Solución Examen Final

1.- Halla la ecuación segmentaria de la recta que pasa por los puntos A(3, 1) y B(5, 7).

Para la determinación de la ecuación de una recta, necesitamos un punto (3,1) y un vector $\overrightarrow{AB} = (2,6)$ Partiendo del haz de rectas paralelas cuyo vector director es el (2,6), tenemos: $6x - 2y + k = 0$, si sustituimos el punto (3,1) en este haz, tenemos la ecuación de la recta cuyo vector director es el (2,6) y que pasa por el punto (3,1): $6{\cdot}3 - 2{\cdot}1 + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = -16$, por tanto la ecuación general de la recta que pasa por esos dos puntos, A y B, es: $6x - 2y - 16 = 0 \quad \rightarrow \quad 3x - y - 8 = 0$, si pasamos el término independiente a la derecha de la igualdad, tenemos: $3x - y = 8$, si dividimos todo por 8 nos queda:

$\frac{3x}{8} - \frac{y}{8} = 1$ y de aquí: $\frac{x}{\frac{8}{3}} + \frac{y}{-8} = 1$ que es la ecuación segmentaria pedida.

2.- Analiza si los siguientes vectores son linealmente independientes: $\vec{u} = (3,5) \quad y \quad \vec{v} = (7,12)$

En $\mathbb{R}^2$ dos vectores son linealmente independientes si no son proporcionales o paralelos; por tanto, ¿es $\vec{v} = k{\cdot}\vec{u}$?.

$$\left.\begin{array}{r} 7 = k{\cdot}3 \\ 12 = k{\cdot}5 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{7}{3} = k = \frac{12}{5} \quad \rightarrow \quad 35 = 36$$

Cosa que nos es cierta, por tanto no son proporcionales y por tanto son linealmente independientes.

3.- Encuentra dos vectores perpendiculares al vector $\vec{w} = (7,7)$

Dos vectores son perpendiculares, si su producto escalar es cero, por tanto un vector perpendicular a $\vec{w}$ sería el vector $\vec{v} = (-7,7)$ y por tanto otro vector sería el $\vec{u} = (-1,1)$

4.- Simplifica la siguiente expresión trigonométrica: $\dfrac{2{\cdot}\cos(45+\beta){\cdot}\cos(45-\beta)}{\cos(2\beta)}$

Utilizando las fórmulas del coseno del ángulo suma, del ángulo diferencia y del ángulo doble:

$$\cos(A+B) = \cos A{\cdot}\cos B - SenA{\cdot}SenB$$
$$\cos(A-B) = \cos A{\cdot}\cos B + SenA{\cdot}senB$$
$$\cos(2A) = \cos^2 A - sen^2 A$$

Tenemos:

$$\frac{2{\cdot}\cos(45+\beta){\cdot}\cos(45-\beta)}{\cos(2\beta)} = \frac{2(\cos 45{\cdot}\cos\beta - sen45{\cdot}sen\beta){\cdot}((\cos 45{\cdot}\cos\beta + sen45{\cdot}sen\beta))}{\cos^2\beta - sen^2\beta}$$

Operando, llegamos a:

$$= \frac{2(\cos 45{\cdot}\cos\beta - sen45{\cdot}sen\beta){\cdot}(\cos 45{\cdot}\cos\beta + sen45{\cdot}sen\beta)}{\cos^2\beta - sen^2\beta} = 2\frac{\cos^2 45{\cdot}\cos^2\beta - sen^2 45{\cdot}sen^2\beta}{\cos^2\beta - sen^2\beta}$$

Sustituyendo el seno de 45 y el coseno de 45 por su valor, tenemos:

$$= 2\frac{\cos^2 45{\cdot}\cos^2\beta - sen^2 45{\cdot}sen^2\beta}{\cos^2\beta - sen^2\beta} = 2\frac{\frac{1}{2}\cos^2\beta - \frac{1}{2}sen^2\beta}{\cos^2\beta - sen^2\beta} = 2{\cdot}\frac{1}{2}{\cdot}\frac{\cos^2\beta - sen^2\beta}{\cos^2\beta - sen^2\beta} = 1$$

5.- Sabemos que $\|\vec{a}\| = 3$ **y que** $\vec{a} = 2{\cdot}\vec{b}$ **Calcula el producto escalar** $\vec{a}{\cdot}\vec{b}$

Sea el vector $\vec{b} = (x,y)$, entonces el vector $\vec{a}$ será: $\vec{a} = 2{\cdot}\vec{b} = (2x,2y)$. Si calculamos el módulo de cada uno de ellos, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\left\|\vec{b}\right\| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{4x^2+4y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2} = 2\cdot\left\|\vec{b}\right\|\end{array}\right\}$$ de aquí, $\left\|\vec{b}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\vec{a}\right\| = \frac{3}{2}$, pues bien, utilizando la fórmula del producto escalar, y sabiendo que el ángulo que forman los dos vectores es cero, porque son proporcionales o paralelos:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|\cdot\cos\alpha = 3\cdot\frac{3}{2}\cdot\cos 0 = 3\cdot\frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{9}{2}$$

6.- Estudia la posición relativa de las rectas $r:\begin{cases} x-1=3\lambda \\ y+2=-\lambda \end{cases}$ y $s: 2x-y=-1$

a) Y en caso de que sean secantes, calcula el punto de corte entre ellas y el ángulo que forman.
b) Y en el caso de que sean paralelas, calcula la distancia entre ellas.

Si obtenemos el vector director de cada una de ellas: $\left.\begin{array}{l}\vec{r}=(3,-1) \\ \vec{s}=(1,2)\end{array}\right\}$ vemos que no son proporcionales, $\vec{r} \neq k\cdot\vec{s}, \forall k \in \mathbb{R}$ y por tanto no son paralelos.

Si los vectores no son paralelos, las rectas tampoco lo serán, y por tanto son secantes. Trabajando con los vectores, también podemos decir que son secantes, pero no son perpendiculares porque su producto escalar es distinto de cero: $\vec{r}\cdot\vec{s} = 3\cdot 1 - 1\cdot 2 = 1 \neq 0$.

El ángulo entre dos rectas, viene dado por:

$$\alpha = arc\cos\left(\frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|}\right) = arc\cos\left(\frac{1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}\right) = arc\cos\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right) = 81°52'63''$$

Por tanto, éste es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y por tanto el ángulo que forman las rectas r y s

Para calcular el punto de corte de ambas rectas, sustituimos una en la otra:

$$2(1+3\lambda)-(-2-\lambda)=-1 \quad \rightarrow \quad 2+6\lambda+2+\lambda=-1 \quad \rightarrow \quad \lambda=\frac{-5}{7}$$

Y con esto, y sustituyendo en la ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 1+3\lambda = \frac{-8}{7} \\ y = -2-\lambda = \frac{-9}{7} \end{cases}$ obtenemos el punto: $\left(\frac{-8}{7},\frac{-9}{7}\right)$

7.- Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica: $\cos(2x)+3\cdot sen(x)=2$

Escribimos todo en función del mismo ángulo, utilizando el coseno del ángulo doble: $\cos(2A)=\cos^2 A - sen^2 A$

$$\cos^2 x - sen^2 x + 3\cdot sen\, x = 2$$

Escribimos todo en función de una misma razón trigonométrica: $\cos^2 x = 1 - sen^2 x$

$$1 - sen^2 x - sen^2 x + 3\cdot sen\, x = 2$$

Agrupamos:

$$-2sen^2 x + 3\cdot sen\, x - 1 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$sen(x) = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4\cdot(-2)\cdot(-1)}}{-4} = \frac{-3\pm 1}{-4}\left\{\begin{array}{l} sen(x_1)=1 \quad \rightarrow \quad x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ sen(x_2)=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \end{cases}\end{array}\right.$$

Por tanto las soluciones en la primera vuelta son 30°, 90° y 150°

8.- *Sea la recta r: 3x+2y-7=0, encuentra otra recta s, paralela a r y que esté a una distancia* $2\sqrt{10}$ *¿es única la solución?*

Una recta paralela a r es la recta: 3x+2y+k=0

Si la distancia entre ambas rectas es de $2\sqrt{10}$, como la distancia entre dos rectas paralelas se calcula mediante:

$$d(r,s)=\frac{|C-C'|}{\|\vec{r}\|}=2\sqrt{10} \qquad \frac{|k+7|}{\sqrt{13}}=2\sqrt{10}$$

Operando, tenemos que:

$$|k+7|=2\sqrt{10}\cdot\sqrt{13}=2\sqrt{130}$$

Despejando k, y teniendo en cuenta el valor absoluto, tenemos:

$$|k+7|=2\sqrt{130} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} k+7=2\sqrt{130} & \rightarrow \quad k=-7+2\sqrt{130} \\ -k-7=2\sqrt{130} & \rightarrow \quad k=-7-2\sqrt{130} \end{cases}$$

Dos soluciones, por tanto existen dos rectas, paralelas a r que están a distancia $2\sqrt{10}$ ***, una que está por encima, y otra por debajo.***

$$r':3x+2y-7+2\sqrt{130}=0$$
$$r'':3x+2y-7-2\sqrt{130}=0$$

9.- *En un triángulo isósceles, el lado desigual está sobre los puntos (2, 2) y (5, 3). Calcula el tercer vértice sabiendo que se encuentra sobre la recta r de ecuación: x + 1 = y*

Si el lado desigual se encuentra sobre los puntos A(2,2) y B(5,3), quiere decir que estos, A y B, son dos de los vértices del triángulo. Estos dos puntos estarán a la misma distancia del tercer vértice, puesto que el enunciado dice que el triángulo es isósceles.

Como el tercer vértice, C, está sobre la recta r: x-y+1=0, sus coordenadas genéricas serán: $C(x,x+1)$, así que los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ serán:

$$\overrightarrow{AC}=(x-2,x+1-2)=(x-2,x-1)$$
$$\overrightarrow{BC}=(x-5,x+1-3)=(x-5,x-2)$$

Si calculamos el módulo de cada uno de ellos y los igualamos (puesto que se corresponden con los lados iguales) tenemos:

$$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(x-2)^2+(x-1)^2}=\sqrt{2x^2-6x+5}$$
$$\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{(x-5)^2+(x-2)^2}=\sqrt{2x^2-14x+29}$$

$$\sqrt{2x^2-6x+5}=\sqrt{2x^2-14x+29} \quad\rightarrow\quad 2x^2-6x+5=2x^2-14x+29 \quad\rightarrow\quad -6x+5=-14x+29$$

Y despejando x, tenemos:

$$-6x+14x=29-5 \quad\rightarrow\quad 8x=24 \quad\rightarrow\quad x=3$$

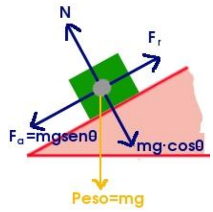
Por tanto el vértice C se corresponde con: $C(x,x+1)=(3,4)$

10.- La segunda ley de Newton dice: "La resultante de todas las fuerzas exteriores aplicadas sobre un cuerpo es proporcional al producto de su masa por su aceleración $\left(\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}\right)$ ". Pues bien, según esto, ¿Con qué aceleración se mueve un objeto dejado en reposo sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 10° con la horizontal si el coeficiente de rozamiento entre el plano y el objeto es 0,5?

Sea un cuerpo de masa m que se desplaza por un plano inclinado, la fuerza que favorece el movimiento es la componente del peso en la dirección del plano, mientras que la componente perpendicular al mismo se equilibra con la reacción normal:

$$N = m \cdot g \cdot Cos\alpha$$

La fuerza efectiva valdrá:



$$F_e = F_a - F_r = F_a - \mu_d \cdot N = mg \cdot Sen\alpha - \mu_d \cdot m \cdot g \cdot Cos\alpha$$
$$F_e = mg\left[Sen\alpha - \mu_d \cdot Cos\alpha\right]$$

Y aplicando la ecuación fundamental de la dinámica, F=m·a, obtenemos:

$$mg(Sen\alpha - \mu_d \cdot Cos\alpha) = m \cdot a$$

De donde:

$$\boxed{a = g\left(Sen\alpha - \mu_d \cdot Cos\alpha\right)}$$

Si sustituimos los valores del problema, obtenemos: $a = 9{,}81 m \cdot s^{-2}(sen 10 - 0{,}5 \cos 10) = -3{,}13\ m \cdot s^{-2}$.

Por tanto el cuerpo ***no se mueve***, al ser la fuerza de rozamiento mayor que la componente x del peso.