Solución Examen Recuperación 1ª

1.- *Dados los vectores $\vec{u}=(1,2)$ y $\vec{v}=(-3,1)$.*
a) Comprueba que forman una base de los vectores libres del plano.
b) Encuentra las componentes del vector $\vec{w}=(-1,5)$ en la base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$

a) Para que dos vectores del plano formen una base de $\mathbb{R}^2$ basta con que no sean paralelos, o lo que es lo mismo, que no sean proporcionales: $\frac{1}{-3}\neq\frac{2}{1}$, por tanto no son paralelos, y por tanto forman una base $B=\{(1,2),(-3,1)\}$

b) Escribimos el vector $\vec{w}=(-1,5)$ como combinación lineal de los vectores de la base:
$\vec{w}=\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad (-1,5)=\alpha(1,2)+\beta(-3,1)$

Esto nos genera un sistema de ecuaciones: $\begin{cases}-1=\alpha-3\beta\\ 5=2\alpha+\beta\end{cases}$ cuya solución es: $\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=1\end{cases}$

Por tanto, $\vec{w}=2\cdot\vec{u}+\vec{v}=(2,4)+(-3.1)=(-1,5)=\vec{w}$

2.- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores ortonormales, halla los posibles valores del parámetro real a para que el vector $\vec{u}+a\vec{v}$ y el vector $\vec{u}-a\vec{v}$ formen un ángulo de 60°.

Sean $\vec{u}=(u_x,u_y)$ y $\vec{v}=(v_x,v_y)$, y los vectores $\vec{u}+a\vec{v}=(u_x+av_x,u_y+av_y)$ y $\vec{u}-a\vec{v}=(u_x-av_x,u_y-av_y)$, si ambos vectores forman un ángulo de 60°, utilizando el producto escalar, tenemos:

$$\cos\alpha=\frac{(\vec{u}+a\vec{v})\cdot(\vec{u}-a\vec{v})}{\|\vec{u}+a\vec{v}\|\cdot\|\vec{u}-a\vec{v}\|} \quad\to\quad \frac{1}{2}=\frac{u_x^2+u_y^2-a^2(v_x^2+v_y^2)}{\sqrt{(u_x-av_x)^2+(u_y-av_y)^2}\cdot\sqrt{(u_x+av_x)^2+(u_y+av_y)^2}}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{u_x^2+u_y^2-a^2(v_x^2+v_y^2)}{\sqrt{u_x^2+a^2v_x^2-2au_xv_x+u_y^2+a^2v_y^2-2au_yv_y}\cdot\sqrt{u_x^2+a^2v_x^2+2au_xv_x+u_y^2+a^2v_y^2+2au_yv_y}}$$

Multilpicando en cruz:

$$\sqrt{u_x^2+a^2v_x^2-2au_xv_x+u_y^2+a^2v_y^2-2au_yv_y}\cdot\sqrt{u_x^2+a^2v_x^2+2au_xv_x+u_y^2+a^2v_y^2+2au_yv_y}=2\left(u_x^2+u_y^2-a^2(v_x^2+v_y^2)\right)$$

Como $-2au_xv_x-2au_yv_y=-2a\left(u_xv_x+u_yv_y\right)=0$ porque son ortogonales; sustituyendo:

$$\sqrt{\left(u_x^2+a^2v_x^2+u_y^2+a^2v_y^2\right)\cdot\left(u_x^2+a^2v_x^2+u_y^2+a^2v_y^2\right)}=2\left(u_x^2+u_y^2-a^2(v_x^2+v_y^2)\right)$$

Y agrupando:

$$\sqrt{\left(u_x^2+u_y^2+a^2\left(v_x^2+v_y^2\right)\right)\cdot\left(u_x^2+u_y^2+a^2\left(v_x^2+v_y^2\right)\right)}=2\left(u_x^2+u_y^2-a^2(v_x^2+v_y^2)\right)$$

Operando y despejando a:

$$u_x^2+u_y^2+a^2\left(v_x^2+v_y^2\right)=2\left(u_x^2+u_y^2-a^2(v_x^2+v_y^2)\right) \quad\to\quad u_x^2+u_y^2-3a^2(v_x^2+v_y^2)=0 \quad\to\quad 3a^2=\frac{u_x^2+u_y^2}{v_x^2+v_y^2}$$

Y de aquí:

$$3a^2=1 \quad\to\quad a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

3.- Sean la recta *r: mx-y=1* y la recta *s: x-my=2m-1*. (2 puntos)

a) Estudia la posición relativa de las rectas, según los valores del parámetro *m*.

b) Determina m si ambas rectas se cortan en un punto de accisa x=3.

Los vectores directores de r y s son $\vec{r}=(m,-1)$ y $\vec{s}(1,-m)$. Para que las rectas sean paralelas, ha de ocurrir que $\frac{m}{1}=\frac{-1}{-m} \quad \rightarrow \quad -m^2=-1 \quad \rightarrow \quad m=\pm 1$

Por tanto, si m es 1 ó -1, las rectas son paralelas. Veamos si sin coincidentes o no:

- Si m=1, las rectas r y s son: $\begin{cases} r: x-y-1=0 \\ s: x-y-1=0 \end{cases}$, que como vemos son la misma, por tanto son coincidentes.
- Si m=-1, las rectas r y s son: $\begin{cases} r: -x-y-1=0 \\ s: x+y+3=0 \end{cases}$, que como podemos observar no son la misma, por tanto las rectas son paralelas no coindicentes.

En el caso de que m no sea ni 1 ni -1, las rectas son secantes. Veamos el caso en el que ambas son perpendiculares:

Para que sean perpendiculares, ha de ocurrir que el producto escalar de los dos vectores directores sea nulo:

r y s son perpendiculares $\Leftrightarrow \quad \vec{r}\cdot\vec{s}=0 \quad \Leftrightarrow \quad (m,-1)\cdot(1,-m)=0 \quad \Leftrightarrow \quad m+m=0 \quad \rightarrow \quad 2m=0$

Por tanto para que sean perpendiculares, ha de ocurrir que m=0.

- Si m≠1 y m≠-1, las rectas son secantes.
- Si m=0, las rectas son perpendiculares.

Si ambas rectas se cortan en un punto con x=3, tenemos que el punto de corte será (3,y), por tanto, si sustituimos en ambas rectas:

$$\begin{cases} r: 3m-y-1=0 \\ s: 3-my+1-2m=0 \end{cases}$$

despejando y de la primera y sustituyendo en la segunda:

$$\begin{cases} y=3m-1 \\ 3-m(3m-1)+1-2m=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 3-3m^2+m+1-2m=0 \quad \rightarrow \quad -3m^2-m+4=0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado en m, obtenemos:

$$3m^2+m-4=0 \quad \rightarrow \quad m=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 3\cdot 4}}{6}=\frac{-1\pm 7}{6} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m_1=1 \\ m_2=-\frac{4}{3} \end{cases}$$

Si m=1, como son coincidentes, es claro que se cortan en un punto de abscisa 3, y para el otro caso, son secantes en el punto de abscisa 3.

4.- Sea el triángulo de vértices A(4,2), B(13,5) y C(6,6).

a) Halla la ecuación de la altura que pasa por el vértice C.

b) Calcula la longitud de los segmentos en que la altura anterior corta al lado AB.

a) Calculamos el vector $\overrightarrow{AB}=(9,3)$ y por tanto, un haz de rectas perpendiculares al lado AB, será:

$9x+3y+k=0$, si obligamos a una de estas rectas a pasar por el vértice C, tenemos:

$9\cdot 6+3\cdot 6+k=0 \quad \rightarrow \quad k=-72$

Por tanto la ecuación de la altura que pasa por el vértice C será: $9x+3y-72=0$, o lo que es lo mismo:

$$\boxed{3x+y-24=0}$$

b) Calculamos la recta que contiene a los puntos A y B. Del vector $\overrightarrow{AB} = (9,3)$ sacamos un haz de rectas paralelas: $3x - 9y + k = 0$, calculamos la recta que pasa por A(4,2) sustituyendo en el haz y calculando k: $3 \cdot 4 - 9 \cdot 2 + k = 0 \quad \rightarrow \quad 12 - 18 + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = 6$, por tanto la recta que contiene al lado AB es la recta dada por: $3x - 9y + 6 = 0$.

Calculamos el punto, Q, de intersección de ambas rectas, resolviendo el sistema formado por ellas:

$$\begin{cases} 3x - 9y + 6 = 0 \\ 3x + y - 24 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad -10y + 30 = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 7 \end{cases} \rightarrow \quad Q = (7,3)$$

Ahora calculamos los vectores $\begin{matrix} \overrightarrow{AQ} = (3,1) & \rightarrow & \left\|\overrightarrow{AQ}\right\| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \\ \overrightarrow{BQ} = (6,2) & \rightarrow & \left\|\overrightarrow{BQ}\right\| = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \end{matrix}$

Por tanto, los segmentos en los que corta la altura al lado AC, miden $\sqrt{10}$ y $2\sqrt{10}$

5.- Las Agujas de un reloj de pared miden 10 y 12 centímetros, respectivamente.
a) ¿Cuál es la distancia que hay entre sus extremos cuando el reloj marca las cuatro de la tarde?
b) ¿Cuál es la superficie del triángulo que determinan a esa hora?.

a) A las 4 de la tarde, las agujas forman un triángulo del que se conocen dos lados a=12, b=10 y un ángulo $\alpha = 120°$.

Aplicando el teorema del coseno:

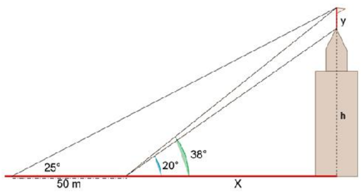
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 100 + 144 + 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 364 \text{ cm}$$

Por tanto la distancia entre los extremos de las agujas es: $c = 2\sqrt{91} = 19{,}08\,\text{cm}$

b) *Para el cálculo del área*, utilizaremos la fórmula de Herón, que relacionaba el área del triángulo S con sus lados a,b y c y con su semiperímetro S:

$$S = \sqrt{S \cdot (S-a) \cdot (S-b) \cdot (S-c)} = \sqrt{20{,}54 \cdot (10{,}54) \cdot (8{,}54)(1{,}46)} = 51{,}96\ cm^2$$

6.- En el tejado de una casa hay una antena. Desde un punto del suelo se ven la casa y la antena bajo ángulos de 20° y 38° respectivamente. 50 metros más atrás, la antena se ve bajo un ángulo de 25°. Calcula la longitud de la antena.



Sea h la altura del edificio y la antena, aplicando tangentes en los dos triángulos tenemos:

$$\left.\begin{matrix} \tan 38 = \dfrac{h}{x} & \rightarrow & h = x \cdot \tan 38 \\ \tan 25 = \dfrac{h}{x+50} & \rightarrow & h = \tan 25 \cdot (x+50) \end{matrix}\right\} \text{igualando: } x\tan 38 = \tan 25(x+50)$$

Operando:

$$x\tan 38 - x\tan 25 = 50\tan 25 \quad \rightarrow \quad x = \frac{50\tan 25}{\tan 38 - \tan 25} = 74{,}02\ m$$

Y de aquí, la altura de la torre y la antena h es: $h = x \cdot \tan 38 = 57{,}83\ m$

Para calcular la altura de la antena, calcularemos antes la altura del edificio h':

$$\tan 20 = \frac{h'}{x} \quad \rightarrow \quad h' = x \cdot \tan 20 = 74{,}02 \cdot \tan 20 = 26{,}94\ m$$

Por tanto, la altura de la antena y, la calculamos haciendo la diferencia de las dos alturas:

$$y = h - h' = 57{,}83 - 26{,}94 = 30{,}89 \text{ m}$$

7.- Si $\tan\alpha = 1{,}5$ y α es un ángulo del tercer cuadrante, calcula las restantes razones trigonométricas.

Si $\tan\alpha = 1{,}5$, entonces $\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = 1{,}5 \quad \rightarrow \quad sen\alpha = 1{,}5\cos\alpha$, utilizando la identidad fundamental de la trigonometría, tenemos:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{9}{4}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{13}{4}\cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{4}{13}} = \pm\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Como dicen que α está en el tercer cuadrante, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13} \approx -0{,}55 \quad \rightarrow \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx -1{,}80$

Conocido el coseno, como $sen\alpha = \frac{3}{2}\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13} \approx -0{,}83 \quad \rightarrow \quad cosec\alpha = \frac{1}{sen\alpha} = -\frac{\sqrt{13}}{3} \approx -1{,}20$

8.- *Expresa* $\cos(3\alpha)$ *en función de cos* α

Descomponiendo $\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha)$ y desarrollando como el coseno de una suma:

$$\cos(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos 2\alpha - sen\alpha\cdot sen2\alpha\,,$$

Utilizando las razones trigonométricas de los ángulos dobles:

$$= \cos\alpha\cdot\left(\cos^2\alpha - sen^2\alpha\right) - sen\alpha\cdot 2\cdot sen\alpha\cdot\cos\alpha = \cos^3\alpha - \cos\alpha\cdot sen^2\alpha - 2sen^2\alpha\cdot\cos\alpha$$

Hacemos el cambio $sen^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$$= \cos^3\alpha - \cos\alpha\cdot\left(1 - \cos^2\alpha\right) - 2\cdot\left(1 - \cos^2\alpha\right)\cdot\cos\alpha = \cos^3 - \cos\alpha + \cos^3\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha$$

Agrupando, llegamos a:

$$= 4\cos^3 - 3\cos\alpha = \cos(3\alpha)$$

9.- Resuelve la ecuación $2\cdot sen(2x) = \sqrt{2}$

Si pasamos el 2 a la derecha: $sen(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Los ángulos cuyo seno es $+\frac{\sqrt{2}}{2}$ son $\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$, despejando x tenemos: $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x_2 = \frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases}$

O lo que es lo mismo en grados sexagesimales:

$$x_1 = 11°15' + 180k = \frac{\pi}{8} + k\pi \qquad x_2 = 33°45' + 180k = \frac{3\pi}{8} + k\pi \qquad \forall k \in \mathbb{R}$$