Solución Examen Final de la 3ª Evaluación de 1º Bcto.

1.- Sea la función f definida por $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$ (2 puntos)

a) Estudia las asíntotas de la gráfica de la función f.

b) Halla los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

a) El dominio de la función es $Dom(f)=\mathbb{R}-\{1\}$, por tanto vamos a empezar estudiando las asíntotas verticales:

La función f, presenta una asíntota vertical en un punto x_o, si ocurre: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=\pm\infty$

$$\lim_{x\to x_o} f(x)=\pm\infty \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^{-x}}{1-x}=\dfrac{e^{-1}}{0^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{e^{-x}}{1-x}=\dfrac{e^{-1}}{0^-}=-\infty \end{cases}$$

Por tanto f tiene una Asíntota Vertical en x=1.

Estudiamos ahora la asíntota horizontal: Una función presenta una asíntota horizontal en y=k, si ocurre: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=k \quad \forall k\in\mathbb{R}$

Por tanto: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{1-x}=\dfrac{0}{-\infty}=0 \quad\to$ Asíntota Horizontal y=0 cuando $x\to+\infty$

Y $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{1-x}=\dfrac{+\infty}{+\infty}\overset{L'Hopital}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-e^{-x}}{-1}=+\infty \quad\to$ Estudiamos en este caso: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ y obtenemos: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{x(1-x)}=\dfrac{+\infty}{+\infty}\overset{L'Hopital}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-e^{-x}}{1-2x}=\dfrac{\infty}{\infty}\overset{L'Hopital}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{-2}=+\infty \quad\to$ Por tanto la función presenta una rama parabólica cuando $x\to-\infty$

b) Para la monotonía, utilizamos la derivada de la función y la igualamos a cero:

$$f'(x)=\frac{x\cdot e^{-x}}{(1-x)^2} \quad\to\quad f'(x)=0 \quad\leftrightarrow\quad x\cdot e^{-x}=0 \quad\leftrightarrow\quad x=0$$

Por tanto, si utilizamos la tabla, tenemos:

x	(-∞,0)	(0,1)	(1,+∞)
f'(x)	-	+	+
f(x)	↘	↗	↗

Mín (0,1)

Así que f es creciente en: $(0,1)\cup(1,+\infty)$, f es decreciente en $(-\infty,0)$ y además, la función presenta un mínimo en el punto (0,1)

2.- Sea f la función definida por $f(x)=4-x^2$ (2 puntos)

a) Halla las ecuaciones de la recta normal y de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=2.

b) Determina el punto de la gráfica en el que la recta tangente es perpendicular a la recta $r: x+2y-2=0$

a) Las ecuaciones de la recta normal y de la recta tangente a una gráfica en un punto a, vienen dadas por:

Recta Tangente

$$y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$$

Recta Normal

$$y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}\cdot(x-a)$$

Por tanto, como: f(2)=0; f'(x)=-2x; f'(2)=-4, tenemos:

$$y-0=-4\cdot(x-2) \quad\rightarrow\quad y=8-4x \qquad\qquad y-0=\frac{1}{4}\cdot(x-2) \quad\rightarrow\quad x-4y-2=0$$

b) En el punto de la gráfica en el que la recta tg es perpendicular a la recta dada, como la pendiente de la tangente es: m=-1/2, la pendiente de la perpendicular será: $m_{\perp}=2$

Por tanto, la derivada en dicho punto ha de ser -2, derivamos la función:

$$f'(x)=-2x \quad\rightarrow\quad f'(x)=2 \quad\rightarrow\quad -2x=2 \quad\rightarrow\quad x=-1$$

Así que calculamos f(-1) y ya tenemos el punto pedido: (-1,3)

3.- Sea f la función definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Calcula los valores de a, b, c y d sabiendo que f verifica: (2 puntos)

- ✓ El punto (0,1) es un punto de inflexión de la gráfica de f.
- ✓ f tiene un mínimo local en el punto de abscisa x=1.
- ✓ La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=2 tiene pendiente 1.

Si el punto (0,1) es un punto de inflexión, tenemos que: $\begin{cases} f(0)=1 \\ f''(0)=0 \end{cases}$

Si tiene un mínimo en x=1, tenemos que: $f'(1)=0$

Y si la recta tangente en x=2 tiene pendiente 1, tenemos: $f'(2)=1$

Agrupando todas estas ecuaciones, nos dará un sistema, cuyas soluciones a, b, c y d son los coeficientes de f(x).

$$\begin{array}{lllll} f(0)=1 & \rightarrow & d=1 & & \\ f''(0)=0 & \rightarrow & 2b=0 & \rightarrow & b=0 \\ f'(1)=0 & \rightarrow & 3a+2b+c=0 & \rightarrow & 3a+c=0 \\ f'(2)=0 & \rightarrow & 12a+4b+c=1 & \rightarrow & 12a+c=1 \end{array}$$

Resolviendo:

Solución Examen Final de la 3ª Evaluación de 1º Bcto.

$$a=\frac{1}{9} \qquad b=0 \qquad c=-\frac{1}{3} \qquad d=1$$

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x+1=0$$

4.- Calcule las derivadas siguientes: (1 punto)

$a)\ f(x)=e^{3x}\cdot\ln\left(2x-5\right)$ $\qquad b)\ g(x)=\dfrac{3^{2x}}{x^2-1}$ $\qquad c)\ h(x)=\left(3x^2+5x-1\right)^6+x^2-\ln x$

$$a) f'(x)=3\cdot e^{3x}\cdot\ln\left(2x-5\right)+e^{3x}\cdot\frac{2}{2x-5}$$

$$g'(x)=\frac{2\cdot 3^{2x}\cdot\ln 3(x^2-1)-2x\cdot 3^{2x}}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$h'(x)=6\left(3x^2+5x-1\right)^5\cdot\left(6x+5\right)+2x-\frac{1}{x}$$

5.- Determina a y b para que el siguiente límite exista y sea finito. Además calcúlalo. (1p)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)+ax+bx^2}{sen^3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)+ax+bx^2}{sen^3x}=\frac{0}{0}\overset{L'Hopital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}+a+2bx}{3\cdot sen^2x\cdot\cos x}$$

Para que podamos volver a utilizar la regla de L'Hopital, tiene que ocurrir que 1+a=0, por tanto a debe de ser a=-1.

Y ya estamos en condiciones de volver a aplicar L'Hopital:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1+2bx}{3\cdot sen^2x\cdot\cos x}=\frac{0}{0}\overset{L'Hopital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1+2bx}{3\cdot sen^2x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{\left(1+x\right)^2}+2b}{6\cdot senx\cdot\cos^2x-3sen^3x}$$

De igual manera, para que sea finito, $2b\neq 1 \quad\rightarrow\quad b=\dfrac{1}{2}$

Así que de esta forma volvemos a estar en condiciones de aplicar L'Hopital:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{\left(1+x\right)^2}+1}{6\cdot senx\cdot\cos^2x-3sen^3x}=\frac{0}{0}\overset{L'Hopital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\left(1+x\right)^3}}{6\cdot\cos^3x-21sen^2x\cdot\cos x}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

6.- Estudia y representa la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$ (2 puntos)

1.- Dominio:

La función es un cociente de polinomios, por tanto su dominio es el conjunto de los números reales, menos los valores que anulen el denominador.

$$x+2=0 \quad \rightarrow \quad x=-2 \quad \rightarrow \quad Dom(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$$

2.- Simetrías:

Para ver si una función es par o impar, calculamos f(-x) y vemos que ocurre:

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{(-x)+2}=\dfrac{x^2}{-x+2}$ ➔ Por tanto la función no es impar, ni impar. ➔ No es Simétrica.

3.- Periodicidad:

La función $f(x)$ no es periódica, porque no es composición de funciones trigonométricas.

4.- Puntos de discontinuidad:

Como $f(x)$ es un cociente de polinomios, y los polinomios son siempre funciones continuas, f(x) es una función continua excepto donde se anule el denominador. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty \end{cases}$

Por tanto, f es continua en todos los puntos de su dominio y en x=-2, la función $f(x)$ presenta una discontinuidad asintótica.

5.- Puntos de corte con los ejes.

Los puntos de corte con los ejes se calculan haciendo f(0) e igualando f(x)=0 y resolviendo la ecuación, por tanto:

Hacemos $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}=0$ ➔ $\dfrac{x^2}{x+2}=0$ ➔ $x^2=0$ ➔ $x=0$

Calculamos $f(0)=0$

Por tanto el punto de corte con el eje X y con el eje Y es el (0,0)

6.- Asíntotas:

Como hemos visto ya, en el apartado de continuidad, $f(x)$ presenta en x=-2 una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$, no presenta asíntotas horizontales, pero si puede presentar alguna asíntota oblicua o rama ya sea hiperbólica o parabólica.

Calculamos $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x^2+2x}=1$

Como es finito, ahora calculamos $\lim\limits_{x\to \pm\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left[\dfrac{x^2}{x+2}-x\right]=\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left[\dfrac{x^2-x^2-2x}{x+2}\right]=-2$

Solución Examen Final de la 3ª Evaluación de 1º Bcto.

Por tanto $f(x)$ presenta una asíntota oblicua en y=x-2

7.- Monotonía y curvatura:

Para ello, lo primero es calcular la derivada de $f(x)$

$f'(x)=\dfrac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$ y la igualamos a cero para calcular los extremos relativos:

$f'(x)=\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}=0 \rightarrow x(x+4)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases}$

Estudiamos ahora el signo de $f'(x)$ para ver los intervalos de monotonía.

Dibujamos una línea recta en la que ponemos los puntos que hacen la derivada 0, los puntos que hacen la función cero, y los puntos donde no es continua.

X	(-∞,-4)	(-4,-2)	(-2,0)	(0,+∞)
f'(x)	+	-	-	+
f(x)	↗	↘	↘	↗
	Max (-4,-8)		Min(0,0)	

$f(x)$ es creciente en el intervalo $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$

$f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-4,-2)\cup(-2,0)$

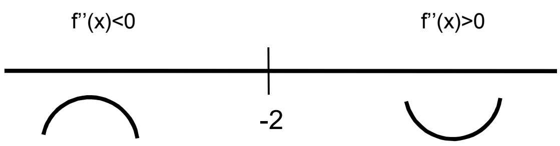
$f(x)$ tiene un máximo en $x=-4$ $\quad f(-4)=-8$ en el punto $(-4,-8)$

$f(x)$ tiene un mínimo en $x=0$ $\quad f(0)=0$ en el punto $(0,0)$

Vamos a calcular ahora los puntos de inflexión, donde la curva cambia de cóncava a convexa. Para ello trabajamos con la segunda derivada. $f''(x)$

$f''(x)=\dfrac{8}{(x+2)^3}$, esta segunda derivada siempre es distinta de cero, luego no hay punto de inflexión

Veamos ahora la curvatura de la función:



Por tanto, la función es cóncava en (-∞,-2) y es convexa en (-2,+∞)

8.- Gráfica de la función:

Con todos los datos que ya tenemos de $f(x)$, lo único que nos falta es representarla.