9 Límite de una función

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El ocho

Sharrif iba sacando los libros [de mi bolsa] y ordenándolos en una pila sobre el escritorio mientras leía cuidadosamente los títulos.

–Juegos matemáticos de ajedrez... ¡ah! ¡*Los números de Fibonacci*! –exclamó, con esa sonrisa que me hacía sentir que tenía algo contra mí. Señalaba el aburrido libro de Nim–. ¿De modo que te interesan las matemáticas? –preguntó, mirándome con intención.

–No mucho –dije, poniéndome en pie y tratando de volver a guardar mis pertenencias en la bolsa. [...]

–¿Qué sabe exactamente sobre los números de Fibonacci? [...]

–Se usan para proyecciones de mercado –murmuré–. [...]

–¿Entonces no conoce al autor? [...] Me refiero a Leonardo Fibonacci. Un italiano nacido en Pisa en el siglo XII, pero educado aquí, en Argel. Era un brillante conocedor de las matemáticas de aquel moro famoso, Al-Kwarizmi, que ha dado su nombre a la palabra «algoritmo». Fibonacci introdujo en Europa la numeración arábiga, que reemplazó a los viejos números romanos...

Maldición. Debí haber comprendido que Nim no iba a darme un libro sólo para que me entretuviera, aun cuando lo hubiera escrito él mismo. [...] Permanecí leyéndolo casi hasta el amanecer y mi decisión había resultado productiva, aunque no sabía con certeza cómo. Al parecer, los números de Fibonacci se usan para algo más que las proyecciones del mercado de valores. La resolución de un problema había llevado a Fibonacci a formar esta interesante sucesión de números empezando por el uno y sumando a cada número al precedente: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... [...] Descubrió que los cocientes entre cada término y el anterior se aproximan al número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y que este número describía también la estructura de todas las cosas naturales que formaban una espiral.

KATHERINE NEVILLE

Los números de Fibonacci aparecen con frecuencia en la naturaleza. Por ejemplo, el número de espirales de los girasoles o de las piñas es siempre uno de estos números.
Además, como se dice en esta novela, al dividir cada término de la sucesión de Fibonacci entre el anterior, se obtiene una nueva sucesión de números que se aproximan cada vez más al número de oro: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Aunque no la descubrió Fibonacci, esta propiedad es verdadera. Compruébala tú mismo.

La sucesión que se obtiene al dividir cada término de la sucesión de Fibonacci entre el anterior es:

$a_1 = 1$ $\qquad a_3 = \frac{3}{2} = 1{,}5$ $\qquad a_5 = \frac{8}{5} = 1{,}6$ $\qquad a_7 = \frac{21}{13} = 1{,}615\ldots$

$a_2 = 2$ $\qquad a_4 = \frac{5}{3} = 1{,}\widehat{6}$ $\qquad a_6 = \frac{13}{8} = 1{,}625$ $\qquad a_8 = \frac{34}{21} = 1{,}619\ldots$

Estos valores se aproximan a: $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Escribe los términos 14, 123 y 2.345 de estas sucesiones.

a) $a_n = n^2 - 3n + 2$

b) $a_n = \dfrac{n+4}{2n+1}$

a) $a_{14} = 156$ $\quad a_{123} = 14.762$ $\quad a_{2.345} = 5.491.992$

b) $a_{14} = \dfrac{18}{29}$ $\quad a_{123} = \dfrac{127}{247}$ $\quad a_{2.345} = \dfrac{2.349}{4.691}$

002 Factoriza este polinomio: $P(x) = 7x^5 + 14x^4 - 35x^3 - 42x^2$

$P(x) = 7x^2(x-2)(x+1)(x+3)$

003 Simplifica estas fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x(x+1)}$

b) $\dfrac{x^2(x^2-4)}{x(x-2)}$

c) $\dfrac{y^2(x^2 - 4x + 4)}{x(x-2)}$

d) $\dfrac{(x^2-9)(y^2-16)}{xy(2x-6)(y+4)^2}$

a) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x(x+1)} = \dfrac{(x+1)^2}{x(x+1)} = \dfrac{x+1}{x}$

b) $\dfrac{x^2(x^2-4)}{x(x-2)} = \dfrac{x^2(x+2)(x-2)}{x(x-2)} = x(x+2)$

c) $\dfrac{y^2(x^2-4x+4)}{x(x-2)} = \dfrac{y^2(x-2)^2}{x(x-2)} = \dfrac{y^2(x-2)}{x}$

d) $\dfrac{(x^2-9)(y^2-16)}{xy(2x-6)(y+4)^2} = \dfrac{(x+3)(x-3)(y+4)(y-4)}{2xy(x-3)(y+4)^2} = \dfrac{(x+3)(y-4)}{2xy(y+4)}$

004 Resuelve estas operaciones y simplifica el resultado.

a) $(x+1) - \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x-1}$

b) $(2x-2) - \dfrac{x-1}{3x}$

a) $(x+1) - \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x-1} = \dfrac{x^2 - 1 - x^2 + 3x - 1}{x-1} = \dfrac{3x-2}{x-1}$

b) $(2x-2) - \dfrac{x-1}{3x} = \dfrac{6x^2 - 6x - x + 1}{3x} = \dfrac{6x^2 - 7x + 1}{3x}$

ACTIVIDADES

001 Obtén el término general de estas sucesiones.

a) $\dfrac{3}{5}, \dfrac{7}{15}, \dfrac{11}{45}, \dots$

b) $\dfrac{3}{1}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{-1}{9}, \dfrac{-3}{16}, \dots$

a) $a_n = \dfrac{4n-1}{5 \cdot 3^{n-1}}$

b) $a_n = \dfrac{-2n+5}{n^2}$

Límite de una función

002 Con tu calculadora, halla los cinco primeros términos de la sucesión recurrente $a_n = \dfrac{a_{n-1}+3}{a_{n-1}+1}$, siendo $a_1 = 1$, y determina el número al que se aproxima.

$a_1 = 1 \qquad a_2 = 2 \qquad a_3 = \dfrac{5}{3} = 1,\widehat{6} \qquad a_4 = \dfrac{7}{4} = 1,75 \qquad a_5 = \dfrac{19}{11} = 1,\widehat{72}$

Los términos de la sucesión se aproximan a: $\sqrt{3} = 1,732\ldots$

003 Con ayuda de tu calculadora, halla el límite de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = (-1)^{2n+4}$ b) $a_n = n^2$ c) $a_n = n^2 - n^3$ d) $a_n = 0,2^n$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

004 Escribe sucesiones de números reales que cumplan que su límite, cuando n tiende a infinito, es:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ no existe

Respuesta abierta.

a) $a_n = \dfrac{3n}{n+1}$ b) $a_n = 4 - n$ c) $a_n = n^2 + 3$ d) $a_n = (-1)^{n+1}$

005 Calcula estos límites de sucesiones.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^4}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} 0,5^n$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 = +\infty$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^4} = +\infty$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} 0,5^n = 0$

006 Halla los límites de las sucesiones cuyos términos generales son los siguientes.

a) $\dfrac{8n}{2n^2+3n-1}$ b) $\dfrac{(n-1)^{10}}{(n+2)^{10}}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n}{2n^2+3n-1} = 0$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)^{10}}{(n+2)^{10}} = 1$

007 Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2-1}{n^3} \cdot \dfrac{4n^4}{2n^4+3}\right)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{3n^2+1}{n^2+n+2}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \dfrac{n^2+7}{2n}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n-1} - \dfrac{n-1}{n+1}\right)$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2-1}{n^3} \cdot \dfrac{4n^4}{2n^4+3}\right) = 0$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{3n^2+1}{n^2+n+2}} = \sqrt{3}$

b) $\lim \ln \dfrac{n^2+7}{2n} = +\infty$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n-1} - \dfrac{n-1}{n+1}\right) = 0$

008 Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^4+1}{2n^4+1}+\dfrac{-n^3}{3n^3+n+1}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{2n^3+1}{2n^3+n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} 9^{\frac{n^2+1}{2n^2}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}1^{\frac{n+1}{n^2}}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^4+1}{2n^4+1}+\dfrac{-n^3}{3n^3+n+1}\right)=\dfrac{1}{6}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{2n^3+1}{2n^3+n}=0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} 9^{\frac{n^2+1}{2n^2}}=3$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}1^{\frac{n+1}{n^2}}=1$

009 Explica por qué no son indeterminaciones.

a) $\infty\cdot\infty$ b) $\dfrac{0}{\infty}$ c) $\dfrac{\infty}{0}$ d) ∞^1

a) El producto de valores muy grandes resulta un valor aún más grande.
b) Al dividir cero entre cualquier número distinto de él, el resultado es cero.
c) El cociente de un valor muy grande entre un número muy próximo a cero es un valor aún más grande.
d) Cualquier número elevado a uno es el mismo número.

010 Pon ejemplos de límites que produzcan indeterminaciones de los tipos.

a) $0\cdot\infty$ b) 1^∞ c) ∞^0 d) 0^0

Respuesta abierta.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\ln n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{2n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-4)^{\frac{1}{n}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

011 Calcula los siguientes límites, resolviendo las indeterminaciones que puedan presentar.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sqrt{n+1}}{2n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{n}\to\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{n}=0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sqrt{n+1}}{2n}\to\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sqrt{n+1}}{2n}=\dfrac{1}{2}$

012 ¿Presentan indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ estas sucesiones? En caso afirmativo, halla el límite.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5-n^2}}{n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{5-n^2}}{n}$

a) No es una indeterminación, porque la raíz cuadrada no está definida para valores grandes de n.

b) Es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{5-n^2}}{n} = 0$

013 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+2n+1}{2n^2-1} - \frac{n^2}{n-1}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^4}{n^2+1} + \frac{-n^3+2}{n}\right)$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+2n+1}{2n^2-1} - \frac{n^2}{n-1}\right) \to \infty - \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+2n+1}{2n^2-1} - \frac{n^2}{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^4-n^3+3n^2-n-1}{2n^3-2n^2-n+1} = -\infty$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^4}{n^2+1} + \frac{-n^3+2}{n}\right) \to \infty - \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4}{n^2+1} + \frac{-n^3+2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^3+2n^2+2}{n^3+n} = -1$$

014 Halla estos límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-4} - \sqrt{n^2-3n}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2n - \sqrt{n^2+5}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+7} + \sqrt{3n^2+n}\right)$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-4} - \sqrt{n^2-3n}\right) \to \infty - \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-4} - \sqrt{n^2-3n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-4}{\sqrt{n^2-4} + \sqrt{n^2-3n}} = \frac{3}{2}$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2n - \sqrt{n^2+5}\right) \to \infty - \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(2n - \sqrt{n^2+5}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-5}{4n^2+\sqrt{n^2+5}} = \frac{3}{4}$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+7} + \sqrt{3n^2+n}\right) = +\infty$

015 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{5}}$ b) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{3}}$

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{5}} \to 1^{\infty}$ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{5}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}}$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{3}} \to 1^{\infty}$ $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{3}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-\frac{2}{3}} = e^{-\frac{2}{3}}$

016 Halla estos límites.

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n}$ b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{3n-2}$

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n} \to 1^{\infty}$ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}}\right]^{5} = e^{5}$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{3n-2} \to 1^{\infty}$ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{3n-2} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n}{3}}\right)^{\frac{2n}{3}}\right]^{\frac{3(3n-2)}{2n}} = e^{\frac{9}{2}}$

017 Halla los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x-1}\right)^{3}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+1)x^4}{(x^2-6)(2x-1)^3}$

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x-1}\right)^{3} = 2^3 = 8$ b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+1)x^4}{(x^2-6)(2x-1)^3} = \frac{3}{8}$

018 Calcula estos límites.

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{3x+3}\right)^{x}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2+1}\right)^{x}$

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{3x+3}\right)^{x} = 0$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2+1}\right)^{x} \to 1^{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2+1}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+1}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{2x-1}}\right)^{\frac{x^2+1}{2x-1}}\right]^{\frac{x(2x-1)}{x^2+1}} = e^{2}$$

Límite de una función

019 Calcula los límites laterales en el punto $x = 3$ de:

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < 3 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x - 3) = 0 \qquad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x^2 + 1) = 10$$

020 Halla los límites laterales en $x = 0$ de las funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

021 Calcula el límite de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 5}$ en $x = 2$ y en $x = 5$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1$ $\lim\limits_{x \to 5} f(x) \to \dfrac{24}{0}$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$.

022 Razona si existe o no el límite de la función $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 3} + \dfrac{x + 3}{x - 2}$ en $x = 2$, en $x = 3$ y en $x = 4$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \to \dfrac{5}{0}$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{37}{6}$ $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \dfrac{53}{14}$

023 Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2}$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2} \to \dfrac{0}{0}$ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x(x - 1)^2}{(x - 1)(x - 2)} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 8} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8} = \lim_{x \to -2} \frac{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} = -\frac{8}{3}$$

024 Calcula $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x - 1}$ si $m = 2$ y $m = 3$.

¿Puedes determinar el límite para un valor m cualquiera?

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \to \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1}(x + 1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \to \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1}(x^2 + x + 1) = 3$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1}(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1) = m$$

025 Pon un ejemplo de una función que tenga como asíntotas verticales las rectas cuyas ecuaciones son:

$$x = 1 \qquad x = 2 \qquad x = 3$$

Respuesta abierta. Por ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

026 Halla las asíntotas verticales de las funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 4x}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota vertical en } x = 0.$$

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota vertical en } x = 1.$$

c) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota vertical en } x = -2.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota vertical en } x = 2.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota vertical en } x = 0.$$

027 **¿Puede ocurrir que una función tenga una asíntota horizontal y otra oblicua cuando $x \to +\infty$? Razona la respuesta.**

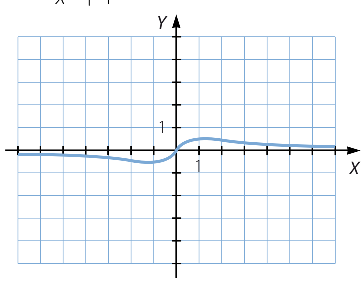
No puede ocurrir, ya que si tiene una asíntota horizontal se verifica que: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$

Y si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, la función no tiene asíntota oblicua.

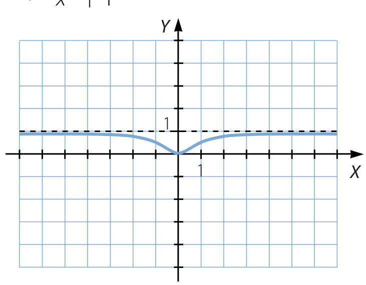
028 **Calcula sus asíntotas y representa las funciones.**

a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

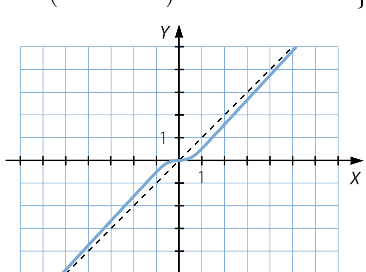
a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \to f(x)$ tiene una asíntota horizontal: $y = 0$.



b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1 \to f(x)$ tiene una asíntota horizontal: $y = 1$.



c) $$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3+x} = 1 \\ \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0 \end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota oblicua: } y = x.$$



029 **Estudia la continuidad de estas funciones.**

a) $f(x) = x^{-2}$ b) $f(x) = \sqrt{x-4}$ c) $f(x) = \ln(1 - x^2)$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) Dom $f = [4, +\infty) \rightarrow f(x)$ es continua en $[4, +\infty)$.

c) Dom $f = (-1, 1) \rightarrow f(x)$ es continua en $(-1, 1)$.

030 **Halla m y n para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.**

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 1 \\ mx + n & \text{si } 1 < x < 3 \\ 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$f(x)$ es continua en $x = 1$ si se verifica que: $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = m + n \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \rightarrow m + n = 2$$

$f(x)$ es continua en $x = 3$ si se verifica que: $f(3) = \lim\limits_{x \to 3} f(x)$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 3m + n \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 4 \\ f(3) = 4 \end{array}\right\} \rightarrow 3m + n = 4$$

$$\left.\begin{array}{r} m + n = 2 \\ 3m + n = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} m = 1 \\ n = 1 \end{array}$$

031 **Estudia la continuidad de la función que asigna a cada número su parte entera.**

$$y = [x]$$

Especifica los tipos de discontinuidades que presenta esta función.

La función no es continua para todos los valores enteros. Todos los números enteros son puntos de discontinuidad inevitable de salto finito.

032 **Estudia la continuidad de estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } 1 < x < 4 \\ 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to 2} f(x) \text{ y } f(x) \text{ no es continua en } x = 2.$$

La discontinuidad es inevitable de salto infinito. La función tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x \to 0} f(x) \text{ y } f(x) \text{ no es continua en } x = 0.$$

La discontinuidad es inevitable de salto infinito. La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1\end{array}\right\} \to \exists \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$$

Como $\exists\ f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$, la función es continua en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 5\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x \to 4} f(x) \text{ y } f(x) \text{ no es continua en } x = 4.$$

La discontinuidad es inevitable de salto finito.

033 **Halla el término general de las sucesiones cuyos primeros términos son:**

a) 1, −1, 1, −1, … **b) 1, 2, 4, 8, …**

a) $a_n = (-1)^{n-1}$

b) $a_n = 2^{n-1}$

034 **Con ayuda de la calculadora, halla el límite de esta sucesión definida de forma recurrente.**

$$a_1 = 1 \qquad a_n = \frac{3a_{n-1} + 2}{4a_{n-1} + 3}$$

$a_1 = 1$

$a_2 = \dfrac{5}{7} = 0{,}71428\ldots$

$a_3 = \dfrac{29}{41} = 0{,}70731\ldots$

$a_4 = \dfrac{169}{239} = 0{,}70711\ldots$

$a_5 = \dfrac{985}{1.393} = 0{,}707106\ldots$

Los términos de la sucesión se aproximan a: $\sqrt{\dfrac{1}{2}} = 0{,}7071\ldots$

035 **Calcula el límite de la siguiente sucesión con ayuda de la tabla.**

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{2n + 1}$$

n	5	50	500	5.000	50.000
a_n	2,18	24,74	249,74	2.499,74	24.999,74

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$

036 Comprueba la igualdad con ayuda de la tabla.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4-6n}{2n+1} = -3$$

n	5	50	500	5.000	50.000
a_n	−2,36	−2,93	−2,993	−2,9993	−2,9999

037 Halla los siguientes límites de sucesiones.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5n^2+n}{n-3} - \frac{n^2+2}{n-1}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-3n+2}{3n} - \frac{n^2}{n+3}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2n - \frac{4n^2-2n+7}{2n+1}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{6n^2+1}{2n+4} - \frac{9n^2-5}{3n+6}\right)$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5n^2+n}{n-3} - \frac{n^2+2}{n-1}\right) \to \infty - \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n^2+n}{n-3} - \frac{n^2+2}{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3-n^2-3n+6}{n^2-4n+3} = +\infty$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-3n+2}{3n} - \frac{n^2}{n+3}\right) \to \infty - \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-3n+2}{3n} - \frac{n^2}{n+3}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n^3-7n+6}{3n^2+9n} = -\infty$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2n - \frac{4n^2-2n+7}{2n+1}\right) \to \infty - \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(2n - \frac{4n^2-2n+7}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-7}{2n+1} = 2$$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{6n^2+1}{2n+4} - \frac{9n^2-5}{3n+6}\right) \to \infty - \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{6n^2+1}{2n+4} - \frac{9n^2-5}{3n+6}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{13}{6(n+2)} = 0$$

038 Obtén los resultados de:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+n-3}}{3n+1}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n^2+3n+2}{\sqrt{n^3+2n^4}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5-2n+6n^3}}{n^2-n-6}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+n-3}}{3n+1} \to \frac{\infty}{\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+n-3}}{3n+1} = \frac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n^2+3n+2}{\sqrt{n^3+2n^4}} \to \frac{\infty}{\infty}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n^2+3n+2}{\sqrt{n^3+2n^4}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5-2n+6n^3}}{n^2-n-6} = 0$

039 Determina los límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+4n-1}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n+31}-3n\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4n-\sqrt{16n^2+2}\right)$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+4n-1}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+4n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n+1}{n+\sqrt{n^2+4n-1}}=-2$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n+31}-3n\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n+31}-3n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-5n^2+n+31}{\sqrt{4n^2+n+31}+3n}=-\infty$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4n-\sqrt{16n^2+2}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(4n-\sqrt{16n^2+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{4n+\sqrt{16n^2+2}}=0$$

040 Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+2x^2-3$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\ln|x|}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x^2+2x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+2x^2-3)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\ln|x|}=0$

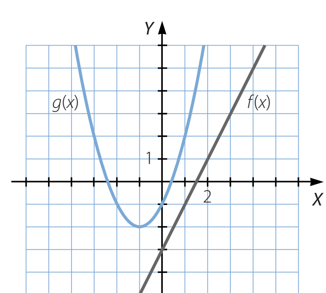
c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x^2+2x+1}=0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$

041 Representa las funciones.

$$f(x)=2x-3 \qquad g(x)=x^2+2x-1$$

A partir de la gráfica, calcula los siguientes límites.



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

042 ●○○ Calcula.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x^2)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4+2x^3+x^2-17x)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^4+8x^3-3x^2+27x-42)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-3x^3+5x^2-6x)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x^2)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4+2x^3+x^2-17x)=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^4+8x^3-3x^2+27x-42)=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-3x^3+5x^2-6x)=-\infty$

043 ●○○ Determina los límites.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(6x^3+x^2)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4+4x^3+7x^2-12x+1)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3-3x^2-16x+3)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(7-12x+3x^2+9x^3)$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(6x^3+x^2)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4+4x^3+7x^2-12x+1)=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3-3x^2-16x+3)=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(7-12x+3x^2+9x^3)=-\infty$

044 ●●○ Halla los límites.

a) $\lim\limits_{t\to+\infty}|-2t^2+5|$

b) $\lim\limits_{t\to-\infty}|t^3+6t+3|$

a) $\lim\limits_{t\to+\infty}|-2t^2+5|=+\infty$

b) $\lim\limits_{t\to-\infty}|t^3+6t+3|=+\infty$

045 ●○○ Calcula los límites, y comprueba el resultado con tu calculadora.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-6x+3}{x^2-3x+5}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-6x^3-x+1}{4x^2+5x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^3+3x-1}{6x^2-3x^3+x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2+x-12}{x^2-x^3+2}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x-6x^4+x^3}{3x+2x^2-3}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-6x+3}{x^2-3x+5}=2$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-6x^3-x+1}{4x^2+5x-2}=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^3+3x-1}{6x^2-3x^3+x}=-\dfrac{5}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2+x-12}{x^2-x^3+2}=0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x-6x^4+x^3}{3x+2x^2-3}=-\infty$

046 Halla estos límites con ayuda de la calculadora, y comprueba el resultado obtenido.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+5x+7}{2x^2+x+1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4+x-2x^3}{2x^2-3x+11}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3-2x^2-10x}{-x^2+2x^3-x+3}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^2+3x+21}{5x^2-4x^3+2x}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+5x+7}{2x^2+x+1} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4+x-2x^3}{2x^2-3x+11} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3-2x^2-10x}{-x^2+2x^3-x+3} = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^2+3x+21}{5x^2-4x^3+2x} = 0$

047 Escribe, en cada caso, un polinomio, $P(x)$, para obtener los resultados indicados cuando calculamos el límite.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{8x^2+6x-1}{P(x)}$$

a) 4 b) 5 c) 0 d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) 1

Respuesta abierta.

a) $P(x) = 2x^2+x+1$

b) $P(x) = \dfrac{8}{5}x^2+x+1$

c) $P(x) = 2x^3+x$

d) $P(x) = x+1$

e) $P(x) = -1$

f) $P(x) = 8x^2$

048 Encuentra el valor de:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+2x} - \sqrt{4x^2-3}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-2x+1} - \sqrt{x^2-2x+4}\right)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+2x} - \sqrt{4x^2-3}\right) \to \infty - \infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+2x} - \sqrt{4x^2-3}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+3}{\sqrt{4x^2+2x}+\sqrt{4x^2-3}} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-2x+1} - \sqrt{x^2-2x+4}\right) \to \infty - \infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-2x+1} - \sqrt{x^2-2x+4}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3}{\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-2x+4}} = 0$

049 Halla los límites.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{5x^2+1}{x} + \dfrac{3-x^2}{x+2}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2-2x} - \dfrac{2x^2+1}{2x-4}\right)$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{5x^2+1}{x} + \dfrac{3-x^2}{x+2}\right) \to \infty - \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{5x^2+1}{x} + \dfrac{3-x^2}{x+2}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^3+10x^2+4x+2}{x^2+2x} = -\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-2x}-\frac{2x^2+1}{2x-4}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-2x}-\frac{2x^2+1}{2x-4}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2x^2-4x}=0$$

050 ○○○ Obtén los resultados de:

a) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-3x+6x^2}}{x^2+2}$ b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^4+5x^3-2x^2}}{3x-1}$

a) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-3x+6x^2}}{x^2+2}=0$ b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^4+5x^3-2x^2}}{3x-1}=-\infty$

051 ○○○ Determina.

a) $\lim_{x\to0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}$ b) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

a) $\lim_{x\to0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}\to\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-x}{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2+\sqrt{x+4}}=-\frac{1}{4}$$

b) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\to\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

052 ○○○ Determina los límites, calculando previamente sus límites laterales.

a) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{2x-5}$ d) $\lim_{x\to-1}\frac{4-2x}{x^2-2x}$

b) $\lim_{x\to3}(1+2x)^x$ e) $\lim_{x\to2}\ln\left(\frac{x+1}{3}\right)$

c) $\lim_{x\to0}\sqrt{\frac{x^2-2x+3}{x+1}}$ f) $\lim_{x\to-3}\frac{5}{\sqrt{4+x}}$

a) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{2x-5}=0$ d) $\lim_{x\to-1}\frac{4-2x}{x^2-2x}=2$

b) $\lim_{x\to3}(1+2x)^x=343$ e) $\lim_{x\to2}\ln\left(\frac{x+1}{3}\right)=0$

c) $\lim_{x\to0}\sqrt{\frac{x^2-2x+3}{x+1}}=\sqrt{3}$ f) $\lim_{x\to-3}\frac{5}{\sqrt{4+x}}=5$

053 Con ayuda de la calculadora, completa la tabla y comprueba que si $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$, entonces $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -0{,}5$.

x	0	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	0	−0,38	−0,48	−0,49	−0,501	−0,51	−0,63

054 Calcula los límites indicados en la función.

$$g(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x < 4 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to -3} g(x)$
b) $\lim\limits_{x \to 6^-} g(x)$
c) $\lim\limits_{x \to 4^-} g(x)$
d) $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$
e) $\lim\limits_{x \to 6^+} g(x)$
f) $\lim\limits_{x \to 4^+} g(x)$

a) $\lim\limits_{x \to -3} g(x) = \lim\limits_{x \to -3} (2x+4) = -2$

b) $\lim\limits_{x \to 6^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 6^-} (x^2 - 2x + 1) = 25$

c) $\lim\limits_{x \to 4^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} (2x+4) = 12$

d) $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = \lim\limits_{x \to 3} (2x+4) = 10$

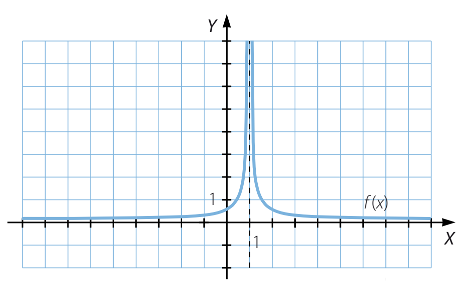
e) $\lim\limits_{x \to 6^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 6^+} (x^2 - 2x + 1) = 25$

f) $\lim\limits_{x \to 4^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} (x^2 - 2x + 1) = 9$

055 Observa las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, y halla los siguientes límites.

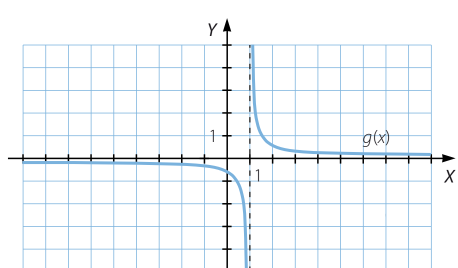
a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$



b) $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$

$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$



a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = +\infty$

056 Determina los límites, y si es preciso, calcula los límites laterales.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+6}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3}{9-x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+2x}{8-2x}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4-2x}{x^2-2x+1}$

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+6}{x-2} \to \dfrac{10}{0}$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+6}{x-2} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+6}{x-2} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3}{9-x^2} \to \dfrac{3}{0}$ $\quad \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{3}{9-x^2} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{3}{9-x^2} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+2x}{8-2x} \to \dfrac{24}{0}$ $\quad \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{x^2+2x}{8-2x} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x^2+2x}{8-2x} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4-2x}{x^2-2x+1} \to \dfrac{2}{0}$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{4-2x}{x^2-2x+1} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4-2x}{x^2-2x+1} = +\infty$

057 Halla los límites.

a) $\lim\limits_{x\to \pi} \cos x$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen} x$

d) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

a) $\lim\limits_{x\to \pi} \cos x = -1$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \to \dfrac{1}{0}$ $\quad \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen} x = -1$

d) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \to -\dfrac{1}{0}$ $\quad \lim\limits_{x\to \pi^-} \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = +\infty$

058 Dada la función $f(x)$ definida a trozos, encuentra los límites.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{9}{x-1} & \text{si } -2 \le x < 3 \\ x^2+6x-32 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

h) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -3$

d) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -3$

e) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -3$

f) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \dfrac{9}{2}$

g) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -5$

h) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ no existe.

059 Calcula los límites laterales y el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)^2} = \lim_{x\to 3} \frac{x+2}{x-3} \to \frac{5}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} = +\infty \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} = +\infty$$

060 Resuelve los límites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{(2x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{3x^2 - 7x + 2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -4} \frac{3x^3 + 12x^2 - x - 4}{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^3 - 9x^2 + 15x + 25}{x^3 - 5x^2 + 2x - 10}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 11x + 14}{4x^2 - 16x + 16}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 + x}$

a) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{(2x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} \to \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -3} \frac{(2x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x\to -3} \frac{2x-3}{x+1} = \frac{9}{2}$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{3x^2 - 7x + 2} \to \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{3x^2 - 7x + 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(2x-5)}{(x-2)(3x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-5}{3x-1} = -\frac{1}{5}$$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -4} \frac{3x^3 + 12x^2 - x - 4}{x^3 + 7x^2 + 14x + 8} \to \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -4} \frac{3x^3 + 12x^2 - x - 4}{x^3 + 7x^2 + 14x + 8} = \lim_{x\to -4} \frac{(x+4)(3x^2-1)}{(x+4)(x^2+3x+2)} =$$

$$= \lim_{x\to -4} \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{47}{6}$$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^3 - 9x^2 + 15x + 25}{x^3 - 5x^2 + 2x - 10} \to \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^3 - 9x^2 + 15x + 25}{x^3 - 5x^2 + 2x - 10} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x^2-4x-5)}{(x-5)(x^2+2)} = \lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + 2} = 0$$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - 11x + 14}{4x^2 - 16x + 16} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 11x + 14}{4x^2 - 16x + 16} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(2x-7)}{(x-2)(4x-8)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-7}{4x-8} \to -\frac{3}{0}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2 - 11x + 14}{4x^2 - 16x + 16} = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2 - 11x + 14}{4x^2 - 16x + 16} = -\infty$$

f) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^2(x-1)}{x(x+1)^2} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x} = 2$$

061 Dada la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4}$$

determina los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$

d) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(2x-1)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to -2} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{5}{4}$$

062 Encuentra el límite de la función cuando *x* tiende a 0 y cuando *x* tiende a 3.

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 3x^2}$$

Especifica el valor de los límites laterales, si es necesario.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^3 - 3x^2} \to \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^3 - 3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x-3} = 0$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^4}{x^3 - 3x^2} \to \frac{81}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^4}{x^3 - 3x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^4}{x^3 - 3x^2} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x\to 3} \frac{x^4}{x^3 - 3x^2}.$$

Límite de una función

063 Determina el límite, y comprueba el resultado con la calculadora.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-4x}{x+2}-3x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-4x}{x+2}-3x\right)\to\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-4x}{x+2}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-10x}{x+2}=-10$$

064 Observa las tablas de valores de la función.

$$f(x)=\frac{4x^2-5x}{2x^2+7}$$

x	1	10	100	1.000	10.000
$f(x)$	−0,11	1,69	1,974	1,9975	1,99975

x	−1	−10	−100	−1.000	−10.000
$f(x)$	1	2,17	2,024	2,0025	2,00025

¿Es cierto que $y=2$ es una asíntota? Cuando x tiende a $+\infty$, ¿está la función por encima o por debajo de la asíntota? ¿Qué sucede cuando x tiende a $-\infty$?

Sí, es cierto que $y=2$ es una asíntota horizontal.

Cuando x tiende a $+\infty$, la función está por debajo de la asíntota.

Cuando x tiende a $-\infty$, la función está por encima de la asíntota.

065 Decide si la función $y=\dfrac{3-2x}{x+1}$ tiene alguna asíntota horizontal, y sitúa la función respecto de esa asíntota.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-2x}{x+1}=-2\to$ La función tiene una asíntota horizontal: $y=-2$.

Si $x=1.000$, $f(x)>-2$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x=-1.000$, $f(x)<-2$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

066 Observa las tablas de valores de la función.

$$f(x)=\frac{3x+1}{x-3}$$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999	2,9999
$f(x)$	−7	−17	−97	−997	−9.997	−99.997

x	3,0001	3,001	3,01	3,1	3,5
$f(x)$	100.003	10.003	1.003	103	23

¿Es cierto que $x = 3$ es una asíntota vertical? Cuando x tiende a 3 por la izquierda, ¿la rama infinita de la función tiende a $+\infty$ o $-\infty$? ¿Qué sucede cuando x tiende a 3 por la derecha?

Sí, es cierto que $x = 3$ es una asíntota vertical.

Cuando x tiende a 3 por la izquierda, la rama infinita de la función tiende a $-\infty$.

Cuando x tiende a 3 por la derecha, la rama infinita de la función tiende a $+\infty$.

067 **Decide si la función $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x - 4}$ tiene alguna asíntota vertical, y estudia sus ramas infinitas próximas a esas asíntotas.**

Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 4\}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x^2 - 3x - 4} \to \frac{1}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 3x - 4} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 3x - 4} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = -1.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $+\infty$, y por la derecha, a $-\infty$.

$$\lim_{x \to 4} \frac{1}{x^2 - 3x - 4} \to \frac{1}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 4^-} \frac{1}{x^2 - 3x - 4} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 4^+} \frac{1}{x^2 - 3x - 4} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 4.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha, a $+\infty$.

068 **Observa la tabla de valores de la función.**

$$f(x) = \frac{4x^2 + 6x}{2x - 3}$$

x	10	100	1.000	10.000
$f(x)$	27,06	206,09	2.006,009	20.006,0009

Esta es la tabla de valores de la recta $y = 2x + 6$.

x	10	100	1.000	10.000
$y = 2x + 3$	26	206	2.006	20.006

¿Es cierto que la recta es una asíntota de la otra función? ¿Qué posición tienen cuando x tiende a $+\infty$? Investiga la posición relativa de ambas cuando x tiende a $-\infty$.

Sí, es cierto que $y = 2x + 3$ es una asíntota oblicua.

Cuando x tiende a $+\infty$, la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - 2x - 3 > 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por encima de la asíntota.

069 Comprueba si la recta $y = x + 3$ es una asíntota oblicua de la función $y = \dfrac{x^2 + 5x}{x + 2}$. En caso afirmativo, decide la posición que ocupa una respecto de la otra.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + 5x}{x^2 + 2x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2 + 5x}{x + 2} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x + 2} = 3 \end{array}\right\} \to$$ La función tiene una asíntota oblicua: $y = x + 3$.

Si $x = 1.000$, $f(x) - x - 3 < 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - x - 3 > 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por encima de la asíntota.

070 Calcula las asíntotas oblicuas de las funciones y su posición relativa respecto de ellas.

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 4}{x - 1}$ b) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 4}{2 + x}$

a) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 + 4}{x^2 - x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x^2 + 4}{x - 1} - 2x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4 + 2x}{x - 1} = 2 \end{array}\right\} \to$$ La función tiene una asíntota oblicua: $y = 2x + 2$.

Si $x = 1.000$, $f(x) - 2x - 2 > 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - 2x - 2 < 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

b) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 + 4}{2x + x^2} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x^2 + 4}{2 + x} - 2x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4 - 4x}{x - 1} = -4 \end{array}\right\} \to$$ La función tiene una asíntota oblicua: $y = 2x - 4$.

Si $x = 1.000$, $f(x) - 2x + 4 > 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - 2x + 4 < 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

071 Determina todas las asíntotas de las funciones, y sitúa sus ramas infinitas.

a) $f(x) = \dfrac{2 - 6x}{x + 3}$ d) $f(x) = \dfrac{3}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x}{x + 1}$ e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 5x + 6}$

c) $f(x) = \dfrac{4x^3}{x - 5}$ f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2-6x}{x+3} \to \dfrac{20}{0}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{2-6x}{x+3} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{2-6x}{x+3} = +\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = -3.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha, a $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2-6x}{x+3} = -6 \to$ La función tiene una asíntota horizontal: $y = -6$.

Si $x = 1.000$, $f(x) > -6$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000 \to f(x) < -6$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

Al tener una asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+2x}{x+1} \to \dfrac{1}{0}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{3x^2+2x}{x+1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{3x^2+2x}{x+1} = +\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = -1.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha, a $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+2x}{x+1} = +\infty \to$ La función no tiene asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+2x}{x^2+x} = 3 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x^2+2x}{x+1} - 3x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x}{x+1} = -1\end{array}\right\} \to \begin{array}{l}\text{La función tiene una asíntota} \\ \text{oblicua: } y = 3x - 1.\end{array}$$

Si $x = 1.000$, $f(x) - 3x + 1 > 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - 3x + 1 < 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{4x^3}{x-5} \to \dfrac{500}{0}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{4x^3}{x-5} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{4x^3}{x-5} = +\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 5.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha, a $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^3}{x-5} = +\infty \to$ La función no tiene asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^3}{x^2-5x} = +\infty \to$ La función no tiene asíntota oblicua.

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3}{x-1} \to \dfrac{3}{0}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3}{x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3}{x-1} = +\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 1.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha, a $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3}{x-1} = 0 \to$ La función tiene una asíntota horizontal: $y = 0$.

Si $x = 1.000$, $f(x) > 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) < 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

Al tener una asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3}{x^2 - 5x + 6} \to \dfrac{8}{0}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^3}{x^2 - 5x + 6} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^3}{x^2 - 5x + 6} = -\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 2.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $+\infty$, y por la derecha, a $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3}{x^2 - 5x + 6} \to \dfrac{27}{0}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^3}{x^2 - 5x + 6} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^3}{x^2 - 5x + 6} = +\infty\end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 3.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha, a $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2 - 5x + 6} = +\infty \to$ La función no tiene asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2 - 5x + 6} - x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^2 - 6x}{x^2 - 5x + 6} = 5\end{array}\right\} \to \begin{array}{l}\text{La función tiene una} \\ \text{asíntota oblicua:} \\ y = x + 5.\end{array}$$

Si $x = 1.000$, $f(x) - x - 5 > 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - x - 5 < 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

f) Dom $f = \mathbb{R} \rightarrow$ La función no tiene asíntota vertical.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + x + 1} = 0 \rightarrow \text{La función tiene una asíntota horizontal: } y = 0.$$

Si $x = 1.000$, $f(x) > 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) < 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

Al tener una asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

072 **Obtén todas las ramas infinitas y las asíntotas de las funciones, y decide la posición que tienen entre sí.**

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 + 8}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x + 8}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{2}{5}\right\}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} \rightarrow \frac{1}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 0.$$

Las dos ramas infinitas de la función tienden a $+\infty$.

$$\lim_{x \to \frac{2}{5}} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} \rightarrow \frac{-1{,}736}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to \frac{2}{5}^-} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to \frac{2}{5}^+} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = \frac{2}{5}.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha tiende a $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} = -\dfrac{1}{5} \to$ La función tiene una asíntota horizontal: $y = -\dfrac{1}{5}$.

Si $x = 1.000$, $f(x) < -\dfrac{1}{5}$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) > -\dfrac{1}{5}$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Al tener una asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} \to \dfrac{7}{0}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = -2.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $+\infty$, y por la derecha tiende a $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} \to \dfrac{-5}{0}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 2.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $+\infty$, y por la derecha tiende a $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} = +\infty \to$ La función no tiene asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^3 - 8x} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} - \dfrac{1}{2}x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x + 1}{2x^2 - 8} = 0 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} \text{La función tiene} \\ \text{una asíntota oblicua:} \\ y = \dfrac{1}{2}x. \end{array}$$

Si $x = 1.000$, $f(x) - \dfrac{1}{2}x < 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - \dfrac{1}{2}x > 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por encima de la asíntota.

c) Dom $f = \mathbb{R} \rightarrow$ La función no tiene asíntota vertical.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-7x+1}{2x^2+8} = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-7x+1}{2x^3+8x} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3-7x+1}{2x^2+8} - \dfrac{1}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-11x+1}{2x^2+8} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

La función tiene una asíntota oblicua: $y = \frac{1}{2}x$.

Si $x = 1.000$, $f(x) - \frac{1}{2}x < 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - \frac{1}{2}x > 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por encima de la asíntota.

d) Dom $f = \mathbb{R} - \{-4\}$

$$\lim_{x\to-4} \frac{x^3-7x+1}{2x+8} \rightarrow \frac{-35}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-4^-} \dfrac{x^3-7x+1}{2x+8} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-4^+} \dfrac{x^3-7x+1}{2x+8} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = -4.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $+\infty$, y por la derecha tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-7x+1}{2x+8} = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-7x+1}{2x^2+8x} = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota oblicua.}$$

073 ●●● **Halla las asíntotas de estas funciones, y la posición de las ramas infinitas.**

a) $f(x) = \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3-6x^2+12-8}{x^2+x-6}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x-2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{(x-2)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+4}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-3\}$

$$\lim_{x\to-3} \frac{x^3-6x^2+12x-8}{x+3} \rightarrow \frac{-125}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x+3} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x+3} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow$$

La función tiene una asíntota vertical en $x = -3$. Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $+\infty$, y por la derecha tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x + 3} = +\infty \rightarrow$$ La función no tiene asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + 3x} = +\infty \rightarrow$$ La función no tiene asíntota oblicua.

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$

$$\lim_{x\to-3} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6} \rightarrow \frac{-125}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-3^-} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-3^+} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$$ La función tiene una asíntota vertical en $x = -3$. Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x\to2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6} = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x^2 - 4x + 4)}{(x-2)(x+3)} = 0$$

$\rightarrow$ La función no tiene asíntota vertical en $x = 2$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6} = +\infty \rightarrow$$ La función no tiene asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 + x^2 - 6x} = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-7x^2 + 18x - 8}{x^2 + x - 6} = -7 \end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ La función tiene una asíntota oblicua: $y = x - 7$.

Si $x = 1.000$, $f(x) - x + 7 > 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - x + 7 < 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

c) Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\lim_{x\to2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 2} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 2} = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x^2 - 4x + 4)}{x - 2} = 0 \rightarrow$$ La función no tiene asíntota vertical en $x = 2$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 2} = +\infty \rightarrow$$ La función no tiene asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 2x} = +\infty \rightarrow$$ La función no tiene asíntota oblicua.

d) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4} \to \frac{-64}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{La función tiene una asíntota vertical}$$

en $x = -2$. Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4} \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2 - 4x + 4)}{(x-2)(x+2)} = 0 \to \text{La función}$$

no tiene asíntota vertical en $x = 2$.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4} = +\infty \to \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 4x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4} - x \right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-6x^2 + 16x - 8}{x^2 - 4} = -6 \end{array}\right\}$$

$\to$ La función tiene una asíntota oblicua: $y = x - 6$.

Si $x = 1.000$, $f(x) - x + 6 > 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - x + 6 < 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

e) Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{(x-2)^2} \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^3}{(x-2)^2} = 0 \to \text{La función no tiene asíntota}$$

vertical en $x = 2$.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{(x-2)^2} = +\infty \to \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4x + 4} - x \right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-2x^2 + 8x - 8}{x^2 - 4x + 4} = -2 \end{array}\right\} \to \text{La función}$$

tiene una asíntota oblicua: $y = x - 2$.

$f(x) - x + 2 = 0 \to$ La expresión de la función coincide con la ecuación de la asíntota salvo en $x = 2$.

f) Dom $f = \mathbb{R} \rightarrow$ La función no tiene asíntota vertical.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + 4} = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 + 4x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + 4} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-6x^2 + 8x - 8}{x^2 + 4} = -6 \end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ La función tiene una asíntota oblicua: $y = x - 6$.

Si $x = 1.000$, $f(x) - x + 6 > 0$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - x + 6 < 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

074 Calcula las ramas infinitas y asíntotas de las funciones.

a) $y = x^2 + 5x - 1$ b) $y = 2^x - 1$ c) $y = \log x$ d) $y = tg\, x$

a) Dom $f = \mathbb{R} \rightarrow$ La función no tiene asíntota vertical.

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 + 5x - 1) = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 5x - 1}{x} = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota oblicua.}$$

b) Dom $f = \mathbb{R} \rightarrow$ La función no tiene asíntota vertical.

$$\lim_{x\to+\infty} (2^x - 1) = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x - 1}{x} = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota oblicua.}$$

c) Dom $f = (0, +\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty \rightarrow \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = 0.$$

La rama infinita de la función tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0 \rightarrow \text{La función no tiene asíntota oblicua.}$$

d) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tg\, x \rightarrow \frac{1}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} tg\, x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} tg\, x = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{La función tiene una asíntota vertical en } x = \frac{\pi}{2}.$$

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $+\infty$, y por la derecha, a $-\infty$.

Al ser una función periódica, de período π, todos los puntos que no pertenecen al dominio son asíntotas del mismo tipo.

Por tanto, la función no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

075 Encuentra las asíntotas de las funciones.

a) $y = \dfrac{|2x - 3|}{x}$ b) $y = \dfrac{2x}{\sqrt{4 - x^2}}$

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - 3}{x} & \text{si } x \geq \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{-2x + 3}{x} & \text{si } x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-2x + 3}{x} \to \dfrac{3}{0}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-2x + 3}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-2x + 3}{x} = +\infty \end{array}\right\} \to$ La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

Por la izquierda la rama infinita de la función tiende a $-\infty$, y por la derecha, a $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 3}{x} = 2 \to$ La función tiene una asíntota horizontal: $y = 2$.

Si $x = 1.000$, $f(x) < 2$, y cuando x tiende a $+\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x + 3}{x} = -2 \to$ La función tiene una asíntota horizontal: $y = -2$.

Si $x = -1.000$, $f(x) < -2$, y cuando x tiende a $-\infty$ la función está por debajo de la asíntota.

Al tener asíntotas horizontales, la función no tiene asíntotas oblicuas.

b) Dom $f = (-2, 2)$

$\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{2x}{\sqrt{4 - x^2}} = -\infty \to$ La función tiene una asíntota vertical en $x = -2$.

La rama infinita de la función tiende a $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x}{\sqrt{4 - x^2}} = +\infty \to$ La función tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

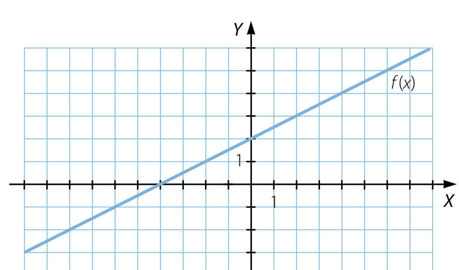
La rama infinita de la función tiende a $+\infty$.

Dado el dominio de la función, no tienen sentido los límites en el infinito, y la función no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

076 Observa la gráfica de la función y determina estos límites.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$



Estudia la continuidad de la función $f(x)$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$ $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3{,}5$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$

La función es continua salvo en $x = 2$, ya que no existe $f(2)$.

077 Completa la tabla para la función.

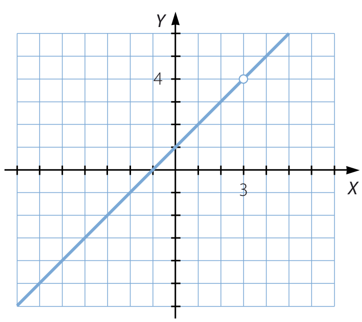
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$$

Comprueba que su límite, cuando x tiende a 3, es: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$

¿Cuánto vale $f(3)$? Haz una representación de la función.
¿Qué diferencia hay entre las gráficas de $f(x)$ y de $y = x + 1$?

x	2,5	2,9	2,999	3,001	3,01	3,1	3,5
$f(x)$	3,5	3,9	3,999	4,001	4,01	4,1	4,5

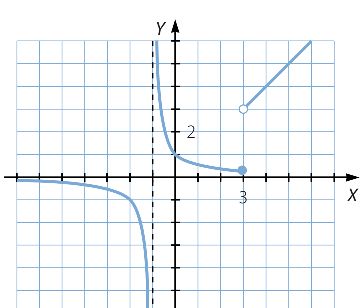
No existe $f(3)$.



La gráfica de $f(x)$ coincide con la gráfica de la recta $y = x + 1$, salvo en el punto $x = 3$.

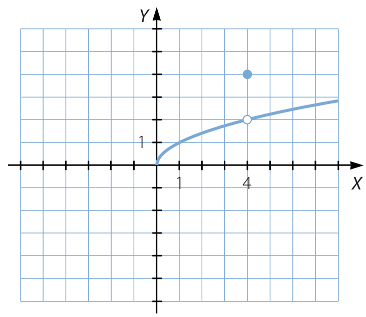
078 Dibuja una función que sea continua, salvo en $x = -1$, que tenga un salto infinito y que tenga en $x = 3$ un salto finito.

Respuesta abierta.



079 Dibuja una función cuyo domino sea $[0, +\infty)$, y que presente un punto de discontinuidad evitable en $x = 4$.

Respuesta abierta.



080 Determina los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones.

a) $y = \dfrac{1}{x+3}$

b) $y = \dfrac{x+2}{x^2 - x + 12}$

c) $y = \sqrt{4+x}$

d) $y = \sqrt{4 - 3x - x^2}$

e) $y = \dfrac{x+2}{x^2 - 7x + 12}$

f) $y = \sqrt{x-5}$

g) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$

h) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 8}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3\}$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x}{x+3} \to \frac{1}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -3^-} \frac{1}{x+3} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -3^+} \frac{1}{x+3} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to -3} f(x), \text{ y } x = -3 \text{ es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.}$$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} \to$ No hay puntos de discontinuidad.

c) $\text{Dom } f = [-4, +\infty) \to$ No hay puntos de discontinuidad.

d) $\text{Dom } f = [-4, 1] \to$ No hay puntos de discontinuidad.

e) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3, 4\}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+2}{x^2 - 7x + 12} \to \frac{5}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 3^-} \frac{x+2}{x^2 - 7x + 12} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 3^+} \frac{x+2}{x^2 - 7x + 12} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 3} f(x), \text{ y } x = 3 \text{ es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x+2}{x^2 - 7x + 12} \to \frac{6}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x+2}{x^2 - 7x + 12} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x+2}{x^2 - 7x + 12} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 4} f(x) \text{, y } x = 4 \text{ es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.}$$

f) Dom $f = [5, +\infty) \to$ No hay puntos de discontinuidad.

g) Dom $f = (-\infty, -2] \cup [4, +\infty) \to$ No hay puntos de discontinuidad.

h) Dom $f = \mathbb{R} \to$ No hay puntos de discontinuidad.

081 ●●○ **Estudia la continuidad de las funciones en $x = 3$, y si presentan discontinuidad, decide de qué tipo de discontinuidad se trata.**

a) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{12}{x - 1} & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ x - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \ln\,(x - 2) & \text{si } x < 3 \\ -2 & \text{si } x = 3 \\ sen\,(x - 3) & \text{si } x > 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{12}{x - 3} & \text{si } x < 3 \\ x - 15 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 3 \\ -2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

a) $f(3) = 6$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x + 3) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 2x + 3) = 6 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

Como $f(3) = \lim\limits_{x \to 3} f(x)$, la función es continua en $x = 3$.

b) $f(3) = 6$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{12}{x - 1} = 6 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x - 2) = 1 \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 3} f(x) \text{, y la función no es continua en } x = 3.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.

c) $f(3) = -2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \big(\ln\,(x - 2)\big) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} sen\,(x - 3) = 0 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 3} f(x) = 0$$

Como $f(3) \neq \lim\limits_{x \to 3} f(x)$, la función no es continua en $x = 3$.

Se trata de un punto de discontinuidad evitable.

d) $f(3) = -12$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{12}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (x-15) = -12\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 3} f(x)\text{, y la función no es continua en } x = 3.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

e) $f(3) = -2$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x-1} = 2$$

Como $f(3) \neq \lim\limits_{x\to 3} f(x)$, la función no es continua en $x = 3$.

Se trata de un punto de discontinuidad evitable.

082 **¿Qué valor debe tomar *a* para que las funciones sean continuas?**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x+1} & \text{si } x < -2 \\ a & \text{si } x = -2 \\ -2x-7 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & \text{si } x \le -2 \\ ax-2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} tg\,\dfrac{-\pi}{2x} & \text{si } x \le -2 \\ \log(ax+7) & \text{si } x > -2 \end{cases}$

a) $f(-2) = a$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{3}{x+1} = -3 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (-2x-7) = -3\end{array}\right\} \to \exists \lim_{x\to -2} f(x) = -3$$

La función es continua si $f(-2) = \lim\limits_{x\to -2} f(x) \to a = -3$.

b) $f(-2) = 2^{-3} = \dfrac{1}{8}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} 2^{x-1} = \dfrac{1}{8} \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (ax-2) = -2a-2\end{array}\right\}$$

$$\to \exists \lim_{x\to -2} f(x) \text{ si } \frac{1}{8} = -2a-2 \to a = -\frac{17}{16}$$

c) $f(-2) = 1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} tg\,\dfrac{-\pi}{2x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \log(ax+7) = \log(-2a+7)\end{array}\right\}$$

$$\to \exists \lim_{x\to -2} f(x) \text{ si } 1 = \log(-2a+7) \to a = -\frac{3}{2}$$

083 Razona si la siguiente función es continua en $x = 3$ y en $x = 0$.

$$y = \begin{cases} 2^x - 1 & \text{si } x \geq 3 \\ \dfrac{12}{x} + 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$f(3) = 7$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{12}{x} + 3 = 7 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (2^x - 1) = 7 \end{array}\right\} \to \exists \lim_{x \to 3} f(x)$$

Como $f(3) = \lim\limits_{x \to 3} f(x)$, la función es continua en $x = 3$.

No existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{12}{x} + 3\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{12}{x} + 3\right) = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 0} f(x), \text{ y la función no es continua en } x = 0.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

084 Estudia la continuidad en todo el dominio de las funciones.
Determina los puntos de discontinuidad que presenta cada una de ellas.

a) $y = sen\,(x + \pi)$

b) $y = \ln\,(x + e)$

c) $y = tg\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

d) $y = 2^{x-3}$

a) Dom $f = \mathbb{R} \to$ No hay puntos de discontinuidad.

b) Dom $f = (-e, +\infty) \to$ No hay puntos de discontinuidad.

c) Dom $f = \mathbb{R} - \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \pi^-} tg\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to \pi^+} tg\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to \pi} f(x), \text{ la función no es continua en } x = \pi.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

Al ser una función periódica, de período π, todos los puntos en los que falla el dominio son puntos de discontinuidad inevitable de salto infinito.

d) Dom $f = \mathbb{R} \to$ No hay puntos de discontinuidad.

085 Investiga si las funciones son continuas.

a) $f(x)=\begin{cases}\log(x+7) & \text{si } x<3\\ 1 & \text{si } x=3\\ \dfrac{5}{x+2} & \text{si } x>3\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{3x+5}{2}} & \text{si } x<-1\\ 0 & \text{si } x=-1\\ x+1 & \text{si } x>-1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{2-x} & \text{si } x<1\\ 5 & \text{si } x=1\\ 2^{x+1}+1 & \text{si } x>1\end{cases}$

a) Si $x<3$: $f(x)=\log(x+7)\rightarrow \text{Dom } f=(-7,3)\rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad.

Si $x=3$: $f(3)=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\log(x+7)\right)=1\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{5}{x+2}=1\end{array}\right\}\rightarrow \exists \lim_{x\to 3} f(x)=1$$

Como $f(3)=\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, la función es continua en $x=3$.

Si $x>3$: $f(x)=\dfrac{5}{x+2}\rightarrow \text{Dom } f=(3,+\infty)\rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad.

La función es continua en $(-7,+\infty)$.

b) Si $x<-1$: $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x+5}{2}}\rightarrow \text{Dom } f=\left[-\dfrac{5}{3},-1\right)\rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad.

Si $x=-1$: $f(-1)=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\sqrt{\dfrac{3x+5}{2}}=1\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x+1)=0\end{array}\right\}\rightarrow$$

No existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, y la función no es continua en $x=-1$. Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.

Si $x>-1$: $f(x)=x+1\rightarrow \text{Dom } f=(-1,+\infty)\rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad.

La función es continua en $\left[-\dfrac{5}{3},-1\right)\cup(-1,+\infty)$.

c) Si $x < 1$: $f(x) = \dfrac{5}{2-x} \rightarrow$ Dom $f = (-\infty, 1) \rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad.

Si $x = 1$: $f(1) = 5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{5}{2-x} = 5 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2^{x+1}+1) = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x) = 5$$

Como $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$, la función es continua en $x = 1$.

Si $x > 1$: $f(x) = 2^{x+1} + 1 \rightarrow$ Dom $f = (1, +\infty) \rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad.

La función es continua en $\mathbb{R}$.

086 ●●○ **Estudia la continuidad de la siguiente función.**

$$g(t) = \begin{cases} \log(t+7) & \text{si } t < 3 \\ 2 & \text{si } t = 3 \\ \dfrac{4}{7-t} & \text{si } t > 3 \end{cases}$$

Si presenta puntos de discontinuidad, estudia el límite cuando *t* tiende a ellos y decide qué tipos de discontinuidades son.

Si $t < 3$: $g(x) = \log(t+7) \rightarrow$ Dom $f = (-7, 3) \rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad.

Si $t = 3$: $g(3) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 3^-} g(t) = \lim\limits_{t\to 3^-} \log(t+7) = 1 \\ \lim\limits_{t\to 3^+} g(t) = \lim\limits_{t\to 3^+} \dfrac{4}{7-t} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \lim_{t\to 3} g(t) = 1$$

Como $g(3) = \lim\limits_{t\to 3} g(t)$, la función es continua en $t = 3$.

Si $t > 3$: $g(t) = \dfrac{4}{7-t} \rightarrow$ Dom $f = (3, +\infty) - \{7\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 7^-} g(t) = \lim\limits_{t\to 7^-} \dfrac{4}{7-t} = +\infty \\ \lim\limits_{t\to 7^+} g(t) = \lim\limits_{t\to 7^+} \dfrac{4}{7-t} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{t\to 7} g(t) \text{ y la función no es continua en } t = 7.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

La función es continua en $(-7, 7) \cup (7, +\infty)$.

087 ●●● **Estudia la continuidad de las funciones.**

a) $y = [x]$ (Parte entera de x)

b) $y = \dfrac{x}{|x|}$

c) $y = |x^2 - 1|$

d) $y = \dfrac{1}{|x^2 - 1|}$

a) La función es continua salvo en los números enteros.

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = a - 1 \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = a \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to a} f(x).$$

Todos los números enteros son puntos de discontinuidad inevitable de salto finito.

b) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

No existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to 0} f(x), \text{ y la función no es continua en } x = 0.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \text{ o si } x > 1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Si $x = -1$: $f(-1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 - 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (-x^2 + 1) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$$

Como $f(-1) = \lim\limits_{x \to -1} f(x)$, la función es continua en $x = -1$.

Si $x = 1$: $f(1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (-x^2 + 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 1) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$$

Como $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$, la función es continua en $x = 1$.

La función es continua en $\mathbb{R}$.

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \text{ o si } x > 1 \\ \dfrac{1}{-x^2 - 1} & \text{si } -1 < x < 1 \end{cases}$

No existe $f(-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{1}{x^2 - 1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{-x^2 + 1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{La función no es continua en } x = -1.$$

Es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

No existe $f(1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{-x^2 + 1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^2 - 1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{La función no es continua en } x = -1.$$

Es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

088 ●○○

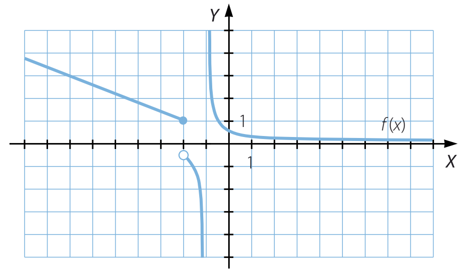
Observa la gráfica de la función y determina los límites que se indican.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ no existe.

d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ no existe.

089 ●○○

Calcula los límites indicados en la función definida a trozos.

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 3x^2 - 5x + 6 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -1^-} h(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -1^+} h(x)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 5x + 1) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 + 5x + 1) = -3$

c) $\lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (3x^2 - 5x + 6) = 14$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 - 5x + 6) = +\infty$

090 ●●○

Calcula $\lim\limits_{x \to 3} (f \circ g)$, siendo las funciones:

$$g(x) = x + 2 \qquad f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 10x}$$

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(x+2) = \frac{(x+2)^2 - 1}{2(x+2)^2 - 10(x+2)} = \frac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 - 2x - 12}$$

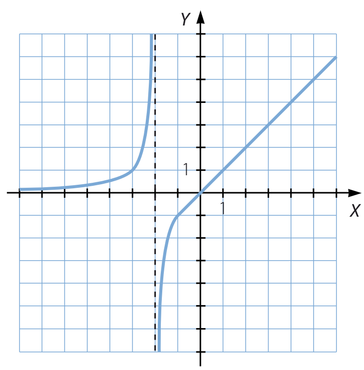
$$\lim_{x \to 3}\big(f \circ g(x)\big) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 - 2x - 12} \to \frac{24}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 - 2x - 12} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 - 2x - 12} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe el límite.}$$

091 Haz la gráfica aproximada de una función que cumpla las siguientes condiciones.

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

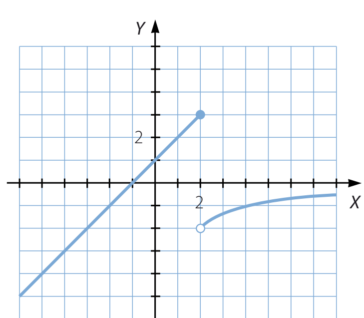
Respuesta abierta.



092 Realiza la gráfica aproximada de una función que cumpla las siguientes condiciones.

- $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to 2^-} g(x) = 3$
- $\lim_{x \to 2^+} g(x) = -2$
- $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Respuesta abierta.

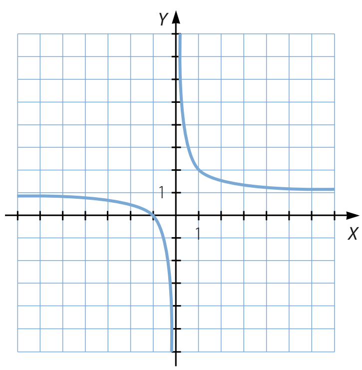


Límite de una función

093 Construye la gráfica aproximada de una función que cumpla estas condiciones.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$

Respuesta abierta.



094 Representa tres funciones que cumplan que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$ y cada una de estas condiciones.

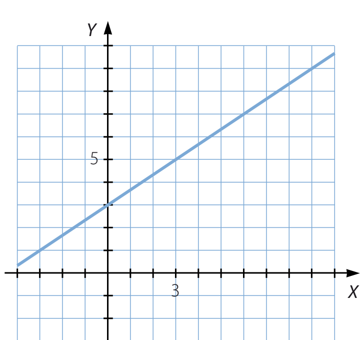
a) $f(3) = 5$

b) $f(3)$ no existe.

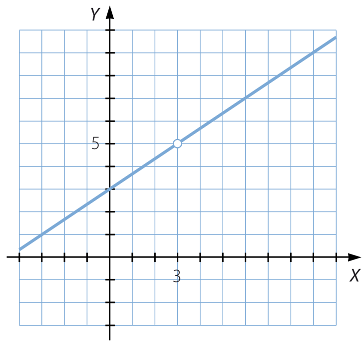
c) $f(3) = 2$

Respuesta abierta.

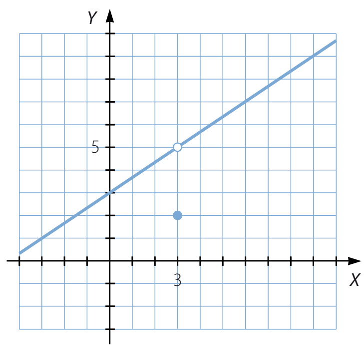
a)



b)



c)

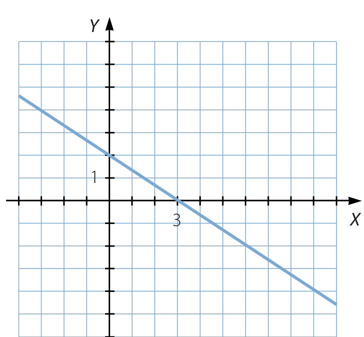


095 ●●○ Dibuja una función continua que cumpla que $f(x)$ es negativa si $x > 3$ y es positiva si $x < 3$.

a) ¿Cuánto vale $\lim_{x \to 3} f(x)$? ¿Y $f(3)$?

b) ¿Hay un posible resultado? Razona la respuesta.

Respuesta abierta.



a) $\lim_{x \to 3} f(x) = 0$

$f(3) = 0$

b) Sí, porque si la función es continua tiene que verificarse que: $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$

096 ●●○

Halla las asíntotas de estas funciones.

$$f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2} \qquad g(x)=\frac{x^2-4x+4}{x^2+x-2}$$

Razona las diferencias entre ambas funciones.

Dom $f=\mathbb{R}-\{-1,2\}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}\to\frac{9}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}=-\infty\end{array}\right\}\to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x=-1.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}\to\frac{0}{0}$$

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x-2)}=0\to$ La función no tiene una asíntota vertical en $x=2$.

$\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}=1\to$ La función tiene una asíntota horizontal: $y=1$.

Al tener asíntotas horizontales, la función no tiene asíntotas oblicuas.

Dom $g=\mathbb{R}-\{-2,1\}$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4x+4}{x^2+x-2}\to\frac{16}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-4x+4}{x^2+x-2}=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2-4x+4}{x^2+x-2}=-\infty\end{array}\right\}\to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x=-2.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+4}{x^2+x-2}\to\frac{1}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-4x+4}{x^2+x-2}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-4x+4}{x^2+x-2}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{La función tiene una asíntota vertical en } x=1.$$

$\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-4x+4}{x^2+x-2}=1\to$ La función tiene una asíntota horizontal: $y=1$.

Al tener asíntotas horizontales, la función no tiene asíntotas oblicuas.

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen distintas asíntotas verticales, porque los valores que anulan el denominador en cada una de ellas son diferentes.

097 Escribe una función racional para cada caso.

a) Que tenga $x = 2$ y $x = -3$ como únicas asíntotas.

b) Sus únicas asíntotas son $x = -2$ e $y = 3$.

c) Sus asíntotas son $x = 4$ e $y = 2x - 1$.

Respuesta abierta.

a) $f(x) = \dfrac{x^4}{(x-2)(x+3)}$

b) $f(x) = \dfrac{3x}{x+2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 9x}{x-4}$

098 Calcula el valor de a para que el límite tenga valor finito: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+3}{x-1} - ax$.
Con ese valor de a, halla b para que se verifique que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3}{x-1} - ax - b = 0$$

¿Qué relación existe entre la función $y = \dfrac{2x^2+3}{x-1}$ y la recta $y = ax + b$?

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3}{x-1} - ax\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3-ax^2+ax}{x-1}$$

El límite tiene valor finito si el grado del numerador es menor o igual que el denominador, por lo que $a = 2$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3}{x-1} - 2x - b\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+2x-bx+1}{x-1} = 2 - b = 0 \to b = 2$$

La recta $y = 2x + 2$ es la asíntota oblicua de la función $y = \dfrac{2x^2+3}{x-1}$.

099 Se ha estimado que la población de zorros en una finca se rige por la fórmula $z = 100\,\dfrac{6t^2+3}{2+t^2}$, donde z representa el número de zorros y t es el tiempo transcurrido, en meses.
El veterinario de la finca ha observado que, en los primeros seis meses, la población ha aumentado. Investiga si el crecimiento será indefinido, si tenderá a estabilizarse la población o si tenderá a disminuir.

$$\lim_{t\to+\infty}\left(100 \cdot \frac{6t^2+3}{2+t^2}\right) = 600$$

La población de zorros tenderá a estabilizarse.

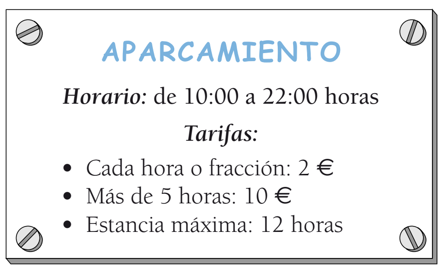
100 La famosa fórmula $M = \dfrac{mc}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ se debe a Einstein, y expresa la masa M de un cuerpo en función de su velocidad v, siendo c la velocidad de la luz (300.000 km/s).

Calcula el límite de la masa M cuando v tiende a c. A la vista de ese resultado, ¿crees que un cuerpo puede alcanzar esa velocidad?

$$\lim_{v \to c} \frac{mc}{\sqrt{c^2 - v^2}} = +\infty$$

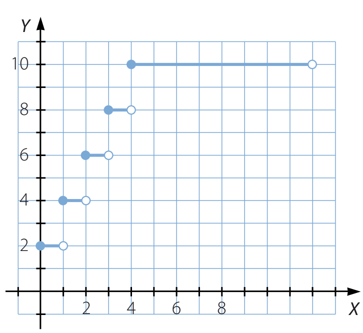
Para que la velocidad llegara a ser la de la luz el cuerpo debería tener una masa infinita.

101 Representa mediante una función definida a trozos la tarifa de un aparcamiento.



a) Estudia su continuidad.

b) Clasifica los puntos de discontinuidad, si los tuviera.



a) La función no es continua en:

$x = 10$

$x = 11$

$x = 12$

$x = 13$

$x = 14$

b) Los puntos son de discontinuidad inevitable de salto finito.

PARA FINALIZAR…

102 Calcula el valor de k para que el siguiente límite sea un número real: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + kx + 2}{x^2 - 4}$

Para el valor de k obtenido, ¿cuánto vale el límite?

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + kx + 2}{x^2 - 4} \to \frac{2k + 6}{0}$$

Si $k = -3$, entonces la indeterminación es: $\frac{0}{0}$

Así, el límite vale: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}$

103 Calcula los límites.

a) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot sen \frac{1}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot cos\ x$

Aunque no sepamos el valor que toman el seno y el coseno de un ángulo cuando el ángulo tiende a infinito, sí sabemos que es una cantidad acotada, pues tanto el seno como el coseno de un ángulo tienen un valor comprendido en $[-1, 1]$, y al multiplicar por cero una cantidad acotada, el resultado es cero.

a) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot sen \frac{1}{x} = 0$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot cos\ x = 0$

104 ¿Qué ocurrirá con las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ si el coeficiente a tiende a cero y los coeficientes b y c son constantes, siendo $b \neq 0$?

Las soluciones de la ecuación son de la forma: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\lim_{a \to 0} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \to \frac{0}{0} \qquad \lim_{a \to 0} \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \to \frac{-2b}{0} \to \infty$$

$$\lim_{a \to 0} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \lim_{a \to 0} \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} =$$

$$= \lim_{a \to 0} \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} = -\frac{c}{b}$$

105 Comprueba que $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}$ no existe.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}.$$

106 **Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones.**

a) $y = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 0 \\ 5^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} 5^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 2^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ c) $y = \begin{cases} x^2 \cdot sen\,\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) $f(0) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} 2^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 5^{\frac{1}{x}} = +\infty \end{array}\right\}$$

No existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, y la función no es continua en $x = 0$.

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) $f(0) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} 5^{\frac{1}{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 2^x = 1 \end{array}\right\}$$

No existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, y la función no es continua en $x = 0$.

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

c) $f(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 \cdot sen\,\frac{1}{x} \right) = 0$$

Al ser $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$, la función es continua en $x = 0$.

Así, la función es continua en $\mathbb{R}$.

107 **Demuestra que la recta de ecuación $y = \dfrac{b}{a}x$ es una asíntota de la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \to b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \to y^2 = \frac{b^2x^2 - a^2b^2}{a^2}$$

$$\to y = \pm\sqrt{\frac{b^2x^2 - a^2b^2}{a^2}} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

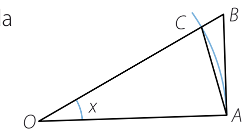
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x \right) \to \infty - \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \right) = 0$$

108 Si medimos el ángulo x en radianes, demuestra que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$.

Si el ángulo x se mide en grados sexagesimales, entonces $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = \frac{\pi}{180}$.

Como la medida de la longitud del arco está comprendida entre la longitud de los segmentos AC y AB, entonces el área del sector circular está comprendida entre el área de los triángulos.



Área de $\widehat{OAC}$ < Área de sector < Área $\widehat{OAB}$

$$\frac{R \cdot R\ sen\ x}{2} < \pi R^2 \cdot \frac{x}{2\pi} < \frac{R \cdot R\ tg\ x}{2}$$

$$\frac{R^2\ sen\ x}{2} < R^2 \cdot \frac{x}{2} < \frac{R^2\ tg\ x}{2}$$

Simplificamos dividiendo entre $\frac{R^2}{2}$: $sen\ x < x < tg\ x$

Dividimos entre $sen\ x$: $\frac{sen\ x}{sen\ x} < \frac{x}{sen\ x} < \frac{tg\ x}{sen\ x}$

$$\to \frac{sen\ x}{sen\ x} > \frac{sen\ x}{x} > \frac{sen\ x}{tg\ x} \to 1 > \frac{sen\ x}{x} > cos\ x$$

Hacemos límites con $x \to 0$:

$\lim\limits_{x \to 0} 1 > \lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} > \lim\limits_{x \to 0} cos\ x \to 1 > \lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} > 1 \to \lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$, que es lo que queríamos demostrar.

Si x viene medido en grados:

$$\frac{R \cdot R\ sen\ x}{2} < \pi R^2 \cdot \frac{x}{360} < \frac{R \cdot R\ tg\ x}{2} \to \frac{R^2\ sen\ x}{2} < \frac{\pi R^2}{360} \cdot x < \frac{R^2\ tg\ x}{2}$$

Simplificamos dividiendo entre $\frac{R^2}{2}$: $sen\ x < \frac{\pi}{180} \cdot x < tg\ x$

Dividimos entre $sen\ x$:

$$\frac{sen\ x}{sen\ x} < \frac{\pi}{180} \cdot \frac{x}{sen\ x} < \frac{tg\ x}{sen\ x} \to 1 < \frac{\pi}{180} \cdot \frac{x}{sen\ x} < \frac{1}{cos\ x}$$

$$\to 1 > \frac{180}{\pi} \cdot \frac{sen\ x}{x} > cos\ x$$

Hacemos límites con $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} 1 > \lim_{x \to 0} \frac{180}{\pi} \cdot \frac{sen\ x}{x} > \lim_{x \to 0} cos\ x \to 1 > \frac{180}{\pi} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} > 1$$

$$\to \frac{180}{\pi} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$$

Y despejando, resulta que: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = \frac{\pi}{180}$