14 Distribuciones binomial y normal

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El teorema

–Como la mayoría de los que estamos presentes en esta aula, Laplace fue incomprendido por sus padres –dijo Caine mientras caminaba por delante de la pizarra–. Aunque su padre quería que fuera soldado o sacerdote, Laplace se decidió por la vida académica. Por lo tanto, cuando cumplió los dieciocho años marchó al epicentro académico de Francia: París. Allí consiguió un trabajo como profesor de geometría de los cadetes de una academia militar. Entre ellos había un chico bajito llamado Napoleón Bonaparte que, según me han dicho, hizo después algunas cosas extraordinarias.

Los doce estudiantes reunidos alrededor de la mesa se rieron cortésmente.

–En 1770, Laplace presentó su primer trabajo en la prestigiosa Académie des Sciences. Después de aquello, quedó claro para todos que era un genio matemático. Así que dedicó el resto de su vida a dos campos: la probabilidad y la astronomía. Casi treinta años más tarde, en 1799, unió los dos campos cuando publicó el libro de astronomía más importante de la época: *Tratado de la mecánica celeste*. El libro no sólo contenía una exposición analítica del sistema solar, sino que también incluía nuevos métodos para calcular las órbitas planetarias.

»Sin embargo, la razón por la que el *Tratado de la mecánica celeste* sigue considerándose hoy muy importante no es por sus hallazgos astronómicos, sino porque fue la primera persona que aplicó la teoría de las probabilidades a la astronomía. Laplace demostró que las múltiples observaciones de la posición de una estrella tendían a formar una curva con forma de campana. […]

–¿A qué se refiere con «múltiples observaciones de la posición de una estrella»?–, preguntó un estudiante paliducho y con pelo lacio y oscuro.

–Ah, buena pregunta. –Caine se acercó a la pizarra–. En aquel entonces, uno de los grandes problemas de la astronomía era que todos tomaban sus mediciones un poco a ojo de buen cubero y, como las personas cometen errores, los datos no eran claros. Veinte astrónomos diferentes medían la posición de una estrella y obtenían veinte lecturas diferentes. Lo que hizo Laplace fue tomar aquellas veinte observaciones diferentes y elaborar un gráfico. Cuando lo hizo, vio que las posiciones formaban una curva con forma de campana como ésta. –Caine señaló una gráfica de distribución normal en la pared–. En cuanto vio esto, exclamó: «Ajá, si las observaciones están en una distribución normal, entonces la punta nos indica la posición más probable de la estrella».

Adam Fawer

Mide las dimensiones, en mm, de tu mesa y calcula su superficie. Con los datos de tus compañeros elabora un polígono de frecuencias y, a partir de él, calcula la superficie más probable de la mesa.

Respuesta abierta.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Indica el tipo de variable estadística.

a) Talla de una persona.

b) Temperatura.

c) Sexo de una persona.

d) Dinero gastado a la semana.

a) Cuantitativa continua

b) Cuantitativa continua

c) Cualitativa

d) Cuantitativa discreta

002 Organiza en una tabla de frecuencias estos datos relativos al peso, en kg, de 20 personas.

42 51 56 66 75 47 51 45 63 79

69 59 50 70 59 62 54 60 63 58

Respuesta abierta.

Peso	f_i	h_i	F_i	H_i
[40, 50)	3	0,15	3	0,15
[50, 60)	8	0,4	11	0,55
[60, 70)	6	0,3	17	0,85
[70, 80)	3	0,15	20	1
	$N = 20$	$\sum h_i = 1$		

003 Lidia ha obtenido las siguientes notas en Matemáticas: 7, 5, 6, 10, 9, 7 y 6. Calcula la media, la varianza y la desviación típica.

$$\overline{x} = \frac{50}{7} = 7{,}14$$

$$\sigma^2 = \frac{376}{7} - 7{,}14^2 = 2{,}73$$

$$\sigma = 1{,}65$$

004 Se lanzan dos dados y se suman los puntos obtenidos. Halla la probabilidad de que la suma:

a) Sea 3.

b) No sea 7.

c) Sea inferior a 11.

d) Sea 4 o 5.

a) $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

b) $1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$

c) $1 - \frac{3}{36} = \frac{11}{12}$

d) $\frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{7}{36}$

ACTIVIDADES

001 Lanzamos dos dados de 6 caras.

a) Comprueba que la función que asigna a cada suceso elemental la suma de las puntuaciones es una variable aleatoria.

b) Elabora su tabla de valores y represéntala gráficamente.

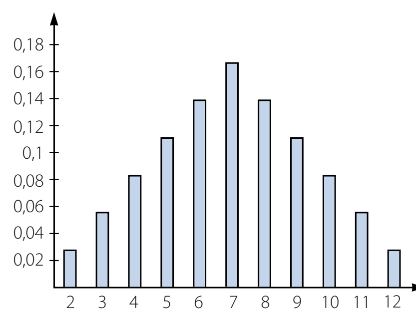
a) El espacio muestral es: $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

La función X que asigna a cada suceso la suma de las puntuaciones es una variable aleatoria.

$X(1, 1) = 2$ $X(1, 2) = 3$ $X(1, 3) = 4$ $X(1, 4) = 5$ $X(1, 5) = 6$ $X(1, 6) = 7$
$X(2, 1) = 3$ $X(2, 2) = 4$ $X(2, 3) = 5$ $X(2, 4) = 6$ $X(2, 5) = 7$ $X(2, 6) = 8$
$X(3, 1) = 4$ $X(3, 2) = 5$ $X(3, 3) = 6$ $X(3, 4) = 7$ $X(3, 5) = 8$ $X(3, 6) = 9$
$X(4, 1) = 5$ $X(4, 2) = 6$ $X(4, 3) = 7$ $X(4, 4) = 8$ $X(4, 5) = 9$ $X(4, 6) = 10$
$X(5, 1) = 6$ $X(5, 2) = 7$ $X(5, 3) = 8$ $X(5, 4) = 9$ $X(5, 5) = 10$ $X(5, 6) = 11$
$X(6, 1) = 7$ $X(6, 2) = 8$ $X(6, 3) = 9$ $X(6, 4) = 10$ $X(6, 5) = 11$ $X(6, 6) = 12$

b)

X	$P(X = x_i)$	$P(X \leq x_i)$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$
6	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{12}$
7	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$
8	$\frac{5}{36}$	$\frac{13}{18}$
9	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{6}$
10	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$
11	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$
12	$\frac{1}{36}$	1



002 Consideramos el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado y una moneda.

a) Calcula el espacio muestral y la probabilidad de cada suceso elemental.

b) Define sobre este experimento dos variables aleatorias y represéntalas.

a) El espacio muestral es:

$E = \{(1, C), (2, C), (3, C), (4, C), (5, C), (6, C), (1, X), (2, X), (3, X), (4, X), (5, X), (6, X)\}$

La probabilidad de cada suceso elemental es $\frac{1}{12}$.

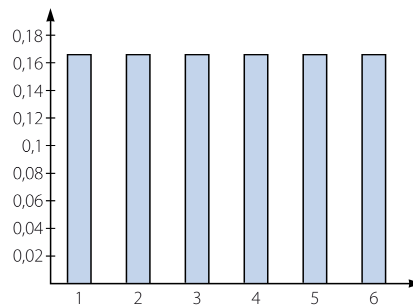
b) Respuesta abierta.

La función X asigna a cada suceso el número obtenido en el dado.

$X(1, C) = 1$ $X(2, C) = 2$ $X(3, C) = 3$ $X(4, C) = 4$ $X(5, C) = 5$ $X(6, C) = 6$

$X(1, X) = 1$ $X(2, X) = 2$ $X(3, X) = 3$ $X(4, X) = 4$ $X(5, X) = 5$ $X(6, X) = 6$

X	$P(X = x_i)$	$P(X \leq x_i)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	1

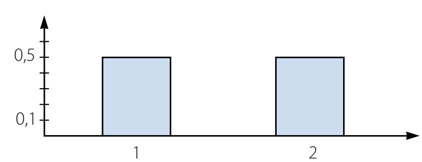


La función Y asigna a cada suceso el número elemental 1 si sale cara en la moneda y 2 si sale cruz.

$Y(1, C) = 1$ $Y(2, C) = 1$ $Y(3, C) = 1$ $Y(4, C) = 1$ $Y(5, C) = 1$ $Y(6, C) = 1$

$Y(1, X) = 2$ $Y(2, X) = 2$ $Y(3, X) = 2$ $Y(4, X) = 2$ $Y(5, X) = 2$ $Y(6, X) = 2$

Y	$P(Y = y_i)$	$P(Y \leq y_i)$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	1



003 **Consideramos la variable aleatoria que cuenta la suma de las puntuaciones al lanzar dos dados de 6 caras. Calcula los parámetros de esta variable aleatoria.**

Media: $\mu = 7$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{5{,}852} = 2{,}419$

004 **¿Puedes encontrar una variable aleatoria discreta que proceda de una variable estadística continua? ¿Y lo contrario?**

Consideramos la variable estadística cuantitativa continua «altura de las personas de un país, medida en metros». Definimos sobre esta variable estadística la variable aleatoria:

Para cada altura $h \rightarrow X(h) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad h > 1 \end{cases}$

Esta variable está definida para cualquier suceso elemental de la variable estadística, es decir, cada una de las alturas; además, es discreta, pues solo toma dos valores.

Por tanto, de una variable estadística continua se puede obtener una variable aleatoria discreta, pero no a la inversa, pues un número finito de valores no puede tener un número infinito de imágenes.

005 En el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos dados de 6 caras, consideramos la variable aleatoria X, que asocia a cada suceso elemental el producto de las puntuaciones que se ven. Halla y representa las funciones de probabilidad y de distribución.

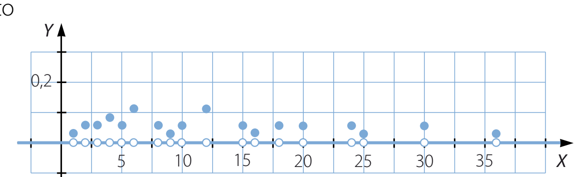
$X(1, 1) = 1$	$X(1, 2) = 2$	$X(1, 3) = 3$	$X(1, 4) = 4$	$X(1, 5) = 5$	$X(1, 6) = 6$
$X(2, 1) = 2$	$X(2, 2) = 4$	$X(2, 3) = 6$	$X(2, 4) = 8$	$X(2, 5) = 10$	$X(2, 6) = 12$
$X(3, 1) = 3$	$X(3, 2) = 6$	$X(3, 3) = 9$	$X(3, 4) = 12$	$X(3, 5) = 15$	$X(3, 6) = 18$
$X(4, 1) = 4$	$X(4, 2) = 8$	$X(4, 3) = 12$	$X(4, 4) = 16$	$X(4, 5) = 20$	$X(4, 6) = 24$
$X(5, 1) = 5$	$X(5, 2) = 10$	$X(5, 3) = 15$	$X(5, 4) = 20$	$X(5, 5) = 25$	$X(5, 6) = 30$
$X(6, 1) = 6$	$X(6, 2) = 12$	$X(6, 3) = 18$	$X(6, 4) = 24$	$X(6, 5) = 30$	$X(6, 6) = 36$

X	$P(X = x_i)$	$P(X \le x_i)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{36}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$
5	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$
6	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{18}$
8	$\frac{1}{18}$	$\frac{4}{9}$
9	$\frac{1}{36}$	$\frac{17}{36}$

X	$P(X = x_i)$	$P(X \le x_i)$
10	$\frac{1}{18}$	$\frac{19}{36}$
12	$\frac{1}{9}$	$\frac{23}{36}$
15	$\frac{1}{18}$	$\frac{25}{36}$
16	$\frac{1}{36}$	$\frac{13}{18}$
18	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{9}$
20	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{6}$
24	$\frac{1}{18}$	$\frac{8}{9}$
25	$\frac{1}{36}$	$\frac{11}{12}$
30	$\frac{1}{18}$	$\frac{35}{36}$
36	$\frac{1}{36}$	1

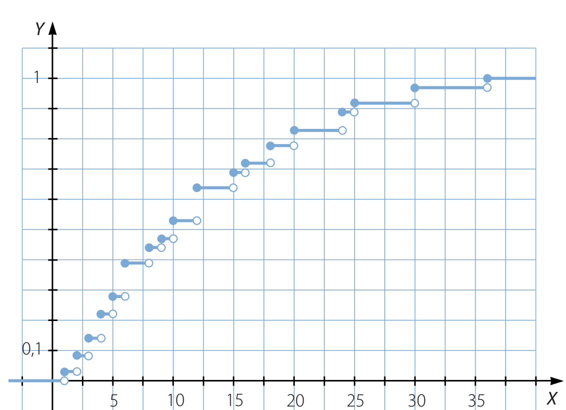
La función de probabilidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{si } x = 1, 9, 16, 25, 36 \\ \frac{1}{18} & \text{si } x = 2, 3, 5, 8, 10, 15, 18, 20, 24, 30 \\ \frac{1}{12} & \text{si } x = 4 \\ \frac{1}{9} & \text{si } x = 6, 12 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

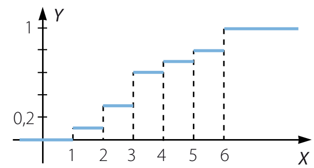


La función de distribución es:

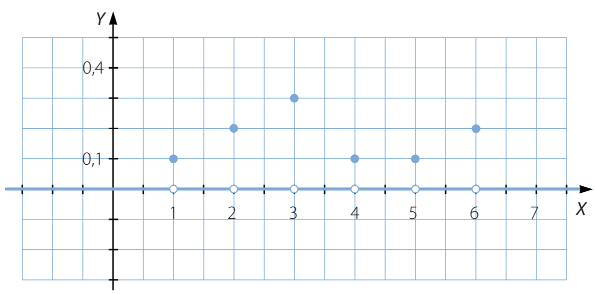
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 1 \\ \dfrac{1}{36} & \text{si } 1 \le x < 2 \\ \dfrac{1}{12} & \text{si } 2 \le x < 3 \\ \dfrac{5}{36} & \text{si } 3 \le x < 4 \\ \dfrac{2}{9} & \text{si } 4 \le x < 5 \\ \dfrac{5}{18} & \text{si } 5 \le x < 6 \\ \dfrac{7}{18} & \text{si } 6 \le x < 8 \\ \dfrac{4}{9} & \text{si } 8 \le x < 9 \\ \dfrac{17}{36} & \text{si } 9 \le x < 10 \\ \dfrac{19}{36} & \text{si } 10 \le x < 12 \\ \dfrac{23}{36} & \text{si } 12 \le x < 15 \\ \dfrac{25}{36} & \text{si } 15 \le x < 16 \\ \dfrac{13}{18} & \text{si } 16 \le x < 18 \\ \dfrac{7}{9} & \text{si } 18 \le x < 20 \\ \dfrac{5}{6} & \text{si } 20 \le x < 24 \\ \dfrac{8}{9} & \text{si } 24 \le x < 25 \\ \dfrac{11}{12} & \text{si } 25 \le x < 30 \\ \dfrac{35}{36} & \text{si } 30 \le x < 36 \\ 1 & \text{si } 36 \le x < +\infty \end{cases}$$



006 **Esta es la gráfica de una función de distribución. Halla y representa la función de probabilidad.**



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 1 \\ 0{,}1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0{,}3 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0{,}6 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0{,}7 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 0{,}8 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si } 6 \leq x < +\infty \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0{,}1 & \text{si } x = 1, 4, 5 \\ 0{,}2 & \text{si } x = 2, 6 \\ 0{,}3 & \text{si } x = 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



007 **Comprueba si la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale un 5, al lanzar 4 veces un dado de seis caras, sigue una distribución binomial.**

La variable es discreta, porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3 y 4.

$n = 4$ es el número de veces que se realiza el experimento.

Sea A = «Salir un 5», entonces $P(A) = \frac{1}{6}$.

Los experimentos son independientes, porque lo que sucede en un lanzamiento no influye en el siguiente.

Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B\left(4, \frac{1}{6}\right)$

008 **Calcula la probabilidad de que la variable aleatoria, *X*, que cuenta el número de veces que sale un 5 en 4 tiradas de un dado, sea mayor o igual que 3.**

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 0{,}0162$$

009 **Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que obtengo, al sacar tres veces una bola de un recipiente que contiene 2 bolas blancas y 3 rojas, y después de anotar el color, devolver la bola al recipiente. Calcula la probabilidad de que obtenga 2 bolas blancas.**

$$X \equiv B\left(3, \frac{2}{5}\right) \qquad P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} = 0{,}288$$

010 Si consideramos el mismo experimento de la actividad anterior, calcula.

a) La probabilidad de que todas las bolas sean del mismo color.

b) La probabilidad de obtener alguna bola de color rojo.

a) $P(X = 3) + P(X = 0) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^0 + \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 0{,}28$

b) $1 - P(X = 3) = 1 - \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^0 = 0{,}936$

011 Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que obtengo, al sacar tres veces una bola de un recipiente que contiene 2 bolas blancas y 3 rojas, y después de anotar el color, devolver la bola al recipiente. Calcula, utilizando la tabla de la distribución binomial, la probabilidad de que haya anotado 2 bolas blancas.

$X \equiv B(3; 0{,}4)$

$P(X = 2) = 0{,}288$

012 Si consideramos el mismo experimento de la actividad anterior, calcula.

a) La probabilidad de que todas las bolas sean del mismo color.

b) La probabilidad de obtener alguna bola de color rojo.

a) $P(X = 3) + P(X = 0) = 0{,}064 + 0{,}216 = 0{,}28$

b) $1 - P(X = 3) = 1 - 0{,}064 = 0{,}936$

013 Calcula el valor de k para que la siguiente función sea una función de densidad, y halla la función de distribución asociada a ella.

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^2 kx\,dx = \left[\frac{kx^2}{2}\right]_0^2 = 2k \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$$

014 Halla la función de densidad que corresponde a esta función de distribución.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x < +\infty \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

015 Tipifica los siguientes valores de una variable aleatoria con $\mu = 3$ y $\sigma = 2$.

a) $x_1 = 3$ b) $x_2 = 4{,}5$ c) $x_3 = -0{,}5$ d) $x_4 = -1$

a) $\dfrac{3-3}{2} = 0$

b) $\dfrac{4{,}5-3}{2} = 0{,}75$

c) $\dfrac{-0{,}5-3}{2} = -1{,}75$

d) $\dfrac{-1-3}{2} = -2$

016 Compara los datos de estas distribuciones.

$$x_1 = 2 \text{ (con } \mu = 1, \sigma = 2)$$
$$x_2 = 1 \text{ (con } \mu = 2, \sigma = 1)$$
$$x_3 = 1{,}5 \text{ (con } \mu = 1{,}5; \sigma = 1{,}5)$$

$z_1 = \dfrac{2-1}{2} = 0{,}5$ $z_2 = \dfrac{1-2}{1} = -1$ $z_3 = \dfrac{1{,}5-1{,}5}{1{,}5} = 0$

$z_2 < z_3 < z_1$

017 Si la variable aleatoria X sigue una distribución normal $X \equiv N(5, 2)$, calcula las siguientes probabilidades.

a) $P(X < 2)$ c) $P(X = 4)$ e) $P(X < 7)$

b) $P(X > 3)$ d) $P(X = 6)$ f) $P(X = 8)$

a) $P(X < 2) = P\left(\dfrac{X-5}{2} < \dfrac{2-5}{2}\right) = P(Z < -1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$

b) $P(X > 3) = P\left(\dfrac{X-5}{2} > \dfrac{3-5}{2}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = 0{,}8413$

c) $P(X = 4) = 0$

d) $P(X = 6) = 0$

e) $P(X < 7) = P\left(\dfrac{X-5}{2} < \dfrac{7-5}{2}\right) = P(Z < 1) = 0{,}8413$

f) $P(X = 8) = 0$

018 Una variable aleatoria X se distribuye según una normal de media μ y desviación típica σ. Sabemos que los cuartiles de la distribución valen 12 y 36, respectivamente. ¿Cuánto valen la media μ y la desviación típica σ?

$$P(X < 12) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{12-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{12-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}25$$

$$\rightarrow P\left(Z < -\frac{12-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}75 \rightarrow -\frac{12-\mu}{\sigma} = 0{,}68 \rightarrow 12-\mu = -0{,}68\sigma$$

$$P(X < 36) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{36-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{36-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}75 \rightarrow \frac{36-\mu}{\sigma} = 0{,}68$$

$$\rightarrow 36-\mu = 0{,}68\sigma$$

$$\left.\begin{array}{l} 12-\mu = -0{,}68\sigma \\ 36-\mu = 0{,}68\sigma \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mu = 24 \\ \sigma = 17{,}647 \end{array}$$

019 Una fábrica de componentes elabora 2.000 circuitos electrónicos al día. Si la probabilidad de fabricar un circuito defectuoso es del 1 %, ¿cuál es la probabilidad de que en un día el número de circuitos defectuosos sea mayor que 50? ¿Y menor que 25?

$$X \equiv B(2.000;\ 0{,}01) \approx N(20;\ 4{,}45)$$

$$P(X > 50) = P\left(\frac{X-20}{4{,}45} > \frac{50-20}{4{,}45}\right) = P(Z > 6{,}74) = 1 - P(Z \leq 6{,}74) = 1 - 1 = 0$$

$$P(X < 25) = P\left(\frac{X-20}{4{,}45} < \frac{25-20}{4{,}45}\right) = P(Z < 1{,}12) = 0{,}8686$$

020 El 10 % de las personas de una ciudad afirma que no ve nunca televisión. Calcula la probabilidad de que, escogidas 100 personas al azar, haya al menos 14 personas que no vean televisión. ¿Qué probabilidad hay de que sean exactamente 14?

$$X \equiv B(100;\ 0{,}1) \approx N(10{,}3)$$

$$P(X \geq 14) = P\left(\frac{X-10}{3} \geq \frac{14-10}{3}\right) = P(Z \geq 1{,}33) = 1 - P(Z < 1{,}33) =$$
$$= 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$$

$$P(X = 14) = P(13{,}5 < X < 14{,}5) = P\left(\frac{13{,}5-10}{3} < \frac{X-10}{3} < \frac{14{,}5-10}{3}\right) =$$
$$= P(Z < 1{,}5) - P(Z < 1{,}17) = 0{,}9332 - 0{,}879 = 0{,}0542$$

021 En una urna hay 5 bolas rojas y 3 bolas azules. Se sacan 3 bolas y se anota el número de bolas azules que se han conseguido. Realiza una tabla con la distribución de probabilidad, y halla la media y la desviación típica.

X	$P(X = x_i)$	$P(X \leq x_i)$
0	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$
1	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{7}$
2	$\frac{15}{56}$	$\frac{55}{56}$
3	$\frac{1}{56}$	1

Media: $\mu = \frac{9}{8} = 1{,}125$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{0{,}502} = 0{,}709$

022 En el experimento aleatorio consistente en elegir al azar una ficha de dominó, se considera la variable X = «mayor número de las dos puntuaciones de la ficha».

Construye la distribución de probabilidad y halla la media, la desviación típica y la varianza.

X	$P(X=x_i)$	$P(X\leq x_i)$
0	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$
1	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{28}$
2	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{14}$
3	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{14}$
4	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$
5	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{4}$
6	$\frac{1}{4}$	1

Media: $\mu = \frac{112}{28} = 4$

Varianza: $\sigma^2 = 3$

Desviación típica: $\sigma = 1{,}732$

023 Se lanzan dos dados y se considera la variable aleatoria que a cada suceso elemental le hace corresponder la diferencia entre el mayor y el menor de los resultados de ambos dados.

a) Clasifica la variable aleatoria.

b) Describe la distribución de probabilidad en forma de tabla.

a) Es una variable discreta.

b)

X	$P(X=x_i)$	$P(X\leq x_i)$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
4	$\frac{1}{9}$	$\frac{17}{18}$
5	$\frac{1}{18}$	1

024 Hemos pintado tres caras de un dado con un 1, dos caras con un 2 y una cara con un 3. Si consideramos la variable que asigna a cada suceso elemental su puntuación:

a) Elabora una tabla con la distribución de probabilidad.

b) Halla la media y la desviación típica.

a)

X	$P(X = x_i)$	$P(X \leq x_i)$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	1

b) Media: $\mu = \frac{5}{3} = 1{,}667$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{0{,}554} = 0{,}745$

025 Un juego consiste en lanzar dos dados, anotar la suma de los resultados dividida entre 2 y aproximarla, por exceso, al número entero más próximo.

a) Realiza la distribución de probabilidad.

b) Calcula la media, la varianza y la desviación típica.

a)

X	$P(X = x_i)$	$P(X \leq x_i)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$
4	$\frac{11}{36}$	$\frac{13}{18}$
5	$\frac{7}{36}$	$\frac{11}{12}$
6	$\frac{1}{12}$	1

b) Media: $\mu = \frac{135}{36} = 3{,}75$

Varianza: $\sigma^2 = 1{,}52$

Desviación típica: $\sigma = 1{,}23$

026 Dada la siguiente tabla, que corresponde a los valores que toma una variable aleatoria X y a sus probabilidades:

X	4	5	6	7
$P(X)$	0,6	0,2	0,15	0,05

a) Comprueba que corresponde a una distribución de probabilidad.

b) Calcula la función de distribución.

c) Halla su media y su desviación típica.

a) $0{,}6 + 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}05 = 1$

b) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 4 \\ 0{,}6 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 0{,}8 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 0{,}95 & \text{si } 6 \leq x < 7 \\ 1 & \text{si } 7 \leq x < +\infty \end{cases}$$

c) Media: $\mu = 4{,}65$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{0{,}8275} = 0{,}909$

027 Con la distribución de la actividad anterior, determina las siguientes probabilidades.

a) $P(X > 4)$
b) $P(X < 6)$
c) $P(4 \leq X < 7)$
d) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$

a) $P(X > 4) = 0{,}4$
b) $P(X < 6) = 0{,}8$
c) $P(4 \leq X < 7) = 0{,}95$
d) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(3{,}741 < X < 5{,}559) = 0{,}8$

028 Identifica las variables aleatorias que siguen una distribución binomial.

a) Tenemos tres fichas blancas y cinco fichas azules en una bolsa. Sacamos cuatro fichas y contamos el número de fichas que son blancas.
b) En la situación anterior sacamos una ficha, anotamos su color y la devolvemos a la bolsa. Repetimos el experimento 3 veces y anotamos el número de fichas de color blanco.
c) Lanzamos un dado diez veces y anotamos las veces que sale el número 1.
d) Se lanza un dado y si sale un número par, se vuelve a lanzar el mismo dado, pero si sale un número impar se lanza un dado con forma de tetraedro y caras numeradas del 1 al 4. Se cuenta el número de las veces que sale el número 3.
e) En una ciudad, el 10 % de la población tiene los ojos de color azul. Se eligen, al azar, 20 personas y se anota el número de ellas que tiene los ojos azules.

a) La variable aleatoria no sigue una distribución binomial.
b) La variable es discreta porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3.
$n = 3$ es el número de veces que se realiza el experimento.
Sea A = «Salir una ficha blanca», entonces $P(A) = \frac{3}{8}$.
Los experimentos son independientes, porque lo que sucede en una extracción no influye en la siguiente.
Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B\left(3, \frac{3}{8}\right)$
c) La variable es discreta porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.
$n = 10$ es el número de veces que se realiza el experimento.
Sea A = «Salir un 1», entonces $P(A) = \frac{1}{6}$.
Los experimentos son independientes, porque lo que sucede en un lanzamiento no influye en el siguiente.
Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B\left(10, \frac{1}{6}\right)$
d) La variable aleatoria no sigue una distribución binomial.
e) La variable es discreta, porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20.
$n = 20$ es el número de veces que se realiza el experimento.
Sea A = «Tener los ojos azules», entonces $P(A) = 0{,}1$.
Los experimentos son independientes, porque el color de los ojos de una persona no influye en el color de los ojos de la otra persona.
Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B(20; 0{,}1)$

029 Calcula las probabilidades que se indican en las siguientes distribuciones binomiales.

a) En $B(8; 0{,}2)$ $P(X=4)$, $P(X=1)$, $P(X=0)$

b) En $B(12; 0{,}9)$ $P(X=2)$, $P(X<3)$, $P(X\geq 11)$

c) En $B(6; 0{,}8)$ $P(2\leq X\leq 5)$, $P(1\leq X\leq 4)$

a) $P(X=4)=\binom{8}{4}\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8^4=0{,}045875$ $P(X=1)=\binom{8}{1}\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^7=0{,}33554$

$P(X=0)=\binom{8}{0}\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^8=0{,}16777$

b) $P(X=2)=\binom{12}{2}\cdot 0{,}9^2\cdot 0{,}1^{10}=0{,}000000005346$

$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$
$=0{,}000000000001+0{,}000000000108+0{,}000000005346=0{,}000000005455$

$P(X\geq 11)=P(X=11)+P(X=12)=0{,}37657+0{,}28243=0{,}659$

c) $P(2\leq X\leq 5)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$
$=0{,}01536+0{,}08192+0{,}24576+0{,}39322=0{,}73626$

$P(1\leq X\leq 4)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=$
$=0{,}001536+0{,}001536+0{,}08192+0{,}24576=0{,}344576$

030 Haz la tabla de la distribución de una distribución $B(5; 0{,}8)$ y comprueba que se verifica que $\mu=np$ y $\sigma=\sqrt{np(1-p)}$.

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

$\mu=5\cdot 0{,}8=4$ $\sigma=\sqrt{0{,}8}=0{,}89=\sqrt{5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}$

031 La probabilidad de que un lanzamiento dé en el blanco es de $\frac{2}{3}$. Efectuamos 8 lanzamientos.

a) Determina la probabilidad de acertar 3 veces en el blanco.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que den en el blanco más de 2 lanzamientos?

c) ¿Y de que no acierte ninguno?

d) Determina la probabilidad de que el número de lanzamientos que acierten en el blanco sea mayor o igual que 1 y menor o igual que 4.

a) $P(X=3)=\binom{8}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5=0{,}06828$

b) $P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2))=$
$=1-(0{,}0001524+0{,}002438+0{,}01707)=0{,}9803$

c) $P(X=0)=\binom{8}{0}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^8=0{,}0001524$

d) $P(1\leq X\leq 4)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=$
$=0{,}002438+0{,}01707+0{,}06828+0{,}1707=0{,}2585$

032 Una máquina que fabrica discos compactos consigue fabricar un 90 % de discos sin error. Si escogemos 10 de ellos al azar, calcula las siguientes probabilidades.

a) No hay ninguno defectuoso.

b) Hay más de uno defectuoso.

a) $P(X=0)=\binom{10}{0}\cdot 0{,}1^0\cdot 0{,}9^{10}=0{,}3487$

b) $P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-(P(X=0)+P(X=1))=1-(0{,}3487+0{,}3874)=0{,}2639$

033 Un examen tipo test tiene 30 preguntas a las que se ofrecen cuatro respuestas posibles.

a) Si se responde al azar, ¿cuál es la probabilidad de acertar más de dos preguntas?

b) Si para aprobar hay que tener más de 15 respuestas correctas, ¿cuál es la probabilidad de obtener un aprobado?

$X\equiv B(30;\ 0{,}25)$

$$\left.\begin{array}{l} np=7{,}5>5\\ n(1-p)=22{,}5>5\end{array}\right\}\rightarrow X\equiv B(30;\ 0{,}25)\approx N(7{,}5;\ 2{,}37)$$

a) $P(X>2)=P\left(\frac{X-7{,}5}{2{,}37}>\frac{2-7{,}5}{2{,}37}\right)=P(Z>-2{,}32)=P(Z<2{,}32)=0{,}9898$

b) $P(X>15)=P\left(\frac{X-7{,}5}{2{,}37}>\frac{15-7{,}5}{2{,}37}\right)=P(Z>3{,}16)=1-P(Z\le 3{,}16)=$
$=1-0{,}9992=0{,}0008$

034 Se lanza el dado 25 veces. Cada vez que se obtiene un número mayor que 2 gana Eva. En caso contrario, gana Daniel.

a) Describe la función de probabilidad y la función de distribución.

b) ¿Cuáles son la media y la desviación típica de esta distribución?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que Eva gane exactamente 3 veces?

d) ¿Cual es la probabilidad de que Daniel gane más de 22 veces?

a) La función de probabilidad es: $f(x)=\begin{cases}\binom{25}{x}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{25-x} & \text{si } x=0,1,2,\dots,25\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$

La función de distribución es: $F(x)=\sum_{-\infty}^{x}\binom{25}{x}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{25-x}$

b) $\mu=25\cdot\frac{2}{3}=16{,}67$

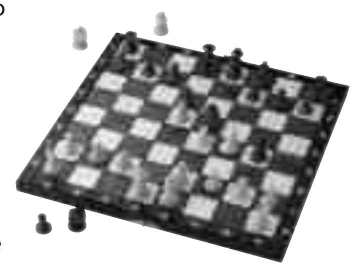
$\sigma=\sqrt{25\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}=2{,}36$

c) $\left.\begin{array}{l} np = 16{,}67 > 5 \\ n(1-p) = 8{,}33 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(25;\ 0{,}66) \approx N(16{,}67;\ 2{,}36)$

$$P(X = 3) = P(2{,}5 < X < 3{,}5) = P\left(\frac{2{,}5 - 16{,}67}{2{,}36} < \frac{X - 16{,}67}{2{,}36} < \frac{3{,}5 - 16{,}67}{2{,}36}\right) =$$
$$= P(-6 < Z < -5{,}5) = P(5{,}5 < Z < 6) = 0$$

d) $P(X < 3) = P\left(\frac{X - 16{,}67}{2{,}36} < \frac{3 - 16{,}67}{2{,}36}\right) = P(Z < -5{,}79) = 1 - P(Z \le 5{,}79) = 0$

035 De cada 10 veces que mi hermano juega conmigo al ajedrez, me gana 7 veces.



a) ¿Cuál es la probabilidad de que me gane 1 vez?
b) ¿Y de hacer tablas?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que me gane entre 1 y 3 veces, ambos números incluidos?
d) Si apostamos que, en 10 partidas, yo le ganaré al menos 4 veces, ¿cuál es la probabilidad de ganar la apuesta?

$X \equiv B(10;\ 0{,}7)$

a) $P(X = 1) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}7^1 \cdot 0{,}3^9 = 0{,}0001378$

b) $P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}7^5 \cdot 0{,}3^5 = 0{,}1029$

c) $P(1 \le X \le 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$
$$= \binom{10}{1} \cdot 0{,}7^1 \cdot 0{,}3^9 + \binom{10}{2} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^8 + \binom{10}{3} \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^7 =$$
$$= 0{,}0001378 + 0{,}001447 + 0{,}009002 = 0{,}0105868$$

d) $P(X < 6) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$
$$= 0{,}000005904 + 0{,}0001378 + 0{,}001447 + 0{,}009002 + 0{,}03676 + 0{,}1029 =$$
$$= 0{,}15025$$

036 En un laboratorio de análisis clínicos saben que el 98 % de las pruebas de diabetes que realizan resulta negativo. Si han recibido 10 muestras para analizar:

a) Determina la probabilidad de que haya 2 personas a las que la prueba les dé positivo.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la prueba resulte positiva a más de 1 persona?

$X \equiv B(10;\ 0{,}02)$

a) $P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^8 = 0{,}01531$

b) $P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$
$$= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot 0{,}98^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^9 = 1 - 0{,}8171 - 0{,}1667 = 0{,}0162$$

037 Si 1 de cada 5 turistas que entra en una tienda compra algún artículo y hoy hemos atendido a 8 personas, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) 3 personas compraron algún artículo.

b) Hubo entre 5 y 7 personas, ambos números incluidos, que adquirieron algún artículo.

c) Más de 2 personas compraron en la tienda.

$X \equiv B(8; 0{,}2)$

a) $P(X = 3) = 0{,}1468$

b) $P(5 \le X \le 7) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) =$
$= 0{,}0092 + 0{,}0011 + 0{,}0001 = 0{,}0104$

c) $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) =$
$= 1 - 0{,}1678 - 0{,}3355 - 0{,}2936 = 0{,}2031$

038 El 2 ‰ de las pilas fabricadas llegan descargadas al proceso de envasado. Si escogemos 12 pilas al azar, calcula la probabilidad de que haya más de 2 pilas descargadas.

$X \equiv B(12; 0{,}002)$

$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) =$

$= 1 - \binom{12}{0} \cdot 0{,}002^0 \cdot 0{,}998^{12} - \binom{12}{1} \cdot 0{,}002^1 \cdot 0{,}998^{11} - \binom{12}{2} \cdot 0{,}002^2 \cdot 0{,}998^{10} =$

$= 1 - 0{,}97626 - 0{,}023477 - 0{,}00025877 = 0{,}000004$

039 Un estudio médico asegura que 1 de cada 8 niños tiene gingivitis. Escogidos 7 niños al azar:

a) Determina la probabilidad de que haya exactamente 2 niños con la enfermedad.

b) Los dentistas han decidido que, si en el grupo hay más de 2 niños enfermos, se iniciaría un tratamiento a todo el grupo. ¿Cuál es la probabilidad de que esto suceda?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la padezcan 6 niños o menos?

$X \equiv B(7; 0{,}125)$

a) $P(X = 2) = \binom{7}{2} \cdot 0{,}125^2 \cdot 0{,}875^5 = 0{,}1683$

b) $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) =$

$= 1 - \binom{7}{0} \cdot 0{,}125^0 \cdot 0{,}875^7 - \binom{7}{1} \cdot 0{,}125^1 \cdot 0{,}875^6 - \binom{7}{2} \cdot 0{,}125^2 \cdot 0{,}875^5 =$

$= 1 - 0{,}3927 - 0{,}3927 - 0{,}1683 = 0{,}0463$

c) $P(X \le 6) = 1 - P(X > 6) = 1 - P(X = 7) = 1 - \binom{7}{7} \cdot 0{,}125^7 \cdot 0{,}875^0 =$

$= 1 - 0{,}00000048 = 0{,}99999952$

040 El 20 % de la población de una ciudad es inmigrante de procedencia africana. Se eligen cinco personas al azar. Determina la probabilidad de que:

a) Haya un inmigrante africano.
b) Sean dos o más inmigrantes africanos.
c) Las cinco sean inmigrantes africanos.
d) Haya, al menos, un africano.
e) Sean cuatro inmigrantes africanos.

$X \equiv B(5;\ 0{,}2)$

a) $P(X=1)=\binom{5}{1}\cdot 0{,}2^1\cdot 0{,}8^4=0{,}4096$

b) $P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-(P(X=0)+P(X=1))=$
$$=1-\binom{5}{0}\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^5-\binom{5}{1}\cdot 0{,}2^1\cdot 0{,}8^4=1-0{,}3277-0{,}4096=0{,}2627$$

c) $P(X=5)=\binom{5}{5}\cdot 0{,}2^5\cdot 0{,}8^0=0{,}00032$

d) $P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\binom{5}{0}\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^5=1-0{,}3277=0{,}6723$

e) $P(X=4)=\binom{5}{4}\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8^1=0{,}0064$

041 Juan suele dar en el blanco con una de cada tres flechas que lanza a la diana.

a) ¿Es cierto que si lanza 3 flechas, al menos una de ellas dará en el blanco?
b) ¿Qué probabilidad hay de que eso suceda?
c) Y si lanza 6 flechas, ¿puede estar seguro de que alguna de sus flechas va a dar en el blanco?
d) ¿Cuántas flechas debería lanzar para asegurar, con una probabilidad de más del 95%, que va a conseguirlo?

a) No, la probabilidad no puede asegurar el resultado del lanzamiento.

b) $X\equiv B\left(3,\ \frac{1}{3}\right)$

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\binom{3}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=1-0{,}2963=0{,}7037$$

c) No, la probabilidad no varía y no puede asegurar el resultado.

d) $X\equiv B\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\binom{n}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n=0{,}95$$

$$\rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n=0{,}05\rightarrow n=\frac{\log 0{,}05}{\log\frac{2}{3}}=7{,}21$$

A partir de 8 flechas, la probabilidad de que al menos una flecha dé en el blanco es más del 95%.

042 Comprueba que esta función es de densidad.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 0{,}04x + 0{,}06 & \text{si } 1 \le x \le 6 \\ 0 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

a) Halla la función de distribución.

b) Calcula las siguientes probabilidades.

$$P(X < 2) \qquad P(X > 4) \qquad P(2 < X < 4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{6} (0{,}04x + 0{,}06)\,dx = \left[0{,}02x^2 + 0{,}06x\right]_1^6 = 1{,}08 - 0{,}08 = 1$$

a) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 1 \\ 0{,}02x^2 + 0{,}06x & \text{si } 1 \le x \le 6 \\ 1 & \text{si } 6 < x < +\infty \end{cases}$

b) $P(X < 2) = F(2) = 0{,}2$

$P(X > 4) = 1 - P(X \le 4) = 1 - F(4) = 1 - 0{,}56 = 0{,}44$

$P(2 < X < 4) = P(X < 4) - P(X < 2) = 0{,}56 - 0{,}2 = 0{,}36$

043 Calcula el valor de k para que la siguiente función sea una función de densidad, y halla su función de distribución.

$$f(x) = \begin{cases} -0{,}5x + k & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (-0{,}5x + k)\,dx = \left[-0{,}25x^2 + kx\right]_{-1}^{1} = 2k \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < -1 \\ -0{,}25x^2 + 0{,}5x & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x < +\infty \end{cases}$$

044 La función de distribución de una variable continua es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x-1}{3} & \text{si } 1 \le x \le 4 \\ 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Determina las siguientes probabilidades.

a) $P(2 \le X \le 3)$ b) $P(X \le 3)$ c) $P(1{,}5 \le X \le 2{,}5)$ d) $P(X > 2)$

a) $P(2 \le X \le 3) = P(X \le 3) - P(X \le 2) = F(3) - F(2) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$

b) $P(X \le 3) = F(3) = \dfrac{2}{3}$

c) $P(1{,}5 \le X \le 2{,}5) = P(X \le 2{,}5) - P(X \le 1{,}5) = F(2{,}5) - F(1{,}5) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$

d) $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - F(2) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

045 Una variable aleatoria tiene la siguiente función de distribución.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in(-\infty,\ 3) \\ \dfrac{x^2+x-12}{8} & \text{si } x\in[3,\ 4] \\ 1 & \text{si } x\in(4,\ +\infty) \end{cases}$$

Calcula las siguientes probabilidades.

a) $P(3\le X\le 4)$

b) $P(3{,}5\le X<3{,}6)$

c) $P(X\le 3{,}5)$

d) $P(X>3{,}8)$

a) $P(3\le X\le 4)=P(X\le 4)-P(X\le 3)=F(4)-F(3)=1-0=1$

b) $P(3{,}5\le X<3{,}6)=P(X<3{,}6)-P(X\le 3{,}5)=F(3{,}6)-F(3{,}5)=0{,}57-0{,}47=0{,}1$

c) $P(X\le 3{,}5)=F(3{,}5)=0{,}47$

d) $P(X>3{,}8)=1-P(X\le 3{,}8)=1-F(3{,}8)=1-0{,}78=0{,}22$

046 La función de densidad de una variable aleatoria continua es:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{8}x^2 & \text{si } x\in[0,\ 2] \\ 0 & \text{si } x\notin[0,\ 2] \end{cases}$$

Halla su función de distribución y las siguientes probabilidades.

a) $P(0{,}5<X<1{,}5)$

b) $P(1<X<2)$

c) $P(X<1{,}5)$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } -\infty<x<0 \\ \dfrac{x^3}{8} & \text{si } 0\le x\le 2 \\ 1 & \text{si } 2<x<+\infty \end{cases}$$

a) $P(0{,}5<X<1{,}5)=P(X<1{,}5)-P(X<0{,}5)=F(1{,}5)-F(0{,}5)=0{,}42-0{,}015=0{,}405$

b) $P(1<X<2)=P(X<2)-P(X<1)=F(2)-F(1)=1-0{,}125=0{,}875$

c) $P(X<1{,}5)=F(1{,}5)=0{,}42$

047 En una distribución $N(0,\ 1)$, calcula las probabilidades.

a) $P(Z<0{,}73)$

b) $P(Z<2{,}05)$

c) $P(Z\le 1{,}77)$

d) $P(Z<0{,}274)$

e) $P(Z>-0{,}38)$

f) $P(Z>-1{,}297)$

g) $P(Z=-2{,}75)$

h) $P(Z\ge -1{,}04)$

a) $P(Z<0{,}73)=0{,}7673$

b) $P(Z<2{,}05)=0{,}9798$

c) $P(Z\le 1{,}77)=0{,}9616$

d) $P(Z<0{,}274)=0{,}6079$

e) $P(Z>-0{,}38)=P(Z<0{,}38)=0{,}648$

f) $P(Z>-1{,}297)=P(Z<1{,}297)=0{,}9026$

g) $P(Z=-2{,}75)=0$

h) $P(Z\ge -1{,}04)=P(Z\le 1{,}04)=0{,}8508$

048 En una distribución $N(0, 1)$, halla las siguientes probabilidades.

a) $P(Z > 3{,}58)$
b) $P(Z \geq 1{,}3487)$
c) $P(Z = 2{,}107)$
d) $P(Z \geq 0{,}53)$
e) $P(Z < -0{,}33)$
f) $P(Z < -1{,}334)$
g) $P(Z \leq -2{,}19)$
h) $P(Z < -3{,}487)$

a) $P(Z > 3{,}58) = 1 - P(Z < 3{,}58) = 1 - 0{,}9999 = 0{,}0001$

b) $P(Z \geq 1{,}3487) = 1 - P(Z \leq 1{,}3487) = 1 - 0{,}9113 = 0{,}0887$

c) $P(Z = 2{,}107) = 0$

d) $P(Z \geq 0{,}53) = 1 - P(Z \leq 0{,}53) = 1 - 0{,}7019 = 0{,}2981$

e) $P(Z < -0{,}33) = 1 - P(Z \leq 0{,}33) = 1 - 0{,}6293 = 0{,}3707$

f) $P(Z < -1{,}334) = 1 - P(Z \leq 1{,}334) = 1 - 0{,}9088 = 0{,}0912$

g) $P(Z \leq -2{,}19) = 1 - P(Z \leq 2{,}19) = 1 - 0{,}9857 = 0{,}0143$

h) $P(Z < -3{,}487) = 1 - P(Z \leq 3{,}487) = 1 - 0{,}9999 = 0{,}0001$

049 En una distribución $N(0, 1)$, obtén las probabilidades.

a) $P(0{,}26 < Z < 0{,}39)$
b) $P(1{,}16 < Z < 2{,}03)$
c) $P(-0{,}64 < Z < 1{,}36)$
d) $P(-0{,}56 < Z < 3{,}92)$
e) $P(-2{,}6 < Z < -0{,}4329)$
f) $P(-1{,}49 < Z < -1{,}07)$

a) $P(0{,}26 < Z < 0{,}39) = P(Z < 0{,}39) - P(Z < 0{,}26) = 0{,}6517 - 0{,}6026 = 0{,}0491$

b) $P(1{,}16 < Z < 2{,}03) = P(Z < 2{,}03) - P(Z < 1{,}16) = 0{,}9788 - 0{,}877 = 0{,}1018$

c) $P(-0{,}64 < Z < 1{,}36) = P(Z < 1{,}36) - (1 - P(Z < 0{,}64)) = 0{,}9131 - 1 + 0{,}7389 = 0{,}652$

d) $P(-0{,}56 < Z < 3{,}92) = P(Z < 3{,}92) - (1 - P(Z < 0{,}56)) = 0{,}9999 - 1 + 0{,}7123 = 0{,}7122$

e) $P(-2{,}6 < Z < -0{,}4329) = P(Z < 2{,}6) - P(Z < 0{,}4329) = 0{,}9953 - 0{,}6674 = 0{,}3279$

f) $P(-1{,}49 < Z < -1{,}07) = P(Z < 1{,}49) - P(Z < 1{,}07) = 0{,}9319 - 0{,}8577 = 0{,}0742$

050 Calcula el valor de k para que se verifiquen las igualdades en la distribución $N(0, 1)$.

a) $P(Z < k) = 0{,}9608$
b) $P(Z < k) = 0{,}3192$
c) $P(Z > k) = 0{,}9573$
d) $P(Z \geq k) = 0{,}0113$

a) $k = 1{,}76$

b) $P(Z < k) = 0{,}3192 \rightarrow P(Z < -k) = 0{,}6808 \rightarrow -k = 0{,}47 \rightarrow k = -0{,}47$

c) $P(Z > k) = 0{,}9573 \rightarrow P(Z < -k) = 0{,}9573 \rightarrow -k = 1{,}72 \rightarrow k = -1{,}72$

d) $P(Z \geq k) = 0{,}0113 \rightarrow P(Z < k) = 0{,}9887 \rightarrow k = 2{,}28$

051 Determina las siguientes probabilidades en una distribución $N(12, 2)$.

a) $P(X < 12{,}36)$
b) $P(X < 16{,}4)$
c) $P(X \leq 17{,}01)$
d) $P(X < 12{,}0273)$
e) $P(X > 11{,}82)$
f) $P(X > 9{,}84)$
g) $P(X = 12{,}55)$
h) $P(X \geq 7{,}89)$

a) $P(X < 12{,}36) = P\left(\dfrac{X-12}{2} < \dfrac{12{,}36-12}{2}\right) = P(Z < 0{,}18) = 0{,}5714$

b) $P(X < 16{,}4) = P\left(\dfrac{X-12}{2} < \dfrac{16{,}4-12}{2}\right) = P(Z < 2{,}2) = 0{,}9861$

c) $P(X \leq 17{,}01) = P\left(\dfrac{X-12}{2} \leq \dfrac{17{,}01-12}{2}\right) = P(Z < 2{,}51) = 0{,}994$

d) $P(X < 12{,}0273) = P\left(\dfrac{X-12}{2} < \dfrac{12{,}0273-12}{2}\right) = P(Z < 0{,}014) = 0{,}5056$

e) $P(X > 11{,}82) = P\left(\dfrac{X-12}{2} < \dfrac{11{,}82-12}{2}\right) = P(Z < -0{,}09) = 1 - P(Z \leq 0{,}09) =$
$= 1 - 0{,}5359 = 0{,}4641$

f) $P(X > 9{,}84) = P\left(\dfrac{X-12}{2} < \dfrac{9{,}84-12}{2}\right) = P(Z < -1{,}08) = 1 - P(Z \leq 1{,}08) =$
$= 1 - 0{,}8599 = 0{,}1401$

g) $P(X = 12{,}55) = 0$

h) $P(X \geq 7{,}89) = P\left(\dfrac{X-12}{2} < \dfrac{7{,}89-12}{2}\right) = P(Z < -2{,}06) = 1 - P(Z \leq 2{,}06) =$
$= 1 - 0{,}9803 = 0{,}0197$

052 En una distribución $N(56, 4)$, calcula las siguientes probabilidades.

a) $P(X > 68{,}4)$ c) $P(X = 56)$ e) $P(X < 53{,}3)$ g) $P(X \leq 46{,}92)$
b) $P(X \geq 62{,}45)$ d) $P(X \geq 52{,}45)$ f) $P(X \geq 57{,}32)$ h) $P(X < 46{,}877)$

a) $P(X > 68{,}4) = P\left(\dfrac{X-56}{4} > \dfrac{68{,}4-56}{4}\right) = P(Z > 3{,}1) = 1 - P(Z \leq 3{,}1) =$
$= 1 - 0{,}999 = 0{,}001$

b) $P(X \geq 62{,}45) = P\left(\dfrac{X-56}{4} \geq \dfrac{62{,}45-56}{4}\right) = P(Z \geq 1{,}61) = 1 - P(Z < 1{,}61) =$
$= 1 - 0{,}9463 = 0{,}0537$

c) $P(X = 56) = 0$

d) $P(X \geq 52{,}45) = P\left(\dfrac{X-56}{4} \geq \dfrac{52{,}45-56}{4}\right) = P(Z \geq -0{,}89) = P(Z \leq 0{,}89) = 0{,}8133$

e) $P(X < 53{,}3) = P\left(\dfrac{X-56}{4} < \dfrac{53{,}3-56}{4}\right) = P(Z < -0{,}68) = 1 - P(Z \leq 0{,}68) =$
$= 1 - 0{,}7517 = 0{,}2483$

f) $P(X \geq 57{,}32) = P\left(\dfrac{X-56}{4} \geq \dfrac{57{,}32-56}{4}\right) = P(Z \geq 0{,}33) = 1 - P(Z < 0{,}33) =$
$= 1 - 0{,}6293 = 0{,}3707$

g) $P(X \leq 46{,}92) = P\left(\dfrac{X-56}{4} \leq \dfrac{46{,}92-56}{4}\right) = P(Z \leq -2{,}27) = 1 - P(Z < 2{,}27) =$
$= 1 - 0{,}9884 = 0{,}0116$

h) $P(X < 46{,}877) = P\left(\dfrac{X-56}{4} < \dfrac{46{,}877-56}{4}\right) = P(Z < -2{,}28) = 1 - P(Z \leq 2{,}28) =$
$= 1 - 0{,}9887 = 0{,}0113$

053 En una distribución $N(90, 12)$, obtén estas probabilidades.

a) $P(106 < X < 120)$
b) $P(109 < X < 117,3)$
c) $P(84 < X < 112,6)$
d) $P(76,67 < X < 103,96)$
e) $P(58,89 < X < 82)$
f) $P(69 < X < 87)$

a) $P(106 < X < 120) = P\left(\frac{106-90}{12} < \frac{X-90}{12} < \frac{120-90}{12}\right) = P(1,33 < Z < 2,5) =$
$= P(Z < 2,5) - P(Z < 1,33) = 0,9938 - 0,9082 = 0,0856$

b) $P(109 < X < 117,3) = P\left(\frac{109-90}{12} < \frac{X-90}{12} < \frac{117,3-90}{12}\right) = P(1,58 < Z < 2,28) =$
$= P(Z < 2,28) - P(Z < 1,58) = 0,9887 - 0,9429 = 0,0458$

c) $P(84 < X < 112,6) = P\left(\frac{84-90}{12} < \frac{X-90}{12} < \frac{112,6-90}{12}\right) = P(-0,5 < Z < 1,88) =$
$= P(Z < 1,88) - (1 - P(Z < 0,5)) = 0,9699 - 1 + 0,6915 = 0,6614$

d) $P(76,67 < X < 103,96) = P\left(\frac{76,67-90}{12} < \frac{X-90}{12} < \frac{103,96-90}{12}\right) =$
$= P(-1,11 < Z < 1,16) = P(Z < 1,16) - (1 - P(Z < 1,11)) =$
$= 0,877 - 1 + 0,8665 = 0,7435$

e) $P(58,89 < X < 82) = P\left(\frac{58,89-90}{12} < \frac{X-90}{12} < \frac{82-90}{12}\right) =$
$= P(-2,59 < Z < -0,67) = P(Z < 2,59) - P(Z < 0,67) =$
$= 0,9952 - 0,7486 = 0,2466$

f) $P(69 < X < 87) = P\left(\frac{69-90}{12} < \frac{X-90}{12} < \frac{87-90}{12}\right) = P(-1,75 < Z < -0,25) =$
$= P(Z < 1,75) - P(Z < 0,25) = 0,9599 - 0,5987 = 0,3612$

054 Halla $a, b, c, \ldots$, para que en una distribución normal $N(108, 16)$ se cumpla que:

a) $P(X < a) = 0,8849$
b) $P(X < b) = 0,9972$
c) $P(X < c) = 0,3632$
d) $P(X \geq d) = 0,0495$
e) $P(X \geq e) = 0,5987$

a) $P(X < a) = 0,8849 \to P\left(\frac{X-108}{16} < \frac{a-108}{16}\right) = 0,8849 \to \frac{a-108}{16} = 1,2$
$\to a = 127,2$

b) $P(X < b) = 0,9972 \to P\left(\frac{X-108}{16} < \frac{b-108}{16}\right) = 0,9972 \to \frac{b-108}{16} = 2,77$
$\to b = 152,32$

c) $P(X < c) = 0,3632 \to P\left(\frac{X-108}{16} < \frac{c-108}{16}\right) = 0,3632$
$\to P\left(\frac{X-108}{16} \leq -\frac{c-108}{16}\right) = 0,6368 \to -\frac{c-108}{16} = 0,35$
$\to c = 102,4$

d) $P(X \geq d) = 0{,}0495 \rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} \geq \frac{d-108}{16}\right) = 0{,}0495$

$\rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} < \frac{d-108}{16}\right) = 0{,}9505 \rightarrow \frac{d-108}{16} = 1{,}65$

$\rightarrow d = 134{,}4$

e) $P(X \geq e) = 0{,}5987 \quad \rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} \geq \frac{e-108}{16}\right) = 0{,}5987$

$\rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} \leq -\frac{e-108}{16}\right) = 0{,}5987 \rightarrow -\frac{e-108}{16} = 0{,}25$

$\rightarrow e = 104$

055 El nivel de colesterol en una persona adulta sana sigue una distribución normal $N(192,12)$. Calcula la probabilidad de que una persona adulta sana tenga un nivel de colesterol:

a) Superior a 200 unidades.

b) Entre 180 y 220 unidades.

a) $P(X > 200) = P\left(\frac{X-192}{12} > \frac{200-192}{12}\right) = P(Z > 0{,}67) = 1 - P(Z \leq 0{,}67) =$
$= 1 - 0{,}7486 = 0{,}2514$

b) $P(180 < X < 220) = P\left(\frac{180-192}{12} < \frac{X-192}{12} < \frac{220-192}{12}\right) = P(-1 < Z < 2{,}33) =$
$= P(Z < 2{,}33) - (1 - P(Z < 1)) = 0{,}9901 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}8314$

056 La edad de un grupo de personas sigue una distribución $N(35,10)$.
Calcula la probabilidad de que una persona de ese grupo, elegida al azar, tenga:

a) Más de 40 años.

b) Entre 23 y 47 años.

c) Di entre qué edades estará comprendido el 50 % central de la distribución.

a) $P(X > 40) = P\left(\frac{X-35}{10} > \frac{40-35}{10}\right) = P(Z > 0{,}5) = 1 - P(Z \leq 0{,}5) =$
$= 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

b) $P(23 < X < 47) = P\left(\frac{23-35}{10} < \frac{X-35}{10} < \frac{47-35}{10}\right) = P(-1{,}2 < Z < 1{,}2) =$
$= P(Z < 1{,}2) - (1 - P(Z < 1{,}2)) = 2 \cdot 0{,}8849 - 1 = 0{,}7698$

c) $P(35 - a < X < 35 + a) = 0{,}5 \rightarrow P\left(\frac{35-a-35}{10} < \frac{X-35}{10} < \frac{35+a-35}{10}\right) =$

$= P\left(-\frac{a}{10} < Z < \frac{a}{10}\right) = P\left(Z < \frac{a}{10}\right) - \left(1 - P\left(Z < \frac{a}{10}\right)\right) =$

$= 2P\left(Z < \frac{a}{10}\right) - 1 = 0{,}5 \rightarrow P\left(Z < \frac{a}{10}\right) = 0{,}75 \rightarrow \frac{a}{10} = 0{,}68 \rightarrow a = 6{,}8$

El 50 % central de la distribución estará comprendido entre 28 y 42 años.

057 El peso de las ovejas adultas se distribuye normalmente con una media de 53 kg y una desviación típica de 2,4 kg.

a) ¿Qué porcentaje de las ovejas pesará entre 50 y 57 kg?

b) Si pretendemos separar una cuarta parte de las ovejas, siendo las más pesadas del rebaño, ¿a partir de qué peso se hará la separación?

a) $P(50 < X < 57) = P\left(\frac{50-53}{2,4} < \frac{X-53}{2,4} < \frac{57-53}{2,4}\right) = P(-1,25 < Z < 1,67) =$
$= P(Z < 1,67) - (1 - P(Z < 1,25)) = 0,9525 - 1 + 0,8944 = 0,8469$

b) $P(X > a) = 0,25 \rightarrow P\left(\frac{X-53}{2,4} > \frac{a-53}{2,4}\right) = P\left(Z > \frac{a-53}{2,4}\right) =$
$= 1 - P\left(Z \leq \frac{a-53}{2,4}\right) = 0,25 \rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-53}{2,4}\right) = 0,75$
$\rightarrow \frac{a-53}{2,4} = 0,68 \rightarrow a = 54,63$

La separación debe hacerse a partir de 54,63 kg.

058 En una distribución normal $N(\mu, \sigma)$:

$$P(X < 8) = 0,9938 \qquad P(X > 4,8) = 0,9332$$

determina μ y σ.

$P(X < 8) = 0,9938 \rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{8-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{8-\mu}{\sigma}\right) = 0,9938$
$\rightarrow \frac{8-\mu}{\sigma} = 2,5 \rightarrow 8 - \mu = 2,5\sigma$

$P(X > 4,8) = 0,9332 \rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{4,8-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{4,8-\mu}{\sigma}\right) =$
$= P\left(Z < -\frac{4,8-\mu}{\sigma}\right) = 0,9332 \rightarrow -\frac{4,8-\mu}{\sigma} = 1,5 \rightarrow 4,8 - \mu = -1,5\sigma$

$$\left.\begin{array}{r} 8-\mu = 2,5\sigma \\ 4,8-\mu = -1,5\sigma \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mu = 6 \\ \sigma = 0,8 \end{array}$$

059 Un fabricante de correas para relojes ha estudiado que el contorno de la muñeca de los varones sigue una distribución normal cuya media es 20,5 cm y la desviación típica es 1,5 cm.

a) ¿Qué porcentaje de la población tiene un contorno de muñeca de más de 23 cm?

b) Si fabricamos correas que midan entre 17 y 22 centímetros, ¿qué porcentaje de la población podrá usarlas?

c) Se pretende reducir costes fabricando menos variedad de longitudes de correas. Encuentra un intervalo $(20,5 - a; 20,5 + a)$ en el que se incluya el 95 % de los varones.

a) $P(X > 23) = P\left(\frac{X-20,5}{1,5} > \frac{23-20,5}{1,5}\right) = P(Z > 1,67) = 1 - P(Z \leq 1,67) =$
$= 1 - 0,9525 = 0,0475$

El 4,75 % de la población tiene un contorno de muñeca de más de 23 cm.

b) $P(17 < X < 22) = P\left(\frac{17 - 20,5}{1,5} < \frac{X - 20,5}{1,5} < \frac{22 - 20,5}{1,5}\right) = P(-2,33 < Z < 1) =$
$= P(Z < 1) - (1 - P(Z < 2,33)) = 0,8413 - 1 + 0,9901 = 0,8314$

Estas correas podrá usarlas el 83,14 % de la población.

c) $P(20,5 - a < X < 20,5 + a) = 0,95$
$\rightarrow P\left(\frac{20,5 - a - 20,5}{1,5} < \frac{X - 20,5}{1,5} < \frac{20,5 + a - 20,5}{1,5}\right) =$
$= P\left(-\frac{a}{1,5} < Z < \frac{a}{1,5}\right) = P\left(Z < \frac{a}{1,5}\right) - \left(1 - P\left(Z < \frac{a}{1,5}\right)\right) =$
$= 2P\left(Z < \frac{a}{1,5}\right) - 1 = 0,95 \rightarrow P\left(Z < \frac{a}{1,5}\right) = 0,975 \rightarrow \frac{a}{1,5} = 1,96 \rightarrow a = 2,94$

El intervalo en el que se encuentra el 95 % de los varones es (17,56; 23,44).

060 **Se ha comprobado que el tiempo medio que resiste un adulto sin respirar es de 40 segundos, con una desviación típica de 6,2 segundos, y que los datos anteriores siguen una distribución normal.**

a) Halla el porcentaje de personas que aguantan más de 53 segundos y menos de 30 segundos.

b) ¿Qué porcentaje resiste entre 30 y 50 segundos?

a) $P(X > 53) \cdot P(X < 30) = P\left(\frac{X - 40}{6,2} > \frac{53 - 40}{6,2}\right) \cdot P\left(\frac{X - 40}{6,2} < \frac{30 - 40}{6,2}\right) =$
$= P(Z > 2,09) \cdot P(Z < -1,61) = (1 - P(Z \leq 2,09)) \cdot (1 - P(Z \leq 1,61)) =$
$= (1 - 0,9817) \cdot (1 - 0,9463) = 0,00098$

El porcentaje de personas es del 0,09 %.

b) $P(30 < X < 50) = P\left(\frac{30 - 40}{6,2} < \frac{X - 40}{6,2} < \frac{50 - 40}{6,2}\right) = P(-1,61 < Z < 1,61) =$
$= P(Z < 1,61) - (1 - P(Z < 1,61)) = 2 \cdot 0,9463 - 1 = 0,8926$

El 89,26 % resiste entre 30 y 50 segundos.

061 El tiempo medio de espera de un viajero en una estación ferroviaria, medido en minutos, sigue una distribución normal $N(7{,}5; 2)$. Cada mañana 4.000 viajeros acceden a esa estación. Determina el número de viajeros que esperó:

a) Más de 9 minutos.

b) Menos de 6 minutos.

c) Entre 5 y 10 minutos.

d) Completa la frase: «Los 1.000 viajeros que menos tiempo tardaron en subir al tren tuvieron que esperar menos de … minutos».

a) $P(X > 9) = P\left(\dfrac{X-7{,}5}{2} > \dfrac{9-7{,}5}{2}\right) = P(Z > 0{,}75) = 1 - P(Z \leq 0{,}75) =$
$= 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$

$0{,}2266 \cdot 4.000 = 906{,}4 \rightarrow 906$ viajeros esperaron más de 9 minutos.

b) $P(X < 6) = P\left(\dfrac{X-7{,}5}{2} < \dfrac{6-7{,}5}{2}\right) = P(Z < -0{,}75) = 1 - P(Z \leq 0{,}75) =$
$= 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$

$0{,}2266 \cdot 4.000 = 906{,}4 \rightarrow 906$ viajeros esperaron menos de 6 minutos.

c) $P(5 < X < 10) = P\left(\dfrac{5-7{,}5}{2} < \dfrac{X-7{,}5}{2} < \dfrac{10-7{,}5}{2}\right) = P(-1{,}25 < Z < 1{,}25) =$
$= P(Z < 1{,}25) - (1 - P(Z < 1{,}25)) = 2 \cdot 0{,}8944 - 1 = 0{,}7888$

$0{,}7888 \cdot 4.000 = 3.155{,}2 \rightarrow 3.155$ viajeros esperaron entre 5 y 10 minutos.

d) $\dfrac{1.000}{4.000} = 0{,}25 \rightarrow P(X < a) = 0{,}25 \rightarrow P\left(\dfrac{X-7{,}5}{2} < \dfrac{a-7{,}5}{2}\right) = 0{,}25$

$\rightarrow P\left(Z < \dfrac{a-7{,}5}{2}\right) = 0{,}25 \rightarrow P\left(Z \leq \dfrac{a-7{,}5}{2}\right) = 0{,}75$

$\rightarrow \dfrac{a-7{,}5}{2} = 0{,}68 \rightarrow a = 8{,}86$

Los 1.000 viajeros que menos tiempo tardaron en subir al tren tuvieron que esperar menos de 8 minutos.

062 Se sabe que el 98,61% de los tornillos fabricados por una empresa tiene un diámetro menor que 3,398 mm. Si el diámetro de los tornillos se distribuye según una normal de media $\mu = 3{,}2$ mm, determina la desviación típica.

$$P(X < 3{,}398) = 0{,}9861 \rightarrow P\left(\frac{X - 3{,}2}{\sigma} < \frac{3{,}398 - 3{,}2}{\sigma}\right) = 0{,}9861$$
$$\rightarrow P\left(Z < \frac{0{,}198}{\sigma}\right) = 0{,}9861 \rightarrow \frac{0{,}198}{\sigma} = 2{,}2 \rightarrow \sigma = 0{,}09$$

063 Dos amigos están jugando al parchís. Uno de ellos asegura que ha tirado el dado 30 veces y no le ha salido ningún 5. El otro amigo afirma que eso es imposible. ¿Es realmente imposible? ¿Cuál es la probabilidad de que eso suceda?

No es imposible, porque la probabilidad no puede asegurar el resultado de los lanzamientos.

$$X \equiv B\left(30, \frac{1}{6}\right) \qquad P(X = 0) = \binom{30}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{30} = 0{,}0042$$

064 El 60 % de una población de 20.000 habitantes tiene los ojos oscuros. Si elegimos, al azar, 50 personas de esa población, ¿cuál es la probabilidad de que haya menos de 30 personas con los ojos oscuros?

$$X \equiv B(50;\ 0{,}6)$$
$$\left.\begin{array}{l} np = 30 > 5 \\ n(1 - p) = 20 > 5 \end{array}\right\}$$
$$X \equiv B(50;\ 0{,}6) \approx N(30;\ 3{,}46)$$
$$P(X < 30) = P\left(\frac{X - 30}{3{,}46} < \frac{30 - 30}{3{,}46}\right) = P(Z < 0) = 0{,}5$$

065 El 7 % de los pantalones de una marca tiene algún defecto. Se empaquetan en cajas de 80 unidades para distribuirlos. ¿Cuál es la probabilidad de que en una caja haya más de 10 pantalones defectuosos?

$$X \equiv B(80;\ 0{,}07)$$
$$\left.\begin{array}{l} np = 5{,}6 > 5 \\ n(1 - p) = 78{,}4 > 5 \end{array}\right\}$$
$$X \equiv B(80;\ 0{,}07) \approx N(5{,}6;\ 2{,}28)$$
$$P(X > 10) = P\left(\frac{X - 5{,}6}{2{,}28} > \frac{10 - 5{,}6}{2{,}28}\right) = P(Z > 1{,}93) = 1 - P(Z \le 1{,}93) =$$
$$= 1 - 0{,}9732 = 0{,}0268$$

066 Se estima que 1 de cada 8 españoles padece hipertensión. Si elegimos a 60 personas al azar:

a) Determina la probabilidad de que en ese grupo haya exactamente 7 personas hipertensas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de diez personas hipertensas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo tengan hipertensión 11 personas o menos?

$X \equiv B(60;\ 0{,}125)$

$$\left.\begin{array}{l} np = 7{,}5 > 5 \\ n(1-p) = 6{,}56 > 5 \end{array}\right\} \to X \equiv B(60;\ 0{,}125) \approx N(7{,}5;\ 2{,}56)$$

a) $P(X = 7) = P(6{,}5 < X < 7{,}5) = P\left(\frac{6{,}5-7{,}5}{2{,}56} < \frac{X-7{,}5}{2{,}56} < \frac{7{,}5-7{,}5}{2{,}56}\right) =$
$= P(-0{,}39 < Z < 0) = P(Z < 0{,}39) - P(Z < 0) = 0{,}6517 - 0{,}5 = 0{,}1517$

b) $P(X > 10) = P\left(\frac{X-7{,}5}{2{,}56} > \frac{10-7{,}5}{2{,}56}\right) = P(Z > 0{,}97) = 1 - P(Z \le 0{,}97) =$
$= 1 - 0{,}834 = 0{,}166$

c) $P(X \le 11) = P\left(\frac{X-7{,}5}{2{,}56} \le \frac{11-7{,}5}{2{,}56}\right) = P(Z \le 1{,}36) = 0{,}9131$

067 Se está experimentando una nueva vacuna para la malaria que resulta efectiva en el 60 % de los casos. Si se eligen al azar 45 personas, halla las siguientes probabilidades.

a) La probabilidad de que en ese grupo la vacuna sea efectiva en 27 personas.

b) La probabilidad de que sea efectiva en un número de personas comprendido entre 25 y 27, ambos inclusive.

c) La probabilidad de que resulte efectiva en menos de 20 personas.

$X \equiv B(45;\ 0{,}6)$

$$\left.\begin{array}{l} np = 27 > 5 \\ n(1-p) = 10{,}8 > 5 \end{array}\right\} \to X \equiv B(45;\ 0{,}6) \approx N(27;\ 3{,}28)$$

a) $P(X = 27) = P(26{,}5 < X < 27{,}5) = P\left(\frac{26{,}5-27}{3{,}28} < \frac{X-27}{3{,}28} < \frac{27{,}5-27}{3{,}28}\right) =$
$= P(-0{,}15 < Z < 0{,}15) = P(Z < 0{,}15) - (1 - P(Z < 0{,}15)) =$
$= 2 \cdot 0{,}5596 - 1 = 0{,}1192$

b) $P(25 \le X \le 27) = P\left(\frac{25-27}{3{,}28} \le \frac{X-27}{3{,}28} \le \frac{27-27}{3{,}28}\right) = P(-0{,}61 \le Z \le 0) =$
$= P(Z \le 0{,}61) - P(Z \le 0) = 0{,}7291 - 0{,}5 = 0{,}2291$

c) $P(X < 20) = P\left(\frac{X-27}{3{,}28} < \frac{20-27}{3{,}28}\right) = P(Z < -2{,}13) = 1 - P(Z \le 2{,}13) =$
$= 1 - 0{,}9834 = 0{,}0166$

068 Las compañías de seguros han calculado que 1 de cada 5 vehículos tiene un accidente al año. Si se toman al azar 40 vehículos, determina.

a) La probabilidad de que ese año 10 de ellos tengan un accidente.

b) La probabilidad que sean entre 10 y 12 vehículos, ambos números incluidos.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ese año se accidenten más de 15 vehículos?

$$X \equiv B(40;\ 0{,}2)$$

$$\left.\begin{array}{l} np = 8 > 5 \\ n(1-p) = 6{,}4 > 5 \end{array}\right\} \to X \equiv B(40;\ 0{,}2) \approx N(8;\ 2{,}53)$$

a) $$P(X = 10) = P(9{,}5 < X < 10{,}5) = P\left(\frac{9{,}5-8}{2{,}53} < \frac{X-8}{2{,}53} < \frac{10{,}5-8}{2{,}53}\right) =$$
$$= P(0{,}59 < Z < 0{,}98) = P(Z < 0{,}98) - P(Z < 0{,}59) =$$
$$= 0{,}8365 - 0{,}7224 = 0{,}1141$$

b) $$P(10 \le X \le 12) = P\left(\frac{10-8}{2{,}53} \le \frac{X-8}{2{,}53} \le \frac{12-8}{2{,}53}\right) = P(0{,}79 \le Z \le 1{,}58) =$$
$$= P(Z \le 1{,}58) - P(Z \le 0{,}79) = 0{,}9429 - 0{,}7852 = 0{,}1577$$

c) $$P(X > 15) = P\left(\frac{X-8}{2{,}53} > \frac{15-8}{2{,}53}\right) = P(Z > 2{,}76) = 1 - P(Z \le 2{,}76) =$$
$$= 1 - 0{,}9971 = 0{,}0029$$

069 En un concurso dan a elegir una entre tres pruebas. Si las probabilidades de encestar lanzando un tiro son $\frac{1}{5}$ y las de acertar al blanco son $\frac{1}{3}$, elige la prueba en la que tengas más probabilidad de ganar.

- Lanzar 5 tiros a una canasta de baloncesto y encestar 2 por lo menos.
- Tirar 6 veces al blanco y acertar 3 como mínimo.
- Tirar 2 veces a canasta y hacer 1 tiro al blanco. Para superar la prueba se debe conseguir 1 canasta por lo menos y dar en el blanco.

En la primera prueba:

$$X \equiv B\left(5;\ \frac{1}{5}\right)$$

$$P(X \ge 2) = 1 - P\left(X < 2\right) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$$
$$= 1 - \binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^0\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^5 - \binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4 = 1 - 0{,}3277 - 0{,}4096 = 0{,}2627$$

En la segunda prueba:

$$Y \equiv B\left(6;\ \frac{1}{3}\right)$$

$$P(Y \ge 3) = 1 - P\left(Y < 3\right) = 1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)) =$$
$$= 1 - \binom{6}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6 - \binom{6}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5 - \binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$$
$$= 1 - 0{,}0878 - 0{,}2634 - 0{,}3292 = 0{,}3196$$

En la tercera prueba:

$$Z \equiv B\left(2; \frac{1}{5}\right)$$

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - \binom{2}{0} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$$

La probabilidad de ganar es: $0{,}36 \cdot \frac{1}{3} = 0{,}12$

Por tanto, hay más probabilidad de ganar la segunda prueba.

070 **Solo el 10 % de los boletos de una tómbola tienen premio. ¿Qué es más fácil, tener dos premios comprando 10 boletos o conseguir un premio comprando 3 boletos?**

Si se compran 10 boletos: $P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^8 = 0{,}1937$

Si se compran 3 boletos: $P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243$

Así, es más probable conseguir un premio comprando 3 boletos.

071 **Supongamos que la probabilidad de que nazca una niña es la misma de que nazca un niño.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una familia con tres hijos tenga 2 hijos y 1 hija?

b) Si tomamos 100 familias con 3 hijos, ¿cuál es la probabilidad de que haya 35 familias con 2 hijos y 1 hija?

c) ¿Y de que se encuentre entre 35 y 39?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que en esas 100 familias haya 12 familias que solo tengan hijas?

a) $P(\text{2 hijos y 1 hija}) = 3 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}375$

b) $X \equiv B(100; 0{,}375)$

$$\left.\begin{array}{l} np = 37{,}5 > 5 \\ n(1-p) = 62{,}5 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(100; 0{,}375) \approx N(37{,}5; 4{,}84)$$

$$P(X = 35) = P(34{,}5 < X < 35{,}5) = P\left(\frac{34{,}5 - 37{,}5}{4{,}84} < \frac{X - 37{,}5}{4{,}84} < \frac{35{,}5 - 37{,}5}{4{,}84}\right) =$$
$$= P(-0{,}62 < Z < -0{,}41) = P(Z < 0{,}62) - P(Z < 0{,}41) =$$
$$= 0{,}7324 - 0{,}6591 = 0{,}0733$$

c) $$P(35 < X < 39) = P\left(\frac{35 - 37{,}5}{4{,}84} < \frac{X - 37{,}5}{4{,}84} < \frac{39 - 37{,}5}{4{,}84}\right) =$$
$$= P(-0{,}51 < Z < 0{,}31) = P(Z < 0{,}31) - (1 - P(Z < 0{,}51)) =$$
$$= 0{,}6217 - 1 + 0{,}695 = 0{,}3167$$

d) $P(3 \text{ hijas}) = 0{,}5^3 = 0{,}125$

$X \equiv B(100;\ 0{,}125)$

$$\left.\begin{array}{l} np = 12{,}5 > 5 \\ n(1-p) = 87{,}5 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(100;\ 0{,}125) \approx N(12{,}5;\ 0{,}33)$$

$$P(X = 12) = P(11{,}5 < X < 12{,}5) = P\left(\frac{11{,}5 - 12{,}5}{0{,}33} < \frac{X - 12{,}5}{0{,}33} < \frac{12{,}5 - 12{,}5}{0{,}33}\right) =$$
$$= P(-3 < Z < 0) = P(Z < 3) - P(Z < 0) = 0{,}9987 - 0{,}5 = 0{,}4987$$

072 ●●○

Marta va a salir de viaje y ha consultado las previsiones meteorológicas. Ha visto que la probabilidad de que llueva el sábado es del 50 %, siendo la misma para el domingo.

Marta hace la siguiente reflexión.

«Como 50 + 50 = 100, es seguro que un día va a llover».

a) ¿Es correcta su reflexión?

b) Calcula la probabilidad de que llueva solo un día.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que llueva los dos días?

d) ¿Y de que no llueva ningún día?

a) No es correcta, porque la probabilidad de que llueva algún día es: $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

b) $P(\text{llueva solo un día}) = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$

c) $P(\text{llueva los dos días}) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

d) $P(\text{no llueva ningún día}) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

073 ●●○

La talla media del pie de los bomberos que ingresaron en el cuerpo el año pasado era 42, con una desviación típica de 1,4. Este año ingresarán 40.000 personas en el cuerpo de bomberos.

a) Determina el número aproximado de los bomberos que tendrán una talla media del pie de 44 o 45.

b) Calcula el número de botas del número 38 que debería encargar el cuerpo de bomberos.

(Consideramos que un pie tiene talla 40 cuando le correspondería un tallaje comprendido en [39,5; 40,5]. Por ejemplo, si a una persona le corresponde una talla de 36,7; diremos que su tallaje es 37. Y si es 38,4; diremos que su tallaje es 38.)

$X \equiv N(42;\ 1{,}4)$

a) $$P(43{,}5 \le X < 45{,}5) = P\left(\frac{43{,}5 - 42}{1{,}4} \le \frac{X - 42}{1{,}4} < \frac{45{,}5 - 42}{1{,}4}\right) =$$
$$= P(1{,}07 \le Z < 2{,}5) = P(Z < 2{,}5) - P(Z \le 1{,}07) =$$
$$= 0{,}9938 - 0{,}8577 = 0{,}1361$$

$0{,}1361 \cdot 40.000 = 5.444$ bomberos

b) $$P(37{,}5 \le X < 38{,}5) = P\left(\frac{37{,}5 - 42}{1{,}4} \le \frac{X - 42}{1{,}4} < \frac{38{,}5 - 42}{1{,}4}\right) =$$
$$= P(-3{,}21 \le Z < -2{,}5) = P(Z \le 3{,}21) - P(Z < 2{,}5) =$$
$$= 0{,}9993 - 0{,}9938 = 0{,}0055$$

Por tanto, encargarán: $0{,}0055 \cdot 40.000 = 220$ pares de botas.

074 Escoge, entre los juegos a) y b), el juego que tengas mayor probabilidad de ganar.

a) Se lanzan 2 dados y si la suma es mayor que 9 ganas.

b) Se lanzan 10 monedas y ganas si salen más de 6 caras.

a) $P(\text{suma mayor que 9 al lanzar dos dados}) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6} = 0{,}1667$

b) $X \equiv B(10;\ 0{,}5)$

$$P(X > 6) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{7} \cdot 0{,}5^7 \cdot 0{,}5^3 +$$
$$+ \binom{10}{8} \cdot 0{,}5^8 \cdot 0{,}5^2 + \binom{10}{9} \cdot 0{,}5^9 \cdot 0{,}5^1 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}5^{10} \cdot 0{,}5^0 = 0{,}1718$$

En el juego b) se tiene mayor probabilidad de ganar.

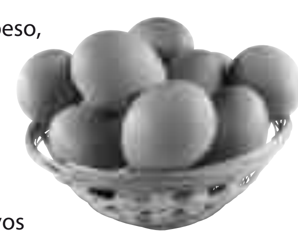
075 La distribución de edades de los miembros de una asociación sigue una ley normal $N(\mu, \sigma)$. Sabiendo que el 94,52 % tiene menos de 32 años, y un 21,19 % tiene menos de 20 años, calcula su media y su desviación típica.

$$P(X < 32) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{32-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{32-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9452 \rightarrow \frac{32-\mu}{\sigma} = 1{,}6$$
$$\rightarrow 32 - \mu = 1{,}6\sigma$$

$$P(X < 20) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{20-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}2119$$
$$\rightarrow P\left(Z < -\frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}7881 \rightarrow -\frac{20-\mu}{\sigma} = 0{,}8 \rightarrow 20 - \mu = -0{,}8\sigma$$

$$\left.\begin{array}{l} 32 - \mu = 1{,}6\sigma \\ 20 - \mu = -0{,}8\sigma \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mu = 24 \\ \sigma = 5 \end{array}$$

076 En una granja de gallinas se clasifican los huevos por su peso, en gramos, según las categorías incluidas en la tabla.



Categoría	S	M	L	XL
Peso	< 53	[53, 63)	[63, 73)	≥ 73

El peso de los huevos de las gallinas de esa granja sigue una distribución $N(62, 8)$. Calcula los porcentajes de huevos que se obtienen de cada categoría.

$$P(X < 53) = P\left(\frac{X-62}{8} < \frac{53-62}{8}\right) = P(Z < -1{,}125) = 1 - P(Z \leq 1{,}125) =$$
$$= 1 - 0{,}8697 = 0{,}1303$$

$$P(53 \leq X < 63) = P\left(\frac{53-62}{8} \leq \frac{X-62}{8} < \frac{63-62}{8}\right) = P(-1{,}125 \leq Z < 0{,}125) =$$
$$= P(Z < 0{,}125) - (1 - P(Z \leq 1{,}125)) = 0{,}5497 - 1 + 0{,}8697 = 0{,}4194$$

$$P(63 \leq X < 73) = P\left(\frac{63-62}{8} \leq \frac{X-62}{8} < \frac{73-62}{8}\right) = P(0{,}125 \leq Z < 1{,}375) =$$
$$= P(Z < 1{,}375) - P(Z \leq 0{,}125) = 0{,}9154 - 0{,}5497 = 0{,}3657$$

$$P(X \geq 73) = P\left(\frac{X-62}{8} \geq \frac{73-62}{8}\right) = P(Z \geq 1{,}375) = 1 - P(Z < 1{,}375) =$$
$$= 1 - 0{,}9154 = 0{,}0846$$

Hay un 13,03 % de huevos de tamaño S; un 41,94 % de tamaño M; un 36,57 % de tamaño L; y un 8,46 % de tamaño XL.

077 El gerente de una granja de gallinas ha observado que la categoría de huevos S no tiene éxito en el mercado, mientras que la categoría XL es la más rentable para la empresa, y sin embargo le corresponde una proporción demasiado baja de la producción. Por ese motivo decide hacer nuevas categorías que denominará, de mayor a menor peso: A, B, C, D y E, de modo que los porcentajes de huevos en cada categoría sean las siguientes.

Categoría	A	B	C	D	E
Porcentaje	15 %	20 %	35 %	25 %	5 %

Encuentra los intervalos de peso correspondientes a cada categoría.

$$P(X < A) = 0{,}15 \rightarrow P\left(\frac{X-62}{8} < \frac{A-62}{8}\right) = P\left(Z < \frac{A-62}{8}\right) =$$
$$= 1 - P\left(Z \leq -\frac{A-62}{8}\right) = 0{,}15 \rightarrow P\left(Z \leq -\frac{A-62}{8}\right) = 0{,}85$$
$$\rightarrow -\frac{A-62}{8} = 1{,}04 \rightarrow A = 53{,}68$$

$$P(X < B) = 0{,}35 \rightarrow P\left(\frac{X-62}{8} < \frac{B-62}{8}\right) = P\left(Z < \frac{B-62}{8}\right) =$$
$$= 1 - P\left(Z \leq -\frac{B-62}{8}\right) = 0{,}35 \rightarrow P\left(Z \leq -\frac{B-62}{8}\right) = 0{,}65$$
$$\rightarrow -\frac{B-62}{8} = 0{,}39 \rightarrow B = 58{,}88$$

$$P(X < C) = 0{,}7 \rightarrow P\left(\frac{X-62}{8} < \frac{C-62}{8}\right) = P\left(Z < \frac{C-62}{8}\right) = 0{,}7$$
$$\rightarrow \frac{C-62}{8} = 0{,}53 \rightarrow C = 66{,}24$$

$$P(X < D) = 0{,}95 \rightarrow P\left(\frac{X-62}{8} < \frac{D-62}{8}\right) = P\left(Z < \frac{D-62}{8}\right) = 0{,}95$$
$$\rightarrow \frac{D-62}{8} = 1{,}65 \rightarrow D = 75{,}2$$

La categoría A corresponde a los huevos que pesan menos de 53,68 gramos; la categoría B a los que pesan entre 53,68 y 58,88 gramos; la categoría C a los que pesan entre 58,88 y 66,24 gramos; la categoría D a los que pesan entre 66,24 y 75,2 gramos, y la categoría E a los que pesan más de 75,2 gramos.

078 La nota media de las Pruebas de Acceso a Estudios Universitarios en un distrito sigue una ley normal con media 6,2 y desviación típica 1,3.

a) Uno de los estudios más solicitados es Fisioterapia, por lo que un periódico local afirma que solo el 10 % de los alumnos del distrito tendrá nota suficiente para realizar esos estudios. ¿A qué nota se refiere?
b) ¿Qué porcentaje de alumnos supera el sobresaliente?
c) ¿Qué nota supera el 25 % de los alumnos?

a) $P(X \geq a) = 0{,}1 \rightarrow P\left(\frac{X-6{,}2}{1{,}3} \geq \frac{a-6{,}2}{1{,}3}\right) = P\left(Z \geq \frac{a-6{,}2}{1{,}3}\right) =$
$= 1 - P\left(Z < \frac{a-6{,}2}{1{,}3}\right) = 0{,}1 \rightarrow P\left(Z < \frac{a-6{,}2}{1{,}3}\right) = 0{,}9$
$\rightarrow \frac{a-6{,}2}{1{,}3} = 1{,}29 \rightarrow a = 7{,}87$

La nota suficiente para acceder a Fisioterapia es 7,87.

b) $P(X \geq 9) = P\left(\frac{X-6{,}2}{1{,}3} \geq \frac{9-6{,}2}{1{,}3}\right) = P(Z \geq 2{,}15) = 1 - P(Z < 2{,}15) =$
$= 1 - 0{,}9842 = 0{,}0158$

El 1,58 % de los alumnos supera el sobresaliente.

c) $P(X \leq a) = 0{,}25 \rightarrow P\left(\frac{X-6{,}2}{1{,}3} \leq \frac{a-6{,}2}{1{,}3}\right) = P\left(Z \leq \frac{a-6{,}2}{1{,}3}\right) =$
$= 1 - P\left(Z \leq -\frac{a-6{,}2}{1{,}3}\right) = 0{,}25 \rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a-6{,}2}{1{,}3}\right) = 0{,}75$
$\rightarrow -\frac{a-6{,}2}{1{,}3} = 0{,}68 \rightarrow a = 5{,}31$

El 25 % de los alumnos supera una nota de 5,31.

079 En un instituto se han comprado 150 ordenadores para 4 aulas de informática. La duración de la batería permite tener una media de trabajo de 180 minutos, con una desviación típica de 25 minutos.

a) Calcula la probabilidad de que la batería de uno de los ordenadores solo dure dos horas.
b) ¿Cuántos ordenadores tendrán una batería cuya carga dure más de 200 minutos?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que 110 de esos ordenadores sigan trabajando a los 180 minutos?

a) $X \equiv N(180, 25)$

$P(X \leq 120) = P\left(\frac{X-180}{25} \leq \frac{120-180}{25}\right) = P(Z \leq -2{,}4) = 1 - P(Z < 2{,}4) =$
$= 1 - 0{,}9918 = 0{,}0082$

b) $P(X > 200) = P\left(\frac{X-180}{25} > \frac{200-180}{25}\right) = P(Z > 0{,}8) = 1 - P(Z \leq 0{,}8) =$
$= 1 - 0{,}7881 = 0{,}2119$

Como $0{,}2119 \cdot 150 = 31{,}785$; en 31 ordenadores la carga de la batería durará más de 200 minutos.

c) $P(X \geq 180) = P\left(\frac{X-180}{25} \geq \frac{180-180}{25}\right) = P(Z \geq 0) = 1 - P(Z < 0) = 1 - 0,5 = 0,5$

$Y \equiv B(150;\ 0,5)$

$\left.\begin{array}{l} np = 75 > 5 \\ n(1-p) = 75 > 5 \end{array}\right\} \to Y \equiv B(150;\ 0,5) \approx N(75;\ 6,12)$

$P(Y = 110) = P(109,5 < Y < 110,5) = P\left(\frac{109,5-75}{6,12} < \frac{Y-75}{6,12} < \frac{110,5-75}{6,12}\right) =$
$= P(5,62 < Z < 5,8) = P(Z < 5,8) - P(Z < 5,62) = 1 - 1 = 0$

080 La estatura de los 1.200 alumnos de un colegio sigue una distribución normal, de media 156 cm y desviación típica 9 cm.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno seleccionado al azar mida más de 180 cm?
b) ¿Cuántos estudiantes debemos esperar que midan entre 140 y 170 cm?
c) Busca un intervalo de alturas que contenga el 90 % de los alumnos y que sea el mínimo posible.
d) Si elijo 10 alumnos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que 6 de ellos midan más de 165 cm?
e) Si elijo 40 alumnos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya más de 10 que midan más de 165 cm?

a) $P(X > 180) = P\left(\frac{X-156}{9} > \frac{180-156}{9}\right) = P(Z > 2,67) = 1 - P(Z \leq 2,67) =$
$= 1 - 0,9962 = 0,0038$

b) $(140 < X < 170) = P\left(\frac{140-156}{9} < \frac{X-156}{9} < \frac{170-156}{9}\right) =$
$= P(-1,78 < Z < 1,56) = P(Z < 1,56) - (1 - P(Z < 1,78)) =$
$= 0,9406 - 1 + 0,9625 = 0,9031$

Como $0,9031 \cdot 1.200 = 1.083$, hay 1.083 estudiantes que miden entre 140 y 170 cm.

c) $P(156 - a < X < 156 + a) = P\left(\frac{156-a-156}{9} < \frac{X-156}{9} < \frac{156+a-156}{9}\right) =$
$= P\left(-\frac{a}{9} < Z < \frac{a}{9}\right) = P\left(Z < \frac{a}{9}\right) - \left(1 - P\left(Z < \frac{a}{9}\right)\right) =$
$= 2P\left(Z < \frac{a}{9}\right) - 1 = 0,9 \to P\left(Z < \frac{a}{9}\right) = 0,95 \to \frac{a}{9} = 1,65$
$\to a = 14,85 \to (141,15;\ 170,85)$ es el intervalo de alturas.

d) $P(X > 165) = P\left(\frac{X-156}{9} > \frac{165-156}{9}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) =$
$= 1 - 0,8413 = 0,1587$

$Y \equiv B(10;\ 0,1587)$

$P(Y = 6) = \binom{10}{6} \cdot 0,1587^6 \cdot 0,8413^4 = 0,0017$

e) $Y' \equiv B(40;\ 0{,}1587)$

$$\left.\begin{array}{l} np = 6{,}348 > 5 \\ n(1-p) = 33{,}652 > 5 \end{array}\right\} \to Y \equiv B(40;\ 0{,}1587) \approx N(6{,}348;\ 2{,}31)$$

$$P(Y' > 10) = P\left(\frac{Y' - 6{,}348}{2{,}31} > \frac{10 - 6{,}348}{2{,}31}\right) = P\left(Z > 1{,}58\right) = 1 - P\left(Z \le 1{,}58\right) =$$
$$= 1 - 0{,}719 = 0{,}281$$

081 ●●●

El peso de los recién nacidos se distribuye según una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Si los últimos datos publicados aseguran que los percentiles 75 y 90 de esta distribución son 3,2 y 3,5 kg, respectivamente:

a) Calcula la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,5 kg.

b) Halla la probabilidad de que un recién nacido pese más de 4 kg.

c) ¿Cuál es el percentil 10?

d) Determina la mediana de la distribución.

$$P(X < 3{,}2) = 0{,}75 \to P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{3{,}2-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{3{,}2-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}75 \to \frac{3{,}2-\mu}{\sigma} = 0{,}68$$

$$P(X < 3{,}5) = 0{,}9 \to P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{3{,}5-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{3{,}5-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9 \to \frac{3{,}5-\mu}{\sigma} = 1{,}29$$

$$\left.\begin{array}{l} 3{,}2 - \mu = 0{,}68\sigma \\ 3{,}5 - \mu = 1{,}29\sigma \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mu = 2{,}86 \\ \sigma = 0{,}49 \end{array}$$

a) $$P(X < 2{,}5) = P\left(\frac{X - 2{,}86}{0{,}49} < \frac{2{,}5 - 2{,}86}{0{,}49}\right) = P\left(Z < -0{,}73\right) = 1 - P(Z \le 0{,}73) =$$
$$= 1 - 0{,}7673 = 0{,}2327$$

b) $$P(X > 4) = P\left(\frac{X - 2{,}86}{0{,}49} > \frac{4 - 2{,}86}{0{,}49}\right) = P\left(Z > 2{,}32\right) = 1 - P(Z \le 2{,}32) =$$
$$= 1 - 0{,}9898 = 0{,}0102$$

c) $$P(X < a) = 0{,}1 \to P\left(\frac{X - 2{,}86}{0{,}49} < \frac{a - 2{,}86}{0{,}49}\right) = P\left(Z < \frac{a - 2{,}86}{0{,}49}\right) = 0{,}1$$
$$\to P\left(Z \le -\frac{a - 2{,}86}{0{,}49}\right) = 0{,}9 \to -\frac{a - 2{,}86}{0{,}49} = 1{,}29 \to a = 2{,}23$$

d) $$P(X \le M) = 0{,}5 \to P\left(\frac{X - 2{,}86}{0{,}49} \le \frac{M - 2{,}86}{0{,}49}\right) = P\left(Z \le \frac{M - 2{,}86}{0{,}49}\right) = 0{,}5$$
$$\to \frac{M - 2{,}86}{0{,}49} = 0 \to M = 2{,}86$$

082 ●●●

El sueldo de los trabajadores de una empresa sigue una distribución normal de media 1.500 €. Si el sueldo de un técnico de categoría 3 es de 960 €, y el 75 % de los trabajadores de la empresa cobra más que él:

a) Calcula la probabilidad de que el sueldo de un empleado escogido al azar sea superior a 1.600 €.

b) El sueldo más elevado es el de los directivos. Si estos representan el 5 % de los empleados de la empresa, ¿cuál es su sueldo mínimo?

$$P(X > 960) = 0{,}75 \rightarrow P\left(\frac{X - 1.500}{\sigma} > \frac{960 - 1.500}{\sigma}\right) = P\left(Z > -\frac{540}{\sigma}\right) =$$
$$= P\left(Z < \frac{540}{\sigma}\right) = 0{,}75 \rightarrow \frac{540}{\sigma} = 0{,}68 \rightarrow \sigma = 794{,}12$$

a) $P(X > 1.600) = P\left(\frac{X - 1.500}{794{,}12} > \frac{1.600 - 1.500}{794{,}12}\right) = P(Z > 0{,}13) = 1 - P(Z \leq 0{,}13) =$
$= 1 - 0{,}5517 = 0{,}4483$

b) $P(X \geq a) = 0{,}05 \rightarrow P\left(\frac{X - 1.500}{794{,}12} \geq \frac{a - 1.500}{794{,}12}\right) = P\left(Z \geq \frac{a - 1.500}{794{,}12}\right) = 0{,}05$
$\rightarrow P\left(Z < \frac{a - 1.500}{794{,}12}\right) = 0{,}95 \rightarrow \frac{a - 1.500}{794{,}12} = 1{,}65 \rightarrow a = 2.810{,}29$

El sueldo mínimo de los directivos es de 2.810,29 euros.

PARA FINALIZAR...

083 **Calcula el valor de k para que la siguiente función sea una función de densidad de una variable aleatoria continua.**

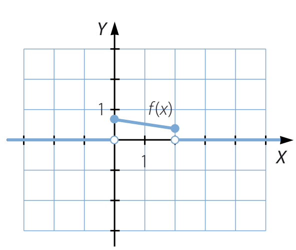
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6}x + k & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 2] \end{cases}$$

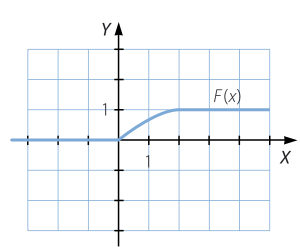
a) Obtén la función de distribución $F(x)$.
b) Representa gráficamente ambas funciones.
c) Calcula las probabilidades. $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$ $\quad P(X = 1)$

a) $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{6}x + k\right) dx = \left[-\frac{x^2}{12} + kx\right]_0^2 = -\frac{1}{3} + 2k \rightarrow 2k = \frac{4}{3} \rightarrow k = \frac{2}{3}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 0 \\ -\frac{x^2}{12} + \frac{2x}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$$

b)





c) $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = P\left(X < \frac{3}{2}\right) - P\left(X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{39}{48} - \frac{15}{48} = \frac{1}{2}$

$P(X = 1) = 0$

084 La probabilidad de que un reloj sea defectuoso es del 4 %. Halla.

a) El número de relojes defectuosos que se estima en un lote de 1.000.
b) La probabilidad de menos de 10 defectuosos.

a) $\mu = 1.000 \cdot 0,04 = 40$ relojes

b) $B(1.000; 0,04) \oplus N(40; 6,19)$

$$P(X < 10) = \left(\frac{X-40}{6,19} < \frac{10-40}{6,19}\right) = P\big(Z < -4,84\big) = 1 - P\big(Z < 4,84\big) = 0$$

085 En una distribución normal, el 3 % de los valores es inferior a 19 y el 5 % es superior a 28,6. Calcula $P(X < 18)$.

$$P(X < 19) = 0,03 \rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{19-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{19-\mu}{\sigma}\right) = 0,03$$
$$\rightarrow P\left(Z \leq -\frac{19-\mu}{\sigma}\right) = 0,97 \rightarrow -\frac{19-\mu}{\sigma} = 1,89$$
$$\rightarrow 19 - \mu = -1,89\sigma$$

$$P(X > 28,6) = 0,05 \rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{28,6-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{28,6-\mu}{\sigma}\right) = 0,05$$
$$\rightarrow P\left(Z \leq \frac{28,6-\mu}{\sigma}\right) = 0,95 \rightarrow \frac{28,6-\mu}{\sigma} = 1,65$$
$$\rightarrow 28,6 - \mu = 1,65\sigma$$

$$\left.\begin{array}{l} 19 - \mu = -1,89\sigma \\ 28,6 - \mu = 1,65\sigma \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mu = 24,13 \\ \sigma = 2,71 \end{array}$$

$$P(X < 18) = P\left(\frac{X-24,13}{2,71} < \frac{18-24,13}{2,71}\right) = P(Z < -2,26) = 1 - P(Z \leq 2,26) =$$
$$= 1 - 0,9881 = 0,0119$$

086 Las bolas para rodamiento se someten a un control de calidad consistente en eliminar las que pasan por un orificio de diámetro *d* y, también, las que no pasan por otro orificio de diámetro *D*, con $d < D$.

Calcula la probabilidad de eliminar una bola, sabiendo que la medida de sus diámetros sigue una distribución normal de parámetros: $N\left[\frac{D+d}{2}; 0,3(D-d)\right]$.

$$P(X < d) + P(X > D) = P\left(\frac{X - \frac{D+d}{2}}{0,3(D-d)} < \frac{d - \frac{D+d}{2}}{0,3(D-d)}\right) + P\left(\frac{X - \frac{D+d}{2}}{0,3(D-d)} > \frac{D - \frac{D+d}{2}}{0,3(D-d)}\right) =$$
$$= P\left(Z < \frac{\frac{d-D}{2}}{0,3(D-d)}\right) + P\left(Z > \frac{\frac{D-d}{2}}{0,3(D-d)}\right) =$$
$$= P\left(Z < -\frac{1}{0,6}\right) + P\left(Z > \frac{1}{0,6}\right) = P(Z < -1,67) + P(Z > 1,67) =$$
$$= 2P(Z > 1,67) = 2(1 - 0,9525) = 0,095$$

087 Una máquina tiene 800 componentes y la probabilidad de que, en un tiempo determinado, falle uno de ellos es $2 \cdot 10^{-4}$. Calcula la probabilidad de que en ese tiempo:

a) Falle al menos 1 componente.
b) Fallen exactamente 2 componentes.
c) Fallen, como máximo, 2 componentes.
d) Calcula la media y la desviación típica de la distribución.

$X \equiv B(800; 0{,}0002)$

$800 \cdot 0{,}0002 = 0{,}16 < 5 \rightarrow$ No se puede aproximar con una distribución normal.

a) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{800}{0} \cdot 0{,}0002^0 \cdot 0{,}9998^{800} =$
$= 1 - 0{,}8521 \simeq 0{,}1479$

b) $P(X = 2) = \binom{800}{2} \cdot 0{,}0002^2 \cdot 0{,}9998^{798} = 319.600 \cdot 4 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}8724 \simeq 0{,}001$

c) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{800}{0} \cdot 0{,}0002^0 \cdot 0{,}9998^{800} +$
$+ \binom{800}{1} \cdot 0{,}0002^1 \cdot 0{,}9998^{799} + \binom{800}{2} \cdot 0{,}0002^2 \cdot 0{,}9998^{798} =$
$= 0{,}8521 + 800 \cdot 0{,}0002 \cdot 0{,}8523 + 319.600 \cdot 4 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}8224 \simeq 0{,}9894$

d) $\mu = 800 \cdot 0{,}0002 = 0{,}16$

$\sigma = \sqrt{800 \cdot 0{,}0002 \cdot 0{,}9998} = 0{,}39$