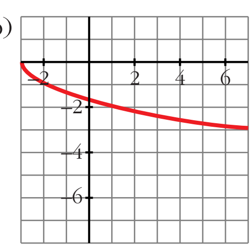
31 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt{x-1}$ **b)** $y = -\sqrt{x+3}$ **c)** $y = 2 + \sqrt{x}$ **d)** $y = 1 - \sqrt{x}$

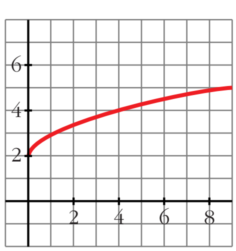
a)



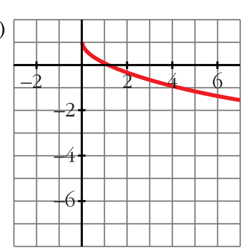
b)



c)



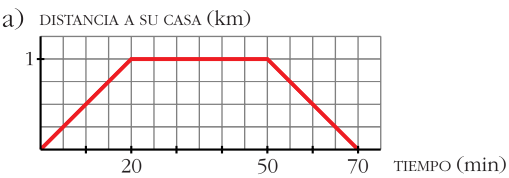
d)



32 **Elena va a visitar a su amiga Ana y tarda 20 minutos en llegar a su casa, que está a 1 km de distancia. Está allí media hora y en el camino de vuelta emplea el mismo tiempo que en el de ida.**

a) Representa la función *tiempo-distancia*.

b) Busca su expresión analítica.

a) 

b) $f(x) = \begin{cases} (1/20)x & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ 1 & \text{si } 20 < x \le 50 \\ -1/20\,(x - 70) & \text{si } 50 < x \le 70 \end{cases}$

33 **Halla el dominio de definición de las funciones:**

a) $y = \dfrac{3}{5x + 2x^2}$

b) $y = \dfrac{8}{x^3}$

c) $y = \dfrac{1}{x^3 + 8}$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

e) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 + 3}}$

f) $y = \sqrt[3]{x}$

g) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2 - x}}$

h) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - x - 15}}$

a) $\mathbb{R} - \left\{0, -\dfrac{5}{2}\right\}$

b) $\mathbb{R} - \{0\}$

c) $\mathbb{R} - \{-2\}$

d) $(0, +\infty)$

e) $\mathbb{R}$

f) $\mathbb{R}$

g) $(-\infty, 2)$

h) $(-\infty; 2{,}5) \cup (3, +\infty)$

34 **Halla el dominio de definición de estas funciones:**

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

b) $y = \sqrt{x^2 + 3}$

c) $y = \sqrt{5 - x^2}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

a) $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

b) $\mathbb{R}$

c) $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\,]$

d) $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

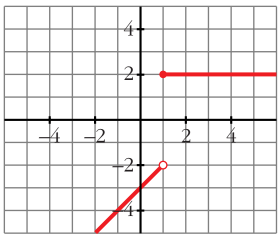
35 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

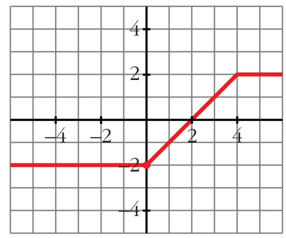
a) $y = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

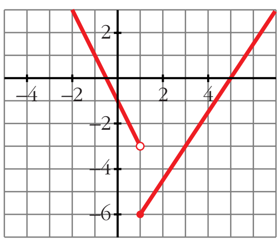
b) $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

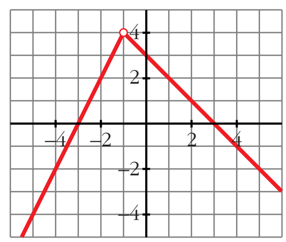
c) $y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ (3x - 15)/2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -1 \\ -x + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

a)


b)


c)


d)


Página 138

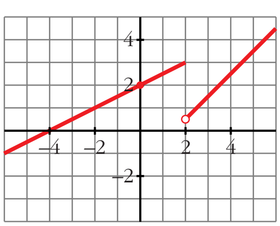
36 **Representa:**

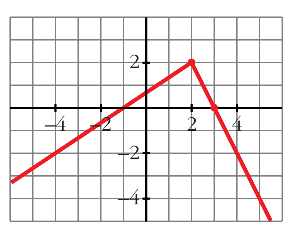
a) $y = \begin{cases} x/2 + 2 & \text{si } x \leq 2 \\ x - 3/2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

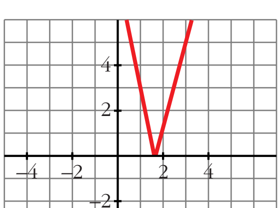
b) $y = \begin{cases} (2x + 2)/3 & \text{si } x < 2 \\ -2x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

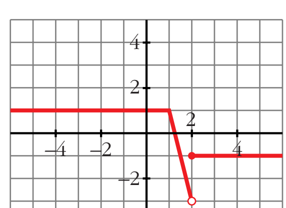
c) $y = \begin{cases} -4x + 7 & \text{si } x < 1{,}75 \\ 4x - 7 & \text{si } x \geq 1{,}75 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ -4x + 5 & \text{si } 1 < x < 2 \\ -1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a)


b)


c)


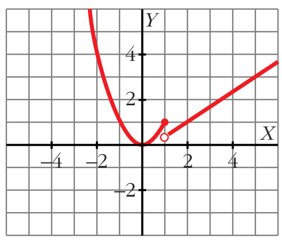
d)


37 **Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:**

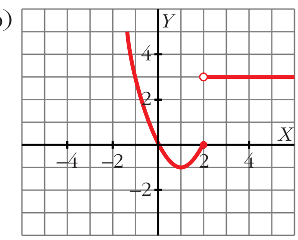
a) $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ (2x-1)/3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **b)** $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \le 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} -x^2 - 4x - 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$ **d)** $y = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

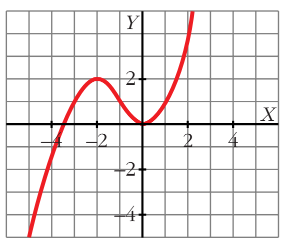
a)



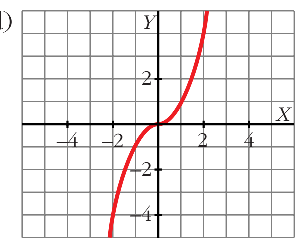
b)



c)



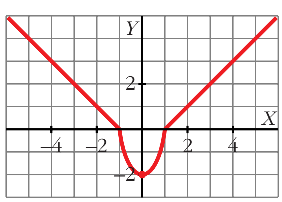
d)



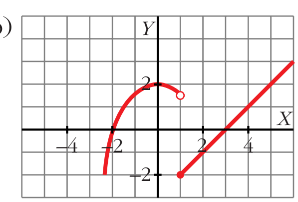
38 **Representa:**

a) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le -1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ **b)** $y = \begin{cases} (-x^2/2) + 2 & \text{si } x < 1 \\ x - 3 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a)

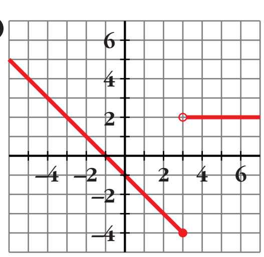


b)

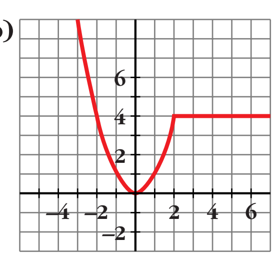


39 **Busca la expresión analítica de estas funciones:**

a)



b)



a) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

40 **Representa y define como funciones "a trozos":**

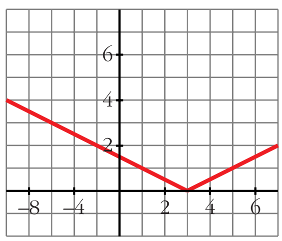
a) $y = \left|\dfrac{x-3}{2}\right|$ **b)** $y = |3x + 6|$

c) $y = \left|\dfrac{2x-1}{3}\right|$ **d)** $y = |-x - 1|$

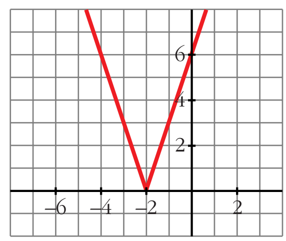
☛ ***Mira el ejercicio resuelto número 6.***

a) $y = \begin{cases} -\dfrac{x-3}{2} & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{x-3}{2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -3x - 6 & \text{si } x < -2 \\ 3x + 6 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

a)

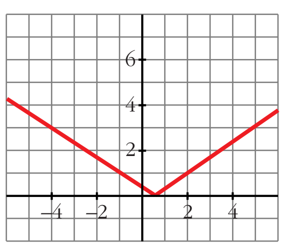


b)

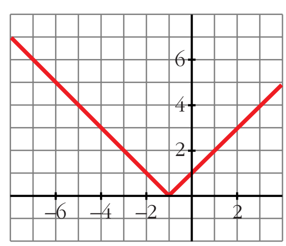


c) $y = \begin{cases} \dfrac{-2x+1}{3} & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2x-1}{3} & \text{si } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$ d) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

c)



d)



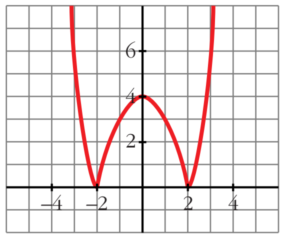
41 **Representa y define como funciones "a trozos":**

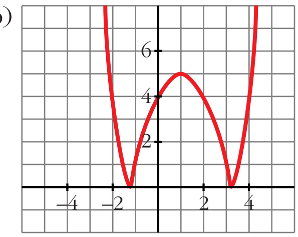
a) $y = |x^2 - 4|$ **b)** $y = |x^2 - 2x - 4|$

c) $y = \left|-\dfrac{x^2}{2} + 2\right|$ **d)** $y = |x^2 + 2x - 2|$

☛ ***Mira el ejercicio resuelto número 9.***

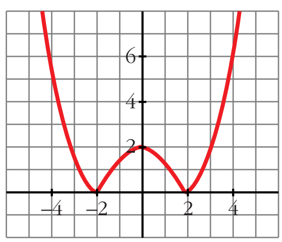
a) $y = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} x^2 - 2x - 4 & \text{si } x < -1{,}2 \\ -x^2 + 2x + 4 & \text{si } -1{,}2 \leq x \leq 3{,}2 \\ x^2 - 2x - 4 & \text{si } x > 3{,}2 \end{cases}$

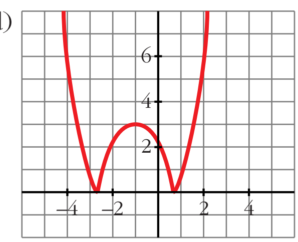
a) 

b) 

c) $y = \begin{cases} (x^2/2) - 2 & \text{si } \ x < -2 \\ (-x^2/2) + 2 & \text{si } \ -2 \le x \le 2 \\ (x^2/2) - 2 & \text{si } \ x > 2 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & \text{si } \ x < -2{,}7 \\ -x^2 - 2x + 2 & \text{si } \ -2{,}7 \le x \le 0{,}7 \\ x^2 + 2x - 2 & \text{si } \ x > 0{,}7 \end{cases}$

c) 

d) 

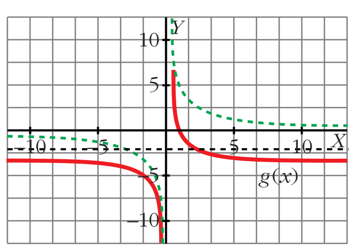
42 **A partir de la gráfica de $f(x) = 1/x$, representa:**

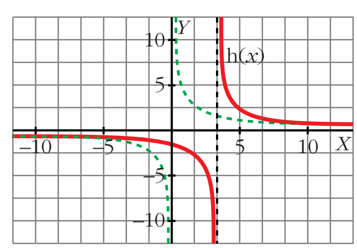
a) $g(x) = f(x) - 2$

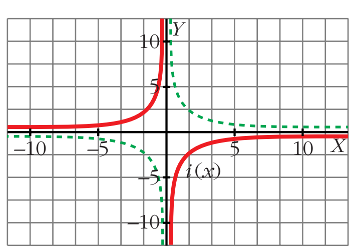
b) $h(x) = f(x - 3)$

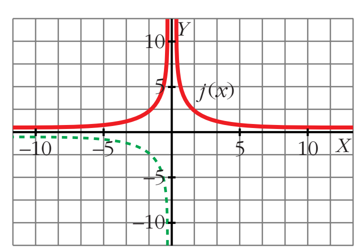
c) $i(x) = -f(x)$

d) $j(x) = |f(x)|$

a) 

b) 

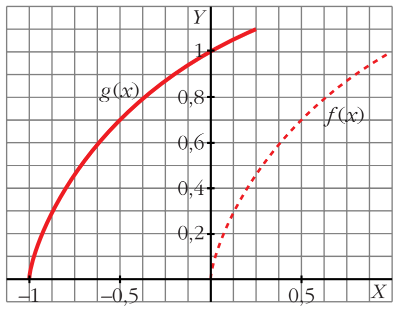
c) 

d) 

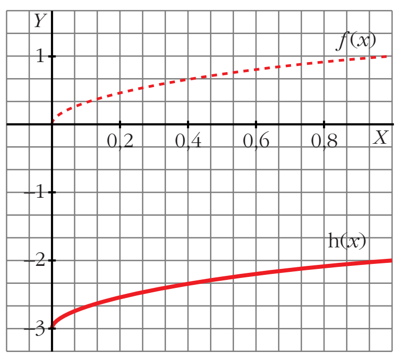
43 **Representa la función $f(x) = \sqrt{x}$ y dibuja, a partir de ella:**

a) $g(x) = \sqrt{x+1}$ **b)** $h(x) = \sqrt{x} - 3$ **c)** $y = \sqrt{-x}$

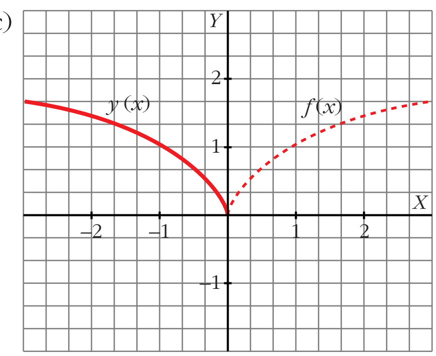
a)



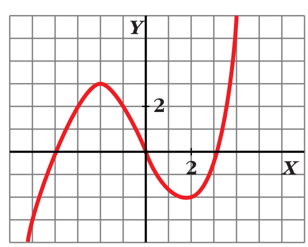
b)



c)



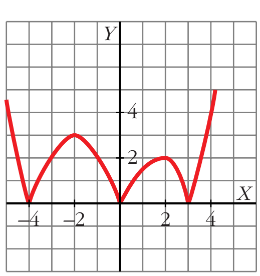
44 **Esta es la gráfica de la función $y = f(x)$:**



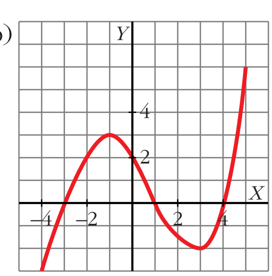
Representa, a partir de ella, las funciones:

a) $y = |f(x)|$ **b)** $y = f(x-1)$ **c)** $y = f(x) + 2$

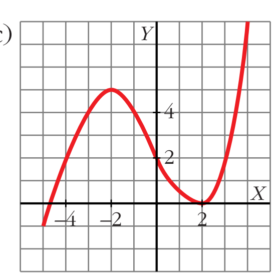
a)



b)



c)

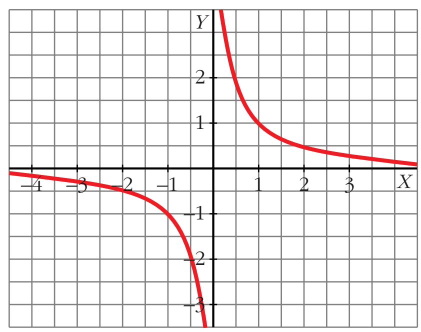


45 **Utilizando la relación $\frac{\text{Dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$ podemos escribir la función $y = \frac{2x+3}{x+1}$ de esta forma:**

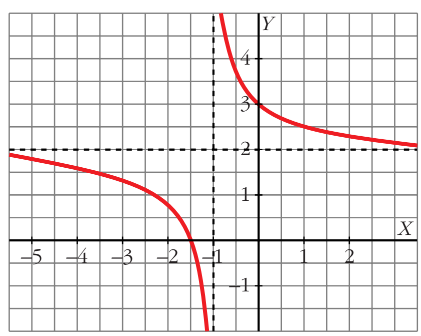
$$y = 2 + \frac{1}{x+1}$$

Comprueba que su gráfica coincide con la de $y = 1/x$ trasladada 1 unidad hacia la izquierda y 2 hacia arriba.

$y = \frac{1}{x}$

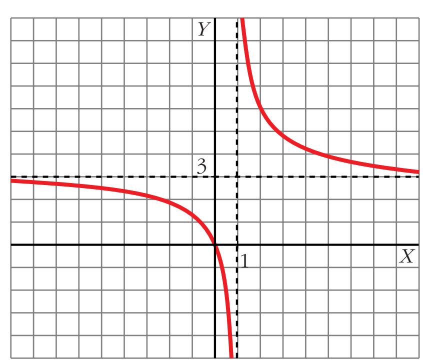


$y = 2 + \frac{1}{x+1}$

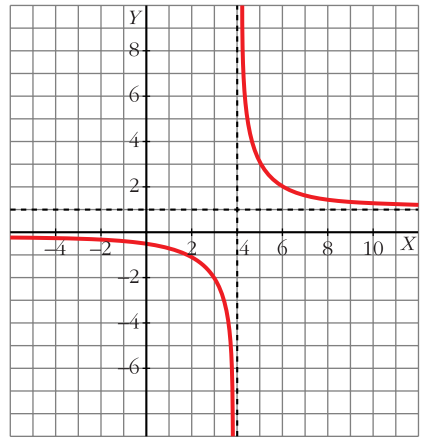


46 **Representa las funciones $y = \frac{3x}{x-1}$, $y = \frac{x-2}{x-4}$ utilizando el procedimiento del problema anterior.**

$y = \frac{3x}{x-1} = 3 + \frac{3}{x-1}$



$$y = \frac{x-2}{x-4} = 1 + \frac{2}{x-4}$$



Página 139

CUESTIONES TEÓRICAS

47 **Una parábola corta al eje de abscisas en $x = -1$ y en $x = 3$. La ordenada del vértice es $y = -4$. ¿Cuál es la ecuación de esa parábola?**

$f(x) = k(x+1)(x-3) = k(x^2 - 2x - 3)$

Vértice $\rightarrow x = \dfrac{3 + (-1)}{2} = 1;\ f(1) = -4k = -4 \Rightarrow k = 1$

La ecuación de la parábola será, por tanto: $f(x) = x^2 - 2x - 3$

48 **¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(0, n)$ y $B(1, n + m)$?**

$y = mx + n$

49 **Recuerda que la pendiente de una recta es lo que aumenta y por cada unidad que aumenta x. Demuestra que en la recta $y = mx + n$, m es la pendiente.**

☛ ***Calcula el valor de y cuando $x = a$ y cuando $x = a + 1$ y halla la pendiente.***

$$\left.\begin{array}{l} y(a) = m \cdot a + n \\ y(a+1) = m \cdot a + m + n \end{array}\right\} \ y(a+1) - y(a) = m = \text{pendiente}$$

50 **Encuentra los valores de c para que la función $y = -x^2 + 12x + c$ tenga con el eje de abscisas:**

a) Dos puntos de corte.

b) Un punto de corte.

c) Ningún punto de corte.

$$b^2 - 4ac = 144 + 4c$$

a) $144 + 4c > 0 \Rightarrow c > -36$

b) $144 + 4c = 0 \Rightarrow c = -36$

c) $144 + 4c < 0 \Rightarrow c < -36$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

51 **Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ **b)** $y = \sqrt{\dfrac{x-9}{x}}$

a) $\dfrac{x+3}{x-2} \geq 0$ $\left\{\begin{array}{l} x+3 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{array}\right\} x > 2$; $\left\{\begin{array}{l} x+3 \leq 0 \\ x-2 < 0 \end{array}\right\} x \leq -3$ Dominio = $(-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$

b) $\dfrac{x-9}{x} \geq 0$ $\left\{\begin{array}{l} x-9 \geq 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} x \geq 9$; $\left\{\begin{array}{l} x-9 \leq 0 \\ x < 0 \end{array}\right\} x < 0$ Dominio = $(-\infty, 0) \cup [9, +\infty)$

52 **El precio del metro cuadrado de un material plástico para suelos depende de la cantidad que compremos, x, y viene dado por la función $f(x)$ definida así:**

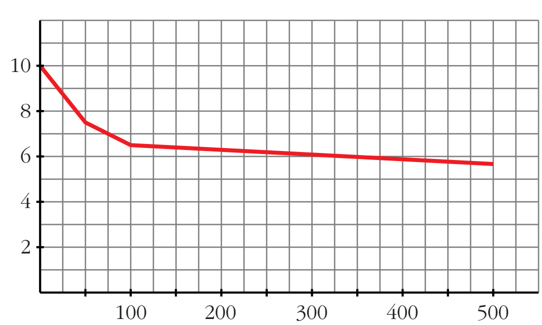
$$f(x) = \begin{cases} 10 - 0{,}05x & \text{si } \quad 0 \leq x \leq 50 \\ 7{,}5 - 0{,}02(x - 50) & \text{si } \quad 50 < x < 100 \\ 6{,}5 - 0{,}002(x - 100) & \text{si } \quad 100 \leq x \leq 500 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente esta función.

b) ¿Cuál será el precio si compro 300 m²?

c) Para conseguir un precio inferior a 7 €/m², ¿cuántos metros cuadrados, como mínimo, tengo que comprar?

a)



Es continua en su dominio.

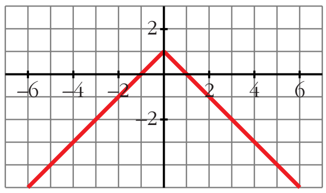
53 **Representa estas funciones y exprésalas en intervalos:**

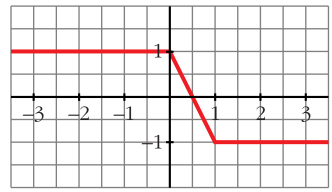
a) $y = 1 - |x|$

b) $y = |x - 1| - |x|$

a) $y = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 + x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$



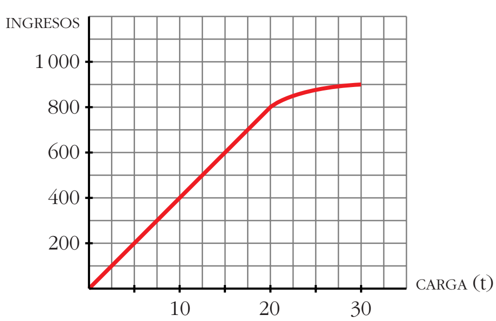


54 **Las tarifas de una empresa de transportes son:**

- **40 euros por tonelada de carga si esta es menor o igual a 20 t.**
- **Si la carga es mayor que 20 t, se restará, de los 40 euros, tantos euros como toneladas sobrepasen las 20.**

a) Dibuja la función *ingresos de la empresa según la carga que transporte* (carga máxima: 30 t).

b) Obtén la expresión analítica.

a) 

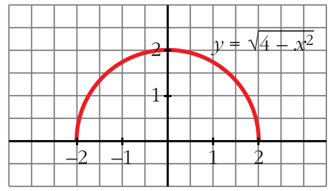
b) $f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ [40 - (x - 20)]x & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$

Es decir:

$$f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ 60x - x^2 & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$$

55 **La gráfica de $y = \sqrt{4 - x^2}$ es una semicircunferencia con centro en el origen y radio 2. Compruébalo. ¿Cuál es su dominio? ¿Cuál será la función que representa la otra semicircunferencia?**

☛ ***Haz una tabla de valores y represéntala.***



Dominio = [–2, 2]

La función que representa la otra semicircunferencia es $y = -\sqrt{4 - x^2}$.

PARA PROFUNDIZAR

56 **De una función polinómica de segundo grado, $y = p(x)$, sabemos que tiene un máximo en el punto de abscisa $x_0 = 1$ y que $p(2) = 4$.**

a) ¿Cuánto vale $p(0)$?

b) ¿Tenemos suficientes datos para representarla? Escribe la ecuación de una parábola que cumpla estas condiciones y represéntala.

$p(x) = ax^2 + bx + c$

Máximo en el punto de abscisa $x_0 = 1 \Rightarrow \dfrac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$

$p(2) = 4 \Rightarrow 4 = 4a + 2b + c$

$4 = 4a + 2(-2a) + c$

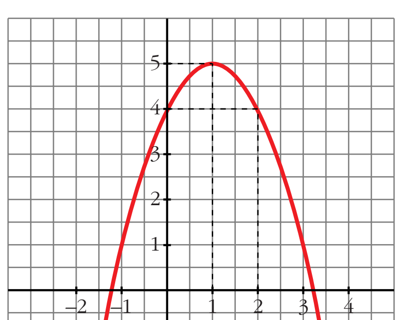
$4 = 4a - 4a + c$

$c = 4$

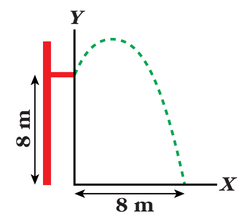
a) $p(0) = c = 4$

b) No tenemos suficientes datos; solo sabemos que: $p(x) = ax^2 - 2ax + 4$; $a < 0$

Un ejemplo podría ser $p(x) = -x^2 + 2x + 4$



57 **En una piscina hay un trampolín a 8 m del agua. Un nadador se lanza tomando impulso y elevándose 1 m antes de empezar a caer. El nadador alcanza el agua a 8 m del borde del trampolín.**



a) Si tomamos como origen de coordenadas la proyección del extremo del trampolín sobre el agua y el vértice de la parábola es (a, b), ¿cuánto vale b?

b) La ecuación del movimiento es $y = k(x - \alpha)^2 + 9$. Justifícala y halla k y α.

a) $b = 8 + 1 = 9$

b) El vértice es $(\alpha, 9)$, por eso la ecuación es $y = k(x - \alpha)^2 + 9$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Como } y(0) = 8 \Rightarrow 8 = k\,\alpha^2 + 9 \\ \text{Como } y(8) = 0 \Rightarrow 0 = k(8 - \alpha)^2 + 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} k = -1/\alpha^2 \\ k = -9/(8 - \alpha)^2 \end{array}$$

$$-\frac{1}{\alpha^2} = \frac{-9}{(8 - \alpha)^2} \Rightarrow (8 - \alpha)^2 = 9\alpha^2 \Rightarrow 8\alpha^2 + 16\alpha - 64 = 0$$

$$\alpha^2 + 2\alpha - 8 = 0 \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 2 \to k = -1/4 \\ -4 \text{ (vemos por la gráfica que no vale)} \end{cases}$$

La ecuación será, por tanto:

$$y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 9$$