Solución Examen Trigonometria

1.- *Si* $\cos(80°) = \frac{1}{5}$, *hallar el seno, el coseno y la tangente del ángulo de 40° . (1p)*

Sabemos que 40 es la mitad de 80, así que utilizaremos las razones trigonométricas del ángulo mitad:

$$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad \rightarrow \quad sen(40) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 40}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{5}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{4}{5}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{4}{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \rightarrow \quad sen(40) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 40}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{1}{5}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{6}{5}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{6}{10}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{60}}{10} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\frac{\sqrt{15}}{5}} = \frac{\sqrt{150}}{25} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Reseñar que en las fórmulas del ángulo mitad aparece el doble signo ($\pm$), y elegimos las raíces positivas porque el ángulo de 40 está en el primer cuadrante, y en éste todas las razones trigonométricas son todas positivas.

2.- Enuncie y demuestre el teorema del coseno. (2p) (ver libro)

Ver Libro

3.- Demuestre la siguiente expresión: $\frac{sen(x-y)-sen(x+y)}{\cos(x+y)-\cos(x-y)} = \cot(x)$ (1p)

Si desarrollamos las razones trigonométricas de la suma y resta de ángulos, obtenemos:

$$\frac{sen(x-y)-sen(x+y)}{\cos(x+y)-\cos(x-y)} = \frac{sen(x)\cdot\cos(y)-\cos(x)\cdot sen(y)-sen(x)\cdot\cos(y)-\cos(x)\cdot sen(y)}{\cos(x)\cdot\cos(y)-sen(x)\cdot sen(y)-\cos(x)\cdot\cos(y)-sen(x)\cdot sen(y)} =$$

Operando después y simplificando llegamos a:

$$= \frac{\cancel{-2}\cos(x)\cdot\cancel{sen(y)}}{\cancel{-2}sen(x)\cdot\cancel{sen(y)}} = \frac{\cos x}{senx} = \cot(x)$$

Que es la expresión que buscábamos.

4.- Simplifique todo lo que pueda la siguiente expresión trigonométrica: (1p)

$$\frac{\cos(2a-b)-\cos(2a+b)}{sen(2a+b)+sen(2a-b)}$$

Al igual que en el ejercicio anterior, si desarrollamos las razones trigonométricas de suma y resta de ángulos, obtenemos:

$$\frac{\cos(2a-b)-\cos(2a+b)}{sen(2a+b)+sen(2a-b)} = \frac{\cos(2a)\cdot\cos(b)+sen(2a)\cdot sen(b)-\cos(2a)\cdot\cos(b)+sen(2a)\cdot sen(b)}{sen(2a)\cdot\cos(b)+sen(b)\cdot\cos(2a)+sen(2a)\cdot\cos(b)-\cos(2a)\cdot sen(b)} =$$

Que simplificando llegamos a:

$$= \frac{2sen(2a)\cdot sen(b)}{2sen(2a)\cdot\cos(b)} = \frac{2\cancel{sen(2a)}\cdot sen(b)}{2\cancel{sen(2a)}\cdot\cos(b)} = \tan(b)$$

5.- De un triángulo sabemos que $\dfrac{sen(B+A)}{sen(B-A)}=1$. Demuestre que se trata de un triángulo rectángulo en B. (1p)

Operando tenemos que:
$sen(B+A)=sen(B-A)$, expresión en la que, si los senos son iguales, pueden ocurrir dos cosas; o los ángulos son iguales, o los ángulos suman 180°

$$\begin{cases} B+A=B-A & \rightarrow \quad 2A=0 \quad \rightarrow \quad A=0 \\ B+A+B-A=180 & \rightarrow \quad 2B=180 \quad \rightarrow \quad B=90° \end{cases}$$

Por tanto el triángulo es rectángulo en B.

Otra forma de demostrarlo, sería por ***reducción al absurdo***. (Suponemos que es falso y llegamos a una contradicción)

Supongamos que no es rectángulo en B; entonces: $sen(B+A)=sen(B-A)$

Si desarrollamos ambas sumas. $senB\cdot\cos A+\cos B\cdot senA=SenB\cdot\cos A-\mathrm{Cos}\,B\cdot senA$

Y pasamos todo al primer miembro: $senB\cdot\cos A+\cos B\cdot senA-SenB\cdot\cos A+\mathrm{Cos}\,B\cdot senA=0$

Simplificando, llegamos a: $2\cos B\cdot senA=0$ *de donde* $\begin{cases} SenA=0 & \rightarrow \quad A=0 \\ \mathrm{Cos}\,B=0 & \rightarrow \quad B=90° \end{cases}$

O sea, que llegamos a una contradicción, si suponemos que B no es recto, no puede salir 90.

6.- Calcule todos los ángulos comprendidos entre 0° y 360° que verifiquen: (1p)

$$sen(x)+\frac{4}{3}\cos^2(x)=\frac{3}{2}$$

Escribimos la ecuación en función de una sola razón trigonométrica:

$$sen(x)+\frac{4}{3}\cos^2(x)=\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad sen(x)+\frac{4}{3}\left(1-\cos^2(x)\right)=\frac{3}{2}$$

Operando un poco,

$$sen(x)+\frac{4}{3}\left(1-sen^2(x)\right)=\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad -\frac{4}{3}sen^2(x)+sen(x)+\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\right)=0 \quad \rightarrow \quad -\frac{4}{3}sen^2(x)+sen(x)-\frac{1}{6}=0$$

llegamos a una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

$$8sen^2(x)-6sen(x)+1=0 \quad \rightarrow \quad sen(x)=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{16}\begin{cases} sen(x)=\dfrac{1}{2} & \rightarrow \quad x=\begin{cases}30°\\150°\end{cases} \\ sen(x)=\dfrac{1}{4} & \rightarrow \quad x=\begin{cases}14°28'39''\\106°31'21''\end{cases} \end{cases}$$

7.- Sabiendo que α es un ángulo del primer cuadrante y que sen(α) =h, calcule en función de h el valor de cotg(180+α). (1p)

Si desarrollamos

$$\cot(180+\alpha)=\frac{\cos(180+\alpha)}{sen(180+\alpha)}=\frac{\cos180\cdot\cos\alpha-sen180\cdot sen\alpha}{sen180\cdot\cos\alpha+\cos180\cdot sen\alpha}=\frac{-\cos\alpha}{-sen\alpha}=\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$$

Como nos dicen que $sen\alpha=h$, utilizando la identidad fundamental de la trigonometría:

$$h^2 + \cos^2 \alpha = 1 \qquad \rightarrow \qquad \cos \alpha = \pm\sqrt{1-h^2}$$

Como el ángulo es del primer cuadrante, tenemos que $\cos \alpha = \sqrt{1-h^2}$, y por tanto si sustituimos en la igualdad anterior, tenemos:

$$\cot(180+\alpha) = \frac{\cos \alpha}{sen\alpha} = \frac{\sqrt{1-h^2}}{h}$$

8.- Resuelva el triángulo ABC del cual se conoce: a=15 cm, b=12 cm y A-B=15°. (1p)

Si A-B=15, entonces A=B+15. Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} \qquad \rightarrow \qquad \frac{15}{sen(B+15)} = \frac{12}{senB} \qquad \rightarrow \qquad 15 \cdot senB = 12 \cdot sen(B+15)$$

Desarrollando el seno de la suma:

$$15 \cdot senB = 12 \cdot sen(B+15) \qquad \rightarrow \qquad 15 \cdot senB = 12 \cdot \left(senB \cdot \cos 15 + \cos B \cdot sen15\right)$$

Y operando para despejar cos B:

$$15 \cdot senB - 12 senB \cdot \cos 15 = 12 \cos B \cdot sen15 \qquad \rightarrow \qquad \left(15 - 12\cos 15\right) \cdot senB = 12 \cos B \cdot sen15$$

Obtenemos:

$$\frac{\left(15-12\cos 15\right)}{12 \cdot sen15} \cdot senB = \cos B$$

Si cambiamos el cos B por $\cos B = \sqrt{1-sen^2 B}$, utilizando la identidad fundamental de la trigonometría:

$$\frac{\left(15-12\cos 15\right)}{12 \cdot sen15} \cdot senB = \sqrt{1-sen^2 B}$$

Elevando al cuadrado y operando, llegamos a:

$$\left(\frac{15-12\cos 15}{12 \cdot sen15}\right)^2 \cdot sen^2 B = 1 - sen^2 B \qquad \rightarrow \qquad \left[\left(\frac{15-12\cos 15}{12 \cdot sen15}\right)^2 + 1\right] \cdot sen^2 B = 1$$

Y despejando el seno de B:

$$\left[\left(\frac{15-12\cos 15}{12 \cdot sen15}\right)^2 + 1\right] \cdot sen^2 B = 1 \qquad \rightarrow \qquad senB = \sqrt{\frac{1}{\left[\left(\frac{15-12\cos 15}{12 \cdot sen15}\right)^2 + 1\right]}}$$

Por tanto el ángulo B es:

$$B = arcsen\left(\sqrt{\frac{1}{\left[\left(\frac{15-12\cos 15}{12 \cdot sen15}\right)^2 + 1\right]}}\right) = 42°20'12''$$

Una vez calculado el ángulo B, A viene dado por $A = B + 15 = 42°20'12'' + 15° = 57°20'12''$

Y una vez conocidos A y B, calculamos C, mediante: $C = 180 - (A+B) = 80°19'37''$

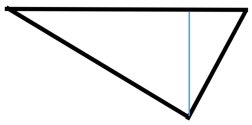
Hecho esto, utilizando el teorema del seno, obtenemos el valor del lado c:

$$\frac{a}{senA}=\frac{c}{senC} \quad \rightarrow \quad c=\frac{a\cdot senC}{senA}=\frac{15\cdot sen80°19'37"}{sen57°20'12"}=17,6\ cm$$

9.- En el momento de marcar Brasil el último gol a Alemania, en la final de la Copa del Mundo de Corea-Japón, Ronaldo estaba situado a 15 m del poste izquierdo y a 14 m del derecho y veía la portería bajo un ángulo de 30°. Calcula la distancia del jugador a la línea de gol. (1p)

Como tenemos dos lados y el ángulo que forman, tenemos que utilizar el teorema del coseno:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C \quad \rightarrow \quad c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos C}=\sqrt{15^2+14^2-2\cdot15\cdot14\cdot\cos 30}=7,57m$$



Conocidos los tres lados, utilizando el teorema del seno, calculamos el ángulo A

$$\frac{c}{senC}=\frac{a}{senA} \quad \rightarrow \quad A=arcsen\left(\frac{a\cdot senC}{c}\right)=arcsen\left(\frac{15\cdot sen30}{7,57}\right)=82°12'8"$$

Y ahora fijándonos en el triángulo rectángulo de la derecha:

$$senA=\frac{h}{b} \quad \rightarrow \quad h=b\cdot senA=14\cdot sen82°12'8"=13,87\ m$$

Por tanto Ronaldo está a 13,87 de la línea de Gol.

10.- Resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases} senx+seny=\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ sen(x-y)=1 \end{cases}$

De la segunda ecuación, obtenemos: $x-y=90°+360K \quad \rightarrow \quad x=90+y$

Que sustituyendo en la primera ecuación nos da:

$$sen(90+y)+sen\ y=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Usando la fórmula de transformación se sumas en productos:

$$senA+senB=2\cdot sen\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Llegamos a:

$$sen(90+y)+sen\ y=\frac{\sqrt{6}}{2} \quad \rightarrow \quad 2\cdot sen(45+y)\cdot\cos(45)=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Y de aquí:

$$sen(45+y)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2} \quad \rightarrow \quad sen(45+y)=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad 45+y=60 \quad \rightarrow \quad y=15°$$

Y como x=90+15°

Así que la solución del sistema es: $\begin{cases} x=105° \\ y=15° \end{cases}$