Departamento de Matemáticas
I.E.Juan Ramón Jiménez
Casablanca

Nombre:		Primera Evaluación	
Curso:	1º Bachillerato B	Examen 3	
Fecha:	*27 de noviembre de 2017*	***Atención:*** La no explicación clara y concisa de cada ejercicio implica una penalización del 25% de la nota	

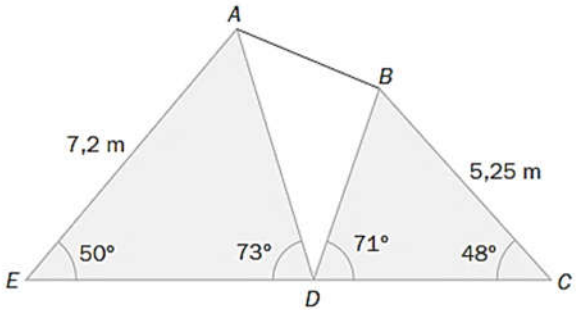
1.- (2 puntos) Resolver:

a) $2tgx \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - senx = 1$ b) $sen(6x) + sen(2x) = 2 \cdot sen(4x)$

2.- (1 punto) Calcular todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2} \cdot \cos(x) \cdot \cos(y) = 1 \end{cases}$$

3.- (2 puntos) Calcular la distancia entre los puntos A y B, y el área del triángulo ADB.



4.- (2 puntos) Dos físicos de la atmósfera, separados por una distancia de 2 Km, observan, sobre su plano vertical y en el mismo momento, una nube bajo ángulos respectivos de 73° 18' y de 84° 17'. Calcular la altura de la nube y la distancia de la misma a cada uno de los observadores.

5.- (1 punto) Demuestra la siguiente identidad trigonométrica, partiendo de la parte izquierda y llegando a la derecha:

$$\frac{sen(\alpha + \beta)}{sen(\alpha - \beta)} = \frac{tg\alpha + tg\beta}{tg\alpha - tg\beta}$$

6.- (1 punto) Sabiendo que $sen(\alpha) = h$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula en función de h:

$a)\ sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ $b)\ tg(1080^\circ - \alpha)$

7.- (1 punto) El radio de la circunferencia inscrita en un triángulo isósceles mide 18 cm. Resuelve el triángulo, sabiendo que su base mide 60 cm.

1.- (2 puntos) Resolver:

a) $2tgx\cdot\cos^2\dfrac{x}{2}-senx=1$

$$2tgx\cdot\cos^2\frac{x}{2}-senx=1 \qquad 2\frac{senx}{\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{2}-senx=1 \qquad \frac{senx(1+\cos x)}{\cos x}=1+senx$$

$$senx(1+\cos x)-\cos x-senx\cdot\cos x=0 \qquad senx+senx\cdot\cos x-\cos x-senx\cdot\cos x=0$$

$$senx-\cos x=0 \qquad senx=\cos x \qquad senx=\sqrt{1-sen^2x} \qquad sen^2x=1-sen^2x \qquad 2sen^2x=1$$

$$sen^2x=\frac{1}{2} \rightarrow senx=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x=(2k-1)\frac{\pi}{4} \rightarrow Verifican \quad x=\frac{\pi}{4}+k\pi$$

b) $sen(6x)+sen(2x)=2\cdot sen(4x)$

$$sen(6x)+sen(2x)=2\cdot sen(4x) \rightarrow 2\cdot sen\left(\frac{6x+2x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{6x-2x}{2}\right)=2\cdot sen(4x)$$

$$2\cdot sen(4x)\cdot\cos(2x)=2\cdot sen(4x) \rightarrow 2\cdot sen(4x)\cdot\cos(2x)-2\cdot sen(4x)=0$$

$$2\cdot sen(4x)\cdot\left[\cos(2x)-1\right]=0 \rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} sex(4x)=0 \rightarrow \begin{cases}4x=0+2k\pi\\4x=\pi+2k\pi\end{cases} \rightarrow 4x=k\pi \rightarrow x=\dfrac{k\pi}{4}\\ \cos(2x)=1 \rightarrow \begin{cases}2x=0+2k\pi\\2x=\pi+2k\pi\end{cases} \rightarrow 2x=k\pi \rightarrow x=\dfrac{k\pi}{2}\end{cases}\right\} \rightarrow x=\frac{k\pi}{4}$$

2.- (1 punto) Calcular todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{4}\\ \sqrt{2}\cdot\cos(x)\cdot\cos(y)=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{4}\\ \sqrt{2}\cdot\cos(x)\cdot\cos(y)=1\end{cases} \rightarrow y=\frac{\pi}{4}-x \rightarrow \sqrt{2}\cdot\cos(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$$

$$\sqrt{2}\cdot\cos(x)\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos(x)+sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot sen(x)\right]=1$$

$$\sqrt{2}\cdot\cos(x)\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot sen(x)\right]=1 \rightarrow \cos^2x+senx\cdot\cos x=1$$

$$\cos^2x+\cos x\cdot\sqrt{1-\cos^2x}=1 \qquad \cos x\cdot\sqrt{1-\cos^2x}=1-\cos^2x$$

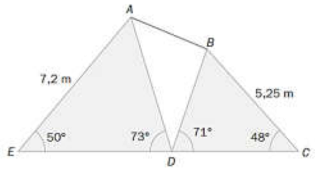
$$\cos^2x\left(1-\cos^2x\right)=\left(1-\cos^2x\right)^2$$

$$\cos^2x\left(1-\cos^2x\right)-\left(1-\cos^2x\right)^2=0 \qquad \left(1-\cos^2x\right)\left(2\cos^2x-1\right)=0$$

$$\begin{cases}1-\cos^2x=0 \rightarrow \cos^2x=1 \rightarrow \cos x=\pm1 \rightarrow x=0+k\pi\\ 2\cos^2x-1 \rightarrow \cos^2x=\dfrac{1}{2} \rightarrow \cos x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x=(2k+1)\dfrac{\pi}{4} \quad \forall k\in\{0,1,2,3...\}\end{cases}$$

y de todas estas, solo funcionan: $\begin{cases}x_1=0+k\pi & x_2=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ y_1=\dfrac{\pi}{4}+k\pi & y_2=0+k\pi\end{cases}$

3.- (2 puntos) Calcular la distancia entre los puntos A y B, y el área del triángulo ADB.



Si aplicamos el teorema del seno en el triángulo de la izquierda podemos calcular el segmento AD.

$$\frac{AD}{sen(50°)}=\frac{7,2}{sen(73°)} \quad \rightarrow \quad AD=\frac{7,2 \cdot sen(50°)}{sen(73°)}=5,77m$$

Si hacemos los mismo, pero para el triángulo de la izquierda, calculamos el segmento BD:

$$\frac{BD}{sen(48°)}=\frac{5,25}{sen(71°)} \quad \rightarrow \quad BD=\frac{5,25 \cdot sen(48°)}{sen(71°)}=4,13m$$

Ahora, y aplicando el teorema del coseno en el triángulo ADB, podemos calcular el segmento AB, aunque antes calcularemos el ángulo ADB que es *180°-(73°+71°)=36°*

$$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BD}\cdot\cos\left(\widehat{ADB}\right) \quad \rightarrow \quad \overline{AB}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BD}\cdot\cos\left(\widehat{ADB}\right)}$$

$$\overline{AB}=\sqrt{5,77^2+4,13^2-2 \cdot 5,77 \cdot 4,13 \cdot \cos(36°)}=\sqrt{11,79}=3,43m$$

Para calcular el área del triángulo blanco, utilizaremos la fórmula de Herón:

$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3,43+5,77+4,13}{2}=6,665 \qquad Area=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \quad con \quad s=\frac{a+b+c}{2}$$

Así que sustituyendo:

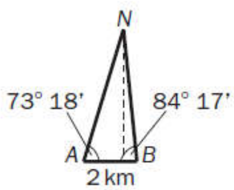
$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3,43+5,77+4,13}{2}=6,665m$$

$$Area=\sqrt{6,665\cdot(6,665-3,43)\cdot(6,665-5,77)\cdot(6,665-4,13)}=7\ m^2$$

4.- (2 puntos) Dos físicos de la atmósfera, separados por una distancia de 2 Km, observan, sobre su plano vertical y en el mismo momento, una nube bajo ángulos respectivos de 73° 18' y de 84° 17'. Calcular la altura de la nube y la distancia de la misma a cada uno de los observadores.

El problema tiene dos interpretaciones.

En cada una de ellas utilizaremos el teorema del seno para resolver el triángulo:

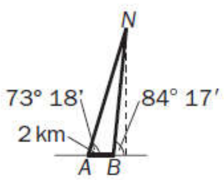


Si la nube está situada entre los dos observadores:

$$\frac{NB}{\text{sen } 73°\ 18'}=\frac{2}{\text{sen } 22°\ 25'} \Rightarrow NB \approx 5{,}02 \text{ km}$$

$$\frac{NA}{\text{sen } 84°\ 17'}=\frac{2}{\text{sen } 22°\ 25'} \Rightarrow NA \approx 5{,}22 \text{ km}$$

$$h = NB \cdot \text{sen } 84°\,17' \approx 5 \text{ km}$$



Si la nube está situada *a un mismo lado* de los dos observadores:

$$\frac{NB}{\text{sen } 73°\ 18'}=\frac{2}{\text{sen } 10°\ 59'} \Rightarrow NB \approx 10{,}05 \text{ km}$$

$$\frac{NA}{\text{sen } 95°\ 43'}=\frac{2}{\text{sen } 10°\ 59'} \Rightarrow NA \approx 10{,}45 \text{ km}$$

$$h = NB \cdot \text{sen } 84°\,17' \approx 10 \text{ km}$$

5.- (1 punto) Demuestra la siguiente identidad trigonométrica, partiendo de la parte izquierda y llegando a la derecha:

$$\frac{sen(\alpha+\beta)}{sen(\alpha-\beta)}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{tg\alpha-tg\beta}$$

$$\frac{sen(\alpha+\beta)}{sen(\alpha-\beta)}\overset{\text{desarrollamos el seno de la suma}}{=}\frac{sen\alpha\cdot\cos\beta+sen\beta\cdot\cos\alpha}{sen\alpha\cdot\cos\beta-sen\beta\cdot\cos\alpha}\overset{\substack{\text{Si dividimos todo}\\ \text{por }\cos\alpha\cdot sen\beta}}{=}\frac{\frac{sen\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot sen\beta}+\frac{sen\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot sen\beta}}{\frac{sen\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot sen\beta}-\frac{sen\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot sen\beta}}\overset{\text{y simplificando...}}{=}\frac{\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}+1}{\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}-1}=\frac{\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}+\frac{\tan\beta}{\tan\beta}}{\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}-\frac{\tan\beta}{\tan\beta}}$$

$$=\frac{\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\beta}}{\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\beta}}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{tg\alpha-tg\beta}$$

6.- (1 punto) Sabiendo que $sen(\alpha)=h$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula en función de h:

a) $sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ b) $tg(1080^\circ-\alpha)$

a) $90^\circ-\alpha$ es también un ángulo del primer cuadrante, por tanto, los ángulos son complementarios y por tanto:

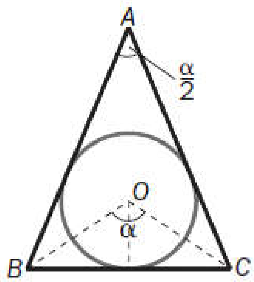
$$sen(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha=\pm\sqrt{1-sen^2\alpha}=\pm\sqrt{1-h^2}$$

b) $1080^\circ-\alpha=3\cdot360^\circ-\alpha=3\cdot0^\circ-\alpha=-\alpha$, por tanto:

$$tg(1080^\circ-\alpha)=tg(-\alpha)=-tg\alpha=-\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}=-\frac{h\sqrt{1-h^2}}{1-h^2}$$

7.- (1 punto) El radio de la circunferencia inscrita en un triángulo isósceles mide 18 cm. Resuelve el triángulo, sabiendo que su base mide 60 cm.

De tercero de la eso, debemos de acordarnos de que *cuando un ángulo inscrito y un ángulo del centro de una circunferencia abarcan el mismo arco, el ángulo inscrito vale la mitad que el ángulo del centro.*



Por tanto, si lo representamos con el siguiente dibujo, en el que hemos representado los ángulos central e inscrito, podemos calcular mediante Pitágoras el lado OB.

$$OB=\sqrt{R^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2}=\sqrt{18^2+30^2}=35cm$$

El triángulo OBC tiene por lados 35, 35 y 60 cm. Por tanto, si aplicamos el teorema del coseno:

$$\overline{BC}^2=\overline{OB}^2+\overline{OC}^2-2\overline{OB}\,\overline{OC}\cdot\cos(\alpha)$$

Y despejamos el coseno, podremos calcular el ángulo α :

$$\overline{BC}^2-\overline{OB}^2-\overline{OC}^2=-2\overline{OB}\,\overline{OC}\cdot\cos(\alpha)\quad\rightarrow\quad\cos(\alpha)=\frac{\overline{BC}^2-\overline{OB}^2-\overline{OC}^2}{-2\overline{OB}\,\overline{OC}}=-\frac{60^2-35^2-35^2}{2\cdot35\cdot35}=-0,469$$

Así que el ángulo α será: $\alpha=\arccos(-0,469)=118^\circ$ y por tanto el ángulo A del triángulo será la mitad:

$$A=\frac{\alpha}{2}=59^\circ$$

y por tanto: $180^\circ-59^\circ=121^\circ$ será la medida de los otros dos ángulos.

Al ser Isósceles, ambos ángulos serán iguales: $B=C=\frac{121^\circ}{2}=60^\circ\ 30'$

Y por último, mediante el teorema del seno, calculamos los lados $AB=AC=\frac{BC\cdot sen(60,5)}{sen(59)}=60,92m$