Departamento de Matemáticas
Casablanca

Nombre:		**Primera Evaluación**	
Curso:	**1º Bachillerato B**	**Examen Final**	
Fecha:	***11 de diciembre de 2017***	***Atención:*** La no explicación clara y concisa de cada ejercicio implica una penalización del 25% de la nota	

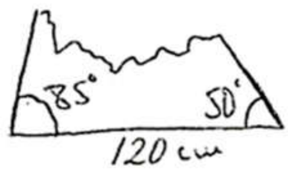
1.- **(1,5 puntos)** Resolver las siguientes ecuaciones:

$$a)\ 2\sqrt{x+1}-3\sqrt{4x-3}+5=0 \qquad b)\ x^{1+\log x}=10x$$

$$c)\ \frac{\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}\cdot\dfrac{4x^2-4x}{x+1}}{\dfrac{2x^2+14x+20}{x^3-50+2x^2-25x}:\dfrac{x-5}{2x^3-20x^2+50x}}=x$$

2.- **(1,5 puntos)** El propietario de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe total de 3.000 euros (sin impuestos), siendo el valor de los refrescos igual al valor conjunto de la cerveza y el vino. Tras añadir los impuestos, la factura asciende a 3.260 euros. Halla el valor inicial de cada una de las bebidas, sabiendo que los impuestos sobre los refrescos, la cerveza y el vino eran el 6%, el 10% y el 14%, respectivamente. (Usa el método de Gauss).

3.- **(1,5 puntos)** Los ratones han roído parte de una pieza triangular de cartón que un sastre había cortado para confeccionar un patrón. Calcular las longitudes de sus lados a partir a partir de lo que quedaba de ella. ¿Cuál es su área?



4.- **(1,5 puntos)** Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

$$a)\ \cos 2x - sen 2x = 0 \qquad b)\ sen(x+30)+\cos(x+60)=1+\cos 2x$$

5.- **(1,5 puntos)** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones trigonométricas:

$$\begin{cases} sen^2x+sen^2y=1 \\ \cos^2x-\cos^2y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

6.- **(1,5 puntos)** Calcula, usando la fórmula del binomio de Newton, esta potencia $\left(2-2\sqrt{3}i\right)^5$ y hazlo en forma binómica. Además, comprueba el resultado, expresando el número complejo en forma polar y realizando la misma operación.

7.- **(1 punto)** Calcula el valor de b, para que el cociente de $-9+bi$ entre $1-2i$ tenga módulo $5\sqrt{2}$

1.- Resolver las siguientes ecuaciones:

$a)\ 2\sqrt{x+1}-3\sqrt{4x-3}+5=0 \qquad\qquad b)\ x^{1+\log x}=10x$

$$c)\ \frac{\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}\cdot\dfrac{4x^2-4x}{x+1}}{\dfrac{2x^2+14x+20}{x^3-50+2x^2-25x}:\dfrac{x-5}{2x^3-20x^2+50x}}=x$$

$Sol: a)\begin{cases}x_1=3\\ x_2=\dfrac{57}{64}\end{cases} \qquad b)\begin{cases}x=10\\ x=\dfrac{1}{10}\end{cases} \qquad c)\ x=1$

2.- El propietario de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe total de 3.000 euros (sin impuestos), siendo el valor de los refrescos igual al valor conjunto de la cerveza y el vino. Tras añadir los impuestos, la factura asciende a 3.260 euros. Halla el valor inicial de cada una de las bebidas, sabiendo que los impuestos sobre los refrescos, la cerveza y el vino eran el 6%, el 10% y el 14%, respectivamente. (Usa el método de Gauss).

Si llamamos x al dinero de los refrescos, y al de la cerveza y z al del vino, y escribimos la relación entre las variables, llegamos al sistema:

$$\begin{cases}x+y+z=3000\\ x-y-z=0\\ 1{,}06x+1{,}1y+1{,}14z=3260\end{cases} \rightarrow \begin{cases}1{,}06x+1{,}1y+1{,}14z=3260\\ x-y-z=0\\ x+y+z=3000\end{cases} \xrightarrow[f_2+f_3]{1{,}1f_2-f_1} \begin{cases}1{,}06x+1{,}1y+1{,}14z=3260\\ 0{,}04x-0{,}04z=40\\ 2x=3000\end{cases}$$

Que si resolvemos nos da: 500€ en vino, 1.000€ en cerveza y 1.500 € en refrescos.

3.- Los ratones han roído parte de una pieza triangular de cartón que un sastre había cortado para confeccionar un patrón. Calcular las longitudes de sus lados a partir a partir de lo que quedaba de ella. ¿Cuál es su área?

Si utilizamos 2 veces el teorema del seno, podemos calcular los lados a y b desconocidos.

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{a}{sen50}=\dfrac{120}{sen45} \rightarrow a=\dfrac{120\cdot sen50}{sen45}=130cm\\[2ex] \dfrac{b}{sen85}=\dfrac{120}{sen45} \rightarrow b=\dfrac{120\cdot sen85}{sen45}=169cm\end{matrix}\right\}\text{Por tanto el semiperímetro } S=\frac{419}{2}cm \rightarrow A=7769{,}88\ cm^2$$

En donde para calcular el área hemos utilizado la fórmula de Herón.

4.- Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

$a)\ \cos 2x-sen2x=0 \qquad\qquad b)\ sen(x+30)+\cos(x+60)=1+\cos 2x$

a) Si $\cos 2x-sen2x=0 \rightarrow \cos 2x=sen2x \rightarrow \begin{cases}2x=45°+360k \rightarrow x_1=22{,}5°+180k\\ 2x=225+360k \rightarrow x_2=112{,}5°+180k\end{cases}$

b) Si desarrollamos el seno y el coseno de la suma, tenemos:

$$sen(x+30)+\cos(x+60)=1+\cos 2x \rightarrow senx\cdot\cos 30+\cos x\cdot sen30+\cos x\cdot\cos 60-senx\cdot sen60=1+\cos^2 x-sen^2 x$$

Operando un poco:

$$\frac{\sqrt{3}senx}{2}+\frac{\cos x}{2}+\frac{\cos x}{2}-\frac{\sqrt{3}senx}{2}=1+\cos^2 x-sen^2x \quad\rightarrow\quad \cos x=2\cos^2 x$$

Si agrupamos y sacamos factor común:

$$\cos x-2\cos^2 x=0 \quad\rightarrow\quad \cos x\left(1-2\cos x\right)=0$$

Llegamos a:

$$\cos x=0 \quad\rightarrow\quad x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$1-2\cos x=0 \quad\rightarrow\quad \cos x=\frac{1}{2} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x_2=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \\ x_3=\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$$

5.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones trigonométricas: $\begin{cases} sen^2x+sen^2y=1 \\ \cos^2 x-\cos^2 y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\text{Si }\ sen^2x+sen^2y=1 \quad\rightarrow\quad sen^2x=1-sen^2y=\cos^2 y$$

Si sustituimos en la segunda ecuación:

$$\cos^2 x-sen^2x=\frac{1}{2} \quad\rightarrow\quad \cos\left(2x\right)=\frac{1}{2} \quad\rightarrow\quad 2x=\begin{cases} \dfrac{\pi}{3}+2k\pi & \rightarrow \quad x_1=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ \dfrac{5\pi}{3}+2k\pi & \rightarrow \quad x_2=\dfrac{5\pi}{6}+k\pi \end{cases}$$

De igual forma:

$$sen^2x=\cos^2 y \quad\rightarrow\quad \begin{cases} sen^2 30=\cos^2 y & \rightarrow \quad \cos y=\pm\dfrac{1}{2} \\ sen^2 150=\cos^2 y & \rightarrow \quad \cos y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} y_1=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ y_2=\dfrac{5\pi}{6}+k\pi \\ y_3=\dfrac{\pi}{3}+k\pi \\ y_4=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi \end{cases}$$

Que si comprobamos observamos que funcionan todas.

6.- Calcula, usando la fórmula del binomio de Newton, esta potencia $\left(2-2\sqrt{3}i\right)^5$ y hazlo en forma binómica. Además, comprueba el resultado, expresando el número complejo en forma polar y realizando la misma operación.

Sabemos que mediante el binomio de Newton:

$$\left(a+b\right)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

Por tanto:

$$\left(2-2\sqrt{3}i\right)^5=2^5+5\cdot 2^4\cdot\left(-2\sqrt{3}i\right)+10\cdot 2^3\cdot\left(-2\sqrt{3}i\right)^2+10\cdot 2^2\cdot\left(-2\sqrt{3}i\right)^3+5\cdot 2\cdot\left(-2\sqrt{3}i\right)^4+\left(-2\sqrt{3}i\right)^5$$

Y operando un poco, llegamos a:

$$\left(2-2\sqrt{3}i\right)^5=32-160\sqrt{3}i-960+960\sqrt{3}i+1440-288\sqrt{3}i=512+512\sqrt{3}i=512\left(1+\sqrt{3}i\right)$$

Si expresamos el número complejo en forma polar: $\begin{cases} \|z\| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4 \\ tg\alpha = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \arg(z) = -60 = 300^\circ \end{cases}$

Por tanto:

$$z^5 = \left(4_{300^\circ}\right)^5 = 1024_{1500^\circ} = 1024_{60^\circ}$$

Si escribimos $512 + 512\sqrt{3}i$ en forma polar obtenemos: $\begin{cases} \|z\| = \sqrt{512^2 + \left(512\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1048576} = 1024 \\ tg\alpha = \dfrac{512\sqrt{3}}{512} = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \arg(z) = 60 \end{cases}$

Y observamos que ambos resultados coinciden: $512 + 512\sqrt{3}i = 1024_{60^\circ}$

7.- Calcula el valor de b, para que el cociente de $-9+bi$ entre $1-2i$ tenga módulo $5\sqrt{2}$

Realizamos la división, y obtenemos: $\dfrac{-9+bi}{1-2i} = \dfrac{-9+bi}{1-2i} \cdot \dfrac{1+2i}{1+2i} = \dfrac{-9-2b}{5} + \dfrac{b-18}{5}i$

Su módulo será: $\sqrt{\left(\dfrac{-9-2b}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{b-18}{5}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4b^2+36b+81}{25} + \dfrac{b^2-36b+324}{25}} = \sqrt{\dfrac{5b^2+405}{25}} = \dfrac{\sqrt{5b^2+405}}{5}$

Como el módulo ha de ser $5\sqrt{2}$, igualamos ambos módulos y calculamos b:

$$\frac{\sqrt{5b^2+405}}{5} = 5\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \sqrt{5b^2+405} = 25\sqrt{2}$$

Elevamos al cuadrado:

$$\left(\sqrt{5b^2+405}\right)^2 = \left(25\sqrt{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad 5b^2+405 = 1250 \quad \rightarrow \quad 5b^2 = 845 \quad \rightarrow \quad b^2 = 169 \quad \rightarrow \quad b = \pm 13$$

Comprobamos y observamos que ambas soluciones son posibles. Por tanto, **b=±13**