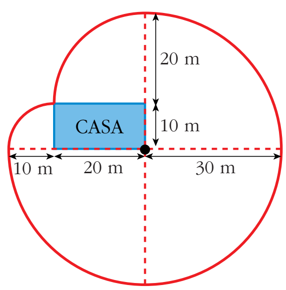
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Página 11

1. OTRA VEZ LA CABRA

En el ejercicio de más arriba, supongamos que la casa es rectangular, de 10 m × 20 m, y que la cuerda con la que se ata la cabra mide 30 m. Halla la superficie en la que puede pastar.

Hacemos un dibujo:



$$Área = \frac{3}{4}\pi \cdot 30^2 + \frac{1}{4}\pi \cdot 20^2 + \frac{1}{4}\pi \cdot 10^2 =$$

$$= 800\,\pi \simeq 2\,512 \text{ m}^2$$

2. LA CLASE

En una clase hay 30 alumnos y alumnas, de los cuales 22 estudian inglés y 15 estudian informática. Si todos estudian inglés o informática, ¿cuántos estudian solo inglés? ¿Y solo informática? ¿Cuántos estudian las dos cosas?

Hallamos el número de alumnos que estudian las dos cosas:

$22 + 15 = 37$

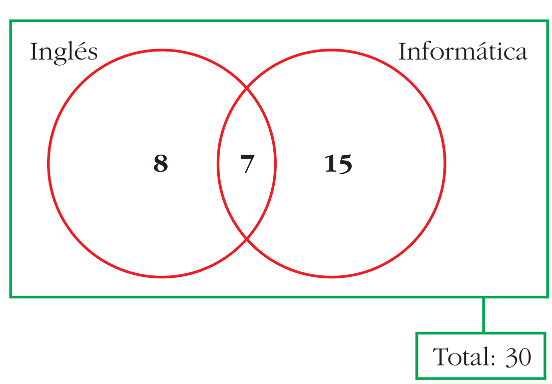
$37 - 30 = 7$ alumnos estudian las dos cosas

Por tanto:

$22 - 7 = 15$ estudian solo inglés

$15 - 7 = 8$ estudian solo informática

En un diagrama sería así:



Página 12

3. **TRANSPORTANDO PANES**

Una comitiva de doce personas acarrean 12 panes: cada hombre lleva dos panes; cada mujer, medio pan y cada niño, un cuarto de pan. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños componen la comitiva?

☛ ***Sean x hombres, y mujeres y z niños. Se tiene:*** $2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 12$

Prueba las distintas posibilidades teniendo en cuenta que x, y y z han de ser números enteros y positivos.

Sean x hombres, y mujeres, z niños, tales que: $x + y + z = 12$.

Se tiene: $\left\{ \begin{array}{l} 2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 12 \\ x + y + z = 12 \end{array} \right.$

Si $x = 5 \rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 2 \\ y + z = 7 \end{array} \right\} \begin{array}{r} 2y + z = 8 \\ y + z = 7 \end{array} \Big\} \begin{array}{l} y = 1 \\ z = 6 \end{array}$

Si $x = 4 \rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 4 \\ y + z = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{r} 2y + z = 16 \\ y + z = 8 \end{array} \Big\} \begin{array}{l} y = 8 \\ z = 0 \end{array}$

Si $x < 4$ o si $x > 5$, la y o la z salen negativas, cosa que es imposible. Así pues, estas son las dos únicas soluciones posibles:

$x = 5, \; y = 1, \; z = 6$

$x = 4, \; y = 8, \; z = 0$

4. **LOS NÚMEROS OCULTOS**

Se han tomado dos fichas de cartón y se ha escrito un número en cada una de las cuatro caras.

Tirándolas al aire y sumando los números que quedan a la vista, pueden obtenerse los siguientes resultados: 36, 41, 50, 55.

Observa la figura y averigua los números que quedan ocultos.

Llamamos a al número que va en la cara opuesta al 25 y b al de la cara opuesta al 30; los resultados posibles serían:

$a + 30 \quad 36$

$b + 25 \quad 41$

$a + b \quad 50$

$25 + 30 \rightarrow 55$

Descartado el 55, que corresponde a 25 + 30, ahora debemos asociar las tres sumas restantes a los número 36, 41 y 50.

Hagamos un cuadro:

$a + 30 = 36$ $b + 25 = 41$	$a + 30 = 36$ $b + 25 = 50$	$a + 30 = 41$ $b + 25 = 36$	$a + 30 = 41$ $b + 25 = 50$	$a + 30 = 50$ $b + 25 = 36$	$a + 30 = 50$ $b + 25 = 41$
$a = 6$ $b = 16$ Imposible Debería ser $a + b = 50$	$a = 6$ $b = 25$ Imposible Debería ser $a + b = 41$	$a = 11$ $b = 11$ Imposible Debería ser $a + b = 50$	$a = 11$ $b = 25$ $a + b = 36$ Primera solución	$a = 20$ $b = 11$ Imposible Debería ser $a + b = 41$	$a = 20$ $b = 16$ $a + b = 36$ Segunda solución

El problema tiene, por tanto, dos soluciones:

$$\left.\begin{array}{l}1^{\underline{a}}\text{ ficha: } 25 \text{ y } 11\\ 2^{\underline{a}}\text{ ficha: } 30 \text{ y } 25\end{array}\right\}\quad \text{o bien: }\left\{\begin{array}{l}1^{\underline{a}}\text{ ficha: } 25 \text{ y } 20\\ 2^{\underline{a}}\text{ ficha: } 30 \text{ y } 16\end{array}\right.$$

Página 13

5. EL CUENTO

María tiene que acabar de leer un cuento. El lunes leyó la mitad del cuento. El martes, la tercera parte de lo que le faltaba. El miércoles, la cuarta parte del resto. El jueves, la quinta parte de lo que le quedaba. Hoy, viernes, ha decidido acabarlo y ha observado que le quedan menos de 15 páginas.

Si todos los días ha leído un número entero de páginas, ¿cuántas páginas tiene el cuento?

Llamamos n al número de páginas del cuento y construimos una tabla para organizar la información:

	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
PÁGINAS LEÍDAS	$\frac{n}{2}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n}{6}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{n}{3} = \frac{n}{12}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{n}{4} = \frac{n}{20}$	$\frac{n}{5} < 15$
PÁGINAS QUE LE FALTAN	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2} - \frac{n}{6} = \frac{n}{3}$	$\frac{n}{3} - \frac{n}{12} = \frac{n}{4}$	$\frac{n}{4} - \frac{n}{20} = \frac{n}{5}$	0

El viernes tiene que leer $\frac{n}{5}$ páginas. Pero como todos los días ha leído una cantidad entera de páginas, el número n debe ser múltiplo de los denominadores 2, 6, 12 y 20; es decir, múltiplo de 60.

Como, además, $\frac{n}{5} < 15$, ha de ser $n = 60$.

Por tanto, el cuento tiene 60 páginas (el lunes leyó 30, el martes 10, el miércoles 5, el jueves 3 y el viernes las que faltan, 12 < 15).

6. UN SISTEMA

Resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=8\\[2mm]\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}=3\end{array}\right\}$$

☛ ***Llama $z = 1/x$, $t = 1/y$***

Si $z = \dfrac{1}{x}$ y $t = \dfrac{1}{y}$, el sistema se transforma en:

$$\left.\begin{array}{r}z + 2t = 8\\ 3z - \quad t = 3\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l}z = 2\\ t = 3\end{array}\right.$$

Luego: $z = 2 = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$t = 3 = \dfrac{1}{y} \Rightarrow y = \dfrac{1}{3}$

Solución: $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{3}$

Página 14

7. LAS PUERTAS

El conserje de un hotel cierra y abre las puertas de las habitaciones del siguiente modo:

- **El primer día cierra todas las puertas.**
- **El segundo día abre las pares.**
- **El tercer día cambia (si una puerta estaba abierta, la cierra; y si estaba cerrada, la abre) las múltiplos de 3.**
- **El cuarto día las múltiplos de 4.**
- **Etc.**

¿Qué puertas son las que quedarán cerradas al final del proceso?

Empezamos haciendo un esquema: C indica puerta cerrada, A indica puerta abierta:

Número de puerta:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
Primer día:	**C**	C	C	C	C	C	C	C	C	C	…
Segundo día:	C	**A**	C	A	C	A	C	A	C	A	…
Tercer día:	C	A	**A**	A	C	C	C	A	A	A	…
Cuarto día:	C	A	A	**C**	C	C	C	C	A	A	…

Observamos que las puertas que quedan cerradas al final del proceso, son la 1, 4, 9, 16…

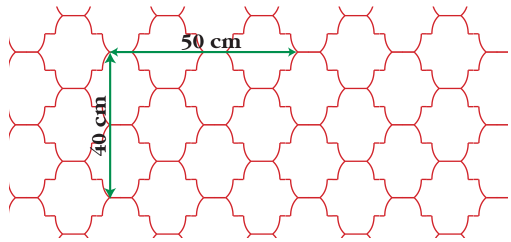
Es decir, las que llevan un número que es cuadrado perfecto.

Esto es debido a que son los únicos números que tienen un número impar de divisores y, por tanto, tendrán un número impar de cambios, quedando finalmente cerradas.

Página 15

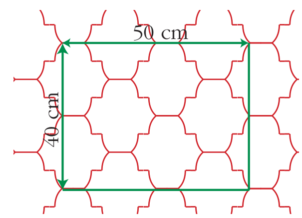
8. LAS LOSETAS

Halla la superficie de cada loseta de este embaldosado:



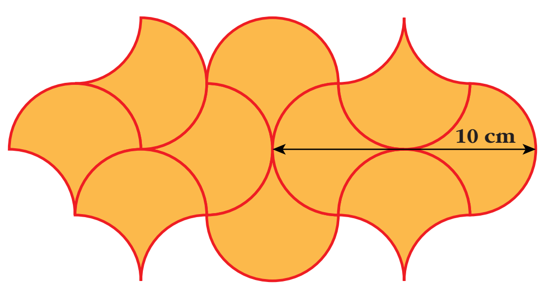
Observando la figura, es muy sencillo comprobar que dentro del rectángulo de 2 000 cm^2 hay 8 losetas (4 enteras, 4 medias losetas y otros 4 trozos que conforman dos losetas, dos a dos).

Por tanto, cada loseta tiene un área de 250 cm^2.

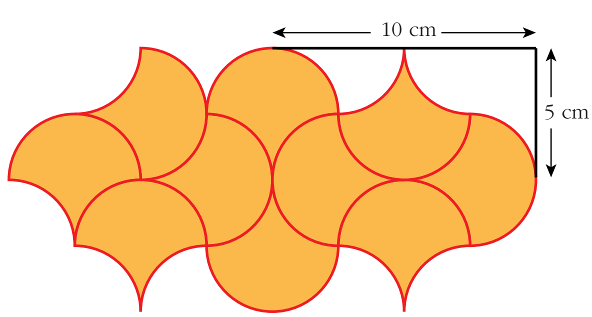


9. MÁS LOSETAS

Halla la superficie de cada loseta de este embaldosado:



Como podemos observar en la siguiente figura, el área del rectángulo es de 50 cm^2:



Contando cuidadosamente, obtenemos 4 losetas dentro de este rectángulo. Luego cada loseta tiene un área de 12,5 cm^2.

Página 17

10. MÁS MONEDAS

Siguiendo con el problema resuelto de la página anterior, ¿cuál es el número máximo de monedas que podemos tener para que se pueda averiguar cuál es la moneda falsa con tan solo tres pesadas?

El análisis se hace mucho más sencillo empezando por el final. ¿Cuántas monedas debemos tener en la última pesada para estar seguros de que identificamos la falsa? Es fácil ver que la respuesta es 3. Pesamos dos y, o es una de ellas, o es la tercera.

La pregunta ahora sería: ¿Cuántas monedas debemos tener en la penúltima pesada? Si seguimos con el argumento de los dos bloques de monedas pesados y uno que sobra, la respuesta es $3 + 3 + 3 = 9$.

Por tanto, el número máximo de monedas que podemos tener para asegurar el éxito de nuestra investigación es: $9 + 9 + 9 = 27$

11. EL DINERO

En un bolsillo tenemos monedas de tres clases: de 5, de 20 y de 50 eurocéntimos. En total, 12 monedas con un valor de 2 euros y 85 céntimos (285 eurocéntimos). ¿Cuántas monedas hay de cada clase?

Si x es el número de monedas de 5 eurocéntimos, y el número de monedas de 10 y z el de 50, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x + 20y + 50z = 285 \\ x + y + z = 12 \end{cases}$$

Cuyas soluciones son: $\begin{cases} x = -3 + 2z \\ y = 15 - 3z \end{cases}$

- Si $z < 2$, el número de monedas de 5 eurocéntimos sale negativo, luego ha de ser $z \geq 2$.
- Si $z = 5$, el número de monedas de 20 eurocéntimos sale 0 (el enunciado dice que tenemos de los tres tipos), luego ha de ser $z < 5$.
- Además, x, y, z han de ser enteros.

Por tanto, hay tres posibilidades:

- 2 monedas de 50, 1 de 5 y 9 de 20 eurocéntimos.
- 3 monedas de 50, 3 de 5 y 6 de 20 eurocéntimos.
- 4 monedas de 50, 5 de 5 y 3 de 20 eurocéntimos.

12. EL PASTOR, SU OVEJA, SU LOBO Y SU COL

Un pastor con una enorme col, una enorme oveja y un enorme lobo, llega a un río en el que hay una diminuta barca en la que no cabe más que el pastor y una sola de sus pertenencias.

Si deja al lobo y a la oveja solos, el lobo… Y si deja a la oveja y a la col sin vigilancia, no te digo lo que le pasará a la col… Eso sí, el lobo no es vegetariano. Quiere pasar a todos al otro lado del río. ¿Cómo lo hará?

Lo primero que pasa es la oveja, porque en cualquier otro caso habría festín. Más tarde vuelve y se lleva la col. Como no puede dejar a la oveja con la col, se trae de vuelta a la oveja. Deja a la oveja en su lugar de partida y se lleva al otro lado del río al lobo, para que haga compañía a la solitaria col. Vuelve, por última vez, a por la oveja y, en lo que es el tercer viaje para esta, atraviesa definitivamente el río.

Página 18

PROBLEMAS PARA PRACTICAR

1. UN RELOJ TARDÓN

Si el reloj de una iglesia tarda treinta segundos en dar las seis, ¿cuánto tiempo tardará en dar las doce?

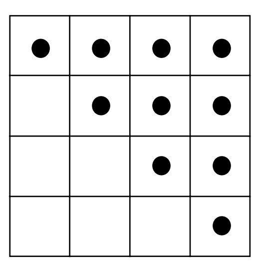
30 : 5 = 6 segundos pasan entre cada 2 campanadas.

Para dar las 12 hay 11 espacios de tiempo entre campanadas; como cada uno de ellos es de 6 segundos, será:

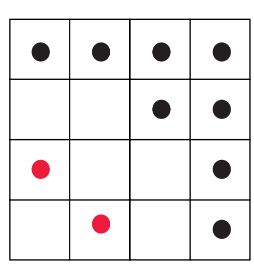
11 · 6 = 66 segundos tarda en dar las 12

2. NÚMERO PAR DE FICHAS

En un tablero cuadrado de 16 casillas hay dispuestas 10 fichas, como indica la figura.



Se propone colocarlas, una en cada casilla, de tal manera que en cada fila horizontal o vertical y en las dos diagonales, se ubiquen un número par de fichas.



3. LOS PENDIENTES

En un remoto poblado de Nueva Guinea hay 1 400 mujeres. El 14% de ellas lleva un solo pendiente. Del 86% restante, la mitad lleva dos pendientes y la otra mitad no lleva ninguno.

Si los hombres no llevan pendientes, ¿cuántos pendientes hay en total en el poblado?

Que la mitad lleve dos pendientes y la otra mitad no lleve ninguno, a efectos matemáticos, es equivalente a que todas lleven un solo pendiente.

Por tanto, hay 1 400 pendientes.

4. MEZCLAS

De un balde que contiene 5 litros de agua, se vierte un litro fuera de él y, en su lugar, se rellena el balde con un litro de zumo de naranja. Se mezcla bien el zumo con el agua y nuevamente se vierte fuera un litro de la mezcla, sustituyéndola por un litro de zumo de naranja. Y se hace lo mismo por tercera vez. ¿Cuánta agua quedará en el balde después del proceso?

Después de la primera operación, queda:

AGUA	ZUMO
$5 - 1 = 4$	1

Un litro de esto es $\frac{4}{5}$ litros de agua.

Después de la segunda operación, queda:

AGUA	ZUMO
$4 - \frac{4}{5}$	$1 + \frac{4}{5}$

1 litro de la mezcla es $\dfrac{4 - \frac{4}{5}}{5}$ litros de agua.

Después de la tercera operación, queda:

AGUA

$$4 - \frac{4}{5} - \frac{4 - \frac{4}{5}}{5} = 2{,}56 \text{ litros de agua}$$

5. VACAS LECHERAS

4 vacas negras y 3 vacas blancas dan la misma cantidad de leche en 5 días que 3 vacas negras y 5 vacas blancas en 4 días. ¿Qué tipo de vaca es mejor vaca lechera, la blanca o la negra?

Llamamos $\begin{cases} x = \text{cantidad de leche que da una vaca blanca en 1 día.} \\ y = \text{cantidad de leche que da una negra al día.} \end{cases}$

Así, tenemos que:

$$20y + 15x = 12y + 20x \;\rightarrow\; 8y = 5x \;\rightarrow\; x > y$$

Por tanto, la mejor lechera es la vaca blanca.

6. EL NÚMERO OCULTO

Este juego consiste en encontrar un número de cuatro cifras que no empieza por cero.

Escrito un número en la tabla, en la columna B se indica cuántos de sus dígitos tienen en común con el número buscado y en la misma posición.

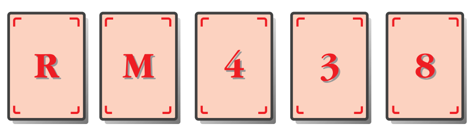
	B	R
3 476	0	2
3 965	0	2
4 269	0	1
1 057	2	1

En la columna R se indica cuántos dígitos tiene ese número en común con el buscado, pero en posición incorrecta. Con los datos de esta tabla, ¿serías capaz de encontrar el número oculto?

6 157

7. LAS CARTAS

En una mesa hay cinco cartas:



Cada carta tiene, en un lado, un número natural y, en el otro, una letra.

Enrique afirma: “Cualquier carta que tenga en un lado una vocal, tiene un número par en el otro lado”.

Pedro se convenció de que Enrique decía la verdad dando la vuelta a una sola carta. ¿Cuál fue?

Para confirmar las palabras de su amigo, Pedro debió dar la vuelta al 3 y encontrar una consonante. Desechamos los demás casos:

- Da la vuelta a la R o a la M: es indiferente lo que haya tras ellas, pues el enunciado no dice nada sobre las consonantes.
- Da la vuelta al 4 o al 8: también es indiferente pues, si sale vocal, confirma las palabras de Enrique y, si sale consonante, estamos en el caso anterior.

8. FUERA DE LA LEY

Cuatro hombres, uno de los cuales había cometido un determinado crimen, hicieron las siguientes afirmaciones al ser interrogados por la policía:

ARTURO: David lo hizo.

DAVID: Antonio lo hizo.

GUSTAVO: Yo no lo hice.

ANTONIO: David mintió cuando dijo que lo hice.

Si solo una de estas afirmaciones fuera cierta, ¿quién sería el culpable? Por otro lado, si solo una de estas afirmaciones fuera falsa, ¿quién sería entonces el culpable?

Enumeramos las afirmaciones:

① ARTURO: "David lo hizo". ② DAVID: "Antonio lo hizo".

③ GUSTAVO: "Yo no lo hice". ④ ANTONIO: "David mintió cuando dijo que lo hice"

1$^{\underline{er}}$ caso: Si solo una fuera cierta:

– Si ① fuera la cierta ⇒ ③ sería cierta, pero esto no es posible, pues solo hay una cierta.

– Si ② fuera la cierta ⇒ ③ sería cierta, y esto no es posible.

– Si ③ fuera la cierta ⇒ ② ó ④ serían verdaderas, pero esto no es posible.

– Por tanto, la cierta es la ④. Así, ① sería falsa (luego David no lo hizo), ② sería falsa (luego Antonio no lo hizo) y ③ sería falsa. De aquí deducimos que el culpable fue *Gustavo*.

2$^{\underline{o}}$ caso: Si solo una fuera falsa:

– Si ① fuera la falsa ⇒ ② ó ④ serían falsas, lo cual es imposible.

– Si ③ ó ④ fueran las falsas ⇒ ① y ② serían verdad, y esto no es posible.

– Por tanto, la falsa es la ②, con lo que el culpable es David.

Página 19

9. **EN EL PARQUE DE ATRACCIONES**

Cuatro amigas (Alicia, Rocío, Carmen y Mercedes) van al parque de atracciones con otros cuatro amigos (Pablo, Luis, Carlos y Ramón).

A lo largo de la jornada, las cuatro chicas han montado en las siguientes atracciones: montaña rusa, barcas, casa del terror y alfombra mágica. Además, siempre montan un chico y una chica juntos en cada atracción. A la salida comentan:

Alicia: Me lo pasé mejor en la montaña rusa con Pablo que en las barcas con Luis.

Rocío: Cuando monté en la montaña rusa con Carlos, se estropeó y se quedó un rato parada.

Carmen: Ramón me dio un buen susto en la casa del terror.

Mercedes: Pues yo no vuelvo a entrar en la casa del terror con Pablo.

¿Cómo se formaron las parejas al montar en la alfombra mágica?

Teniendo en cuenta que en la montaña rusa Carmen solo pudo haber ido con Luis o con Ramón, y que con Ramón fue a la casa del terror, resulta que en la montaña rusa Carmen subió con Luis.

A partir de este dato, ya es muy fácil deducir que las parejas en la alfombra fueron: Alicia-Ramón, Rocío-Pablo, Carmen-Carlos y Mercedes-Luis.

10. LOS EXPLORADORES Y LOS CANÍBALES

Tres exploradores y tres caníbales deben cruzar un río, pero disponen de una sola barca y, además:

- **En la barca solo pueden viajar una o dos personas.**
- **Al menos uno debe saber remar.**
- **Saben remar los tres exploradores y un caníbal.**
- **En ninguna orilla los caníbales pueden superar en número a los exploradores, pues se los comerían.**

¿Cómo conseguirán cruzar el río?

☛ ***Debes distinguir el caníbal que sabe remar de los demás caníbales.***

1º: Cruza un explorador con un caníbal que no sabe remar y vuelve el explorador.

2º: Cruzan el caníbal remero y el otro caníbal, y vuelve el caníbal remero.

3º: Cruzan dos exploradores y vuelven un explorador y un caníbal.

4º: Cruzan un explorador y el caníbal remero, y vuelve un explorador con un caníbal que no sabe remar.

5º: Cruzan los dos exploradores y vuelve el caníbal remero.

6º: Cruzan el caníbal remero y otro caníbal, y vuelve el remero.

7º: Cruzan el caníbal remero y el otro caníbal que quedaba.

11. EL PROBLEMA DE TARTAGLIA

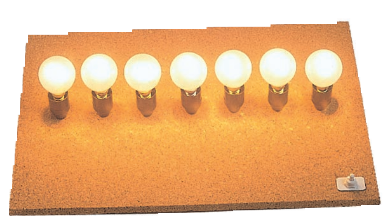
Este problema consiste en dividir el contenido de una jarra de 24 litros en tres partes iguales, utilizando solamente la jarra original y otras tres de 5, 11 y 13 litros, respectivamente.

Con la de 24 se llenan la de 5 y la de 11. Quedan 8 en la de 24. Se vacía la de 5 en la de 13 y con la de 11 se llega a llenar la de 13. Con la de 13 se llena la de 5 y así quedan 8 en la de 13.

Ya tenemos 8 en la de 24, 8 en la de 13 y 8 en las otras dos.

12. LAS LÁMPARAS

Sobre una plataforma hay 7 lámparas encendidas y un dispositivo mediante el que podemos apagar una sola lámpara o dos lámparas contiguas, pudiendo elegir cualquiera de las dos opciones.



Dos personas juegan: apagan alternativamente lámparas y gana la persona que apague la última. Si los dos jugadores actúan de forma inteligente, ¿quién crees que ganará, el primero o el segundo?

Apagando la lámpara central se divide la disposición de lámparas en dos grupos idénticos de tres y tres.

Cada vez que el segundo jugador apague lámparas, el primero debe replicar apagando el mismo número del otro grupo.

De esta forma, el primer jugador se asegura el éxito.

13. UN JUEGO UN TANTO PEDREGOSO

Hay dos montones de piedras, uno con 7 piedras y otro con 6 piedras. Dos personas juegan de manera alternativa, pudiendo retirar tantas piedras como deseen, pero solo de uno de los montones. Gana quien retire la última piedra.

¿Quién tiene ventaja, el jugador que comienza o el segundo?

El primer jugador puede ganar siempre si juega igualando el número de piedras de los dos montones. Es claro que entonces el otro jugador no puede hacer otra cosa que desigualarlos.

14. AHORRANDO PESADAS

A Carlos, mientras esperaba un día la cola para comprar el pan, se le ocurrió un problema que proponer al panadero de su pueblo:

CARLOS: Pedro, aquí tienes 1 kg de harina y una pesa de 50 gramos. ¿A que no eres capaz de obtener 300 gramos de harina con esta balanza de dos brazos?

PANADERO: Pero eso es muy fácil…

CARLOS: No, no. Solo con tres pesadas.

Tras pensar unos minutos, el panadero le dio a Carlos sus 300 gramos de harina. ¿Cómo lo hizo?

1ª pesada: En un plato de la balanza colocamos la pesa. En el otro vamos echando harina. Obtenemos 50 g de harina.

2ª pesada: En un plato de la balanza colocamos la pesa y los 50 g de harina obtenidos antes. En el otro vamos echando harina. Obtenemos 100 g de harina.

3ª pesada: En un plato de la balanza colocamos toda la harina obtenida hasta ahora (150 g). En el otro vamos echando harina. Obtenemos 150 g de harina.

Juntando la harina de los dos platos, nos encontramos con la cantidad pedida: 300 g.

15. EL TOSTADOR

Un tostador tuesta por un lado 2 rebanadas de pan juntas. A los 30 segundos damos la vuelta a las 2 rebanadas y las tostamos por el otro lado. Por tanto, necesito un minuto para tostar 2 rebanadas. ¿Cuánto tiempo necesito para tostar 3 rebanadas de pan por los dos lados?

Empezamos tostando un lado de la 1ª rebanada y otro de la 2ª. Después, tostamos el otro lado de la 1ª con un lado de la 3ª. Por último, tostaríamos el otro lado de la 2ª con el otro de la 3ª. Así, necesitaríamos un minuto y medio para tostar las tres rebanadas de pan por los dos lados.

Página 20

16. LAS TARJETAS

Diez amigos envían tarjetas postales a alguno de los restantes. Cada uno envía 5 tarjetas. Prueba que, al menos, dos de ellos se enviaron tarjetas entre sí.

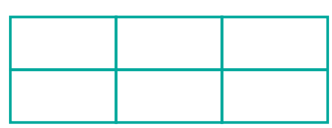
(Se supone que las tarjetas de uno mismo van dirigidas a personas diferentes). El número de tarjetas es 50 y el número de todas las comunicaciones posibles es:

$$\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

Así, existen al menos dos tarjetas que van una de A a B y la otra de B a A.

17. COLOREANDO

Queremos colorear los rectángulos de abajo con dos colores: blanco y negro (cada rectángulo puede ser coloreado solo con uno de los dos colores).



¿Cuántas configuraciones distintas podemos crear?

Sería $VR_{2,6}$. Por tanto, hay 64 configuraciones distintas.

18. LA LÍNEA NAVIERA

Se ha establecido una línea regular de barcos entre Cádiz y Santander. Cada día, a las 12 de la mañana, sale un barco de cada uno de los puertos, empleando en la travesía 5 días.

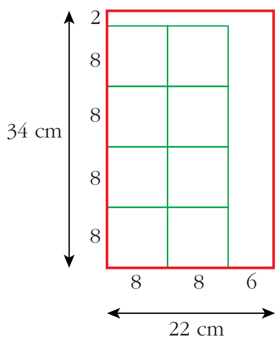
Si hoy sale un barco de Cádiz, ¿con cuántos barcos de la compañía naviera se encontrará hasta su llegada a Santander?

Con 6 barcos (incluyendo el que sale cuando llega él).

19. LA IMPRENTA

Una imprenta debe hacer 3 000 panfletos de 8 cm × 8 cm. Para ello dispone de hojas de dos tamaños, 22 cm × 34 cm y 21 cm × 28 cm, que deberá cortar. ¿Qué tamaño de hojas es conveniente utilizar para desperdiciar la menor cantidad posible de papel?

- Hojas de 22 cm × 34 cm:



Con cada hoja se pueden hacer 8 panfletos de 8 cm × 8 cm y se desperdician:

$$22 \cdot 2 + 6 \cdot 32 = 236 \text{ cm}^2 \text{ en cada hoja}$$

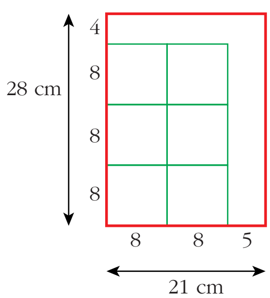
Para conseguir 3 000 panfletos:

$$3\,000 : 8 = 375 \text{ hojas necesitaríamos}$$

y se desperdiciarían:

$$375 \cdot 236 = 88\,500 \text{ cm}^2$$

- Hojas de 21 cm × 28 cm:



Con cada hoja se pueden hacer 6 panfletos y se desperdician:

$$21 \cdot 4 + 5 \cdot 24 = 204 \text{ cm}^2 \text{ en cada hoja}$$

Para conseguir 3 000 panfletos:

$$3\,000 : 6 = 500 \text{ hojas necesitaríamos}$$

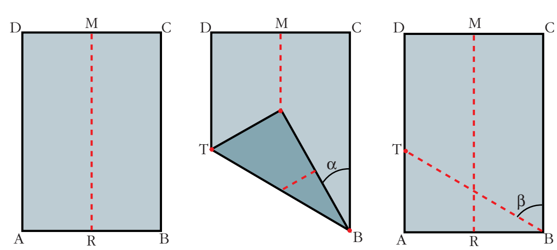
y se desperdiciarían:

$$500 \cdot 204 = 102\,000 \text{ cm}^2$$

- Por tanto, para desperdiciar la menor cantidad posible de papel, conviene utilizar los de tamaño 22 cm × 34 cm.

20. PLEGANDO UNA HOJA DE PAPEL

Toma hojas de papel rectangular y, mediante pliegues, construye ángulos de 180°; 90°; 45°; 22°30'. Toma otra hoja y haz con ella lo siguiente:



a) ¿Cuánto valen los ángulos α y β?

b) ¿Podrías construir con la hoja de papel un triángulo equilátero?

El ángulo α es de 30° y β es de 60°.

Con ello, se construye el triángulo equilátero fácilmente.

21. LA SUMA

¿Cuántos números menores que 1 000 tienen la suma de sus dígitos igual a 7?

Existen 36 números con esa propiedad.

22. LAS VELAS

Dos velas de la misma altura se encienden simultáneamente. Una se consume en 4 horas y la otra en 10 horas. ¿Cuántas horas deberán arder hasta que la longitud de una de ellas sea el doble que la longitud de la otra?

Las ecuaciones que nos dan la altura de las velas dependiendo del tiempo son:

$$\left.\begin{array}{l} h_A(t) = h_0 - \dfrac{h_0\, t}{4} \\[2ex] h_B(t) = h_0 - \dfrac{h_0\, t}{10} \end{array}\right\} h_0 = \text{altura inicial}$$

Las alturas cumplirán el enunciado:

$$2h_A(t) = h_B(t)$$

Y eso ocurre a las 2 horas y media.

23. LA CAJA

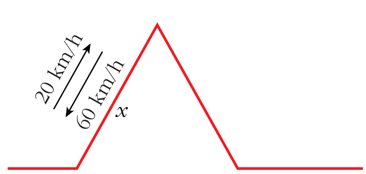
Pedro tiene lagartijas, escarabajos y gusanos. En total tiene 12 animales y 26 patas. Tiene más gusanos que lagartijas y escarabajos juntos. ¿Cuántos animales tiene de cada clase?

Como las lagartijas tienen 4 patas, los escarabajos 6 y los gusanos ninguna, son 7 gusanos, 3 escarabajos y 2 lagartijas.

24. ETAPA DE MONTAÑA

Un ciclista puede recorrer una media de 20 km por hora cuesta arriba y 60 km por hora cuesta abajo. ¿Cuál será su velocidad media en un recorrido con salida y llegada en el mismo punto?

Llamamos x al espacio que hay hasta llegar a la cima:



Así, tenemos que:

- Espacio total recorrido = $2x$
- Tiempo total empleado = $\dfrac{x}{20} + \dfrac{x}{60} = \dfrac{4x}{60} = \dfrac{x}{15}$

Por tanto:

$$\text{Velocidad media recorrido} = \frac{2x}{\dfrac{x}{15}} = 30 \text{ km/h}$$

25. FILA DE NÚMEROS

Si escribimos los números naturales seguidos, de la siguiente manera:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 ...

¿qué dígito ocupará el lugar cien mil?

Al colocar en la fila el 9 999, el último 9 ocupa el lugar:

$$9 + 2 \times 90 + 3 \times 900 + 4 \times 9\,000 = 38\,889$$

Como $100\,000 = 38\,889 + 61\,111$, el problema ahora es:

10 000 10 001 10 002 ...

¿Qué dígito ocupa el lugar 61 111?

Al colocar en esta lista el 69 999 hemos colocado 60 000 dígitos.

Por tanto, ahora el problema es:

Empezando así:

70 000 70 001 70 002 70 003 ...

¿Qué dígito ocupa el lugar 1 111?

Como $1\,111 = 5 \times 222 + 1$, al colocar el 70 221 se han colocado 5×222 dígitos.

Por tanto, el dígito solución del problema inicial es el 7.

26. LOS CEROS

¿En cuántos ceros acaba el número125!?

☛ ***Recuerda que: $125! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot ... \cdot 123 \cdot 124 \cdot 125$.***

Cuenta el número de veces que aparece el factor 5 (el factor 2 va a aparecer más veces).

Es $25 + 5 + 1 = 31$. Termina en 31 ceros.

27. ¿ÚLTIMO DÍGITO?

¿Cuál es el último dígito de la expresión $2^{103} + 3$?

Es fácil observar que las terminaciones de las potencias de 2 son siempre 2, 4, 8 y 6 (en ese orden). Por tanto, 2^{100} termina en 6 y 2^{103} termina en 8.

Así, $2^{103} + 3$ termina en 1.

28. AVELLANAS MÁGICAS

En un canasto hay avellanas cuyo número se duplica cada minuto. Después de una hora, el canasto está completamente lleno.

¿Cuánto tiempo se necesitó para llenarlo hasta la mitad?

59 minutos.