Nombre:		Primera Evaluación	
Curso:	1º Bachillerato B	Examen 2	
Fecha:	*23 de octubre de 2017*	***Atención:*** La no explicación clara y concisa de cada ejercicio implica una penalización del 25% de la nota	

1.- En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiantes, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla. ***(2 puntos)***

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales para calcular cuántos helados de cada sabor se compran a la semana.

b) Resuelve, mediante el método de Gauss, el sistema planteado en el apartado anterior.

2.- Calcula el ángulo que forma la tangente común a dos circunferencias de radios 4 y 9 cm, con la línea que une sus centros, sabiendo que la distancia entre sus centros es de 16 cm. **(1,5 puntos)**

3.- Sabiendo que $senx = \frac{\sqrt{3}}{5}$ y que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ calcula, sin hallar previamente el valor de x y expresando los resultados utilizando radicales: ***(1,5 puntos)***

a) Las restantes 5 razones trigonométricas.

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

4.- Si $\tan(\alpha + \beta) = 4$ y $\tan(\alpha) = -2$, halla $\tan(2\beta)$ ***(1 punto)***

5.- Demuestra la siguiente identidad trigonométrica, partiendo de la parte izquierda y llegando a la derecha: ***(1 punto)***

$$\frac{tgx \cdot senx}{tgx + senx} = \frac{tgx - senx}{\tan x \cdot senx}$$

6.- Expresa $sen(4\alpha)$ en función de $sen(\alpha)$. ***(1 punto)***

7.- Demuestra la fórmula del coseno de la suma de ángulos ayudándote de algún dibujo. ***(2 puntos)***

1.- En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiantes, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales para calcular cuántos helados de cada sabor se compran a la semana.
b) Resuelve, mediante el método de Gauss, el sistema planteado en el apartado anterior.

Si llamamos x a los helados de vainilla, y a los de chocolate y z a los de nata, podemos escribir el sistema:

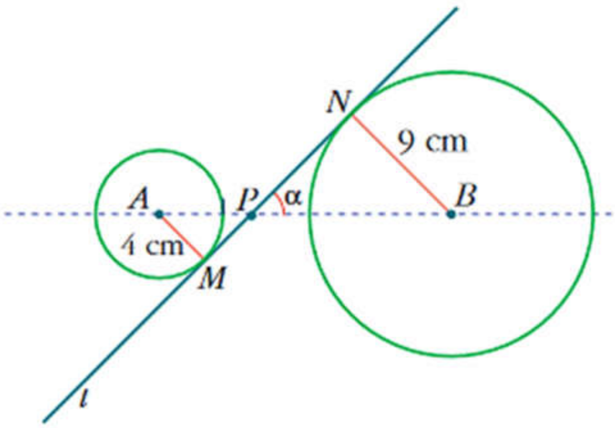
$$\begin{array}{l} 1) \\ 2) \\ 3) \end{array}\begin{cases} x + y + z = 110 \\ 4x + 5y + 6z = 540 \\ 1,2x = y + z \end{cases} \text{ de donde:}$$

La ecuación 1) la obtenemos de sumar los helados, la 2) del dinero que cuestan y la 3) de saber que se compran más helados de chocolate y nata que de vainilla.

Y si lo resolvemos, obtenemos que se compran 50 helados de vainilla, 20 de chocolate y 40 de nata.

2.- Calcula el ángulo que forma la tangente común a dos circunferencias de radios 4 y 9 cm, con la línea que une sus centros, sabiendo que la distancia entre sus centros es de 16 cm.

Si dibujamos la situación del enunciado, llegamos a:



En el triángulo AMP tenemos que: $sen\alpha = \dfrac{4}{\overline{AP}}$

Fijándonos ahora en el triángulo BNP, observamos que: $sen\alpha = \dfrac{9}{16 - \overline{AP}}$

Si igualamos ambas expresiones, llegamos a:

$$\left.\begin{array}{r} sen\alpha = \dfrac{4}{\overline{AP}} \\ sen\alpha = \dfrac{9}{16-\overline{AP}} \end{array}\right\} \dfrac{4}{\overline{AP}} = \dfrac{9}{16-\overline{AP}} \quad \to \quad 64 - 4\overline{AP} = 9\overline{AP} \quad \to \quad 64 = 13\overline{AP} \quad \to \quad \overline{AP} = \dfrac{64}{13}$$

Sustituyendo en $sen\alpha = \dfrac{4}{\overline{AP}}$ llegamos a: $sen\alpha = \dfrac{52}{64} = 0,8125$ y calculando el ángulo cuyo seno sea éste:

$$\alpha = Arc\ sen\left(\frac{52}{64}\right) = 54^\circ\ 20'\ 27,3''$$

3.- Sabiendo que $senx = \frac{\sqrt{3}}{5}$ y que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ calcula, sin hallar previamente el valor de x y expresando los resultados utilizando radicales:

a) Las restantes 5 razones trigonométricas.

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

a) Para calcular el coseno nos basamos en la ecuación fundamental de la trigonometría: $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{22}{25}} = -\frac{\sqrt{22}}{5}$$ por estar en el cuadrante II.

Para la tangente: $\tan x = \frac{senx}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{5}}{\frac{-\sqrt{22}}{5}} = -\frac{5\sqrt{22}}{5\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{66}}{22}$

Las otras 3 razones, secante, cosecante y cotangente son las razones inversas de éstas, así que:

Seno	Coseno	Tangente	Secante	Cosecante	Cotangente
$\frac{\sqrt{3}}{5}$	$-\frac{\sqrt{22}}{5}$	$-\frac{\sqrt{66}}{22}$	$-\frac{5\sqrt{22}}{22}$	$\frac{5\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{66}}{3}$

b) Para calcular $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ utilizaremos la fórmula del coseno de la diferencia de dos ángulos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos x + senx\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0\cdot\cos x + senx\cdot = senx$$

Por tanto:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = senx = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

4.- Si $\tan(\alpha + \beta) = 4$ y $\tan(\alpha) = -2$, halla $\tan(2\beta)$

Si desarrollamos la fórmula de la tangente de la suma, tenemos:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta} \quad \rightarrow \quad 4 = \frac{-2 + tg\beta}{1 + 2\cdot tg\beta}$$

De donde si despejamos la tangente del ángulo β

$$4(1 + 2\cdot tg\beta) = -2 + tg\beta \quad \rightarrow \quad 4 + 8tg\beta + 2 - tg\beta = 0 \quad \rightarrow \quad 7tg\beta = -6 \quad \rightarrow \quad tg\beta = -\frac{6}{7}$$

Y con esto, ya podemos calcular lo que nos piden:

$$tg(2\beta) = \frac{2tg\beta}{1 - tg^2\beta} = \frac{2\cdot(-6/7)}{1 - 36/49} = -\frac{84}{13}$$

5.- Demuestra la siguiente identidad trigonométrica, partiendo de la parte izquierda:

$$\frac{tgx\cdot senx}{tgx+senx}=\frac{tgx-senx}{\tan x\cdot senx}$$

$$\frac{\tan x\cdot senx}{\tan x+senx}=\frac{\frac{senx}{\cos x}\cdot senx}{\frac{senx}{\cos x}+senx}=\frac{\frac{sen^2x}{\cos x}}{\frac{senx+senx\cdot\cos x}{\cos x}}=\frac{\frac{sen^2x}{\cos x}}{\frac{senx(1+\cos x)}{\cos x}}=\frac{sen^2x\cdot\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}\cdot senx(1+\cos x)}=\frac{(1-\cos^2 x)}{senx(1+\cos x)}=$$

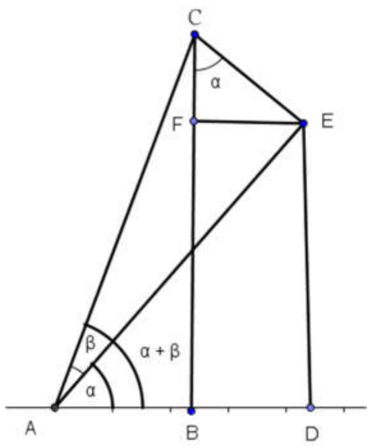
$$\frac{(1-\cos x)\cdot\cancel{(1+\cos x)}}{senx\,\cancel{(1+\cos x)}}=\frac{(1-\cos x)}{senx}\cdot\frac{\tan x}{\tan x}=\frac{\tan x-\tan x\cdot\cos x}{\tan x\cdot senx}=\frac{tgx-senx}{\tan x\cdot senx}$$

6.- Expresa $sen(4\alpha)$ en función de $sen(\alpha)$

$$sen(4x)=sen(2\cdot 2x)=2\cdot sen(2x)\cdot\cos(2x))2\cdot 2\cdot senx\cdot\cos x\cdot\left(\cos^2 x-sen^2x\right)=4senx\cdot\cos^3 x-4\cos x\cdot sen^3x=$$

$$4\cdot senx\cdot\left(\sqrt{1-sen^2x}\right)^3-4\cdot\left(\sqrt{1-sen^2x}\right)\cdot sen^3x$$

7.- Demuestra la fórmula del coseno de la suma de ángulos ayudándote de algún dibujo.



Si nos fijamos en la figura de la izquierda:

Vamos a demostrar la fórmula del coseno de α + β:

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AD}-\overline{BD}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AD}-\overline{FE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}-\frac{\overline{FE}}{\overline{AC}}\qquad \text{(Ec. 1)}$$

Teniendo en cuenta que en el triángulo ADE,

$$\cos\alpha=\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}\quad\Rightarrow\quad\overline{AD}=\overline{AE}\cdot\cos\alpha$$

Y que en el triángulo CFE,

$$sen\ \alpha=\frac{\overline{FE}}{\overline{CE}}\quad\Rightarrow\quad\overline{FE}=\overline{CE}\cdot\text{sen}\,\alpha$$

Si sustituimos en la expresión (Ec. 1), tenemos:

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}-\frac{\overline{FE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AE}\cdot Cos\alpha}{\overline{AC}}-\frac{\overline{CE}\cdot sen\alpha}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}\cdot\cos\alpha-\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}\cdot sen\alpha\qquad\text{(Ec.2)}$$

Si nos fijamos en el ángulo β, tenemos:

$$sen\beta=\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}\quad y\quad\cos\beta=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

Y si sustituimos esto en la ecuación (Ec. 2), nos queda:

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}\cdot\cos\alpha-\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}\cdot sen\alpha=\cos\beta\cdot\cos\alpha-sen\beta\cdot sen\alpha$$

Por tanto y después de todos estos cálculos, el coseno de la suma de dos ángulos lo calcularemos mediante:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\beta\cdot\cos\alpha-sen\beta\cdot sen\alpha$$