Nombre:		Evaluación Ext- Sep - 18	
Curso:	1º Bachillerato B	Ex. Evaluación Extraordinario	
Fecha:	*Septiembre de 2018*	***Atención:*** **La no explicación clara y concisa de cada ejercicio implica una penalización del 25% de la nota**	

2 puntos **Bloque Aritmética y Álgebra**

1.- (1 punto) Halla la longitud de los catetos de un triángulo rectángulo de 480 m^2 de área sabiendo que la hipotenusa mide 52 m.

2.- (1 punto) Una pastelería vendió 27 tartas. El número de las de chocolate duplicó al de tartas de nata y entre ambas excedieron en 3 a las ventas de tartas de queso. ¿Cuántas se vendieron de cada tipo?

2,5 puntos **Bloque Trigonometría y Complejos**

3.- (0,75 puntos) Las diagonales de un paralelogramo miden 16 cm y 28 cm y forman un ángulo de 48°. Calcula el perímetro y el área de dicho paralelogramo.

4.- (0,25 puntos) Demuestra la siguiente identidad: $\cos^4 x - sen^4 x = 2\cos^2 x - 1$

5.- (0,5 puntos) Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica: $2{\cdot}\text{sen } x + \cos x = 1$

6.- (0,25 puntos) Simplifica: $\dfrac{i^{10} - 2i^7}{2 + i^{33}}$

7.- (0,75 puntos) Un cuadrado cuyo centro es el origen de coordenadas tiene un vértice en el afijo del número complejo $1 + \sqrt{3}{\cdot}i$. Determina los otros vértices y la medida del lado del cuadrado.

2,5 puntos **Bloque Geometría y Cónicas**

8.- (0,75 puntos) Dados los vectores $\vec{u} = (-1,0)$ y $\vec{v} = (1,2)$

a) Calcula $proy_{\vec{u}}\ \vec{v}$

b) Calcula en ángulo que forman.

c) Da las coordenadas del vector $\vec{w} = (4,6)$ en la base $B(\vec{u},\vec{v})$

9.- (1 punto) Sean las rectas *r* y *s* dadas por: $r:\ y = x + 2$ $\quad s: \begin{cases} x = t \\ y = t - 2 \end{cases}$

a) Halla la distancia que las separa.

b) Calcula el ángulo que forman.

10.- (0,75 puntos) Sin resolver el sistema formado por sus ecuaciones, estudia la posición relativa de la cónica de ecuación $C: (x-1)^2+(y+2)^2=4$ y la recta $r: 3x - 4y - 1 = 0$.

3 puntos **Bloque Análisis de funciones**

11.- (1 punto) Considera la función $f(x) = x\ln\dfrac{x}{a}$, con $a > 0$. Determina el valor de a para que *f(x)* tenga un mínimo relativo en $x = 1$. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la función en $x=1$?

12.- (1 punto) Dado el polinomio $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$

a) Determinar los coeficientes a, b y c sabiendo que tiene extremos relativos en $x=-1$ y $x=+1$ y que además pasa por el origen de coordenadas.

b) Estudiar la naturaleza de ambos extremos relativos (si son máximos o mínimos) y realizar un dibujo aproximado del polinomio.

13.- (0,5 puntos) Calcula el dominio y las asíntotas de la función: $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x} - x}{x - 2}$

14.- (0,5 puntos) Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln(x)}\right)$

Bloque Aritmética y Álgebra

1.- Halla la longitud de los catetos de un triángulo rectángulo de 480 m^2 de área sabiendo que la hipotenusa mide 52 m.

Sol: Un lado mide 48 metros y el otro 20 metros.

2.- Una pastelería vendió 27 tartas. El número de las de chocolate duplicó al de tartas de nata y entre ambas excedieron en 3 a las ventas de tartas de queso. ¿Cuántas se vendieron de cada tipo?

x = n.º de tartas de chocolate

y = n.º de tartas de nata

z = n.º de tartas de queso

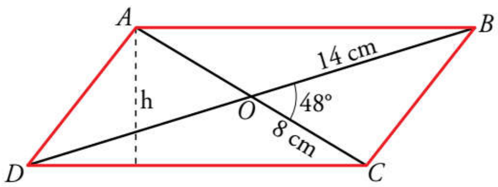
Expresamos las condiciones mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 27 \\ x = 2y \\ x + y = z + 3 \end{cases} \rightarrow x = 10,\ y = 5,\ z = 12$$

Vendió 10 tartas de chocolate, 5 tartas de nata y 12 tartas de queso.

Bloque Trigonometría y Complejos

3.- Las diagonales de un paralelogramo miden 16 cm y 28 cm y forman un ángulo de 48°. Calcula el perímetro y el área de dicho paralelogramo.



Utilizamos el teorema del coseno en los triángulos BOC y AOB.

$$\overline{BC}^2 = 14^2 + 8^2 - 2 \cdot 14 \cdot 8 \cos 48° \rightarrow \overline{BC} = 10,49 \text{ cm}$$

$$\overline{AB}^2 = 14^2 + 8^2 - 2 \cdot 14 \cdot 8 \cos (180° - 48°) \rightarrow \overline{AB} = 20,25 \text{ cm}$$

Perímetro = (10,49 + 20,25) · 2 = 61,48 cm

Para hallar el área, necesitamos conocer un ángulo del paralelogramo.

Hallamos el ángulo $\hat{A}$ del triángulo AOB.

$$\frac{14}{sen\,\widehat{BAO}} = \frac{20,35}{sen\,132°} \rightarrow sen\,\widehat{BAO} = \frac{14 \cdot sen\,132°}{20,25} \rightarrow \widehat{BAO} = 30°\,54'\,57''$$

En el triángulo ACD, hallamos la altura.

$$\widehat{BAO} = \widehat{ACD} \rightarrow sen\,30°\,54'\,57'' = \frac{h}{16} \rightarrow h = 8,22 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{20,25 \cdot 8,22}{2} = 83,23 \text{ cm}^2$$

4.- Demuestra la siguiente identidad: $\cos^4 x - sen^4 x = 2\cos^2 x - 1$

a) $cos^4 x - sen^4 x = (cos^2 x + sen^2 x)(cos^2 x - sen^2 x) = cos^2 x - sen^2 x = cos^2 x - (1 - cos^2 x) = 2\,cos^2 x - 1$

5.- Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica: $2 \cdot sen\ x + \cos\ x = 1$

$$2sen\, x+cos\, x=1 \;\rightarrow\; (2\, sen\, x)^2=(1-cos\, x)^2 \;\rightarrow\; 4sen^2 x=1+cos^2 x-2\, cos\, x \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 5\, cos^2 x-2\, cos\, x-3=0 \;\rightarrow\; cos\, x=\frac{2\pm\sqrt{64}}{10} \left\langle \begin{array}{l} cos\, x=1 \\ cos\, x=-3/5 \end{array}\right.$$

$cos\, x=1 \;\rightarrow\; x_1=0°+360°\cdot k;\;\; k\in\mathbb{Z} \;\rightarrow$ Vale.

$$cos\, x=-\frac{3}{5} \left\langle \begin{array}{l} x_2=126°\,52'\,12''+360°\,k,\quad k\in\mathbb{Z} \;\rightarrow\; \text{Vale.} \\ x_3=233°\,7'\,48'' \;\rightarrow\; \text{No vale.} \end{array}\right.$$

Hemos comprobado las soluciones en la ecuación dada.

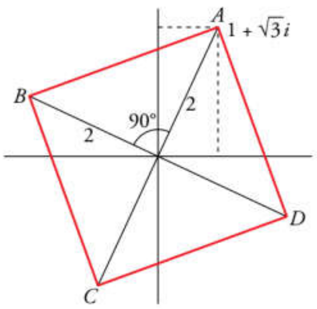
6.- Simplifica: $\dfrac{i^{10}-2i^7}{2+i^{33}}$

$i^{10}=i^4\cdot i^4\cdot i^2=-1;\;\; i^7=i^4\cdot i^2\cdot i=-i$

$i^{33}=(i^4)^8\cdot i=i$

$$\frac{i^{10}-2i^7}{2+i^{33}}=\frac{-1-2(-i)}{2+i}=\frac{-1+2i}{2+i}=\frac{(-1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{-2+i+4i-2i^2}{(2)^2-(i)^2}=\frac{5i}{5}=i$$

7.- Un cuadrado cuyo centro es el origen de coordenadas tiene un vértice en el afijo del número complejo $1+\sqrt{3}\cdot i$. Determina los otros vértices y la medida del lado del cuadrado.



Hacemos giros de 90°. Para ello, multiplicamos por $1_{90°}$:

$A=1+\sqrt{3}\,i=2_{60°}$ $\qquad$ $B=2_{60°}\cdot 1_{90°}=2_{150°}$

$C=2_{150°}\cdot 1_{90°}=2_{240°}$ $\qquad$ $D=2_{240°}\cdot 1_{90°}=2_{330°}$

$\overline{AB}^2=2^2+2^2 \;\rightarrow\; \overline{AB}=2\sqrt{2}$ u

Bloque Geometría y Cónicas

8.- Dados los vectores $\vec{u}=(-1,0)$ y $\vec{v}=(1,2)$

a) Calcula $proy_{\vec{u}}\,\vec{v}$

b) Calcula en ángulo que forman.

c) Da las coordenadas del vector $\vec{w}=(4,6)$ en la base $B(\vec{u},\vec{v})$

a) $proy_{\vec{u}}\,\vec{v}=|\vec{v}|\,cos\,\alpha=\dfrac{|\vec{v}|\cdot(\vec{u}\bullet\vec{v})}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{|\vec{u}|}=\dfrac{-1}{1}=-1$

b) $cos\,(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\dfrac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{-1}{1\cdot\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5} \;\rightarrow\; (\widehat{\vec{u},\vec{v}})=arc\,cos\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)=116°\,33'\,54''$

c) $\vec{w}=k\vec{u}+s\vec{v} \;\rightarrow\; (4,6)=k(-1,0)+s(1,2)=(-k+s,25) \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{r} -k+s=4 \\ 2s=6 \end{array}\right\}\; s=3,\;\; k=-1$

$w=-\vec{u}+3\vec{v}$

9.- Sean las rectas *r* y *s*:

$$r:\; y=x+2 \qquad\qquad s:\;\begin{cases} x=t \\ y=t-2 \end{cases}$$

a) Halla la distancia que las separa.

b) Calcula el ángulo que forman.

Vectores de dirección de las rectas: $\vec{d}_r = (1, 1)$, $\vec{d}_s = (1, 1)$, luego son paralelas.

Sea $P \in s$, por ejemplo, $P = (0, -2)$.

$r: y = x + 2 \;\rightarrow\; x - y + 2 = 0$

$$dist\,(r, s) = dist\,(P, r) = \left|\frac{-(-2)+2}{\sqrt{2}}\right| = 2\sqrt{2}$$

10.- Sin resolver el sistema formado por sus ecuaciones, estudia la posición relativa de la cónica de ecuación *C: $(x-1)^2+(y+2)^2=4$* y la recta *r: $3x - 4y - 1 = 0$*.

Calculamos la distancia de la recta al centro de la circunferencia, $C(1, -2)$:

$$dist\,(r, C) = \frac{3\cdot 1 - 4(-2) - 1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

Esta distancia coincide con el radio de la circunferencia. Por tanto, son tangentes.

Bloque Análisis de funciones

11.- Considera la función $f(x) = x\ln\frac{x}{a}$, con $a > 0$. Determina el valor de a para que *f(x)* tenga un mínimo relativo en $x = 1$. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la función en *x=1*?

Para que la función *f* tenga un mínimo relativo en x=1, tiene que ocurrir que *f'(1)=0*

Derivamos la función f:

$$f(x) = x\ln\frac{x}{a} \quad\rightarrow\quad f'(x) = 1\cdot\ln\frac{x}{a} + x\cdot\frac{a}{x}\cdot\frac{1}{a} = \ln\frac{x}{a} + 1$$

Calculamos la derivada en x=1, e igualamos a cero:

$$f'(x) = \ln\frac{x}{a} + 1 \quad\rightarrow\quad f'(1) = \ln\frac{1}{a} + 1 = 1 - \ln a \quad\rightarrow\quad f'(1) = 0 \quad\rightarrow\quad \ln\frac{1}{a} + 1 = 0$$

Despejamos a:

$$\ln\frac{1}{a} + 1 = 0 \quad\leftrightarrow\quad \ln\frac{1}{a} = -1 \quad\leftrightarrow\quad \ln 1 - \ln a = -1 \quad\leftrightarrow\quad -\ln a = -1 \quad\leftrightarrow\quad \ln a = 1 \quad\leftrightarrow\quad a = e$$

Por tanto, para que la función f tenga un mínimo en x=1, a debe ser a=e.

La ecuación de la recta tangente es: $y - f(x_o) = f'(x_o)\cdot(x - x_o)$ y en el punto x=1: $y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1)$

$$\text{Como: } \begin{cases} f(1) = \ln\left(\dfrac{1}{e}\right) + 1 = 1 - 1 = 0 \\ f'(1) = e \end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{array}{l} y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \\ y = e(x-1) \end{array}$$

Por tanto, la recta tangente en x=1 es: y=e(x-1)

12.- Dado el polinomio *$P(x)=x^3+ax^2+bx+c$*

a) Determinar los coeficientes a, b y c sabiendo que tiene extremos relativos en *x=-1* y *x=+1* y que además pasa por el origen de coordenadas.

b) Estudiar la naturaleza de ambos extremos relativos (si son máximos o mínimos) y realizar un dibujo aproximado del polinomio.

a) Como *P(x)* tiene extremos relativos en ± 1: $\begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$

Calculamos *P'(x)*: $P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ y si sustituimos lo anterior, obtenemos:

$$\begin{cases} f'(-1) = 0 & \rightarrow \quad 3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \\ f'(1) = 0 & \rightarrow \quad 3(1)^2 + 2a(1) + b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 - 2a + b = 0 \\ 3 + 2a + b = 0 \end{cases} \rightarrow \{6 + 2b = 0 \rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = 0 \end{cases}$$

Como nos dicen que pasa por el origen O, entonces: $P(0) = 0 \quad \rightarrow \quad P(0) = 0^3 + a0^2 + b0 + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = 0$

Por tanto, el polinomio buscado es: P(x)=x^3-3x

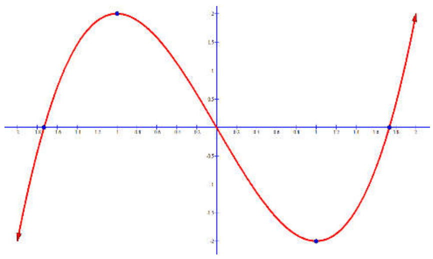
b) Utilizando la segunda derivada podemos distinguir si son máximo o mínimo: $P''(x) = 6x + 2a = 6x$

- En x=-1, $P''(-1) = 6(-1) = -6 < 0 \quad \rightarrow \quad$ *Mínimo en* $x = -1$
- En x=1, $P''(1) = 6(1) = 6 > 0 \quad \rightarrow \quad$ *Máximo en* $x = -1$

Calculamos la "altura" de los extremos: $\begin{cases} P(-1) = -1 + 3 = 2 & \rightarrow \quad Min(-1, 2) \\ P(1) = 1 - 3 = -2 & \rightarrow \quad Max(1, -2) \end{cases}$

Calculamos los puntos de corte con el eje x:

$$P(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 3x = 0 \quad \rightarrow \quad x(x^2 - 3) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \sqrt{3} \end{cases}$$



Y vemos sun comportamiento en los infinitos: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^3 - 3x = \pm\infty$

Por tanto el boceto será el representado a la derecha.

13.- Calcula el dominio y las asíntotas de la siguiente función: $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x} - x}{x - 2}$

En la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x} - x}{x - 2} : \begin{cases} 2x \geq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \rightarrow \quad Dom(f) = [0, 2) \cup (2, +\infty)$

Sabemos que una función f presenta una A.V. en un punto x_o si: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \pm\infty$

Calculamos el límite en x=2:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x} - x}{x - 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 2} \frac{\left(\sqrt{2x} - x\right)\left(\sqrt{2x} + x\right)}{(x - 2)\left(\sqrt{2x} + x\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{2x - x^2}{(x - 2)\left(\sqrt{2x} + x\right)} =$$

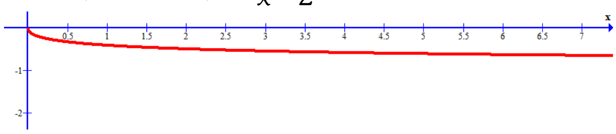
$$= \lim_{x \to 2} - \frac{x\cancel{(x - 2)}}{\cancel{(x - 2)}\left(\sqrt{2x} + x\right)} = \lim_{x \to 2} - \frac{x}{\sqrt{2x} + x} = -\frac{2}{2 + 2} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, no hay asíntota vertical.

También sabemos que una función *f* presenta una asíntota horizontal en la dirección *y=k* si:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k \qquad \forall \in \mathbb{R}$$

Calculamos el límite en el infinito: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{2x} - x}{x - 2} = -1 \quad \rightarrow$ ***A. Horizontal en la dirección y=-1***



5.- Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)=\infty-\infty \quad \to \quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)}\right)=\frac{0}{0}\overset{L'Hopital}{=}\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln(x)+\frac{x-1}{x}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1-x}{\cancel{x}}}{\frac{x\cdot\ln(x)+(x-1)}{\cancel{x}}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{x\cdot\ln(x)+(x-1)}\right)=\frac{0}{0}\overset{L'Hopital}{=}\lim_{x\to 1}\left(\frac{-1}{\ln(x)+1+1}\right)=-\frac{1}{2}$$

Donde hemos aplicado la regla de L'Hopital que dice:

Sean f y g dos funciones reales que cumplen las siguientes condiciones:

- ✓ las funciones f y g son derivables en un entorno E del punto a.
- ✓ $f(a)=g(a)=0$
- ✓ Existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces se cumple que: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$