11 Integrales

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Los pilares de la Tierra

Raschid era uno de sus mecenas. [...] A pesar de ser un comerciante, tenía un poderoso intelecto y una curiosidad abierta a todos los campos. [...] Había simpatizado de inmediato con Jack, que cenaba en su casa varias veces por semana.

–¿Qué nos han enseñado esta semana los filósofos? –le preguntó Raschid tan pronto como empezaron a comer.

–He estado leyendo a Euclides. –Los *Elementos de Geometría* de Euclides era uno de los primeros libros traducidos.

–Euclides es un extraño nombre para un árabe –apuntó Ismail, hermano de Raschid.

–Era griego –le explicó Jack–. Vivió antes del nacimiento de Cristo. Los romanos perdieron sus escritos, pero los egipcios los conservaron, de manera que han llegado hasta nosotros en árabe.

–¡Y ahora los ingleses están traduciéndolos al latín! –exclamó Raschid–. Resulta divertido.

–Pero ¿qué has aprendido? –le preguntó el prometido de una de las hijas de Raschid.

Jack vaciló por un instante. Resultaba difícil de explicar. Intentó exponerlo de manera práctica.

–Mi padrastro, el maestro constructor, me enseñó diversas operaciones geométricas; por ejemplo, a dibujar un cuadrado dentro de otro, de manera que el más pequeño sea la mitad del área del grande.

–¿Cuál es el objetivo de esas habilidades?

–Esas operaciones son esenciales para proyectar construcciones. Echad un vistazo a este patio. El área de las arcadas cubiertas que lo rodean es exactamente igual al área abierta en el centro. La mayor parte de los patios pequeños están construidos de igual manera, incluidos los claustros de los monasterios. Ello se debe a que esas proporciones son las más placenteras. Si el centro fuera mayor, parecería una plaza de mercado, y si fuese más pequeño, daría la impresión de un agujero en el tejado. [...]

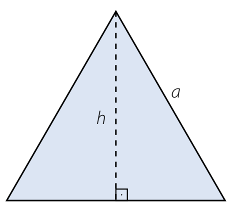
–¡Nunca pensé en ello! –exclamó Raschid, a quien nada le gustaba más que aprender algo nuevo.

KEN FOLLETT

Un arquitecto quiere diseñar un jardín en un terreno cuadrado de 70 m de lado. En él pondrá una zona de arena con forma de triángulo equilátero, y alrededor estará la zona de césped. Si desea que las dos zonas tengan la misma superficie, ¿qué altura debe tener el triángulo?

Si el terreno tiene 70 m de lado, el área mide 4.900 m^2.

El área de la zona de arena es igual al área de la zona de césped si mide 2.450 m^2.



$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} \rightarrow h^2 = \frac{3}{4}a^2 \rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}h$$

$$2.450 = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}h \cdot h}{2} \rightarrow 2.450 = \frac{h^2}{\sqrt{3}} \rightarrow h = \sqrt{2.450\sqrt{3}} = 65{,}14 \text{ m}$$

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 **Deriva las siguientes funciones.**

a) $f(x) = 5x^2 - 6$

b) $f(x) = -\ln \dfrac{x^2-3}{2} - 2\, sen\; 5x$

c) $f(x) = arc\; tg\; \dfrac{e^{x-1}}{x^3+2}$

d) $f(x) = \sqrt{tg^2\, 3x - arc\; cos\; \dfrac{x^4}{2}}$

a) $f'(x) = 10x$

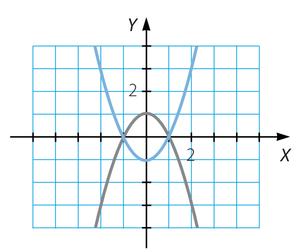
b) $f'(x) = -\dfrac{1}{\dfrac{x^2-3}{2}} \cdot x - 2\cos\, 5x \cdot 5 = -\dfrac{2x}{x^2-3} - 10\cos\, 5x$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{e^{x-1}}{x^3+2}\right)^2} \cdot \dfrac{e^{x-1}(x^3+2) - e^{x-1}\cdot 3x^2}{(x^3+2)^2} = \dfrac{e^{x-1}(x^3-3x^2+2)}{(x^3+2)^2 + e^{2x-2}}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{tg^2\, 3x - arc\cos \dfrac{x^4}{2}}} \cdot \left(6\, tg\, 3x(1+tg^2\, 3x) + \dfrac{2x^3}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x^4}{2}\right)^2}}\right)$

002 **Identifica la ecuación de estas parábolas.**

a) $f(x) = x^2 - 1$ b) $f(x) = -x^2 + 1$



a) Como $a = 1 > 0$, la parábola está abierta hacia arriba y tiene un mínimo en el punto $(0, -1)$.

b) Como $a = -1 < 0$, la parábola está abierta hacia abajo y tiene un máximo en el punto $(0, 1)$.

003 **Determina los puntos de corte en cada caso.**

a) $f(x) = 3x^2 - 4$
$g(x) = x$

b) $f(x) = 3x^2 + 2x - 6$
$g(x) = 4x^2 + x - 8$

a) $f(x) = g(x) \rightarrow 3x^2 - 4 = x \rightarrow 3x^2 - x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ x = -1 \end{cases}$

Los puntos de corte son: $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ y $(-1, -1)$

b) $f(x) = g(x) \rightarrow 3x^2 + 2x - 6 = 4x^2 + x - 8 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$

Los puntos de corte son: $(2, 10)$ y $(-1, -5)$

ACTIVIDADES

001 La función $F(x) = k \cdot e^{3x} + n$ es una función primitiva de la función $f(x) = e^{3x}$. Halla los valores de las constantes k y n si $F(0) = 0$.

$$F(0) = 0 \rightarrow k \cdot e^0 + n = 0 \rightarrow k + n = 0 \rightarrow n = -k$$

002 La pendiente de la recta tangente a una curva, en un punto de abscisa x, es $6x$. Halla de qué función se trata, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas.

La pendiente de la recta tangente en un punto es: $f'(x) = 6x$
Entonces, resulta que: $f(x) = 3x^2 + k$
Si $f(x)$ pasa por el origen de coordenadas: $f(0) = 0 \rightarrow k = 0$
Así, la función es: $f(x) = 3x^2$

003 Si $\int f(x)\,dx = F(x) + k$ y $\int g(x)\,dx = G(x) + k$, halla:

a) $\int [f(x) + g(x)]\,dx$

b) $\int [2f(x) - g(x)]\,dx$

c) $\int \left[\frac{1}{2}f(x) - 2g(x)\right] dx$

d) $\int [-f(x) + b \cdot g(x)]\,dx$

a) $$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x) + k + G(x) + k = F(x) + G(x) + k$$

b) $$\int [2f(x) - g(x)]\,dx = 2\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx = 2(F(x) + k) - (G(x) + k) = 2F(x) - G(x) + k$$

c) $$\int \left[\frac{1}{2}f(x) - 2g(x)\right] dx = \frac{1}{2}\int f(x)\,dx - 2\int g(x)\,dx = \frac{1}{2}(F(x) + k) - 2(G(x) + k) = \frac{1}{2}F(x) - 2G(x) + k$$

d) $$\int [-f(x) + b \cdot g(x)]\,dx = -\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx = -(F(x) + k) + b(G(x) + k) = -F(x) + bG(x) + k$$

004 Dada la serie de funciones: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3 \ldots$, calcula:

a) Su derivada.

b) ¿Qué expresión general tendrá la derivada de $f(x) = x^n$?

c) ¿Cuál será la integral de $f(x) = x^n$?

a) $f_1'(x) = 1$, $f_2'(x) = 2x$, $f_3'(x) = 3x^2, \ldots$

b) $f'(x) = nx^{n-1}$

c) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$

005 Calcula las siguientes integrales.

a) $\int (x^2 + x)\, dx$ c) $\int (x^3 - 2)\, dx$ e) $\int (2x^2 - 3x + 5)\, dx$

b) $\int \sqrt{x^3}\, dx$ d) $\int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{1}{x^3}\right) dx$ f) $\int \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$

a) $\int (x^2 + x)\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + k$

b) $\int \sqrt{x^3}\, dx = \int x^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + k = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + k$

c) $\int (x^3 - 2)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2x + k$

d) $\int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{1}{x^3}\right) dx = \frac{x^3}{9} - \frac{1}{2x^2} + k$

e) $\int (2x^2 - 3x + 5)\, dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x + k$

f) $\int \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx = \ln|x| - x + k$

006 Halla estas integrales..

a) $\int 2x(x^2 + 3)^4\, dx$ c) $\int \frac{x^2(x^3 - 2)}{3}\, dx$

b) $\int \frac{2x}{x^2 - 1}\, dx$ d) $\int \frac{x^2}{x^3 - 6}\, dx$

a) $\int 2x(x^2 + 3)^4\, dx = \frac{(x^2 + 3)^5}{5} + k$

b) $\int \frac{2x}{x^2 - 1}\, dx = \ln|x^2 - 1| + k$

c) $\int \frac{x^2(x^3 - 2)}{3}\, dx = \frac{(x^3 - 2)^2}{18} + k$

d) $\int \frac{x^2}{x^3 - 6}\, dx = \frac{1}{3}\ln|x^3 - 6| + k$

007 Calcula las siguientes integrales.

a) $\int 2^{\frac{x}{2}}\,dx$

b) $\int e^{x+1}\,dx$

c) $\int \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} dx$

d) $\int (e^{-2x} + e^{x-1})\,dx$

a) $\displaystyle\int 2^{\frac{x}{2}}\,dx = 2\cdot\frac{2^{\frac{x}{2}}}{\ln 2} + k = \frac{2^{\frac{x}{2}+1}}{\ln 2} + k$

b) $\displaystyle\int e^{x+1}\,dx = e^{x+1} + k$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}}{\ln\frac{5}{2}} + k$

d) $\displaystyle\int (e^{-2x} + e^{x-1})\,dx = -\frac{1}{2}\cdot e^{-2x} + e^{x-1} + k$

008 Halla estas integrales.

a) $\int 5^{x^2+1}\cdot 2x\,dx$

b) $\int 2e^{\frac{x}{2}+2}\,dx$

c) $\int \frac{3^{5x-1}}{2}\,dx$

d) $\int \frac{x}{e^{x^2}}\,dx$

a) $\displaystyle\int 5^{x^2+1}\cdot 2x\,dx = \frac{5^{x^2+1}}{\ln 5} + k$

b) $\displaystyle\int 2e^{\frac{x}{2}+2}\,dx = 4e^{\frac{x}{2}+2} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{3^{5x-1}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3^{5x-1}}{\ln 3} + k = \frac{3^{5x-1}}{10\ln 3} + k$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{e^{x^2}}\,dx = \int x\cdot e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot e^{-x^2} + k$

009 Calcula las siguientes integrales.

a) $\int sen\ 2x\,dx$

b) $\int cos\ (x+1)\,dx$

c) $\int \frac{sen\ \frac{x}{2}}{2}\,dx$

d) $\int sen\ (-x)\,dx$

a) $\displaystyle\int sen\ 2x\,dx = -\frac{1}{2}\ cos\ 2x + k$

b) $\displaystyle\int cos\ (x+1)\,dx = sen\ (x+1) + k$

c) $\displaystyle\int \frac{sen\ \frac{x}{2}}{2}\,dx = -cos\ \frac{x}{2} + k$

d) $\displaystyle\int sen\ (-x)\,dx = cos\ (-x) + k$

010 Halla estas integrales.

a) $\int \frac{1}{cos^2(x+1)}\,dx$

b) $\int -3\,sen\,(2x+1)\,dx$

c) $\int (x+1)\cdot cos\,(x^2+2x)\,dx$

d) $\int \frac{x}{cos^2\,(x^2-3)}\,dx$

a) $\int \frac{1}{cos^2\,(x+1)}\,dx = tg\,(x+1)+k$

b) $\int -3\,sen\,(2x+1)\,dx = \frac{3}{2}\,cos\,(2x+1)+k$

c) $\int (x+1)\cdot cos\,(x^2+2x)\,dx = \frac{1}{2}\,sen\,(x^2+2x)+k$

d) $\int \frac{x}{cos^2\,(x^2-3)}\,dx = \frac{1}{2}\,tg\,(x^2-3)+k$

011 Resuelve estas integrales.

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\,dx$

b) $\int \frac{1}{1+(x-3)^2}\,dx$

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\,dx = \frac{1}{5}\,arc\ sen\ 5x+k$

b) $\int \frac{1}{1+(x-3)^2}\,dx = arc\ tg\ (x-3)+k$

012 Halla la solución de las integrales.

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\,dx$

b) $\int \frac{x}{1+9x^4}\,dx$

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\,arc\ sen\ (2x-3)+k$

b) $\int \frac{x}{1+9x^4}\,dx = \frac{1}{6}\,arc\ tg\ 3x^2+k$

013 Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\displaystyle\int_2^7 (x^2+2x-1)\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-4}^2 e^{2x}\,dx$

a) $F(x)=\displaystyle\int (x^2+2x-1)\,dx=\frac{x^3}{3}+x^2-x$

$$\int_2^7 (x^2+2x-1)\,dx=F(7)-F(2)=\frac{469}{3}-\frac{14}{3}=\frac{455}{3}$$

b) $F(x)=\displaystyle\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int_{-4}^2 e^{2x}\,dx=F(2)-F(-4)=\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}e^{-8}$$

014 Comprueba la siguiente igualdad.

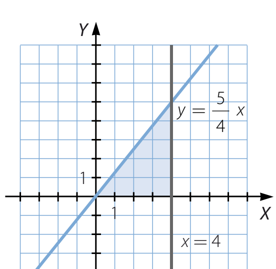
$$\int_2^6 (x^2+x+1)\,dx=\int_2^4 (x^2+x+1)\,dx+\int_4^6 (x^2+x+1)\,dx$$

$$F(x)=\int (x^2+x+1)\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x$$

$$\int_2^6 (x^2+x+1)\,dx=F(6)-F(2)=96-\frac{20}{3}=\frac{268}{3}$$

$$\int_2^4 (x^2+x+1)\,dx+\int_4^6 (x^2+x+1)\,dx=F(4)-F(2)+F(6)-F(4)=$$
$$=\frac{100}{3}-\frac{20}{3}+96-\frac{100}{3}=\frac{268}{3}$$

015 Halla el área del triángulo rectángulo que tiene como vértices (0, 0), (4, 0) y (4, 5), utilizando integrales definidas.



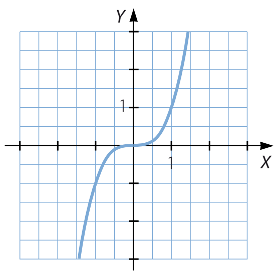
El triángulo está limitado por el eje X y las rectas $x=4$ e $y=\frac{5}{4}x$.

Así, el área es:

$$\int_0^4 \frac{5}{4}x\,dx=\left[\frac{5}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^4=10$$

016 **Calcula las integrales definidas $\int_{-1}^{1} x^3\,dx$ y $\int_{0}^{1} x^3\,dx$. Explica los resultados obtenidos.**

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \qquad \int_{0}^{1} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{4}$$



La función es simétrica respecto del origen de coordenadas. Así, la primera integral da como resultado cero porque el área corresponde a dos regiones iguales, una por encima del eje y otra por debajo. Los valores son iguales, pero de signo contrario, y se anulan.

017 **Determina el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$ y el eje X en el intervalo $[-2, 2]$.**

$$f(x) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \qquad F(x) = \int (x^2 - 1)\,dx = \frac{x^3}{3} - x$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\,dx\right| + \left|\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{2} (x^2 - 1)\,dx\right| =$$

$$= |F(-1) - F(-2)| + |F(1) - F(-1)| + |F(2) - F(1)| =$$

$$= \left|\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right| + \left|-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right| + \left|\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right| = 4$$

018 **Halla el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = sen\,x$ y el eje X en el intervalo $[0, \pi]$.**

$$f(x) = 0 \rightarrow sen\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \qquad F(x) = \int sen\ x\,dx = -cos\ x$$

$$\text{Área} = \left|\int_{0}^{\pi} sen\ x\,dx\right| = |F(\pi) - F(0)| = |1 + 1| = 2$$

019 **Determina el área comprendida entre las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x + 2$ en el intervalo $[-3, 4]$.**

$$f(x) = g(x) \rightarrow x^2 - 4 = x + 2 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$F(x) = \int (x^2 - 4 - (x + 2))\,dx = \int (x^2 - x - 6)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x$$

$$\left|\int_{-3}^{-2} (x^2 - x - 6)\,dx\right| + \left|\int_{-2}^{3} (x^2 - x - 6)\,dx\right| + \left|\int_{3}^{4} (x^2 - x - 6)\,dx\right| = |F(-2) - F(-3)| +$$

$$+ |F(3) - F(-2)| + |F(4) - F(3)| = \left|\frac{22}{3} - \frac{9}{2}\right| + \left|-\frac{27}{2} - \frac{22}{3}\right| + \left|-\frac{32}{3} + \frac{27}{2}\right| = \frac{53}{2}$$

020 **Halla el área comprendida entre las parábolas $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2$.**

$$f(x) = g(x) \rightarrow x^2 = -x^2 + 2 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$F(x) = \int (x^2 - (-x^2 + 2))\, dx = \int (2x^2 - 2)\, dx = \frac{2x^3}{3} - 2x$$

$$\text{Área} = |F(1) - F(-1)| = \left| -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \right| = \frac{8}{3}$$

021 **Comprueba si las funciones $F(x)$ son primitivas de $f(x)$.**

a) $F(x) = x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ $\qquad$ $f(x) = 3x^2 - 12x + 2$

b) $F(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 9{,}5$ $\qquad$ $f(x) = 6x - 12x^2 - \dfrac{3}{2}x^2$

c) $F(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$

d) $F(x) = \textit{sen}\ x \cos x$ $\qquad$ $f(x) = 2 \cos^2 x - 1$

e) $F(x) = \ln \dfrac{x^2}{x + 1}$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{x + 2}{x(x + 1)}$

a) $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = 3x^2 - 12x + 2$

b) $F(x)$ no es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = 6x^2 - 2x - 3$

c) $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = \dfrac{2x \cdot (x - 1) - (x^2 + 1)}{(x - 1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$

d) $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = \cos x \cdot \cos x + \textit{sen}\ x\,(-\textit{sen}\ x) =$

$$= \cos^2 x - \textit{sen}^2\, x = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

e) $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{x^2}{x + 1}} \cdot \dfrac{2x \cdot (x + 1) - x^2}{(x + 1)^2} =$

$$= \frac{x^2 + 2x}{x^2(x + 1)} = \frac{x + 2}{x(x + 1)}$$

022 **Comprueba si $y = \dfrac{3x + 1}{x}$ e $y = \dfrac{x + 1}{x}$ son primitivas de la función $y = -\dfrac{1}{x^2}$.**
En caso afirmativo, encuentra otra primitiva.

Las dos funciones son primitivas porque:

$$y = \frac{3x + 1}{x} \rightarrow y' = \frac{3x - (3x + 1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{x + 1}{x} \rightarrow y' = \frac{x - (x + 1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Respuesta abierta. Por ejemplo: $y = \dfrac{2x + 1}{x}$

023 Calcula las siguientes integrales.

a) $\int (6x^2 - 4x + 3)\,dx$

b) $\int (5x^2 + 3x - 2)\,dx$

c) $\int \left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{3}{4}x^2 - 2x\right) dx$

d) $\int (0{,}3x^3 + 1{,}3x^2 - 0{,}2)\,dx$

e) $\int \left(-\frac{3}{7}x^5 + \frac{1}{5}x^3 - \frac{7}{4}x^2\right) dx$

a) $\int (6x^2 - 4x + 3)\,dx = 2x^3 - 2x^2 + 3x + k$

b) $\int (5x^2 + 3x - 2)\,dx = \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + k$

c) $\int \left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{3}{4}x^2 - 2x\right) dx = \frac{x^5}{15} - \frac{x^3}{4} - x^2 + k$

d) $\int (0{,}3x^3 + 1{,}3x^2 - 0{,}2)\,dx = \frac{3x^4}{40} + \frac{13x^3}{30} - \frac{x}{5} + k$

e) $\int \left(-\frac{3}{7}x^5 + \frac{1}{5}x^3 - \frac{7}{4}x^2\right) dx = -\frac{x^6}{14} + \frac{x^4}{20} - \frac{7x^3}{12} + k$

024 Resuelve estas integrales.

a) $\int \frac{3}{x}\,dx$

b) $\int \frac{5}{x^2}\,dx$

c) $\int -\frac{7}{x^3}\,dx$

d) $\int -\frac{2}{x^5}\,dx$

e) $\int \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

f) $\int \left(\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x} - 2x\right) dx$

a) $\int \frac{3}{x}\,dx = 3\ln|x| + k$

b) $\int \frac{5}{x^2}\,dx = -\frac{5}{x} + k$

c) $\int -\frac{7}{x^3}\,dx = \frac{7}{2x^2} + k$

d) $\int -\frac{2}{x^5}\,dx = \frac{1}{2x^4} + k$

e) $\int \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + k$

f) $\int \left(\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x} - 2x\right) dx = -\frac{1}{x^2} - 3\ln|x| - x^2 + k$

025 Calcula las integrales.

a) $\int (sen\ x + 2\ cos\ x)\ dx$

b) $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

c) $\int \frac{-3}{x^2+1}\ dx$

d) $\int (2^x + e^x)\ dx$

e) $\int \frac{6}{\sqrt{x}}\ dx$

f) $\int -\frac{3}{\sqrt{1-3x}}\ dx$

a) $\int (sen\ x + 2\ cos\ x)\ dx = -cos\ x + 2\ sen\ x + k$

b) $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = 5\ arc\ sen\ x + k$

c) $\int \frac{-3}{x^2+1}\ dx = -3\ arc\ tg\ x + k$

d) $\int (2^x + e^x)\ dx = \frac{2^x}{\ln 2} + e^x + k$

e) $\int \frac{6}{\sqrt{x}}\ dx = 12\sqrt{x} + k$

f) $\int -\frac{3}{\sqrt{1-3x}}\ dx = 2\sqrt{1-3x} + k$

026 Determina las siguientes integrales.

a) $\int \left(3x - \frac{1}{x} - 3\ cos\ x\right) dx$

b) $\int \left(\frac{sen\ x}{3} + \frac{3^x}{5}\right) dx$

c) $\int \left(-\frac{4}{x^2} + \frac{12}{1+x^2}\right) dx$

d) $\int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{4}{4x-3}\right) dx$

e) $\int \left(\frac{2}{x+3} + \frac{1}{\sqrt{x-3}}\right) dx$

f) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x+3}} + \frac{6}{\sqrt{2x+5}}\right) dx$

g) $\int \left(\frac{6}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{9}{\sqrt{2x+1}} + 4\right) dx$

h) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\ dx$

i) $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}}{x^2}\ dx$

j) $\int \frac{3x\sqrt[3]{4x^2}}{7}\ dx$

k) $\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}\ dx$

l) $\int \frac{3}{\sqrt{3-2x^2}}\ dx$

m) $\int (tg^2\ x + 1)\ sen\ x\ dx$

a) $\displaystyle\int\left(3x-\frac{1}{x}-3\cos x\right)dx=\frac{3x^2}{2}-\ln|x|-3\,sen\ x+k$

b) $\displaystyle\int\left(\frac{sen\ x}{3}+\frac{3^x}{5}\right)dx=-\frac{\cos x}{3}+\frac{3^x}{5\ln 3}+k$

c) $\displaystyle\int\left(-\frac{4}{x^2}+\frac{12}{1+x^2}\right)dx=\frac{4}{x}+12\ arc\ tg\ x+k$

d) $\displaystyle\int\left(\frac{2}{x+3}-\frac{4}{4x-3}\right)dx=2\ln|x+3|-\ln|4x-3|+k$

e) $\displaystyle\int\left(\frac{2}{x+3}+\frac{1}{\sqrt{x-3}}\right)dx=2\ln|x+3|+2\sqrt{x-3}+k$

f) $\displaystyle\int\left(\frac{2}{\sqrt{x+3}}+\frac{6}{\sqrt{2x+5}}\right)dx=4\sqrt{x+3}+6\sqrt{2x+5}+k$

g) $\displaystyle\int\left(\frac{6}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{9}{\sqrt{2x+1}}+4\right)dx=6\ arc\ sen\ x-9\sqrt{2x+1}+4x+k$

h) $\displaystyle\int\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\int\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=\int x^{\frac{2}{3}}\,dx+\int x^{\frac{1}{6}}\,dx=$

$\displaystyle=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}}+k=\frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5}+\frac{6x\sqrt[6]{x}}{7}+k$

i) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}{x^2}\,dx=\int\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}-2\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2}\right)dx=\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx-2\int x^{-\frac{5}{3}}\,dx=$

$\displaystyle=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}-2\cdot\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}}+k=-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+k$

j) $\displaystyle\int\frac{3x\sqrt[3]{4x^2}}{7}\,dx=\frac{3}{56}\int 8x(4x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{3}{56}\cdot\frac{(4x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+k=\frac{9x^2\sqrt[3]{4x^2}}{56}+k$

k) $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}\,dx=-\frac{1}{4(e^{2x}+1)^2}+k$

l) $\displaystyle\int\frac{3}{\sqrt{3-2x^2}}\,dx=\int\frac{3}{\sqrt{3\left(1-\frac{2x^2}{3}\right)}}\,dx=\int\frac{3}{\sqrt{3\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{3}}\right)^2\right)}}\,dx=$

$\displaystyle=\frac{3}{\sqrt{2}}\ arc\ sen\ \frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{3}}+k=\frac{3\sqrt{2}}{2}\ arc\ sen\ \frac{\sqrt{6}\,x}{3}+k$

m) $\displaystyle\int(tg^2\ x+1)\ sen\ x\ dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}\ sen\ x\ dx=\frac{1}{\cos x}+k$

027 Dadas las funciones $f(x) = 6x - 1$ y $g(x) = 3x^2 - 4x$, comprueba si se verifica que:

$$\int f(x)\,dx = 3x^2 - x + 2 \qquad \int g(x)\,dx = x^3 - 2x^2$$

En caso afirmativo, determina si se cumple que:

a) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

b) $\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

c) $\int [f(x) \cdot g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$

d) ¿Cómo comprobarías si $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$ sin hacer ninguna integral?

$$(3x^2 - x + 2)' = 6x - 1 \qquad (x^3 - 2x^2)' = 3x^2 - 4x$$

a) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int (3x^2 + 2x - 1)\,dx = x^3 + x^2 - x + k$

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = 3x^2 - x + 2 + x^3 - 2x^2 = x^3 + x^2 - x + 2$$

La igualdad se verifica si $k = 2$.

b) $\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int (-3x^2 + 10x - 1)\,dx = -x^3 + 5x^2 - x + k$

$$\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx = 3x^2 - x + 2 - x^3 + 2x^2 = -x^3 + 5x^2 - x + 2$$

La igualdad se verifica si $k = 2$.

c) $\int [f(x) \cdot g(x)]\,dx = \int (18x^3 - 27x^2 + 4x)\,dx = \frac{9x^4}{2} - 9x^3 + 2x^2 + k$

$$\int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx = (3x^2 - x + 2)(x^3 - 2x^2) = 3x^5 - 7x^4 + 4x^3 - 4x^2$$

La igualdad no se verifica.

d) La igualdad no se verifica, utilizando el apartado anterior:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right] dx \neq \int f(x)\,dx \cdot \frac{1}{\int g(x)\,dx} = \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$$

028 La derivada de la función $y = sen^2 x$ es $y' = 2\ sen\ x\ cos\ x$, es decir,

$\int 2\ sen\ x\ cos\ x\ dx = sen^2 x + k$.

En general, como $(f^2(x))' = 2 f(x) f'(x)$, tenemos que $\int 2 f(x) f'(x)\ dx = f^2(x) + k$.

Usa lo anterior para calcular las siguientes integrales.

a) $\int 2(x^2 - 1)2x\ dx$

b) $\int 2(x^2 + 3x)(2x + 3)\ dx$

c) $\int \frac{2}{1+x^2}\ arc\ tg\ x\ dx$

d) $\int \frac{\ln x}{x}\ dx$

e) $\int \frac{arc\ sen\ x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

f) $\int 4^x \ln 2\ dx$

g) $\int e^{4x+4}\ dx$

h) $\int \frac{tg\ x}{cos^2 x}\ dx$

a) $\int 2(x^2 - 1)2x\ dx = (x^2 - 1)^2 + k$

b) $\int 2(x^2 + 3x)(2x + 3)\ dx = (x^2 + 3x)^2 + k$

c) $\int \frac{2}{1+x^2}\ arc\ tg\ x\ dx = (arc\ tg\ x)^2 + k$

d) $\int \frac{\ln x}{x}\ dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + k$

e) $\int \frac{arc\ sen\ x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \frac{1}{2}\ arc\ sen^2 x + k$

f) $\int 4^x \ln 2\ dx = \int 2^x \cdot 2^x \ln 2\ dx = \frac{1}{2} \cdot 2^{2x} + k$

g) $\int e^{4x+4}\ dx = \int e^{2x+2} \cdot e^{2x+2}\ dx = \frac{1}{4} \cdot e^{4x+4} + k$

h) $\int \frac{tg\ x}{cos^2 x}\ dx = \frac{1}{2}\ tg^2 x + k$

029 Si derivas la función $y = \ln \cos x$, obtienes $y = \dfrac{-\text{sen } x}{\cos x}$ o, lo que es lo mismo,

$$\int \frac{-\text{sen } x}{\cos x}\,dx = \ln|\cos x| + k.$$

En general, se verifica que $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + k$.

Usa lo anterior para calcular las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{-x}{x^2+3}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\,\text{arc tg } x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{5}{15x+3}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx = \ln\left|x^2+3x\right| + k$

b) $\displaystyle\int \frac{-x}{x^2+3}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left|x^2+3\right| + k$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\,\text{arc tg } x}\,dx = \ln\left|\text{arc tg } x\right| + k$

d) $\displaystyle\int \frac{5}{15x+3}\,dx = \frac{1}{3}\ln\left|15x+3\right| + k$

030 Expresa las integrales como funciones logarítmicas.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{2x+2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\text{sen } x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+4}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{4}{2x+1}\,dx$

e) $\displaystyle\int \left(1+\frac{\ln x}{x}\right)dx$

f) $\displaystyle\int \text{tg } 3x\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x+1\right| + k$

b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\text{sen } x}\,dx = \ln\left|\text{sen } x\right| + k$

c) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+4}\,dx = \ln\left|e^x+4\right| + k$

d) $\displaystyle\int \frac{4}{2x+1}\,dx = 2\ln\left|2x+1\right| + k$

e) $\displaystyle\int \left(1+\frac{\ln x}{x}\right)dx = x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + k$

f) $\displaystyle\int \text{tg } 3x\,dx = \int \frac{\text{sen } 3x}{\cos 3x}\,dx = -\frac{1}{3}\ln\left|\cos 3x\right| + k$

031 Observa que la derivada de $y = \frac{1}{f(x)}$ es $y' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$, y que, por tanto:

$$\int -\frac{f'(x)}{f^2(x)}\,dx = \frac{1}{f(x)} + k$$

Usa lo anterior para calcular estas integrales.

a) $\int -\frac{\ln 2}{2^x}\,dx$

b) $\int \frac{sen\ x}{cos^2\ x}\,dx$

c) $\int \frac{3e^x}{(e^x+5)^2}\,dx$

d) $\int \frac{sen\ x - cos\ x}{(cos\ x + sen\ x)^2}\,dx$

e) $\int \frac{1-2x}{x^2(x-1)^2}$

f) $\int \frac{sen\ x}{(cos\ x+3)^2}\,dx$

a) $\int -\frac{\ln 2}{2^x}\,dx = \frac{1}{2^x} + k$

b) $\int \frac{sen\ x}{cos^2\ x}\,dx = \frac{1}{cos\ x} + k$

c) $\int \frac{3e^x}{(e^x+5)^2}\,dx = -\frac{3}{e^x+5} + k$

d) $\int \frac{sen\ x - cos\ x}{(cos\ x + sen\ x)^2}\,dx = \frac{1}{cos\ x + sen\ x} + k$

e) $\int \frac{1-2x}{x^2(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1-2x}{(x^2-x)^2}\,dx = \frac{1}{x^2-x} + k$

f) $\int \frac{sen\ x}{(cos\ x+3)^2}\,dx = \frac{1}{cos\ x+3} + k$

032 El resultado de las siguientes integrales es una función del tipo $y = \frac{1}{f(x)}$. Determínalas.

a) $\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$

b) $\int \frac{1}{sen^2\ x}\,dx$

c) $\int -\frac{\ln 3}{x\ln^2 x}\,dx$

d) $\int \frac{1}{2x\sqrt{x}}\,dx$

e) $\int \frac{x+1}{x(x+\ln x)^2}\,dx$

f) $\int \frac{2\ cos\ x - x\ sen\ x}{(x\ cos\ x + sen\ x)^2}\,dx$

a) $\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \int\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln^2 x}\right)dx = -\frac{1}{\ln x} + k$

b) $\int \frac{1}{sen^2\ x}\,dx = -\frac{1}{tg\ x} + k$

c) $\int -\frac{\ln 3}{x\ln^2 x}\,dx = \frac{\ln 3}{\ln x} + k$

d) $\int \frac{1}{2x\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{2\sqrt{x^3}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{x}} + k$

e) $\int \frac{x+1}{x(x+\ln x)^2}\,dx = \int\left(\frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{(x+\ln x)^2}\right)dx =$

$= \int\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{(x+\ln x)^2}\right)dx = -\frac{1}{x+\ln x} + k$

f) $\int \frac{2\ cos\ x - x\ sen\ x}{(x\ cos\ x + sen\ x)^2}\,dx = -\frac{1}{x\ cos x + sen\ x} + k$

033 Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_1^3 (2x^2 + 8x + 1)\, dx$

b) $\int_2^4 (6x^2 + 4x - 2)\, dx$

c) $\int_{-2}^3 \left(\frac{1}{2}x^3 - 12x^2 - 3x\right) dx$

d) $\int_{-6}^{-1} (3x^3 + 2x^2 - 2)\, dx$

a) $F(x) = \int (2x^2 + 8x + 1)\, dx = \frac{2x^3}{3} + 4x^2 + x$

$$\int_1^3 (2x^2 + 8x + 1)\, dx = F(3) - F(1) = \frac{171}{3} - \frac{17}{3} = \frac{154}{3}$$

b) $F(x) = \int (6x^2 + 4x - 2)\, dx = 2x^3 + 2x^2 - 2x$

$$\int_2^4 (6x^2 + 4x - 2)\, dx = F(4) - F(2) = 152 - 20 = 132$$

c) $F(x) = \int \left(\frac{1}{2}x^3 - 12x^2 - 3x\right) dx = \frac{x^4}{8} - 4x^3 - \frac{3x^2}{2}$

$$\int_{-2}^3 \left(\frac{1}{2}x^3 - 12x^2 - 3x\right) dx = F(3) - F(-2) = -\frac{891}{8} - 28 = -\frac{1.115}{8}$$

d) $F(x) = \int (3x^3 + 2x^2 - 2)\, dx = \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - 2x$

$$\int_{-6}^{-1} (3x^3 + 2x^2 - 2)\, dx = F(-1) - F(-6) = \frac{25}{12} - 840 = -\frac{10.055}{12}$$

034 Resuelve.

a) $\int_2^5 \frac{4}{x+2}\, dx$

b) $\int_{-5}^{-3} \frac{6}{x^2}\, dx$

c) $\int_2^4 \left(x - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x^2}\right) dx$

d) $\int_{-1}^1 \frac{2}{1+x^2}\, dx$

e) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

f) $\int_{-1}^3 \frac{8}{\sqrt{x+4}}\, dx$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos x - 2 \operatorname{sen} x)\, dx$

h) $\int_1^2 \frac{4}{x^5}\, dx$

a) $F(x) = \int \frac{4}{x+2}\,dx = 4\ln|x+2|$

$$\int_2^5 \frac{4}{x+2}\,dx = F(5) - F(2) = 4\ln 7 - 4\ln 4 = 4\ln\frac{7}{4}$$

b) $F(x) = \int \frac{6}{x^2}\,dx = -\frac{6}{x}$

$$\int_{-5}^{-3} \frac{6}{x^2}\,dx = F(-3) - F(-5) = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

c) $F(x) = \int \left(x - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x-1| - \frac{4}{x}$

$$\int_2^4 \left(x - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x^2}\right)dx = F(4) - F(2) = 7 - \ln 3 - \ln 1 = 7 - \ln 3$$

d) $F(x) = \int \frac{2}{1+x^2}\,dx = 2\,arc\,tg\,x$

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{1+x^2}\,dx = F(1) - F(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

e) $F(x) = \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\,arc\,sen\,x$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$

f) $F(x) = \int \frac{8}{\sqrt{x+4}}\,dx = 16\sqrt{x+4}$

$$\int_{-1}^{3} \frac{8}{\sqrt{x+4}}\,dx = F(3) - F(-1) = 16\sqrt{7} - 16\sqrt{3}$$

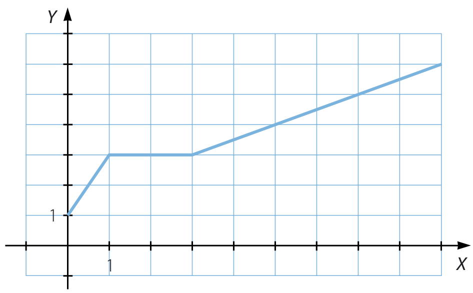
g) $F(x) = \int (3\cos x - 2\,sen\,x)\,dx = -3\,sen\,x + 2\cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x - 2\,sen\,x)\,dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = -3 - 5 = -8$$

h) $F(x) = \int \frac{4}{x^5}\,dx = -\frac{1}{x^4}$

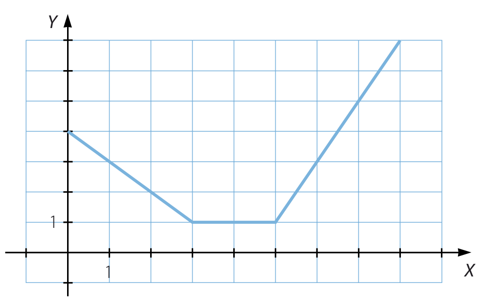
$$\int_1^2 \frac{4}{x^5}\,dx = F(2) - F(1) = -\frac{1}{16} + 1 = \frac{15}{16}$$

035 Completa la tabla referida a la gráfica de la función.



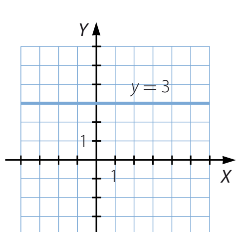
x	1	2	3	4	5	6
Área entre 0 y x	2	5	8	$\frac{45}{4}$	15	$\frac{77}{4}$

036 Completa la tabla con la función representada en el gráfico.



x	1	2	3	4	5
Área entre 0 y x	$\frac{7}{2}$	6	$\frac{15}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{19}{2}$

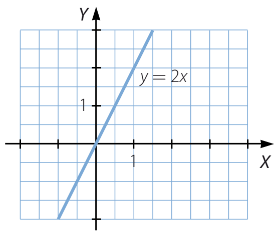
037 Representa la función $y = 3$, y completa la tabla de su función integral.
Determina la expresión analítica de dicha función.



x	1	2	3	4	5
Área entre 0 y x	3	6	9	12	15

La expresión analítica de la función es: $y = 3x$

038 Representa la función $y = 2x$, y completa la tabla de su función integral.
Halla la expresión analítica de dicha función.



x	1	2	3	4	5
Área entre 0 y x	1	4	9	16	25

La expresión analítica de la función es: $y = x^2$

039 Halla el área encerrada bajo la gráfica y el eje X en el intervalo [0, 2].
¿Y en los intervalos [2, 5] y [5, 8]?
Hazlo también en los intervalos [1, 3] y [4, 7].

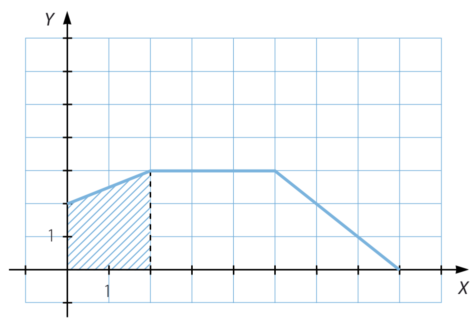
$$A([0, 2]) = 4 + \frac{2 \cdot 1}{2} = 5$$

$$A([2, 5]) = 3 \cdot 3 = 9$$

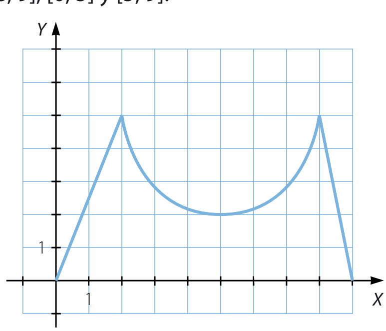
$$A([5, 8]) = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$A([1, 3]) = 2 + \frac{3}{4} + 3 = \frac{23}{4}$$

$$A([4, 7]) = 3 + 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 7$$



040 Determina el área que queda situada bajo la función y sobre el eje X en los intervalos [0, 2], [2, 5], [2, 8], [8, 9], [0, 5] y [5, 9].



$$A([0, 2]) = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5$$

$$A([2, 5]) = \frac{60 - 9\pi}{4}$$

$$A([2, 8]) = \frac{60 - 9\pi}{2}$$

$$A([8, 9]) = \frac{1 \cdot 5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$A([0, 5]) = 5 + \frac{60 - 9\pi}{4} = \frac{80 - 9\pi}{4}$$

$$A([5,9]) = \frac{60 - 9\pi}{4} + \frac{5}{2} = \frac{70 - 9\pi}{4}$$

041 Determina el área de la región comprendida entre la función, el eje X y las abscisas indicadas.

a) $f(x) = 3x^2 - 2x$ $\quad x = 2$ y $x = 4$

b) $f(x) = x^3 - x^2 + 5x + 1$ $\quad x = 1$ y $x = 3$

c) $f(x) = 5^x$ $\quad x = -1$ y $x = 2$

d) $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ $\quad x = 3$ y $x = 8$

e) $f(x) = sen\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\quad x = \pi$ y $x = \dfrac{3\pi}{2}$

a) $F(x) = \displaystyle\int (3x^2 - 2x)\, dx = x^3 - x^2$

$$\text{Área} = |F(4) - F(2)| = |48 - 4| = 44$$

b) $F(x) = \displaystyle\int (x^3 - x^2 + 5x + 1)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + x$

$$\text{Área} = |F(3) - F(1)| = \left|\frac{147}{4} - \frac{41}{12}\right| = \frac{100}{3}$$

c) $F(x) = \displaystyle\int 5^x\, dx = \frac{5^x}{\ln 5}$

$$\text{Área} = |F(2) - F(-1)| = \left|\frac{25}{\ln 5} - \frac{1}{5 \ln 5}\right| = \frac{124}{5 \ln 5}$$

d) $F(x) = \displaystyle\int \frac{4}{x^2}\, dx = -\frac{4}{x}$

$$\text{Área} = |F(8) - F(3)| = \left|-\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right| = \frac{5}{6}$$

e) $F(x) = \displaystyle\int sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx = -cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{Área} = \left|F\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F(\pi)\right| = |1 - 0| = 1$$

042 Comprueba que las funciones son negativas en el intervalo indicado. Halla el área de la zona definida en ese intervalo por la función y el eje de abscisas.

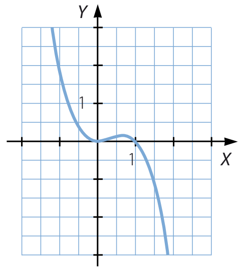
a) $f(x) = x^2 - x^3$ $\quad$ en $[1, 2]$

b) $f(x) = 1 + 2x - 3x^2$ $\quad$ en $[2, 4]$

c) $f(x) = \dfrac{6}{x + 2}$ $\quad$ en $[-7, -5]$

d) $f(x) = cos\,(\pi + x)$ $\quad$ en $[-1, 1]$

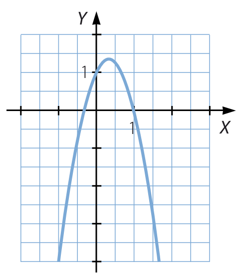
a)



$$F(x) = \int (x^2 - x^3)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

$$\text{Área} = |F(2) - F(1)| = \left|-\frac{4}{3} - \frac{1}{12}\right| = \frac{17}{12}$$

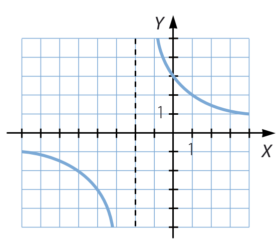
b)



$$F(x) = \int (1 + 2x - 3x^2)\, dx = x + x^2 - x^3$$

$$\text{Área} = |F(4) - F(2)| = |-44 + 2| = 42$$

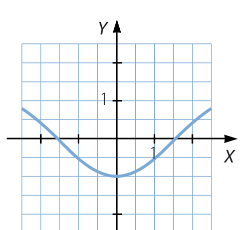
c)



$$F(x) = \int \frac{6}{x+2}\, dx = 6 \ln |x + 2|$$

$$\text{Área} = |F(-5) - F(-7)| = |6 \ln 3 - 6 \ln 5| = 6 \ln \frac{3}{5}$$

d)



$$F(x) = \int \cos(\pi + x)\, dx = \operatorname{sen}(\pi + x)$$

$$\text{Área} = |F(1) - F(-1)| = |\operatorname{sen}(\pi + 1) - \operatorname{sen}(\pi - 1)| = 1{,}68$$

043 Calcula el área de la zona limitada por la función, el eje de abscisas y las rectas verticales que se indican. Ten en cuenta que las funciones pueden cortar al eje *X*.

a) $f(x) = 3x^2 + 16x - 12$ $\quad x = -7$ y $x = 0$

b) $f(x) = 2x^2 + 6x - 20$ $\quad x = -1$ y $x = 5$

c) $f(x) = 2x^3 - 19x^2 + 49x - 20$ $\quad x = -1$ y $x = 3$

d) $f(x) = sen\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\quad x = 0$ y $x = \pi$

e) $f(x) = 4^x - 4$ $\quad x = 0$ y $x = 2$

a) $f(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 16x - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

$$F(x) = \int (3x^2 + 16x - 12)\, dx = x^3 + 8x^2 - 12x$$

$$\left|\int_{-7}^{-6} (3x^2 + 16x - 12)\, dx\right| + \left|\int_{-6}^{0} (3x^2 + 16x - 12)\, dx\right| =$$

$$= |F(-6) - F(-7)| + |F(0) - F(-6)| = |144 - 133| + |0 - 144| = 155$$

b) $f(x) = 0 \rightarrow 2x^2 + 6x - 20 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 2 \end{cases}$

$$F(x) = \int (2x^2 + 6x - 20)\, dx = \frac{2x^3}{3} + 3x^2 - 20x$$

$$\int_{-1}^{2} (2x^2 + 6x - 20)\, dx + \int_{2}^{5} (2x^2 + 6x - 20)\, dx = |F(2) - F(-1)| + |F(5) - F(2)| =$$

$$= \left|-\frac{68}{3} - \frac{67}{3}\right| + \left|\frac{175}{3} + \frac{68}{3}\right| = 126$$

c) $f(x) = 0 \rightarrow 2x^3 - 19x^2 + 49x - 20 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 4 \\ x = 5 \end{cases}$

$$F(x) = \int (2x^3 - 19x^2 + 49x - 20)\, dx = \frac{x^4}{2} - \frac{19x^3}{3} + \frac{49x^2}{2} - 20x$$

$$\left|\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2x^3 - 19x^2 + 49x - 20)\, dx\right| + \left|\int_{\frac{1}{2}}^{3} (2x^3 - 19x^2 + 49x - 20)\, dx\right| =$$

$$= \left|F\left(\frac{1}{2}\right) - F(-1)\right| + \left|F(3) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|-\frac{445}{96} - \frac{154}{3}\right| + \left|30 + \frac{445}{96}\right| = \frac{4.349}{48}$$

d) $f(x) = 0 \rightarrow sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$$F(x) = \int sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx = -cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx\right| =$$

$$= \left|F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)\right| + \left|F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = |-1 - 0| + |0 + 1| = 2$$

e) $f(x) = 0 \rightarrow 4^x - 4 = 0 \rightarrow x = 1$

$$F(x) = \int (4^x - 4)\, dx = \frac{4^x}{\ln 4} - 4x$$

$$\left|\int_0^1 (4^x - 4)\, dx\right| + \left|\int_1^2 (4^x - 4)\, dx\right| = |F(1) - F(0)| + |F(2) - F(1)| =$$

$$= \left|\frac{4}{\ln 4} - 4 - \frac{1}{\ln 4}\right| + \left|\frac{16}{\ln 4} - 8 - \frac{4}{\ln 4} + 4\right| = 6,48$$

044 **Halla el área de la región que queda definida entre las funciones y el eje *X*.**

a) $y = (x - 2)(2x + 1)$

b) $y = (3 + x)(2 - 5x)$

c) $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

d) $y = x^3 - x^2 - 21x + 45$

e) $y = (x + 3)(2x - 1)(3x + 2)$

a) $f(x) = 0 \rightarrow (x - 2)(2x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}$

$$F(x) = \int (x - 2)(2x + 1)\, dx = \int (2x^2 - 3x - 2)\, dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 2x$$

$$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{2} (2x^2 - 3x - 2)\, dx\right| = \left|F(2) - F\left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|-\frac{14}{3} - \frac{13}{24}\right| = \frac{125}{24}$$

b) $f(x) = 0 \rightarrow (3 + x)(2 - 5x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ x = -3 \end{cases}$

$$F(x) = \int (3 + x)(2 - 5x)\, dx = \int (-5x^2 - 13x + 6)\, dx = -\frac{5x^3}{3} - \frac{13x^2}{2} + 6x$$

$$\left|\int_{-3}^{\frac{2}{5}} (-5x^2 - 13x + 6)\, dx\right| = \left|F\left(\frac{2}{5}\right) - F(-3)\right| = \left|\frac{94}{75} + \frac{63}{2}\right| = \frac{4.913}{150}$$

c) $f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$

$$F(x) = \int (x^3 - 3x^2 - 6x + 8)\, dx = \frac{x^4}{4} - x^3 - 3x^2 + 8x$$

$$\left|\int_{-2}^{1} (x^3 - 3x^2 - 6x + 8)\, dx\right| + \left|\int_{1}^{4} (x^3 - 3x^2 - 6x + 8)\, dx\right| =$$

$$= \left|F(1) - F(-2)\right| + \left|F(4) - F(1)\right| = \left|\frac{17}{4} + 16\right| + \left|-16 - \frac{17}{4}\right| = \frac{81}{2}$$

d) $f(x) = 0 \rightarrow x^3 - x^2 - 21x + 45 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 3 \end{cases}$

$$F(x) = \int (x^3 - x^2 - 21x + 45)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{21x^2}{2} + 45x$$

$$\left|\int_{-5}^{3} (x^3 - x^2 - 21x + 45)\, dx\right| = \left|F(3) - F(-5)\right| = \left|\frac{207}{4} + \frac{3.475}{12}\right| = \frac{1.024}{3}$$

e) $f(x) = 0 \rightarrow (x + 3)(2x - 1)(3x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

$$F(x) = \int (x + 3)(2x - 1)(3x + 2)\, dx = \int (6x^3 + 19x^2 + x - 6)\, dx =$$

$$= \frac{3x^4}{2} + \frac{19x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x$$

$$\left|\int_{-3}^{-\frac{2}{3}} (6x^3 + 19x^2 + x - 6)\, dx\right| + \left|\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{2}} (6x^3 + 19x^2 + x - 6)\, dx\right| =$$

$$= \left|F\left(-\frac{2}{3}\right) - F(-3)\right| + \left|F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{2}{3}\right)\right| = \left|\frac{214}{81} + 27\right| + \left|-\frac{191}{96} - \frac{214}{81}\right| = \frac{88.837}{2.592}$$

045 ●●○ Sea la función $f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{si } x < 1 \\ -x + 6 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. Calcula el área de la región limitada por la función, el eje de abscisas y las rectas.

a) $x = -1$ y $x = 0$
b) $x = 3$ y $x = 7$
c) $x = -1$ y $x = 4$

a) $f(x) = 0 \to 4x + 1 = 0 \to x = -\frac{1}{4}$

$$F(x) = \int (4x+1)\,dx = 2x^2 + x$$

$$\left|\int_{-1}^{-\frac{1}{4}} (4x+1)\,dx\right| + \left|\int_{-\frac{1}{4}}^{0} (4x+1)\,dx\right| = \left|F\left(-\frac{1}{4}\right) - F(-1)\right| + \left|F(0) - F\left(-\frac{1}{4}\right)\right| =$$

$$= \left|-\frac{1}{8} - 1\right| + \left|0 + \frac{1}{8}\right| = \frac{5}{4}$$

b) $f(x) = 0 \to -x + 6 = 0 \to x = 6$

$$F(x) = \int (-x+6)\,dx = -\frac{x^2}{2} + 6x$$

$$\left|\int_{3}^{6} (-x+6)\,dx\right| + \left|\int_{6}^{7} (-x+6)\,dx\right| = \left|F(6) - F(3)\right| + \left|F(7) - F(6)\right| =$$

$$= \left|18 - \frac{27}{2}\right| + \left|\frac{35}{2} - 18\right| = 5$$

c) $$\left|\int_{-1}^{-\frac{1}{4}} (4x+1)\,dx\right| + \left|\int_{-\frac{1}{4}}^{1} (4x+1)\,dx\right| + \int_{1}^{4} (-x+6)\,dx =$$

$$= \left|F\left(-\frac{1}{4}\right) - F(-1)\right| + \left|F(1) - F\left(-\frac{1}{4}\right)\right| + \left|F(4) - F(1)\right| =$$

$$= \left|-\frac{1}{8} - 1\right| + \left|3 + \frac{1}{8}\right| + \left|16 - \frac{11}{2}\right| = 16$$

046 Sea la función $g(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x - 3 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{6}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Determina el área de la región limitada por esta curva, el eje X y las rectas.

a) $x = -1$ y $x = 0$ b) $x = 3$ y $x = 7$ c) $x = -1$ y $x = 4$

a) $f(x) = 0 \to 3x^2 + 6x - 3 = 0 \to x = -1 \pm \sqrt{2}$

$$F(x) = \int (3x^2 + 6x - 3)\,dx = x^3 + 3x^2 - 3x$$

$$\left|\int_{-1}^{0} (3x^2 + 6x - 3)\,dx\right| = \left|F(0) - F(-1)\right| = \left|0 - 5\right| = 5$$

b) $F(x) = \int \frac{6}{x}\,dx = 6 \ln|x|$

$$\left|\int_{3}^{7} \frac{6}{x}\,dx\right| = \left|F(7) - F(3)\right| = \left|6 \ln 7 - 6 \ln 3\right| = 6 \ln \frac{7}{3}$$

c) $\left|\int_{-1}^{-1+\sqrt{2}} (3x^2+6x-3)\,dx\right| + \left|\int_{-1+\sqrt{2}}^{1} (3x^2+6x-3)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{4} \frac{6}{x}\,dx\right| =$

$= \left|F(-1+\sqrt{2}) - F(-1)\right| + \left|F(1) - F(-1+\sqrt{2})\right| + \left|F(4) - F(1)\right| =$

$= \left|5 - 4\sqrt{2} - 5\right| + \left|1 - (5 - 4\sqrt{2})\right| + \left|6\ln 4 - 6\ln 1\right| = 8\sqrt{2} + 5 + 6\ln 4$

047 Halla el área de la región limitada por estas curvas.

a) $y = x^2 + 5x + 8$ $\quad y = x + 8$
b) $y = 6 - x - x^2$ $\quad y = -2x$
c) $y = -x^2 - 6x - 5$ $\quad y = -2x^2 - 12x - 10$
d) $y = x^3 - 2x^2 + x$ $\quad y = x^3 - 3x^2 + 3x$

a) $x^2 + 5x + 8 = x + 8 \rightarrow x^2 + 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 0 \end{cases}$

$F(x) = \int (x^2 + 5x + 8 - (x+8))\,dx = \int (x^2 + 4x)\,dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2$

$\left|\int_{-4}^{0} (x^2 + 4x)\,dx\right| = \left|F(0) - F(-4)\right| = \left|0 - \frac{32}{3}\right| = \frac{32}{3}$

b) $6 - x - x^2 = -2x \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$

$F(x) = \int (6 - x - x^2 - (-2x))\,dx = \int (-x^2 + x + 6)\,dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x$

$\left|\int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)\,dx\right| = \left|F(3) - F(-2)\right| = \left|\frac{27}{2} + \frac{22}{3}\right| = \frac{125}{6}$

c) $-x^2 - 6x - 5 = -2x^2 - 12x - 10 \rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -1 \end{cases}$

$F(x) = \int (-x^2 - 6x - 5 - (-2x^2 - 12x - 10))\,dx = \int (x^2 + 6x + 5)\,dx =$

$= \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 5x$

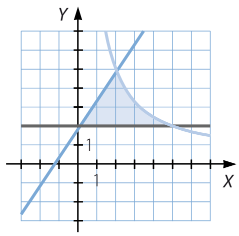
$\left|\int_{-5}^{-1} (x^2 + 6x + 5)\,dx\right| = \left|F(-1) - F(-5)\right| = \left|-\frac{7}{3} - \frac{25}{3}\right| = \frac{32}{3}$

d) $x^3 - 2x^2 + x = x^3 - 3x^2 + 3x \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$F(x) = \int (x^3 - 2x^2 + x - (x^3 - 3x^2 + 3x))\,dx = \int (x^2 - 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2$

$\left|\int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\,dx\right| = \left|F(2) - F(0)\right| = \left|-\frac{4}{3} - 0\right| = \frac{4}{3}$

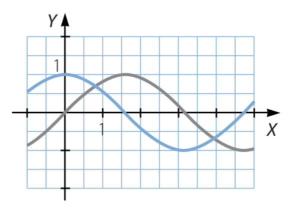
048 Halla el área de la región limitada por las funciones $y = \dfrac{10}{x}$, $y = \dfrac{3}{2}x + 2$ e $y = 2$.



$$\left|\int_0^2 \left(\frac{3}{2}x + 2 - 2\right) dx\right| + \left|\int_2^5 \left(\frac{10}{x} - 2\right) dx\right| = \left|\left[\frac{3x^2}{4}\right]_0^2\right| + \left|\left[10 \ln |x| - 2x\right]_2^5\right| =$$

$$= |3 - 0| + |10 \ln 5 - 10 - (10 \ln 2 - 4)| = 10 \ln \frac{5}{2} - 3$$

049 Las funciones $y = sen\, x$ e $y = cos\, x$ determinan regiones del plano, que son la repetición de una figura. Determina el área de la figura base.

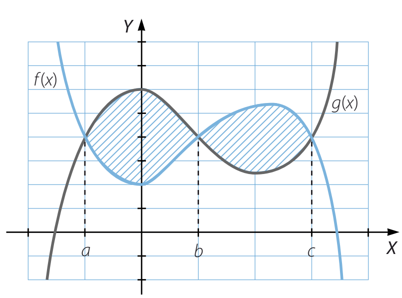


$$sen\, x = cos\, x \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$F(x) = \int (sen\, x - cos\, x)\, dx = -cos\, x - sen\, x$$

$$\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (sen\, x - cos\, x)\, dx\right| = \left|F\left(\frac{5\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = |\sqrt{2} + \sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$$

050 El área de la región limitada por las dos curvas de la figura se indica por una de las siguientes expresiones. Di cuál es la expresión.



a) $\displaystyle\int_a^c [f(x) - g(x)]\, dx$

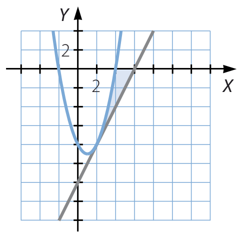
b) $\displaystyle\int_a^c [g(x) - f(x)]\, dx$

c) $\displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx + \int_b^c [f(x) - g(x)]\, dx$

d) $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx + \int_b^c [f(x) - g(x)]\, dx$

La expresión es la del apartado c).

051 Dibuja la parábola $y = x^2 - 2x - 8$ y su recta tangente por el punto de abscisa 2. Halla el área de la región limitada por ambas y las abscisas 2 y 4.



Como $y' = 2x - 2$, la recta tangente es:

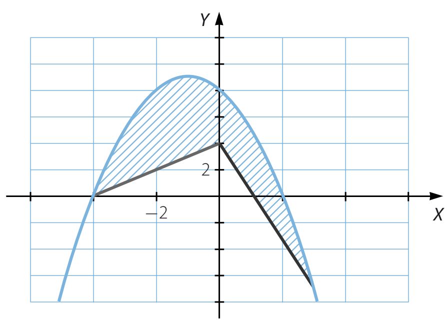
$$y + 8 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 12$$

$$F(x) = \int (x^2 - 2x - 8 - (2x - 12))\,dx =$$

$$= \int (x^2 - 4x + 4)\,dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

$$\left|\int_2^4 (x^2 - 4x + 4)\,dx\right| = \left|F(4) - F(2)\right| = \left|\frac{16}{3} - \frac{8}{3}\right| = \frac{8}{3}$$

052 Halla el área de la región del plano indicada en el dibujo, sabiendo que las tres funciones son $y = 8 - 2x - x^2$, $y = x + 4$ y $11x + 3y - 12 = 0$.



$$\int_{-4}^{0} \left(8 - 2x - x^2 - (x + 4)\right) dx + \int_0^3 \left(8 - 2x - x^2 - \left(-\frac{11}{3}x + 4\right)\right) dx =$$

$$= \int_{-4}^{0} \left(4 - 3x - x^2\right) dx + \int_0^3 \left(4 + \frac{5}{3}x - x^2\right) dx =$$

$$= \left[4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{0} + \left[4x + \frac{5x^2}{6} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \left|0 + \frac{56}{3}\right| + \left|0 + \frac{21}{2}\right| = \frac{175}{6}$$

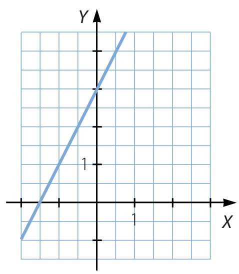
053 Un móvil que parte con una velocidad inicial de 3 m/s se somete a una aceleración constante de 2 m/s. Eso significa que su velocidad viene expresada por la fórmula $v = 3 + 2t$, mientras que el espacio que recorre en función del tiempo es: $e = 3t + t^2$.

(Recuerda que, en un movimiento uniformemente acelerado,

$v = v_0 + at$ y $e = v_0t + \frac{1}{2}at^2$).

Representa la función velocidad y calcula.

a) El área comprendida entre la gráfica, el eje de abscisas y las abscisas 0 y 2.
b) El espacio recorrido en los dos primeros segundos.
c) El área comprendida entre la función, el eje de abscisas y las abscisas 0 y 5.
d) El espacio recorrido en los cinco primeros segundos.
e) El área comprendida entre la función, el eje de abscisas y las abscisas 2 y 6.
f) El espacio recorrido entre el segundo 2 y el segundo 6.



a) $\displaystyle\int_0^2 (3+2t)\,dt = \left[3t+t^2\right]_0^2 = 10$

b) $e = 3\cdot 2 + 2^2 = 10$ m

c) $\displaystyle\int_0^5 (3+2t)\,dt = \left[3t+t^2\right]_0^5 = 40$

d) $e = 3\cdot 5 + 5^2 = 40$ m

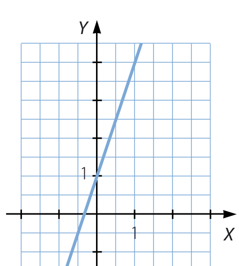
e) $\displaystyle\int_2^6 (3+2t)\,dt = \left[3t+t^2\right]_2^6 = |54-10| = 44$

f) $(3\cdot 6 + 6^2) - (3\cdot 2 + 2^2) = 54 - 10 = 44$ m

054 ●●○ La velocidad de un móvil viene dada por la fórmula $v = 1 + 3t$.
Representa la función.

Calcula, utilizando la medida de sus áreas:

a) El espacio recorrido en los tres primeros segundos.
b) El espacio recorrido entre el segundo 1 y el segundo 6.
c) El espacio recorrido entre el segundo 8 y el segundo 12.



a) $\displaystyle\int_0^3 (1+3t)\,dt = \left[t+\frac{3}{2}t^2\right]_0^3 = \frac{33}{2}$

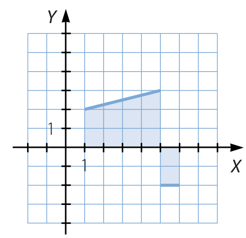
b) $\displaystyle\int_1^6 (1+3t)\,dt = \left[t+\frac{3}{2}t^2\right]_1^6 = 60 - \frac{5}{2} = \frac{115}{2}$

c) $\displaystyle\int_8^{12} (1+3t)\,dt = \left[t+\frac{3}{2}t^2\right]_8^{12} = 228 - 104 = 124$

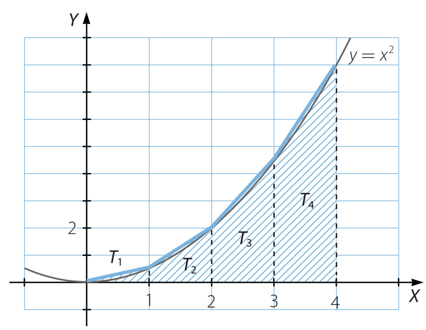
055 ¿Es posible encontrar una función tal que $\int_1^6 f(x)\,dx = 8$, pero que el área descrita por la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 6$ sea 12?

En caso afirmativo, represéntala.

Sí, es posible si la gráfica de la función está por encima y por debajo del eje *X*.
Respuesta abierta.



056 La siguiente función tiene por ecuación $y = x^2$. Para calcular el área que queda debajo de la curva, sobre el eje *X* y las abscisas 0 y 4, podemos hacerlo de forma aproximada utilizando el área de los trapecios que hemos dibujado.



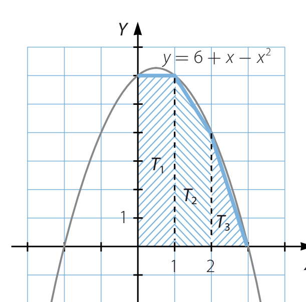
El área de esos trapecios es:

$$A_1 = \frac{1}{2} \qquad A_2 = \frac{5}{2} \qquad A_3 = \frac{13}{2} \qquad A_4 = \frac{25}{2}$$

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 22 \text{ unidades cuadradas}$$

a) Realiza el cálculo por medio de integrales y comprueba que el error no es excesivo.

b) Calcula, mediante los dos procedimientos, el área de la región que la curva $y = 6 + x - x^2$ describe en el primer cuadrante.



a) $\displaystyle\int_0^4 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{64}{3} = 21{,}33$

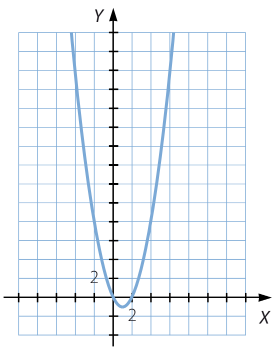
b) $T_1 = 6 \qquad T_2 = 5 \qquad T_3 = 2$

$T_1 + T_2 + T_3 = 13$

$$\int_0^3 (6 + x - x^2)\,dx = \left[6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{2} = 13{,}5$$

057 El cálculo de una integral definida se relaciona con el área bajo una curva. Explica por qué se verifica entonces que:

$$\int_0^6 (x^2 - 2x)\,dx < \int_2^6 (x^2 - 2x)\,dx$$



$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\int_0^6 (x^2 - 2x)\,dx = \int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx + \int_2^6 (x^2 - 2x)\,dx$$

$$\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx < 0 \rightarrow \int_0^6 (x^2 - 2x)\,dx < \int_2^6 (x^2 - 2x)\,dx$$

058 De la función $f(x) = x^2 + bx + c$ se sabe que determina un área de 36 unidades cuadradas con el eje X y las abscisas 0 y 3, y que corta al eje X, al menos, en el punto $(-3, 0)$. Determina la expresión algebraica de la función $f(x)$.

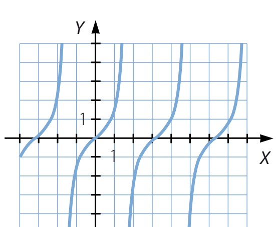
$$\int_0^3 (x^2 + bx + c)\,dx = 36 \rightarrow \left[\frac{x^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_0^3 = 36$$

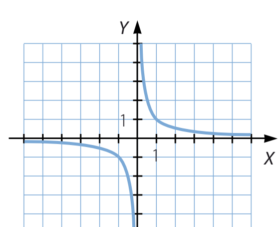
$$\rightarrow 9 + \frac{9b}{2} + 3c = 36 \rightarrow 3b + 2c = 18$$

Si el punto $(-3, 0)$ pertenece a la gráfica de la función: $9 - 3b + c = 0 \rightarrow 3b - c = 9$, y se obtiene que: $c = 3 \rightarrow b = 4 \rightarrow f(x) = x^2 + 4x + 3$

059 Calcula $\displaystyle\int_0^{\pi} tg\, x\, dx$ y $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx$ y explica los resultados obtenidos.

$$\int_0^{\pi} tg\, x\, dx = \int_0^{\pi} \frac{sen\, x}{cos\, x}\, dx = \Big[-\ln |cos\, x|\Big]_0^{\pi} = 0 \qquad \int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \Big[\ln |x|\Big]_{-1}^{1} = 0$$





Las integrales definidas son iguales a cero, porque las áreas determinadas por las gráficas por encima y por debajo del eje X tienen el mismo valor, pero son de distinto signo, y se anulan.

060 Al llover, una gota de agua cae desde una altura de 600 m. ¿Qué velocidad tendrá a los 3 segundos? Determina mediante integrales el espacio que habrá recorrido hasta ese momento.

¿Cuánto tiempo tardará en llegar al suelo?

(La aceleración de la gravedad es 9,8 m/s².)

La velocidad viene dada por la fórmula: $v = 9{,}8t$

A los 3 segundos, la velocidad es: $v = 29{,}4$ m/s

$$e = \int_0^3 9{,}8t\ dt = \left[4{,}9t^2\right]_0^3 = 44{,}1\,\text{m} \qquad 4{,}9t^2 = 600 \rightarrow t^2 = 122{,}44 \rightarrow t = 11{,}06\ \text{s}$$

061 Halla una primitiva, $F(x)$, de la función:

$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$$

tal que $F(2) = 5$.

$$F(x) = \int \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = 3\sqrt{1+x^2} + k$$

$$F(2) = 5 \rightarrow 3\sqrt{5} + k = 5 \rightarrow k = 5 - 3\sqrt{5}$$

Así, la función es: $F(x) = 3\sqrt{1+x^2} + 5 - 3\sqrt{5}$

062 Siendo $f(x)$ una función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [0, 2] \\ 4 & \text{si} \quad x \in (2, 3] \\ -2x + 10 & \text{si} \quad x \in (3, 4] \end{cases}$$

calcula $\int_0^x f(x)\,dx$.

Si $x \in (0, 2]$:

$$\int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^x = x^2$$

Si $x \in (2, 3]$:

$$\int_0^x f(x)\,dx = \int_0^2 2x\,dx + \int_2^x 4\,dx = \left[x^2\right]_0^2 + \left[4x\right]_2^x = 4 + 4x - 8 = 4x - 4$$

Y si $x \in (3, 4]$:

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 2x\,dx + \int_2^3 4\,dx + \int_3^x (-2x+10)\,dx = \left[x^2\right]_0^2 + \left[4x\right]_2^3 + \left[-x^2+10x\right]_3^x =$$

$$= 4 + 4 - x^2 + 10x - 21 = -x^2 + 10x - 13$$

063 De una función $f(x)$ sabemos que:

$$f(-1) = -19 \qquad f'(2) = 24 \qquad f''(x) = 18x - 10$$

Determina su expresión analítica.

$$F'(x) = \int (18x - 10)\, dx = 9x^2 - 10x + k$$

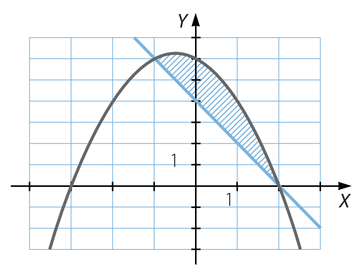
Si $f'(2) = 24 \rightarrow 36 - 20 + k = 24 \rightarrow k = 8$, y entonces: $f'(x) = 9x^2 - 10x + 8$

$$F(x) = \int (9x^2 - 10x + 8)\, dx = 3x^3 - 5x^2 + 8x + k$$

Si $f(-1) = -19 \rightarrow -3 - 5 - 8 + k = -19 \rightarrow k = -3$

Por tanto, la función es: $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 8x - 3$

064 Calcula el área de la región limitada por las dos curvas de la figura, sabiendo que una de ellas es una parábola.



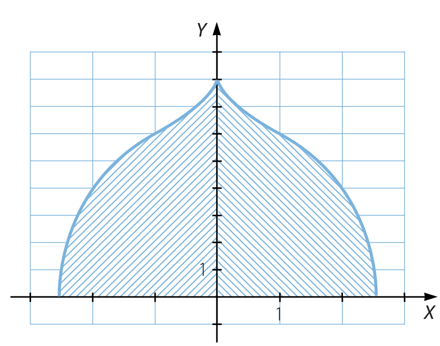
La parábola pasa por los puntos: (0, 6), (−3, 0) y (2, 0), su ecuación será de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{r} c = 6 \\ 9a - 3b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3a - b = -2 \\ 2a + b = -3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} a = -1 \\ b = -1 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = -x^2 - x + 6$$

La recta pasa por los puntos: (2, 0) y (0, 4), y su ecuación es $g(x) = -2x + 4$.
El área de la región limitada por las dos curvas es:

$$\int_{-1}^{2} (-x^2 - x + 6 - (-2x + 4))\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2}$$

065 La siguiente figura es la silueta del arco de un palacio árabe. Halla el área de la superficie que forma con el eje X, sabiendo que la figura se construye trasladando y haciendo simetrías de la función $y = tg\, x$ en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{18}\right)$.



$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{18}} tg\, x\, dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{18}} \frac{sen\, x}{cos\, x}\, dx =$$

$$= \Big[-\ln |cos\, x|\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{18}} = 0{,}72$$

066 Dada la integral $\int \frac{8x-7}{x^2-x-2}$, encuentra los valores de A y B tales que:

$$\frac{8x-7}{x^2-x-2}=\frac{8x-7}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$$

Opera en el último miembro e iguala los polinomios. Después, resuelve la integral.

$$\frac{8x-7}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}\to 8x-7=A(x+1)+B(x-2)$$
$$\to \left.\begin{array}{r} A+B=8 \\ A-2B=-7\end{array}\right\} \begin{array}{l} A=3 \\ B=5\end{array}$$

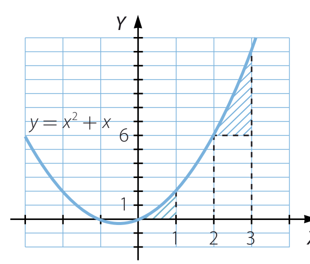
$$\int \frac{8x-7}{(x-2)(x+1)}\,dx=\int\left(\frac{3}{x-2}+\frac{5}{x+1}\right)dx=3\ln|x-2|+5\ln|x+1|+k$$

067 La variación instantánea de la cotización, su derivada, sigue durante una semana la función $f(x)=0{,}02x^2+1$, donde x es el día de la semana ($0=$ lunes, $1=$ martes, …). Si el lunes cotiza a 5 €, halla la función de cotización.

$$F(x)=\int(0{,}02x^2+1)\,dx=0{,}02\cdot\frac{x^3}{3}+x+k$$

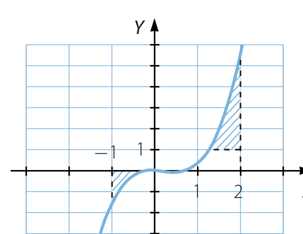
$$\text{Si } F(0)=5\to k=5\to F(x)=0{,}02\cdot\frac{x^3}{3}+x+5$$

068 Halla el área de las figuras coloreadas, si la gráfica corresponde a la función $f(x)=x^2+x$.



$$\int_0^1(x^2+x)\,dx+\int_2^3(x^2+x)\,dx-6=$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_2^3-6=$$
$$=\frac{5}{6}+\frac{53}{6}-6=\frac{11}{3}$$

069 Determina el área de las zonas coloreadas sabiendo que la curva corresponde a $f(x)=x^3-\frac{2x^2}{3}$.



$$x^3-\frac{2x^2}{3}=0\to\begin{cases} x=0\\ x=\frac{2}{3}\end{cases}$$

$$x^3-\frac{2x^2}{3}=1\to x\cong 1{,}28$$

$$\left|\int_{-1}^{0}\left(x^3-\frac{2x^2}{3}\right)dx\right|+\left|\int_{1,28}^{2}\left(x^3-\frac{2x^2}{3}\right)dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{9}\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{9}\right]_{1,28}^{2}\right|=$$
$$=0{,}47+2{,}22-0{,}205=2{,}485$$

070 De la función f sabemos que:

$$\int_1^5 f(x)\,dx = 8 \qquad \int_5^{10} f(x)\,dx = 2$$

Calcula razonadamente las siguientes integrales, e indica si utilizas alguna propiedad.

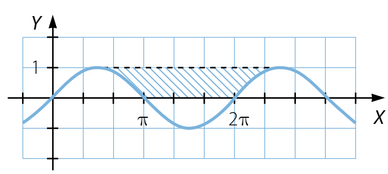
a) $\int_1^{10} f(x)\,dx$ b) $\int_1^5 (2\cdot f(x))\,dx$ c) $\int_1^5 (7+f(x))\,dx$

a) $\int_1^{10} f(x)\,dx = \int_1^5 f(x)\,dx + \int_5^{10} f(x)\,dx = 8+2=10$

b) $\int_1^5 (2\cdot f(x))\,dx = 2\int_1^5 f(x)\,dx = 2\cdot 8 = 16$

c) $\int_1^5 (7+f(x))\,dx = \int_1^5 7\,dx + \int_1^5 f(x)\,dx = \left[7x\right]_1^5 + 8 = 28+8=36$

071 La función cuya gráfica aparece en el dibujo es $f(x) = sen\,x$. Considera el recinto sombreado en la figura y contesta a las siguientes preguntas.



a) Halla de forma aproximada su área, y razona cuál puede ser su medida aproximada.
b) Calcula su valor mediante el cálculo integral.

a) El recinto sombreado corresponde aproximadamente a 4 rectángulos.

$$A = 4\left(\frac{\pi}{3}\cdot 1\right) = \frac{4\pi}{3} \simeq 4{,}18$$

b) $sen\,x = 1 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{5\pi}{2} \end{cases}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1-sen\,x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} 1\,dx + \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} (1-sen\,x)\,dx =$$

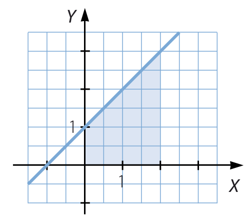
$$= \left[x+cos\,x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[x\right]_{\pi}^{2\pi} + \left[x+cos\,x\right]_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} =$$

$$= \pi - 1 - \frac{\pi}{2} + 2\pi - \pi + \frac{5\pi}{2} - 2\pi - 1 = 2\pi - 2 \simeq 4{,}28$$

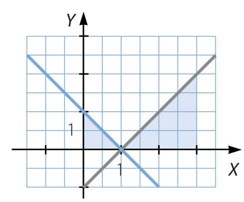
072 Representa gráficamente las siguientes funciones, y halla sus integrales sin utilizar la regla de Barrow.

a) $\displaystyle\int_0^2 (x+1)\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^3 \left|x-1\right|\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

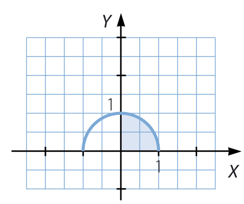
a) $\displaystyle\int_0^2 (x+1)\,dx = \frac{4}{2} + 2 = 4$



b) $\displaystyle\int_0^3 \left|x-1\right|\,dx = \frac{1\cdot 1}{2} + \frac{2\cdot 2}{2} = \frac{5}{2}$



c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi\cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$



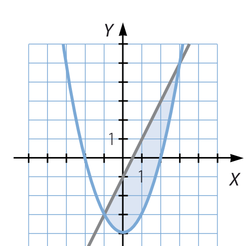
073 Dada la función $f(x) = sen\,x$, compara los valores de $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sen\,x\,dx$ y el área bajo la curva en el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sen\,x\,dx = \Big[-cos\,x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$ $\qquad sen\,x = 0 \rightarrow x = 0$

$$\text{Área} = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} sen\,x\,dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sen\,x\,dx\right| = \left|\Big[-cos\,x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\right| + \left|\Big[-cos\,x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right| = 1 + 1 = 2$$

La integral vale 0 mientras que el área es 4.

074 Representa gráficamente el recinto plano limitado por la parábola $y = x^2 - 4$ y la recta que pasa por los puntos $A(-1, -3)$ y $B(3, 5)$. Calcula su área.



La ecuación de la recta es: $y = 2x - 1$

$$\int_{-1}^{3} (2x - 1 - (x^2 - 4))\,dx = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} =$$

$$= 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}$$

075 Determina el área que encierra una parábola que pase por los puntos:

$$(-2, 0) \qquad \left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right) \qquad (0, 6)$$

y la recta $y = x$ en el intervalo [1, 3].

La ecuación de la parábola es de la forma: $y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} (-2, 0) \rightarrow 4a - 2b + c = 0 \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right) \rightarrow \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = \frac{25}{4} \\ (0, 6) \rightarrow c = 6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2a - b = -3 \\ a + 2b = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 1 \end{array}$$

Entonces, resulta que:

$$y = -x^2 + x + 6 \qquad -x^2 + x + 6 = x \rightarrow -x^2 + 6 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

$$\int_{1}^{3} (-x^2 + x + 6 - x)\,dx = \int_{1}^{\sqrt{6}} (-x^2 + 6)\,dx + \int_{\sqrt{6}}^{3} (-x^2 + 6)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 6x\right]_{1}^{\sqrt{6}} + \left[-\frac{x^3}{3} + 6x\right]_{\sqrt{6}}^{3} = 4\sqrt{6} - \frac{17}{3} + 9 - 4\sqrt{6} = \frac{10}{3}$$

PARA FINALIZAR…

076 Comprueba que los siguientes pares de funciones son primitivas de la misma función.

a) $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \ln ax$

b) $f(x) = (e^x + e^{-x})^2$ y $g(x) = (e^x - e^{-x})^2$

c) $f(x) = 2\,sen^2\,x$ y $g(x) = -cos\,2x$

a) $f'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$

b) $f'(x) = 2(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x}) = 2(e^{2x} - e^{-2x})$

$g'(x) = 2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}) = 2(e^{2x} - e^{-2x})$

c) $f'(x) = 2 \cdot 2\,sen\,x\,cos\,x = 4\,sen\,x\,cos\,x$

$g'(x) = sen\,2x \cdot 2 = 2\,sen\,x\,cos\,x \cdot 2 = 4\,sen\,x\,cos\,x$

077 Calcula $\int sen^2 x\, dx$ y $\int cos^2 x\, dx$.

$$\int sen^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{sen\, 2x}{2}\right) + k$$

$$\int cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{sen\, 2x}{2}\right) + k$$

078 Resuelve estas integrales.

a) $\int sec\ x\, dx$ b) $\int cosec\ x\, dx$

a) $$\int sec\ x\, dx = \int \frac{sec\ x\,(sec\ x + tg\ x)}{sec\ x + tg\ x}\, dx = \int \frac{sec^2 x + sec\ x\ tg\ x}{sec\ x + tg\ x}\, dx =$$

$$= \int \frac{\dfrac{1}{cos^2 x} + \dfrac{sen\ x}{cos^2 x}}{\dfrac{1}{cos\ x} + \dfrac{sen\ x}{cos\ x}}\, dx = \ln\left|\frac{1}{cos\ x} + \frac{sen\ x}{cos\ x}\right| + k = \ln\left|sen\ x + tg\ x\right| + k$$

b) $$\int cosec\ x\, dx = \int \frac{1}{sen\ x}\, dx = \int \frac{1}{2\, sen\, \dfrac{x}{2} \cdot cos\, \dfrac{x}{2}}\, dx = 2\int \frac{\dfrac{1}{cos^2 \dfrac{x}{2}}}{\dfrac{sen\, \dfrac{x}{2}}{cos\, \dfrac{x}{2}}}\, dx =$$

$$= 2\int \frac{sec^2 \dfrac{x}{2}}{tg\, \dfrac{x}{2}}\, dx = 2\ln\left|tg\, \frac{x}{2}\right| + k$$

079 Justifica el razonamiento y calcula: $\int_{-2}^{2} sen^{27} x\, dx$.

Si $f(x)$ es par $\rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$ Si $f(x)$ es impar $\rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$

Si $f(x)$ es par, la gráfica de la función es simétrica respecto del eje Y.

$$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = \int_{0}^{a} f(x)\, dx \rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

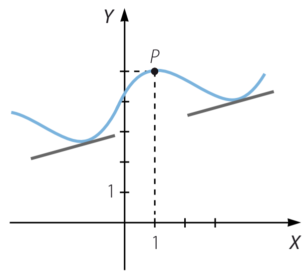
Si $f(x)$ es impar, la gráfica de la función es simétrica respecto del origen de coordenadas, y los recintos determinados por encima y por debajo del eje X son iguales:

$$\int_{-a}^{0} f(x) dx = -\int_{0}^{a} f(x)\, dx \rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx = 0$$

Como $sen^{27} x$ es una función impar:

$$\int_{-2}^{2} sen^{27} x\, dx = 0$$

080 Halla la función que pasa por el punto $P(1, 5)$ y tal que la pendiente de la recta tangente en cualquiera de sus puntos viene dada por la función $g(x) = 3x^2 + 5x - 2$.



$$f'(x) = g(x) \rightarrow f(x) = \int (3x^2 + 5x - 2)\,dx = x^3 + \frac{5x^2}{2} - 2x + k$$

$$(1, 5) \rightarrow 1 + \frac{5}{2} - 2 + k = 5 \rightarrow k = \frac{7}{2} \rightarrow f(x) = x^3 + \frac{5x^2}{2} - 2x + \frac{7}{2}$$

081 La velocidad de un cuerpo, lanzado verticalmente con una velocidad inicial v_0, y despreciando la resistencia del aire, viene dada por la función:

$$v = v_0 - g \cdot t$$

donde g es la aceleración de la gravedad y t es el tiempo, en segundos. El cuerpo alcanza una altura que viene dada por la fórmula: $e = v \cdot t$, donde e es la altura.

a) ¿A qué altura se encontrará este cuerpo transcurridos t segundos?

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

c) ¿Cuánto tiempo tarda en caer al suelo?

d) ¿Qué espacio recorre?

a) $e = v \cdot t \rightarrow e = v_0 \cdot t = 9,8t^2$

b) La fórmula corresponde a una función cuadrática cuya representación gráfica es una parábola. Como el coeficiente de mayor grado es negativo, la altura máxima se alcanza en el vértice de la parábola:

$$t = -\frac{v_0}{2 \cdot (-9,8)} = \frac{5v_0}{98} \rightarrow e = v_0 \cdot \frac{5v_0}{98} - 9,8 \cdot \left(\frac{5v_0}{98}\right)^2 = \frac{5{v_0}^2}{98} - \frac{5{v_0}^2}{196} = \frac{5{v_0}^2}{196}$$

c) El cuerpo tarda el mismo tiempo en alcanzar la máxima altura que en caer al suelo. Por tanto, el tiempo que tarda en caer al suelo es:

$$t = 2 \cdot \frac{5v_0}{98} = \frac{5v_0}{49}$$

d) El espacio que recorre en total es el doble del espacio que recorre para alcanzar la altura máxima.

$$e = 2 \cdot \frac{5{v_0}^2}{196} = \frac{5{v_0}^2}{98}$$