Nombre:		**Segunda Evaluación**	
Curso:	**1º Bachillerato B**	**Examen I**	
Fecha:	*5 de febrero de 2018*	***Atención:*** **La no explicación clara y concisa de cada ejercicio implica una penalización del 25% de la nota**	

1.- (1,5 puntos) Halla el valor de x para que los vectores $\vec{v}=(7,x)$ y $\vec{u}=(3,-4)$:

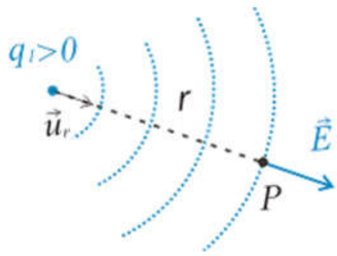
- **a)** Sean paralelos
- **b)** Sean Perpendiculares
- **c)** Sean coplanarios
- **d)** Sean linealmente independientes.
- **e)** Sean un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$
- **f)** Formen una base ortonormal

2.- (1 punto) Dados los vectores $\vec{u}=(3,1)$ y $\vec{v}=(2,3)$. Calcula el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{u+v}$ y $\overrightarrow{u-v}$.

3.- (1,25 puntos) Dados los vectores $\vec{u}=(1,-2)$, $\vec{v}=(3,1)$, y $\vec{w}=(2,0)$:

- **a)** Calcula las coordenadas del vector $2\vec{u}-\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}$
- **b)** Expresa $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$
- **c)** Calcula los ángulos que forman dos a dos.
- **d)** Halla un vector con la misma dirección que $\vec{u}$ y de módulo $\sqrt{20}$
- **e)** Halla un vector ortonormal a $\vec{v}$

4.- (1 punto) Como ya sabéis, el campo eléctrico creado por una carga en un punto P, es una magnitud vectorial que viene dada por la expresión $\vec{E}=K\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\widehat{u_r}$, donde K es la constante eléctrica que en el vacío vale $9\cdot10^9$ N·m^{2}C^{-2} y donde $\widehat{u_r}$ es un vector unitario en la dirección de r.



Calcula el vector campo eléctrico creado por una carga positiva de 2 μC en el punto P(2,3) m sabiendo que está situada en el origen de un sistema de coordenadas.

5.- (0,5 + 0,75 puntos) Sea el triángulo de vértices A(4,2), B(13,5) y C(6,6).

- **a)** Halla la ecuación segmentaria de la altura que pasa por el vértice C.
- **b)** Calcula la longitud de los dos segmentos en que la altura anterior corta al lado AB.

6.- (0,75 + 0,5 puntos) Considérese, en el plano, el triángulo de vértices A(2,0), B(0,1) y C(-3,-2). Calcula los ángulos y el área de ese triángulo.

7.- (1,25 puntos) Los puntos A(1,-1) y B(1,4) son vértices de un triángulo rectángulo en A. Determina el tercer vértice sabiendo que se encuentra sobre la recta x+y-1=0.

8.- (1,5 puntos) Dadas las rectas $r:(k-1)x-2y+2k=0$ y $s:(3k-4x)+y+k^2=0$ encuentra los valores de k para que sean perpendiculares. Para los valores hallados, calcula el punto de intersección de las rectas.

1.- (1,5 puntos) Halla el valor de x para que los vectores $\vec{v}=(7,x)$ y $\vec{u}=(3,-4)$:

a) Sean paralelos

Para que sean paralelos, han de ser proporcionales:

$$\frac{3}{7}=\frac{-4}{x} \quad \rightarrow \quad 3x=-28 \quad \rightarrow \quad x=-\frac{28}{3}$$

b) Sean Perpendiculares

Para que sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser cero:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \quad \leftrightarrow \quad (7,x)\cdot(3,-4)=0 \quad \leftrightarrow \quad 21-4x=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{21}{4}$$

c) Sean coplanarios

Que sean coplanarios, implica que estén en el mismo plano. Y eso ocurre siempre ya que estamos trabajando en el plano $\mathbb{R}^2$, así que x puede valer cualquier cosa. $x\in\mathbb{R}$

d) Sean linealmente independientes.

Para que sean linealmente independientes, basta que no sean paralelos o proporcionales, por tanto $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{28}{3}\right\}$

e) Sean un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$

Que sean sistema de generadores, quiere decir que cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se pueda escribir como combinación lineal de estos dos vectores, por tanto, la respuesta es la misma que en el apartado anterior. (Con que no sean paralelos, ya nos vale) $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{28}{3}\right\}$

f) Formen una base ortonormal

Para que formen una base ortonormal, ha de ser base, han de ser ortogonales y han de ser unitarios, como el vector $\vec{u}$ no es unitario, nunca serán base ortonormal, y por tanto no existe x que verifique eso. $\nexists x\in\mathbb{R}$

2.- (1 punto) Dados los vectores $\vec{u}=(3,1)$ y $\vec{v}=(2,3)$. Calcula el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{u+v}$ y $\overrightarrow{u-v}$.

Empezaremos calculando ambos vectores: $\begin{cases}\overrightarrow{u+v}=(3,1)+(2,3)=(5,4)\\ \overrightarrow{u-v}=(3,1)-(2,3)=(1,-2)\end{cases}$

Para calcular el ángulo que forman, utilizaremos el producto escalar:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left\|\vec{A}\right\|\cdot\left\|\vec{B}\right\|\cdot\cos\alpha \quad \rightarrow \quad \cos\alpha=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\left\|\vec{A}\right\|\cdot\left\|\vec{B}\right\|}=\frac{(5,4)\cdot(1,-2)}{\sqrt{25+16}\cdot\sqrt{1+4}}=\frac{5-8}{\sqrt{205}}=\frac{-3}{\sqrt{205}}$$

$$\alpha=102^\circ 5' 41{,}13''$$

3.- (1,25 puntos) Dados los vectores $\vec{u}=(1,-2)$, $\vec{v}=(3,1)$, y $\vec{w}=(2,0)$:

a) Calcula las coordenadas del vector $2\vec{u}-\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}$

Sustituyendo:

$$2\vec{u}-\vec{v}+\tfrac{1}{3}\vec{w}=2(1,-2)-(3,1)+\frac{1}{3}(2,0)=\left(2-3+\frac{2}{3},-4-1+0\right)=\left(-\frac{1}{3},-5\right)$$

b) Expresa $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Para escribir un vector como combinación lineal de otros dos:

$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} \quad\to\quad (2,0)=\alpha(1,-2)+\beta(3,1) \quad\to\quad \begin{cases}2=\alpha+3\beta\\0=-2\alpha+\beta\end{cases} \quad\to\quad \begin{cases}4=2\alpha+6\beta\\0=-2\alpha+\beta\end{cases}$$

Y sumando ambas ecuaciones: $4=7\beta \quad\to\quad \beta=\frac{4}{7}$

Y de la primera ecuación:

$$2=\alpha+3\beta \quad\to\quad 2=\alpha+3\cdot\frac{4}{7} \quad\to\quad \alpha=2-\frac{12}{7}=\frac{14-12}{7}=\frac{2}{7}$$

Por tanto: $\vec{w}=\frac{2}{7}\vec{u}+\frac{4}{7}\vec{v}$

c) Calcula los ángulos que forman dos a dos.

$$\text{Ángulo } \vec{u} \text{ y } \vec{v}: \vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\alpha \quad\to\quad \cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{3-2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{1}{5\sqrt{2}} \quad\to\quad \alpha=81^\circ 52'11,63''$$

$$\text{Ángulo } \vec{u} \text{ y } \mathrm{w}: \vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos\beta \quad\to\quad \cos\beta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{w}\|}=\frac{2}{\sqrt{5}\cdot 2}=\frac{\sqrt{5}}{5} \quad\to\quad \beta=63^\circ 26'5,82''$$

$$\text{Ángulo } \vec{v} \text{ y } \mathrm{w}: \vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos\phi \quad\to\quad \cos\phi=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}=\frac{6}{\sqrt{10}\cdot 2}=\frac{3\sqrt{10}}{10} \quad\to\quad \phi=18^\circ 26'5,82''$$

Vemos que claramente que $\alpha=\beta+\phi$

d) Halla un vector $\vec{z}$ con la misma dirección que $\vec{u}$ y de módulo $\sqrt{20}$

Lo único que hay que hacer es normalizar $\vec{u}$ y después multiplicarlo por $\sqrt{20}$

Calculamos el módulo de $\vec{u}$:

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5} \quad\to\quad \hat{u}=\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)=\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{-2\sqrt{5}}{5}\right)$$

Ya solo nos queda multiplicar por $\sqrt{20}$: $\vec{z}_1=\sqrt{20}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{-2\sqrt{5}}{5}\right)=(2,-4)$

Aunque también nos vale su opuesto: $\vec{z}_2=(-2,4)$

e) Halla un vector ortonormal a $\vec{v}$

Ortonormal quiere decir ortogonal y unitario, así que ortogonal es:

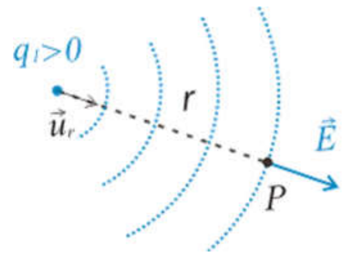
$$\vec{v}=(3,1) \quad \to \quad \vec{v}_{\perp}=(-1,3)$$

Y ahora solo nos falta normalizar, es decir que tenga módulo 1.

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10} \quad \to \quad \hat{v}_{\perp}=\frac{\vec{v}_{\perp}}{\|\vec{v}_{\perp}\|}=\frac{1}{\sqrt{10}}(-1,3)=\left(\frac{-\sqrt{10}}{10},\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$

Aunque también sería correcto su opuesto: $\left(\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{-3\sqrt{10}}{10}\right)$

4.- (1 punto) Como ya sabéis, el campo eléctrico creado por una carga en un punto P, es una magnitud vectorial que viene dada por la expresión $\vec{E}=K\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\widehat{u_r}$, donde K es la constante eléctrica que en el vacío vale $9\cdot10^9$ $N\cdot m^2C^{-2}$ y donde $\widehat{u_r}$ es un vector unitario en la dirección de r.



Calcula el vector campo eléctrico creado por una carga positiva de 2 μC en el punto P(2,3) m sabiendo que está situada en el origen de un sistema de coordenadas.

Lo primero es calcular el vector unitario en la dirección de r:

$$\vec{r}=P-O=(2,3) \quad \to \quad \hat{r}=\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}=\frac{1}{\sqrt{13}}(2,3)=\left(\frac{2\sqrt{13}}{13},\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$$

Y después utilizamos la fórmula que nos dan:

$$\vec{E}=K\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\widehat{u_r}=9\cdot10^9N\cdot m^2\cdot C^{-2}\cdot\frac{2\cdot10^{-6}C}{13m^2}\cdot\left(\frac{2\sqrt{13}}{13},\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)=(768,1152)=\left(768\hat{i}+1152\hat{j}\right)N\cdot C^{-1}$$

5.- (0,5 + 0,75 puntos) Sea el triángulo de vértices A(4,2), B(13,5) y C(6,6).

a) Halla la ecuación segmentaria de la altura que pasa por el vértice C.

Como deberíais saber, la altura de un triángulo es la recta perpendicular a la base y que pasa por el otro vértice. Por tanto, cogemos un vector perpendicular al vector AB y con el punto c, ya tenemos la recta. Si lo hacemos usando la ecuación continua:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(13,5)-(4,2)=(9,3) \quad \to \quad V_{\perp\overline{AB}}=(1,-3) \quad \to \quad \frac{x-c_x}{v_x}=\frac{y-c_y}{v_y}$$

Así que sustituyendo:

$$\frac{x-6}{1}=\frac{y-6}{-3} \quad \to \quad -3(x-6)=y-6 \quad \to \quad 3x+y-24=0$$

Obtenemos la ecuación general, y de esta, la segmentaria:

$$3x+y-24=0 \quad \to \quad 3x+y=24 \quad \to \quad \frac{3x}{24}+\frac{y}{24}=1 \quad \to \quad \frac{x}{8}+\frac{y}{24}=1$$

b) Calcula la longitud de los dos segmentos en que la altura anterior corta al lado AB.

Empezamos calculando la ecuación de la recta que pasa por A y B:

$$\overrightarrow{AB}=(3,1) \rightarrow x-3y+k=0 \rightarrow 13-3\cdot 5+k=0 \rightarrow k=2 \rightarrow x-3y+2=0$$

Donde hemos usado un haz de rectas paralelas.
La intersección entre la base y la altura me dará el punto D, en el que la altura corta en dos segmentos al lado AB.

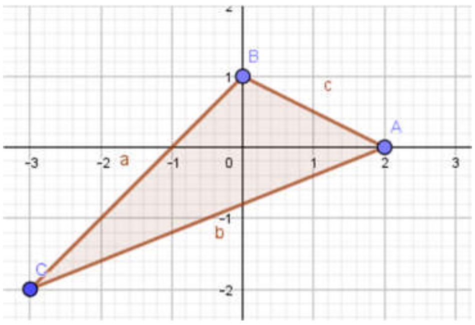
$$\begin{cases} x-3y+2=0 \\ 3x+y=24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-3y=-2 \\ 9x+3=72 \end{cases} \rightarrow 10x=70 \rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases} \rightarrow D(7,3)$$

Si calculamos los vectores $\begin{cases} \overrightarrow{AD}=D-A=(7,3)-(4,2)=(3,1) \\ \overrightarrow{DB}=B-D=(13,5)-(7,3)=(6,2) \end{cases}$

Y obtenemos sus módulos, obtendremos las longitudes da cada uno de los segmentos.

$$\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10} \qquad \left\|\overrightarrow{DB}\right\|=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

6.- (0,75 + 0,5 puntos) Considérese, en el plano, el triángulo de vértices A(2,0), B(0,1) y C(-3,-2). Calcula los ángulos y el área de ese triángulo.



Como podemos ver gráficamente, B=105, A=60 y C=

Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(-2,1) \quad y \quad \overrightarrow{AC}=C-A=(-5,-2)$$

Y ayudándonos del producto escalar calculamos el ángulo A:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cdot\cos A \rightarrow \cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}=\frac{10-2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{29}}=\frac{8}{\sqrt{145}} \rightarrow A=48°21'59,26''$$

Repitiendo para los ángulos B y C:

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\cdot\cos B \rightarrow \cos B=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{-6+3}{\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{-3}{3\sqrt{10}} \rightarrow B=108°16'5,82''$$

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{CA}\right\|\cdot\cos C \rightarrow \cos C=\frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{CA}\right\|}=\frac{15+6}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{29}}=\frac{21}{\sqrt{522}} \rightarrow C=23°11'54,93''$$

Para calcular el área podemos utilizar la fórmula de Herón:

$$A=\sqrt{s\cdot(s-A)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$$

Donde S es el semiperímetro.

Calculemos los lados:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,1) \quad \leftrightarrow \quad c = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-5,-2) \quad \leftrightarrow \quad b = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$$
$$\overrightarrow{BC} = C - B = (3,3) \quad \leftrightarrow \quad a = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$A = \sqrt{s\cdot\left(s-3\sqrt{2}\right)\cdot\left(s-\sqrt{29}\right)\cdot\left(s-\sqrt{5}\right)} = 4{,}5\ u^2$$

7.- (1,25 puntos) Los puntos A(1,-1) y B(1,4) son vértices de un triángulo rectángulo en A. Determina el tercer vértice sabiendo que se encuentra sobre la recta x+y-1=0.

Si llamamos C al punto de la recta r, entonces este punto tiene que verificar su ecuación, por tanto las coordenadas de C son las coordenadas genéricas de cualquier punto de la recta, es decir: $C = (x, 1-x)$

Además, como dice que es rectángulo en A, entonces el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ ha de ser nulo. Veámoslo:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,4)-(1,-1) = (0,5) \quad y \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (x,1-x)-(1,-1) = (x-1, 2-x)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \quad \rightarrow \quad (0,5)\cdot(x-1,2-x) = 0 \quad \rightarrow \quad 5(2-x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Por tanto el punto C es el punto C=(2,-1)

8.- (1,5 puntos) Dadas las rectas $r : (k-1)x - 2y + 2k = 0$ y $s : (3k-4x) + y + k^2 = 0$ encuentra los valores de k para que sean perpendiculares. Para los valores hallados, calcula el punto de intersección de las rectas.

Para que sean perpendiculares sus vectores directores han de ser ortogonales, y por tanto su producto escalar ha de ser nulo.

$$\vec{r} = (2, k-1) \quad y \quad \vec{s} = (1,4) \quad \rightarrow \quad \vec{r}\cdot\vec{s} = 0 \quad \rightarrow \quad (2,k-1)\cdot(1,4) = 0$$
$$2 + 4k - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad 4k - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{2}$$

Así que k=1/2

Si sustituimos en las rectas:

$$r : (k-1)x - 2y + 2k = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-x}{2} - 2y + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x + 4y = 2$$
$$s : (3k-4x) + y + k^2 = 0 \quad \rightarrow \quad -4x + y + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad 16x - 4y = 7$$

Y resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x + 4y = 2 \\ 16x - 4y = 7 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 17x = 9 \quad \rightarrow \quad x = \frac{9}{17}$$

$x + 4y = 2 \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{2-x}{4} = \dfrac{25}{68}$ y por tanto el punto de intersección es: $\left(\dfrac{36}{68}, \dfrac{25}{68}\right)$