Solución Examen Final

1.- Halla las soluciones de la ecuación: $z^4+\left(1-\sqrt{3}i\right)=0$

Despejando z, tenemos: $z^4=-1+\sqrt{3}i$

Si escribimos $-1+\sqrt{3}i$, en forma polar: $\begin{cases} r=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2 \\ \arg Z=\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{-1}=-60^\circ \end{cases}$, como estamos en el segundo cuadrante, arg Z=120°, por tanto:

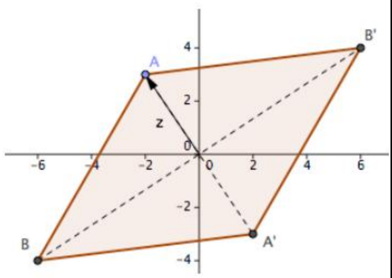
$$-1+\sqrt{3}i=2_{120^\circ}$$

Por tanto la ecuación queda: $z^4=2_{120} \quad\rightarrow\quad z=\left(\sqrt[4]{2}\right)_{\frac{120+360k}{4}} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} si\ k=0;\ z_1=\left(\sqrt[4]{2}\right)_{30} \\ si\ k=1;\ z_1=\left(\sqrt[4]{2}\right)_{120} \\ si\ k=2;\ z_1=\left(\sqrt[4]{2}\right)_{210} \\ si\ k=3;\ z_1=\left(\sqrt[4]{2}\right)_{300} \end{cases}$

2.- Un rombo tiene su centro en el origen de coordenadas y su diagonal mayor de doble longitud que su diagonal menor. Uno de los vértices de la diagonal menor es el punto correspondiente al número complejo –2 + 3i. Averigua los afijos correspondientes al resto de los vértices del rombo. (2 puntos)

Si llamamos A al vértice -2+3i, como es un rombo (cuadrilátero) las soluciones se diferencian en un argumento de 90°. Para conseguir el vértice B, como A está en la diagonal menor, para calcularlo, multiplicamos por el número complejo de módulo 2 (porque la diagonal mayor es doble de la menor) y argumento 90°, es decir:

$$B=(-2+3i)\cdot 2_{90^\circ}=(-2+3i)\cdot 2i=-4i+6i^2=-4i-6 \quad\rightarrow\quad B(-6,-4)$$



Los otros vértices A' y B' son los afijos de los opuestos de los otros dos vértices, es decir: A'(2,-3) y B'(6,4).

Por tanto los vértices son: ***A(-2,3); B(-6-4); A'(2,-3) y B'(6,4)***

3.- Hallar el valor de x para que $\dfrac{2-xi}{1-3i}$ a) Sea un número real, b) sea imaginario puro y c) su representación esté en la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Si multiplicamos arriba y abajo por el conjugado del denominador, llegamos a:

$$\frac{2-xi}{1-3i}\cdot\frac{1+3i}{1+3i}=\frac{2+6i-xi-3xi^2}{1-9i^2}=\frac{2+3x}{10}+\frac{6-x}{10}i$$

a) Para que sea un número real, la parte imaginaria ha de ser nula: $6-x=0 \quad\rightarrow\quad x=6$

b) Para que sea imaginario puro, la parte real ha de ser nula: $2+3x=0 \quad\rightarrow\quad x=\dfrac{-2}{3}$

c) Para que esté en la bisectriz del 1º y 3º cuadrante, la parte real y la imaginaria han de ser iguales:

$$2+3x=6-x \quad\rightarrow\quad 4x=4 \quad\rightarrow\quad x=1$$

4.- Los afijos de las raíces de un número complejo son vértices de un octógono regular inscrito en una circunferencia de centro en O y radio 2; sabiendo que el argumento de unas de las raíces es 45°. Hallar el número complejo y las restantes raíces.

Si una de las raíces es $2_{45°}$, como sabemos que son 8, quiere decir que cada una de ellas se consigue girando $\frac{360}{8}=45°$ grados con respecto al primer vértice, por tanto:

$$V_1=2_{45°} \qquad V_2=2_{45°}\cdot 1_{45°}=2_{90°} \qquad V_3=2_{90°}\cdot 1_{45°}=2_{135°} \qquad V_4=2_{135°}\cdot 1_{45°}=2_{180°}$$
$$V_5=2_{180°}\cdot 1_{45°}=2_{225°} \qquad V_6=2_{225°}\cdot 1_{45°}=2_{270°} \qquad V_7=2_{270°}\cdot 1_{45°}=2_{315°} \qquad V_8=2_{315°}\cdot 1_{45°}=2_{0°}$$

Para hallar de qué número complejo son solución estas raíces, basta con elevar a 8 cualquiera de ellas:

$$\sqrt[8]{Z}=2_{45} \quad \leftrightarrow \quad Z=\left(2_{45}\right)^8 \quad \rightarrow \quad Z=\left(2^8\right)_{45*8}=\left(2^8\right)_{360}=\left(2^8\right)_0=2^8=256$$

5.- Halla la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos A(2,1) y B(3,-3), y su centro se encuentra sobre la recta s: x+y-5=0

Si su centro está en la recta s, el centro tendrá por coordenadas el C(x,5-x), y como los puntos A y B están en la circunferencia, la distancia del centro a A y del centro a B serán iguales (por ser igual al radio), así que:

$$d(C,A)=d(C,B) \quad \rightarrow \quad \sqrt{(x-2)^2+(4-x)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(8-x)^2}$$

Quitando las raíces:

$$(x-2)^2+(4-x)^2=(x-3)^2+(8-x)^2 \quad \rightarrow \quad x^2-4x+4+16+x^2-8x=x^2-6x+9+64+x^2-16x$$

Y operando un poco:

$$-12x+20=-22x+73 \quad \rightarrow \quad 10x=53 \quad \rightarrow \quad x=\frac{53}{10}$$

$$\text{De } y=5-x \quad \rightarrow \quad y=5-\frac{53}{10}=\frac{-3}{10}$$

Por tanto, las coordenadas del centro son: $C\left(\frac{53}{10},\frac{-3}{10}\right)$

Y el radio será la distancia del centro a uno de los puntos A o B: $r=\sqrt{\left(\frac{53}{10}-2\right)^2+\left(\frac{-3}{10}-1\right)^2}=\sqrt{\frac{629}{50}}$

Por tanto, la ecuación de la circunferencia vendrá dada por:

$$\left(x-\frac{53}{10}\right)^2+\left(y+\frac{3}{10}\right)^2=\frac{629}{50}$$

6.- Halla la ecuación de la circunferencia de centro (−4, 2) que es tangente a la circunferencia. $x^2+y^2-16x+6y+72=0$

Completando cuadrados, calculamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$\left(x^2-16x+64\right)-64+\left(y^2+6y+9\right)-9+72=0 \quad \rightarrow \quad (x-8)^2+(y+3)^2=1$$

Por tanto el centro está en C(8,-3) y su radio es 1.

Solución Examen Final

Calculando la distancia entre los dos centros, tenemos que: $d(C,C')=\sqrt{(8+4)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{144+25}=13$

Por tanto, si el radio de una de ellas es 1, la distancia entre los centros es 13 y ambas circunferencias son tangentes, no queda más remedio que el radio de la otra sea de 12.

$$r'=13-r=13-2=12$$

Por tanto la ecuación de la circunferencia tangente es: $(x+4)^2+(y-2)^2=12^2$

7.- Escribe la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la circunferencia: $x^2+y^2-6x-2y-15=0$ en el punto $P(-1,4)$

Calculamos el centro y el radio de la circunferencia de nuevo completando cuadrados:

$$x^2+y^2-6x-2y-15=0 \quad\rightarrow\quad (x^2-6x+9)-9+(y^2-2y+1)-1-15=0 \quad\rightarrow\quad (x-3)^2+(y-1)^2=5^2$$

Por tanto, la circunferencia tiene el centro en C(3,1) y radio 5.

Si calculamos el vector $\overrightarrow{PC}$, éste será el vector director de la recta que pasa por el punto P y por el centro: $\overrightarrow{PC}=(4,-3)$ y también el vector normal a la circunferencia. Con esto, el vector director de la recta tangente a la circunferencia, tiene por vector director $\vec{r}=(3,4)$ y por tanto un haz de rectas paralelas a dicha recta tangente viene dado por el haz de rectas paralelas:

$$3x+4y+K=0$$

Obligando a que pase por P(-1,4) tenemos la recta tangente a la circunferencia en el punto P.

$$3(-1)+4(4)+K=0 \quad\rightarrow\quad -3+16+K=0 \quad\rightarrow\quad K=-13$$

Por tanto la recta tangente a la circunferencia en el punto (-1,4) tiene por ecuación: $3x+4y-13=0$

Y la recta normal a la circunferencia tendrá por ecuación: $4x-3y+K=0$, obligando a que pase por P, tenemos: $4(-1)-3(4)+K=0 \quad\rightarrow\quad K=16$, por tanto la recta normal es: $3x+4y+16=0$

$$\text{Así que: } \begin{cases} tg: 3x+4y-13=0 \\ n: 4x-3y+16=0 \end{cases}$$

8.- Dadas las rectas *r: $3x+4y-10=0$*, s: *$5x-12y+2=0$* y la circunferencia $x^2+y^2-20x+84=0$. *(2 puntos)*

a) Comprueba que las dos rectas son tangentes a la circunferencia.

b) Halla el punto P de intersección de ambas rectas, el punto C, que es centro de la circunferencia, y los puntos A y A', en los que las rectas son tangentes a la circunferencia.

a) Si las dos rectas son tangentes a la circunferencia, ha de ocurrir que la distancia entre ellas y el centro de la circunferencia sea la misma, así que calculamos primero el centro de la Circunferencia:

$$x^2+y^2-20x+84=0 \quad\rightarrow\quad (x-20x+100)-100+y^2=0 \quad\rightarrow\quad (x-10)^2+y^2=10^2$$

Por tanto el centro es C(10,0) y el radio es 10.

Las distancias $d(r,C)=d(s,C) \quad\rightarrow\quad \dfrac{|3\cdot 10+0\cdot 4-10|}{5}=\dfrac{|5\cdot 10-12\cdot 0+2|}{13} \quad\rightarrow\quad \dfrac{20}{5}=\dfrac{52}{13} \quad\rightarrow\quad 4=4$

Por tanto las rectas son tangentes a la circunferencia.

b) El punto de intersección de ambas rectas es la solución del sistema: $\begin{cases} 3x+4y-10=0 \\ 5x-12y+2=0 \end{cases}$

Por el método de reducción, multiplicando la primera ecuación por 4 y sumando, obtenemos:

$$14x=28 \quad \to \quad x=2 \quad \to \quad y=\frac{10-3x}{4}=\frac{10-6}{4}=1$$

Por tanto el punto P es (2,1), el centro, como hemos calculado con anterioridad es C(10,0) y los puntos A y A' los calcularemos resolviendo los sistemas formados por las rectas y la circunferencia:

$$A:\begin{cases} x^2+y^2-20x+84=0 \\ 3x+4y-10=0 \end{cases} \quad \to \quad 25x^2-380x+1444=0 \quad \to \quad x=\frac{38}{5} \quad \to \quad A\left(\frac{38}{5},-\frac{16}{5}\right)$$

$$A':\begin{cases} x^2+y^2-20x+84=0 \\ 5x-12y+2=0 \end{cases} \quad \to \quad 169x^2-2860x+12100=0 \quad \to \quad x=\frac{110}{13} \quad \to \quad A'\left(\frac{110}{13},\frac{48}{13}\right)$$

9.- Obtén las ecuaciones del lugar geométrico de los puntos que equidistan de (1, 4) y de la recta 3x +4y+1 =0. ¿Será una parábola? ¿Se puede escribir su ecuación? ¿Por qué?

De lo visto en clase, sabemos que el lugar geométrico de los puntos, P, del plano que equidistan de un punto fijo F, en este caso (1,4), llamado foco, y de una recta fija δ llamada directriz, en este caso 3x+4y+1=0, es la parábola.

Vamos a intentar calcular su ecuación: Si P es un punto de la parábola se cumple que: $d(P,F)=d(P,\delta)$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}=\frac{|3x+4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}} \quad \to \quad \sqrt{x^2-2x+1+y^2-8y+16}=\frac{|3x+4y+1|}{5}$$

Elevando al cuadrado:

$$x^2-2x+1+y^2-8y+16=\frac{9x^2+16y^2+1+6x+8y+24xy}{25}$$

Y operando:

$$25x^2-50x+25+25y^2-200y+424=9x^2+16y^2+1+6x+8y+24xy$$

Y agrupando:

$$16x^2+9y^2-24xy-56x-208y+424=0$$

Que se corresponde con la ecuación de una parábola.

Por tanto, podemos escribir la ecuación general, pero ***no se puede escribir su ecuación reducida***, porque el vértice y el foco no se encuentran situados en uno de los ejes de coordenadas.