Nombre:			Segunda Evaluación	
Curso:	**1º Bachillerato B**	**Examen II**		
Fecha:	*26 de febrero de 2018*	***Atención:*** **La no explicación clara y concisa de cada ejercicio implica una penalización del 25% de la nota**		

1.- (2 puntos) Responde justificadamente:

a) Sabiendo que el vector $\vec{a}=(x,y)$ es perpendicular al vector $\vec{b}=(-3,2)$ y que el módulo de $\vec{a}$ es $2\sqrt{13}$, halla los valores de *x* y de *y*.

b) Halla la ecuación de una recta que pasa por el punto A(4,5) y forma con los semiejes positivos un triángulo de área 40 unidades cuadradas.

2.- (2 puntos) De un triángulo conocemos el vértice *A(0, 2)*, y las ecuaciones de dos alturas, $h_1: y=-x$ y $h_2: x-3y-2=0$. Hallar las ecuaciones de los lados del triángulo y los otros vértices.

3.- (2 puntos) Un rombo ABCD tiene su vértice A en el eje de ordenadas y otros dos vértices opuestos son B(3,1) y D(-5,-3). Determina:

a) Las coordenadas de los vértices A y C.
b) El área del rombo.

4.- (0,4x5 puntos) Dada la recta *r: x+y-3=0* y el punto *P(-1,2),* se pide:

a) Hallar el punto simétrico de P respecto de r.
b) Hallar la ecuación general de la recta // a r que pasa por P
c) Hallar la distancia entre la recta anterior y r.
d) Hallar la posición relativa de *r* y la recta *s: 2x-y+5=0*
e) Hallar el ángulo entre *r* y *s*.

5.- (2 puntos) Determinar la ecuación de la recta que pasa por (1,-2) y forme ángulos iguales con las rectas r: $r: 3x+4y-2=0$ *y* $s: 4x+3y+1=0$.

1.- (2 puntos) Responde justificadamente:

a) Sabiendo que el vector $\vec{a}=(x,y)$ es perpendicular al vector $\vec{b}=(-3,2)$ y que el módulo de $\vec{a}$ es $2\sqrt{13}$, halla los valores de x y de y.

Un vector perpendicular al vector $\vec{b}=(-3,2)$, es el vector $\vec{c}=(2,3)$, si dividimos por su módulo, tendremos un vector ortonormal:

$$\|\vec{c}\|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13} \quad \rightarrow \quad \hat{c}=\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$

Y su queremos que su módulo sea $2\sqrt{13}$, solo nos queda multiplicar por dicho número:

$$\vec{a}=2\sqrt{13}\cdot\hat{c}=2\sqrt{13}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right)=(4,6)$$

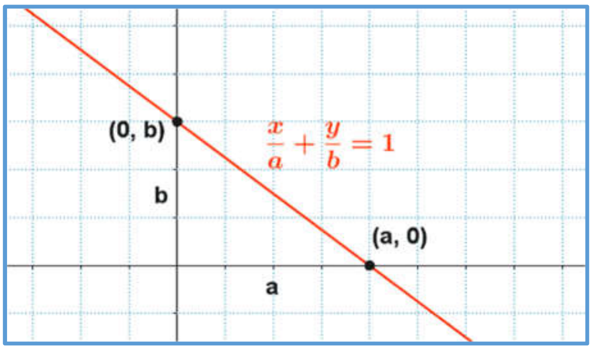
Por tanto, x=4 e y=6.

b) Halla la ecuación de una recta que pasa por el punto A (4,5) y forma con los semiejes positivos un triángulo de área 40 unidades cuadradas.

Sabemos que la ecuación segmentaria o canónica de una recta viene dada por la expresión:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Donde a es la coordenada x del punto de corte con el eje X, y b la coordenada y del punto de corte con el eje y.



Si el área del triángulo es 40, tendremos que:

$$A=\frac{base\cdot altura}{2}=\frac{a\cdot b}{2}=40 \quad \rightarrow \quad a\cdot b=80$$

Como la recta pasa por el punto (4,5), si sustituimos en la ecuación segmentaria, tenemos que:

$$\frac{4}{a}+\frac{5}{b}=1$$

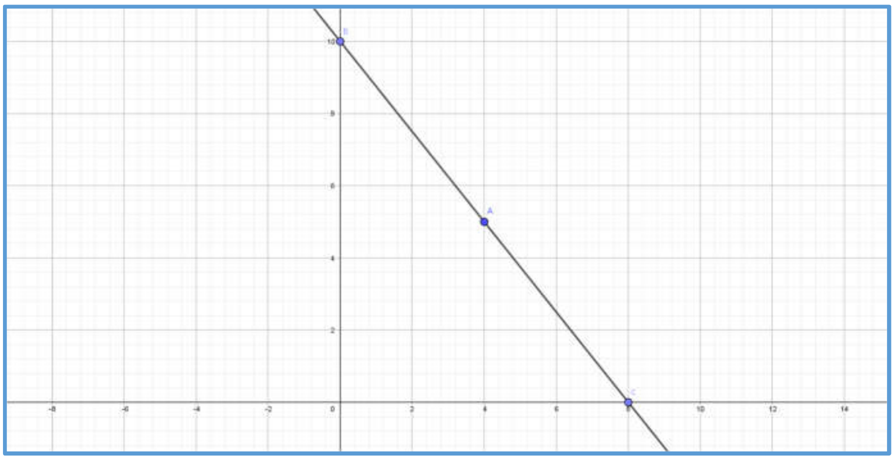
Así que con estas dos ecuaciones podemos formar un sistema:

$$\begin{cases}\frac{4}{a}+\frac{5}{b}=1\\ a\cdot b=80\end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}\frac{4}{a}+\frac{5}{b}=1\\ a=\frac{80}{b}\end{cases}$$

Que si resolvemos:

$$\begin{cases}\frac{4}{a}+\frac{5}{b}=1\\ a=\frac{80}{b}\end{cases} \rightarrow \frac{4}{\frac{80}{b}}+\frac{5}{b}=1 \rightarrow \frac{b}{20}+\frac{5}{b}=1 \rightarrow b^2-20b+100=0 \rightarrow b=10$$

Y por tanto: $a=\dfrac{80}{b}=\dfrac{80}{10}=8$



Así que la ecuación de la recta pedida en forma segmentaria será: $\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{10}=1$

2.- (2 puntos) De un triángulo conocemos el vértice *A(0, 2)*, y las ecuaciones de dos alturas, $h_1: y=-x$ y $h_2: x-3y-2=0$. Hallar las ecuaciones de los lados del triángulo y los otros vértices.

Sabemos que las ecuaciones de las tres alturas de un triángulo pasan por algún vértice. Comprobamos si el punto A pertenece a alguna de las dos alturas dadas:

El punto A(0,2) no pertenece a la altura 1, porque no verifica su ecuación: $A(0,2)\notin h_1: y=-x$
El punto A(0,2) no pertenece a la otra porque tampoco la verifica: $A(0,2)\notin h_2: x-3y-2=0$

Así que, dos de los lados del triángulo, serán las rectas perpendiculares a ambas alturas que pasan por el punto A.

Lado 1: Si calculamos la recta perpendicular a la altura 1 que pasa por el punto A:

$$h_1: x+y=0 \quad \rightarrow \quad l_1: x-y+k=0 \quad \rightarrow \quad A(0,2)\in l_1 \quad \rightarrow \quad l_1: x-y+2=0$$

Lado 2: Si calculamos la recta perpendicular a la altura 2 que pasa por el punto A:

$$h_2: x-3y-2=0 \quad \rightarrow \quad l_1: 3x+y+k=0 \quad \rightarrow \quad A(0,2)\in l_2 \quad \rightarrow \quad l_2: 3x+y-2=0$$

Una vez que tenemos las ecuaciones de los lados, podemos calcular los otros vértices, simplemente resolviendo los sistemas altura 1 y lado 2 y altura 2 con lado 1:

Vértice B: $\begin{cases} x+y=0 \\ 3x+y-2=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 2x-2=0 \quad \rightarrow \quad x=1 \quad \rightarrow \quad y=-1$ **B(1,-1)**

Vértice C: $\begin{cases} x-3y-2=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \rightarrow \quad -2y-4=0 \quad \rightarrow \quad y=-2 \quad \rightarrow \quad x=-4$ **C(-4,-2)**

La ecuación del lado 3 será aquella que pasa por los vértices B y C.

$\overrightarrow{BC}=C-B=(-4,-2)-(1,-1)=(-5,-1)$ y la ecuación de la recta la calculamos usando la ecuación continúa:

$$\frac{x-P_x}{V_x}=\frac{x-P_y}{V_y} \quad \rightarrow \quad \frac{x-1}{-5}=\frac{y+1}{-1} \quad \rightarrow \quad -x+1=-5y-5 \quad \rightarrow \quad x-5y-6=0$$

Así, las **ecuaciones de los lados** son: $\begin{cases} l_1: x-y+2=0 \\ l_2: 3x+y-2=0 \\ l_3: x-5y-6=0 \end{cases}$ **y los vértices** son: $\begin{cases} A(0,2) \\ B(1,-1) \\ C(-4,-2) \end{cases}$

3.- (2 puntos) Un rombo ABCD tiene su vértice A en el eje de ordenadas y otros dos vértices opuestos son B(3,1) y D(-5,-3). Determina:

a) Las coordenadas de los vértices A y C.

Una diagonal es la que pasa por los vértices B y D. Si calculamos su vector director, tenemos: $\overrightarrow{BD}=D-B=(-8,-4)$ y por tanto la ecuación de la diagonal es: $D: x-2y-1=0$

Vamos a calcular la otra diagonal, que va a ser la recta perpendicular que pasa por su punto medio. Primero calculamos el punto medio M:

$$M_{BD}=\left(\frac{3-5}{2},\frac{1-3}{2}\right)=(-1,-1)$$

Después la recta perpendicular que pasa por M.

$$2x+y+k=0 \quad \rightarrow \quad -2-1+k=0 \quad \rightarrow \quad k=3 \quad \rightarrow \quad d:2x+y+3=0$$

El vértice A será el punto de intersección entre la diagonal d y el eje y:

$$\begin{cases} 2x+y+3=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad y+3=0 \quad \rightarrow \quad y=-3$$

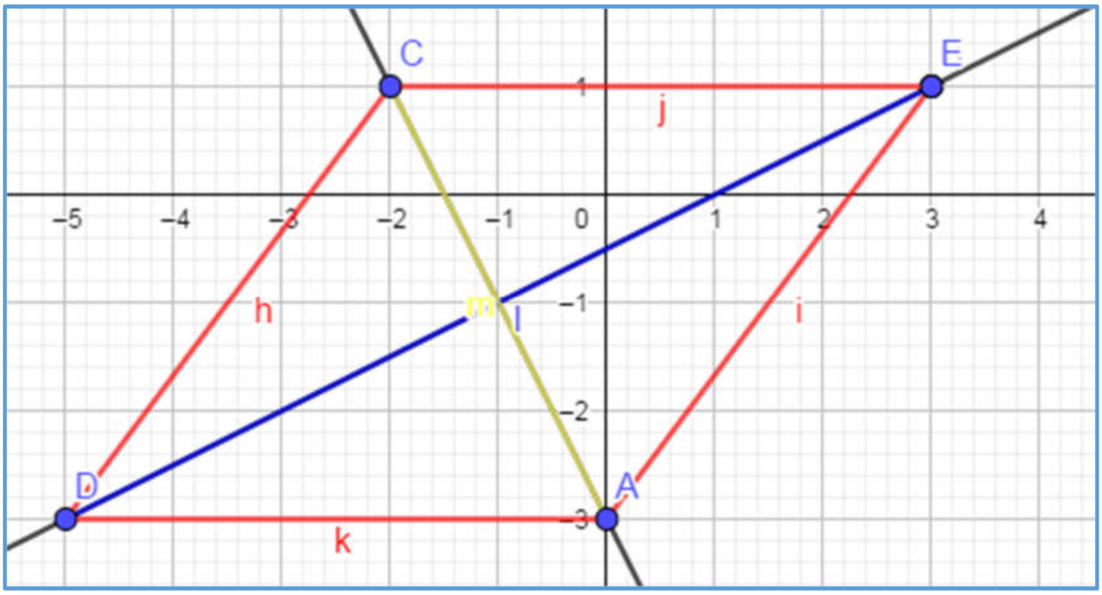
Por tanto el vértice A será: A(0,-3)

Y para calcular el vértice C basta con calcular el simétrico del punto A con respecto a M:

$$M_{AC}=\left(\frac{A_x+C_x}{2},\frac{A_y+C_y}{2}\right) \quad \rightarrow \quad (-1,-1)=\left(\frac{0+C_x}{2},\frac{-3+C_y}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -2=0+C_x \\ -2=-3+C_y \end{cases}$$

Y por tanto $C_x=-2 \quad y \quad C_y=1$

Por tanto, los otros vértices son A(0,-3) y C(-2,1)



b) El área del rombo.

Para calcular el área necesitamos el valor de las dos diagonales: $A=\frac{D \cdot d}{2}$

Con los vectores

$$\overrightarrow{BD}=D-B=(-8,-4) \text{ y } \overrightarrow{AC}=C-A=(-2,1)-(0,-3)=(-2,4)$$

Y sus módulos:

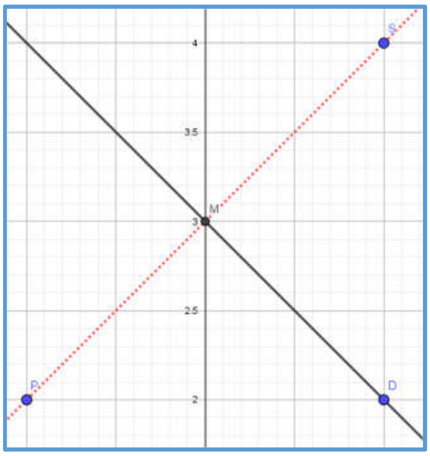
$$\left\|\overrightarrow{BD}\right\|=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5} \text{ y } \left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

Y el área:

$$A=\frac{4\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{2}=\frac{8\cdot 5}{2}=20 \quad u.c.$$

4.- (0,4x5 puntos) Dada la recta *r: x+ y-3=0* y el punto *P(-1,2)*, se pide:

a) Hallar el punto simétrico de P respecto de r.



Calculamos la recta perpendicular que pasa por el punto P.

$$x-y+k=0 \quad \rightarrow \quad -1-2+k=0 \quad \rightarrow \quad k=3$$

$$x-y+3=0$$

Y ahora el punto de corte entre ambas:

$$\begin{cases} x-y+3=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 2x=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad y=3$$

Así que el punto (0,3) será el punto medio entre P y S.

$$M_{PS}=\left(\frac{P_x+S_x}{2},\frac{P_y+S_y}{2}\right) \quad \rightarrow \quad (0,3)=\left(\frac{-1+S_x}{2},\frac{2+S_y}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0=-1+S_x \\ 6=2+S_y \end{cases}$$

Así que el punto simétrico es el S(1,4)

b) Hallar la ecuación general de la recta *s*, paralela a *r* que pasa por P

Tomamos un haz de rectas paralelas a $r:\ x+y-3=0$

$$Haz:\ x+y+k=0 \quad \rightarrow \quad -1+2+k=0 \quad \rightarrow \quad k=-1$$

Por tanto, la recta pedida es: $x+y=1$

c) Hallar la distancia entre la recta s y r.

Como ambas son paralelas: $d(P,r)=d(P,s)=\dfrac{|C-C'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

d) Hallar la posición relativa de *r* y la recta t: *2x-y+5=0*

Calculamos los vectores directores de ambas rectas y los observamos:

$$\vec{r}=(-1,1) \quad y \quad \vec{t}=(1,2)$$

Como sus vectores directores no son proporcionales, las rectas son secantes.

e) Hallar el ángulo entre *r* y *s*.

Para hallar el ángulo, utilizamos la definición de producto escalar, pero tomaremos el valor absoluto para *asegurarnos de calcular el menor de los dos ángulos formados*:

$$\vec{r}\cdot\vec{t} = \|\vec{r}\|\cdot\|\vec{t}\|\cdot \operatorname{Cos}\alpha \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{|-1\cdot1+1\cdot2|}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Y conocido el coseno, calculamos en ángulo:

$$\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}} = 71^\circ 33' 54,18''$$

5.- (2 puntos) Determinar la ecuación de la recta que pasa por (1,-2) y forme ángulos iguales con las rectas r: $r: 3x+4y-2=0 \quad y \quad s: 4x+3y+1=0$.

Calculamos la bisectriz de las rectas r y s:

$$d(P,r_1) = d(P,r_2) \quad \rightarrow \quad \frac{|3x+4y-2|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|4x+3y+1|}{\sqrt{4^2+3^2}} \quad \rightarrow \quad \frac{|3x+4y-2|}{5} = \frac{|4x+3y+1|}{5}$$

$$|3x+4y-2| = |4x+3y+1| \quad \rightarrow \quad 3x+4y-2 = 4x+3y+1 \qquad x-y+3=0$$

Y ahora calculamos la recta paralela que pasa por (1,-2)

$$x-y+k=0 \quad \rightarrow \quad 1-(-2)+k=0 \quad \rightarrow \quad k=-3 \qquad x-y-3=0$$

Ahora calculamos la perpendicular que pasa también por el (1,-2)

Un haz de rectas perpendiculares es:

$$x+y+k=0 \quad \rightarrow \quad 1-2+k=0 \quad \rightarrow \quad k=1 \quad \rightarrow \quad x+y+1=0$$

Así que las rectas pedidas son: $x+y+1=0$ **y** $x-y-3=0$