15 Probabilidad

ACTIVIDADES INICIALES

15.I. Se considera el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado de quinielas y anotar el símbolo que aparece en la cara superior.
Halla el espacio muestral y el espacio de sucesos.

El espacio muestral es $E = \{1, 2, X\}$. El espacio de sucesos está formado por los siguientes sucesos:

A = "Gana el equipo local"	$A = \{1\}$
B = "Empate"	$B = \{X\}$
C = "Gana el equipo visitante"	$C = \{2\}$
D = "No gana el equipo local"	$D = \{X, 2\}$
E = "No hay empate"	$E = \{1, 2\}$
F = "No gana el equipo visitante"	$F = \{1, X\}$
G = "Suceso seguro: gana algún equipo o hay empate"	$G = \{1, X, 2\}$

A estos sucesos habría que añadir el suceso imposible $\{\varnothing\}$

15.II. Si el espacio muestral de un experimento aleatorio está formado por n elementos, ¿cuántos elementos tiene el espacio de sucesos del experimento?

Dado un conjunto de n elementos, el número de subconjuntos que podemos hacer es:

$\binom{n}{1}$ subconjuntos de 1 elemento.

$\binom{n}{2}$ subconjuntos de 2 elementos.

$\binom{n}{3}$ subconjuntos de 3 elementos.

...

$\binom{n}{n}$ subconjuntos de n elementos.

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1$ subconjuntos, a los que hay que añadir el suceso imposible. Por tanto, luego el espacio de sucesos tendrá $2^n - 1$ elementos.

15.III. Halla el espacio muestral del experimento compuesto que consiste en lanzar un dado y una moneda.

El espacio muestral de lanzar un dado es $E_{Dado} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y el de una moneda, $E_{Moneda} = \{C, X\}$. Si consideramos el suceso compuesto "Lanzar un dado y una moneda", su correspondiente espacio muestral viene dado por el producto cartesiano de los dos espacios muestrales anteriores, quedando:

$E_{Dado + Moneda} = E_{Dado} \times E_{Moneda} = \{(1, C), (2, C), (3, C), (4, C), (5, C), (6, C), (1, X), (2, X), (3, X), (4, X), (5, X), (6, X)\}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

15.1*. Se hace girar la ruleta (del 0 al 36) y se anota el resultado obtenido. Se consideran los sucesos siguientes:

A = "Salir número par".
B = "Salir divisor de 12".
C = "Salir número inferior a 10".
D = "Salir número superior a 10".
E = "Salir múltiplo de 3".

a) Forma los sucesos A, B, C, D y E y sus contrarios.
b) Describe los sucesos $A \cup B$, $B \cap E$, y $C - A$.

a) (En la ruleta el 0 no se considera ni par ni impar)

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36\}$
$\overline{A} = \{0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35\}$
$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$\overline{B} = \{0, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$
$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$\overline{C} = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$
$D = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$
$\overline{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$E = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36\}$
$\overline{E} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 31, 32, 34, 35\}$

b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36\}$, es decir, o número par o divisor de 12.
$B \cap E = \{3, 6, 12\}$, es decir, divisor de 12 y múltiplo de 3.
$C - A = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$, es decir, inferior a 10 e impar ó 0.

15.2. Se lanza tres veces consecutivas una moneda y se consideran los sucesos siguientes:

A = "Salir los tres resultados iguales".

B = "Salir al menos dos cruces".

a) Describe los sucesos, $A \cup \overline{B}$, $A \cap B$ y $A - B$.

b) Encuentra un suceso incompatible con $A \cap \overline{B}$ y otro que lo contenga.

a) $A \cup \overline{B}$ = "Los tres resultados iguales o al menos dos caras" = $\{XXX, CCC, CCX, CXC, XCC\}$

$A \cap B$ = "Los tres resultados iguales y al menos dos cruces" = $\{XXX\}$

$A - B$ = "Los tres resultados iguales y menos de dos cruces" = $\{CCC\}$

b) $A \cap \overline{B} = A - B$ = "Los tres resultados iguales y menos de dos cruces" = $\{CCC\}$

Un suceso incompatible es $A \cap B$ = "Las tres son cruces". Un suceso que lo contiene es A = "Los tres resultados son iguales".

15.3. Se considera el experimento de extraer dos cartas consecutivas de un mazo de 6 cartas de la baraja española que solo contiene las figuras de los palos de bastos y de espadas. Sean los sucesos:

A = "Extraer dos cartas de palos distintos".

B = "Extraer los dos reyes".

Comprueba que se cumplen las leyes de De Morgan, construyendo para ello los sucesos que sean necesarios.

$A = \{S_E S_B, S_E C_B, S_E R_B, C_E S_B, C_E C_B, C_E R_B, R_E S_B, R_E C_B, R_E R_B, S_B S_E, S_B C_E, S_B R_E, C_B S_E, C_B C_E, C_B R_E, R_B S_E, R_B C_E, R_B R_E\}$

$B = \{R_E R_B, R_B R_E\}$

$\overline{A} = \{S_E C_E, S_E R_E, C_E S_E, C_E R_E, R_E S_E, R_E C_E, S_B C_B, S_B R_B, C_B S_B, C_B R_B, R_B S_B, R_B C_B\}$

$\overline{B} = \{S_E C_E, S_E R_E, S_E S_B, S_E C_B, S_E R_B, C_E S_E, C_E R_E, C_E S_B, C_E C_B, C_E R_B, R_E S_E, R_E C_E, R_E S_B, R_E C_B, S_B S_E, S_B C_E, S_B R_E, S_B C_B, S_B R_B, C_B S_E, C_B C_E, C_B R_E, C_B S_B, C_B R_B, R_B S_E, R_B C_E, R_B S_B, R_B C_B\}$

$A \cup B = A$ $\qquad (\overline{A \cup B}) = \overline{A}$ $\qquad \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A}$

$A \cap B = B$ $\qquad (\overline{A \cap B}) = \overline{B}$ $\qquad \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{B} \Rightarrow$ Se cumplen las leyes.

15.4. En la tabla de la derecha se recoge el número de veces que ha ocurrido el suceso I = "obtener impar" al lanzar un dado numerado del 1 al 6 un número creciente de veces. Estima un valor para la probabilidad de I y razona si el dado está equilibrado.

n	10	50	100	500	1000	5000	10 000
I	4	21	38	199	402	2000	3998

Estudiamos la frecuencia relativa del suceso I:

n	10	50	100	500	1000	5000	10 000
I	4	21	38	199	402	2000	3998
$f_n(I)$	0,4	0,42	0,38	0,398	0,402	0,4	0,3998

La probabilidad es $P(I) = \lim_{n \to \infty} f_n(I) = 0{,}4$

El dado no está equilibrado, pues el suceso I = "obtener impar" debería tener una probabilidad $P(I) = 0{,}5$.

15.5. Una urna tiene ocho bolas rojas, cinco amarillas y siete verdes. Se extrae una al azar. Determina la probabilidad de que:

a) Sea roja. b) Sea verde. c) Sea amarilla. d) No sea roja.

a) $P(R) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

c) $P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

b) $P(V) = \frac{7}{20} = 0{,}35$

d) $P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}5$

15.6. Se lanzan dos monedas. Halla las siguientes probabilidades:

a) Obtener dos caras. b) Obtener dos cruces. c) Obtener al menos una cara.

El espacio muestral del experimento es $E = \{CC, CX, XX, XC\}$. Así, las probabilidades son:

a) $P(CC) = \frac{1}{4} = 0{,}25$ b) $P(XX) = \frac{1}{4} = 0{,}25$ c) $P(CC \cup CX \cup XC) = \frac{3}{4} = 0{,}75$

15.7*. Sean A, B y C tres sucesos de un experimento aleatorio, tales que:

$P(A) = 0{,}3$ $P(\overline{B}) = 0{,}5$ $P(C) = 0{,}4$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}4$ $P(A \cup C) = 0{,}6$ $P(B \cap C) = 0{,}3$

$P(A \cap B \cap C) = 0{,}1$

Halla las siguientes probabilidades:

a) $P(\overline{A})$

b) $P(A \cup B)$

c) $P(B \cup C)$

d) $P(A \cap C)$

e) $P(A \cup B \cup C)$

f) $P(\overline{A} \cap \overline{C})$

g) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

h) $P(\overline{B} \cap C)$

i) $P(A - B)$

j) $P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$

a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

b) $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

c) $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = [1 - P(\overline{B})] + 0{,}4 - 0{,}3 = 1 - 0{,}5 + 0{,}1 = 0{,}6$

d) $P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A \cup C) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}6 = 0{,}1$

e) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$
$= 0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}2 - 0{,}3 - 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}7$

f) $P(\overline{A} \cap \overline{C}) = 1 - P(A \cup C) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

g) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

h) $P(\overline{B} \cap C) = P(C) - P(B \cap C) = 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}1$

i) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1$

j) $P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(A) - P(A \cap (B \cup C)) = P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$
$= 0{,}3 - 0{,}2 - 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}1$

15.8. Se tiene una bolsa con 15 bolas negras y 10 blancas, y se realizan dos extracciones sucesivas de una bola. Halla la probabilidad de que las dos bolas sean blancas en los siguientes casos.

a) Con devolución a la bolsa de la primera bola extraída.

b) Sin devolución.

Se consideran los sucesos:

B_1 = “sacar bola blanca en la primera extracción”, B_2 = “sacar bola blanca en la segunda extracción”

a) Si la extracción es con devolución, los sucesos B_1 y B_2 son independientes; por tanto,

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(R_2) = \frac{10}{25} \cdot \frac{10}{25} = \frac{4}{25}$$

b) Si la extracción es sin devolución, los sucesos B_1 y B_2 son dependientes; por tanto,

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) = \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} = \frac{3}{20}$$

15.9. (PAU) Sabiendo que el 40% de los residentes de una localidad son consumidores de pescado y que con una probabilidad de 0,25 un consumidor de pescado no es consumidor de carne, ¿cuál sería la probabilidad de que seleccionado al azar un residente de esa localidad, resulte ser consumidor de pescado y carne? Justifica la respuesta.

Sean los sucesos:

C = "El consumidor toma carne".

P = "El consumidor toma pescado".

Según el enunciado, sabemos que $P(P) = 0{,}4$ y $P(\overline{C}/P) = 0{,}25$. Por tanto, la probabilidad pedida es:

$$P(P \cap C) = P(P) - P(P \cap \overline{C}) = P(P) - P(P) \cdot P(\overline{C}/P) = 0{,}4 - 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}3$$

15.10. (PAU) Si la probabilidad de la intersección de dos sucesos independientes es 0,2 y la de su unión es 0,7, ¿cuál es la probabilidad de cada uno de los sucesos?

Sean A y B los sucesos del enunciado, tal que $P(A \cap B) = 0{,}2$ y $P(A \cup B) = 0{,}7$. Entonces se cumple:

$$\left.\begin{array}{r} P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) = 0{,}2 + 0{,}7 = 0{,}9 \\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} P(A) = 0{,}4 \\ P(B) = 0{,}5 \end{array}\right.$$

15.11. (PAU) El 60% de los alumnos de 2.º de bachillerato de un colegio aprobaron Filosofía y el 70% aprobaron Matemáticas. Además, el porcentaje de alumnos que aprobaron Filosofía habiendo aprobado Matemáticas es del 80%.

a) ¿Qué porcentaje de alumnos suspendió ambas asignaturas?

b) Si Juan sabe que ha aprobado Filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también Matemáticas?

Definimos los sucesos M = "Aprobar Matemáticas" y F = "Aprobar Filosofía", tal que $P(M) = 0{,}7$, $P(F) = 0{,}6$, y $P(F/M) = 0{,}8$. Las probabilidades pedidas son:

a) $P(\overline{M} \cap \overline{F}) = 1 - P(M \cup F) = 1 - P(M) - P(F) + P(M \cap F) = 1 - P(M) - P(F) + P(M) \cdot P(F/M) =$
$= 1 - 0{,}7 - 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}26 \Rightarrow$ 26% de alumnos con ambas asignaturas suspensas

b) $P(M/F) = \dfrac{P(M \cap F)}{P(F)} = \dfrac{P(M) \cdot P(F/M)}{P(F)} = \dfrac{0{,}7 \cdot 0{,}8}{0{,}6} = 0{,}9\widehat{3}$

15.12. En una urna hay tres bolas con las letras A, N y A. Se realizan tres extracciones sucesivas. Halla la probabilidad de obtener ordenadamente las letras del nombre ANA.

a) Con reemplazamiento de la bola.

b) Sin reemplazamiento de la bola.

a) $P(A_1 \cap N_2 \cap A_3) = P(A) \cdot P(N) \cdot P(A) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{27} = 0{,}148$

b) $P(A_1 \cap N_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(N_2/A_1) \cdot P(A_3/(A_1 \cap N_2)) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{3} = 0{,}33$

15.13. Se lanza cinco veces un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6.

a) Halla la probabilidad de obtener siempre un número impar.

b) Halla la probabilidad de obtener siempre un número par.

c) ¿Son los sucesos de los apartados *a* y *b* contrarios?

a) $P(I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4 \cap I_5 \cap I_6) = [P(I)]^6 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = 0{,}016$

b) $P(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4 \cap P_5 \cap P_6) = [P(P)]^6 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = 0{,}016$

c) Los sucesos anteriores no son contrarios, pues no cumplen $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Se trata de sucesos equiprobables.

15.14. Una caja contiene tres monedas *P*, *S* y *T*. La primera es normal, la segunda tiene cara por los dos lados y la tercera está trucada de forma que la probabilidad de salir cara es $\frac{1}{3}$.
Se elige una moneda al azar y se tira; halla la probabilidad de que se obtenga cara.

Usamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(C) = P(P) \cdot P(C/P) + P(S) \cdot P(C/S) + P(T) \cdot P(C/T) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{18} = 0{,}61$$

15.15. De los alumnos de 1.º de Bachillerato presentados a un concurso de literatura, el 72% estudiaba Humanidades; el 18%, Ciencias Sociales, y el resto, Ciencias y Tecnología. El porcentaje de aprobados al final del curso fue del 91% para los de Humanidades, del 83% para los de C. Sociales y del 78% para los de Ciencias y Tecnología. Elegido un alumno al azar de entre los presentados al concurso, halla la probabilidad de que haya aprobado.

Sean los sucesos:

H = "Alumno de Humanidades"
CS = "Alumno de Ciencias Sociales"
CT = "Alumno de Ciencias y Tecnología"
A = "Alumno aprobado"

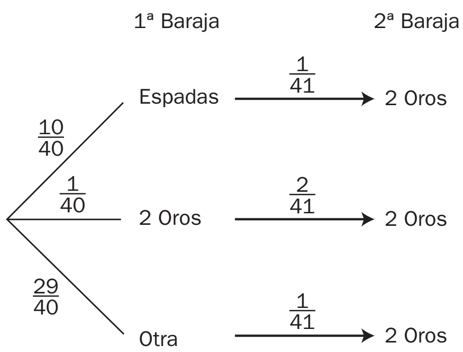
Según los datos del enunciado, conocemos las siguientes probabilidades:

$P(H) = 0{,}72 \quad P(CS) = 0{,}18 \quad P(CT) = 0{,}1 \quad P(A/H) = 0{,}91 \quad P(A/CS) = 0{,}83 \quad P(A/CT) = 0{,}78$

Por lo que la probabilidad pedida es:

$$P(A) = P(H) \cdot P(A/H) + P(CS) \cdot P(A/CS) + P(CT) \cdot P(A/CT) = 0{,}72 \cdot 0{,}91 + 0{,}18 \cdot 0{,}83 + 0{,}1 \cdot 0{,}78 = 0{,}8826$$

15.16. (PAU) Se toman dos barajas españolas de 40 cartas cada una. Se extrae una carta de la primera baraja y se introduce en la segunda. Se mezclan las cartas de esta segunda baraja y se extrae al azar una de ellas que resulta ser el dos de oros. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta extraída fuera una espada?



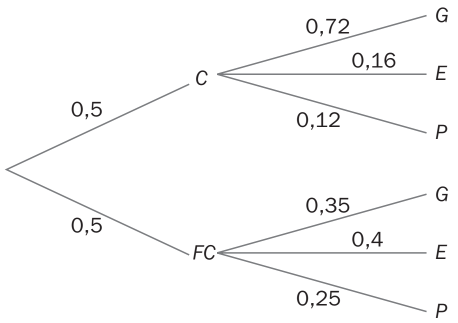
Definimos los sucesos:

E_1 = "Sacar una espada en la baraja 1".
O_2^2 = "Sacar el 2 de oros en la baraja 2".
O_1^2 = "Sacar el 2 de oros en la baraja 1".

$$P(E_1/O_2^2) = \frac{P(E_1 \cap O_2^2)}{P(O_2^2)} = \frac{P(E_1) \cdot P(O_2^2/E_1)}{P(O_1^2) \cdot P(O_2^2/O_1^2) + P(\overline{O}_1^2) \cdot P(O_2^2/\overline{O}_1^2)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{41}}{\frac{1}{40} \cdot \frac{2}{41} + \frac{39}{40} \cdot \frac{1}{41}} = \frac{\frac{1}{164}}{\frac{1}{820} + \frac{39}{1640}} = \frac{10}{41} = 0{,}244$$

15.17. Un equipo de fútbol juega el 50% de los partidos en casa. De los partidos jugados fuera de casa gana un 35%, pierde un 25% y empata un 40%. De los partidos jugados en casa pierde un 12%, gana un 72% y empata un 16%. Si ganó el último partido, ¿cuál es la probabilidad de que haya jugado fuera de casa?



Sean los sucesos:

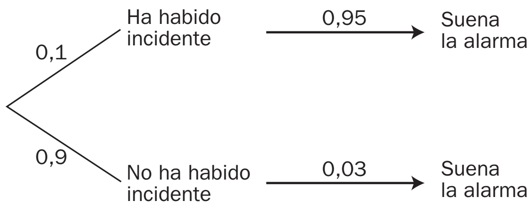
G = "Ganar".
P = "Perder".
E = "Empatar".
C = "Jugar en casa".
FC = "Jugar fuera de casa".

La probabilidad pedida es:

$$P(FC/G) = \frac{P(FG \cap G)}{P(G)} = \frac{P(FC) \cdot P(G/FC)}{P(FC) \cdot P(G/FC) + P(C) \cdot P(G/C)} =$$

$$= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}35}{0{,}5 \cdot 0{,}35 + 0{,}5 \cdot 0{,}72} = \frac{0{,}175}{0{,}535} = \frac{35}{107} = 0{,}327$$

15.18. (PAU) En un comercio, la probabilidad de que haya un incidente es de 0,1. Si este se produce, la probabilidad de que la alarma suene es de 0,95. La probabilidad de que funcione la alarma es de 0,03. Se sabe que ha funcionado la alarma. Halla la probabilidad de que no haya habido incidente.



Sean los sucesos:

I = "Hay incidente en el comercio".

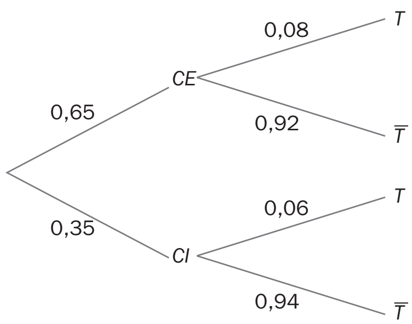
A = "Suena la alarma".

La probabilidad pedida es:

$$P(\bar{I}/A) = \frac{P(\bar{I} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\bar{I}) \cdot P(A/\bar{I})}{P(\bar{I}) \cdot P(A/\bar{I}) + P(I) \cdot P(A/I)} =$$

$$= \frac{0,9 \cdot 0,03}{0,9 \cdot 0,03 + 0,1 \cdot 0,95} = \frac{0,027}{0,0122} = 0,221$$

15.19. Una oficina de un banco tiene dos cajeros automáticos, uno exterior y otro interior. El porcentaje de utilización del cajero exterior es del 65%. La probabilidad de que el cajero interior se trague la tarjeta es de 0,06, y la de que lo haga el cajero exterior, de 0,08. Si a un hombre, al sacar dinero, el cajero se le ha tragado la tarjeta, ¿cuál es la probabilidad de que haya utilizado el cajero exterior?



Sean los sucesos:

CI = "Usar el cajero interior".

CE = "Usar el cajero exterior".

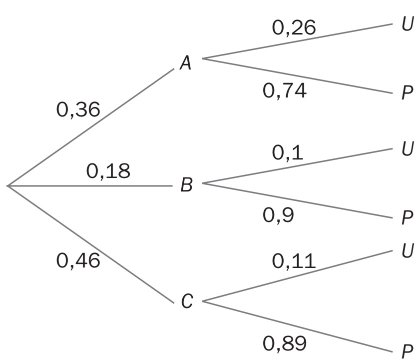
T = "El cajero se traga la tarjeta".

La probabilidad pedida es:

$$P(CE/T) = \frac{P(CE \cap T)}{P(T)} = \frac{P(CE) \cdot P(T/CE)}{P(CE) \cdot P(T/CE) + P(CI) \cdot P(T/CI)} =$$

$$= \frac{0,65 \cdot 0,08}{0,65 \cdot 0,08 + 0,35 \cdot 0,06} = \frac{0,052}{0,073} = 0,712$$

15.20. Se han clasificado los trasplantes de corazón en urgentes y programados. Del total de trasplantes realizados entre los años 1999 y 2007 en los hospitales *A*, *B* y *C*, el 36% se efectuó en *A*; el 18%, en *B*, y el 46%, en *C*. De los efectuados en *A*, el 26% fueron urgentes; de los efectuados en *B*, fueron programados el 90%, y de los efectuados en *C*, fueron urgentes el 11%. Se ha elegido un paciente sometido a un trasplante urgente. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido operado en el hospital *A*?



Sean los sucesos:

U = "El trasplante es urgente".

P = "El trasplante es programado".

A = "El trasplante se realiza en el hospital A".

B = "El trasplante se realiza en el hospital B".

C = "El trasplante se realiza en el hospital C".

La probabilidad pedida es:

$$P(A/U) = \frac{P(A \cap U)}{P(U)} = \frac{P(A) \cdot P(U/A)}{P(A) \cdot P(U/A) + P(B) \cdot P(U/B) + P(C).P(U/C)} =$$

$$= \frac{0,36 \cdot 0,26}{0,36 \cdot 0,26 + 0,18 \cdot 0,1 + 0,46 \cdot 0,11} = \frac{0,0936}{0,1622} = 0,577$$

EJERCICIOS

Sucesos y operaciones con sucesos

15.21. Se lanza un dado octaédrico con las caras numeradas del 1 al 8. Se espera a que se pose sobre una de las caras y se anota el resultado de la cara superior.

a) Forma el espacio muestral.

b) Forma los siguientes sucesos:

A = "salir número par". D = "salir número inferior a 10".

B = "salir número primo". E = "salir número superior a 10".

C = "salir número múltiplo de 3". F = "salir mayor que 3 y menor o igual a 6".

a) $EM = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

b) $A = \{2, 4, 6, 8\}$ $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ $C = \{3, 6\}$

$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = EM$ $E = \varnothing$ $F = \{4, 5, 6\}$

15.22. Para los sucesos del ejercicio anterior:

a) Forma los sucesos contrarios.

b) Forma los siguientes sucesos:

$A \cup B$ $A \cap B$ $C \cup D$ $C \cap D$

$D \cup F$ $D \cap \overline{F}$ $(A \cup B) \cap \overline{C}$

a) $\overline{A} = \{1, 3, 5, 7\}$ $\overline{B} = \{4, 6, 8\}$ $\overline{C} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

$\overline{D} = \varnothing$ $\overline{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = EM$ $\overline{F} = \{1, 2, 3, 7, 8\}$

b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $A \cap B = \{2\}$ $C \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = EM$ $C \cap D = \{3, 6\}$

$D \cup F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $D \cap \overline{F} = \{1, 2, 3, 7, 8\}$ $(A \cup B) \cap \overline{C} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

15.23. Se lanzan tres dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6 y se anotan los números de las caras superiores.

a) ¿Cuántos puntos muestrales tiene el espacio muestral?

b) Forma los siguientes sucesos:

A = "obtener al menos dos cincos".

B = "obtener dos doses y un tres".

a) El número de sucesos elementales es igual a $VR_{6,3} = 6^3 = 216$.

b) $A = \{(5, 5, 1), (5, 5, 2), (5, 5, 3), (5, 5, 4), (5, 5, 5), (5, 5, 6), (5, 1, 5), (5, 3, 5), (5, 3, 5), (5, 4, 5),$
$(5, 6, 5), (1, 5, 5), (2, 5, 5), (3, 5, 5), (4, 5, 5), (6, 5, 5)\}$

$B = \{(2, 2, 3), (2, 3, 2), (3, 2, 2)\}$

15.24. Considera el experimento aleatorio que consiste en la extracción de tres tornillos de una caja, que pueden ser buenos o defectuosos.

a) Forma el espacio muestral.

b) Forma los siguientes sucesos:

A = "el último tornillo es defectuoso".

B = "al menos dos tornillos son defectuosos".

Sean los sucesos D = "el tornillo es defectuoso" y B = "el tornillo es bueno" ($\overline{B} = D$)

a) $E = \{(B, B, B), (B, B, D), (B, D, B), (D, B, B), (D, D, B), (D, B, D), (B, D, D), (D, D, D)\}$

b) $A = \{(B, B, D), (D, B, D), (B, D, D), (D, D, D)\}$

$B = \{(D, D, B), (D, B, D), (B, D, D), (D, D, D)\}$

15.25. Una urna contiene 6 bolas negras y 5 bolas blancas. Se extraen sucesivamente 3 bolas de la urna.

a) Forma el espacio muestral.

b) Forma los siguientes sucesos:

A = "extraer al menos una bola negra".

B = "extraer las tres bolas del mismo color".

C = "no extraer ninguna bola blanca".

a) $E = \{(N, N, N), (N, N, B), (N, B, N), (B, N, N), (N, B, B), (B, N, B), (B, B, N), (B, B, B)\}$

b) $A = \{(N, N, N), (N, N, B), (N, B, N), (B, N, N), (N, B, B), (B, N, B), (B, B, N)\}$

$B = \{(N, N, N), (B, B, B)\}$

$C = \{(N, N, N)\}$

15.26. Sea el experimento aleatorio que consiste en extraer al azar una bola de una urna donde hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Se consideran los siguientes sucesos:

A = "salir par"

B = "salir impar"

C = "salir múltiplo de 3"

D = "salir menor que 4"

a) Comprueba con los sucesos A y C las leyes de Morgan.

b) Di cuáles de los sucesos anteriores son compatibles y cuáles incompatibles.

a) $A \cup C = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$

$\overline{A \cup C} = \{1, 5, 7\}$

$\overline{A} \cap \overline{C} = \{1, 5, 7\}$

$A \cap C = \{6\}$

$\overline{A \cap C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$

$\overline{A} \cup \overline{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$

b) El suceso A es incompatible con el suceso B, y es compatible con los otros dos sucesos C y D.

El suceso B es compatible con los sucesos C y D.

El suceso C es compatible con D.

15.27. Prueba cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas.

a) Todos los sucesos contrarios son incompatibles entre sí.

b) Todos los sucesos incompatibles son necesariamente contrarios.

a) Cierta. Sean A un suceso cualquiera de un experimento, y $\overline{A}$, su suceso contrario ($A \cup \overline{A} = E$). Entonces, $\overline{A} \cap A = \varnothing$ y los sucesos A y $\overline{A}$ son incompatibles entre sí.

b) Falsa. Por ejemplo, sea el experimento consistente en sacar una carta de una baraja española. Los sucesos A = "sacar figura" y B = "sacar un número menor que 5" son incompatibles, pero no contrarios.

Concepto de probabilidad

15.28. En una urna hay 7 bolas rojas, 5 blancas y 9 azules. Se extrae una bola al azar. Halla las siguientes probabilidades:

a) Sea roja.

b) Sea azul.

c) No sea blanca.

d) Sea roja o blanca.

e) No sea ni roja ni blanca.

f) Sea azul o blanca.

a) $P(R) = \dfrac{7}{21} = \dfrac{1}{3}$

b) $P(A) = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}$

c) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{5}{21} = \dfrac{16}{21}$

d) $P(\overline{R} \cap \overline{B}) = P(\overline{R \cup B}) = 1 - P(R \cup B) = 1 - \dfrac{12}{21} = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}$

e) $P(R \cup B) = P(R) + P(B) = \dfrac{7}{21} + \dfrac{5}{21} = \dfrac{12}{21} = \dfrac{4}{7}$

f) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \dfrac{9}{21} + \dfrac{5}{21} = \dfrac{14}{21} = \dfrac{2}{3}$

15.29. Se lanzan al aire tres monedas. Determina la probabilidad de que se obtenergan al menos dos cruces.

El espacio muestral es: $E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$

Sea el suceso A = "obtener al menos dos cruces" $= \{CXX, XCX, XXC, XXX\}$

La probabilidad pedida será: $p(A) = \frac{4}{8} = 0{,}5$.

15.30. Se extrae una carta de una baraja española. ¿Qué es más probable?

a) Que salga la sota de bastos o el rey de espadas.

b) Que salga un oro o una figura.

c) Que salga un oro o un no oro.

d) Que salga una figura o que no salga una figura.

Las probabilidades de los sucesos *a, b, c* y *d* se ordenan así: $P(c) = P(d) = 1 > P(b) = \frac{19}{40} > P(a) = \frac{1}{20}$

15.31. De los 39 alumnos de una clase, 16 escogieron como idioma el francés, y 27, el inglés. Nueve alumnos eligieron ambos idiomas y el resto no escogió ninguno de ellos. Si se elige al azar a un alumno de dicha clase, halla las siguientes probabilidades:

a) Escogió francés.

b) Escogió inglés.

c) Escogió ambos idiomas.

d) Escogió francés o inglés.

e) Escogió francés, pero no inglés.

f) Escogió inglés, pero no francés.

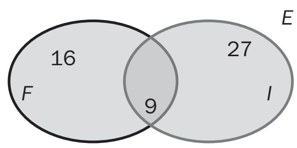
g) No escogió ni inglés ni francés.

Si representamos por:

E = {todos los alumnos de la clase}

F = {alumnos que estudian francés}

I = {alumnos que estudian inglés}



formamos el diagrama superior, que se llama diagrama de Venn, del siguiente modo:

En la intersección de F e I situamos 9 alumnos. Como hay 16 que estudian francés, situaremos $16 - 9 = 7$ en francés; del mismo modo, como hay 27 que estudian inglés, situaremos $27 - 9 = 18$ en inglés. Por último, ya hemos colocado 34 de 39; quedan 5 fuera de francés e inglés. A continuación calculamos las probabilidades pedidas:

a) $P(\text{haya escogido francés}) = \frac{7 + 9}{39} = \frac{16}{39}$

b) $P(\text{haya escogido inglés}) = \frac{9 + 18}{39} = \frac{27}{39}$

c) $P(\text{haya escogido francés e inglés}) = \frac{9}{39}$

d) $P(\text{haya escogido francés o inglés}) = \frac{7 + 9 + 18}{39} = \frac{34}{39}$

e) $P(\text{haya escogido francés y no inglés}) = \frac{7}{39}$

f) $P(\text{haya escogido inglés y no francés}) = \frac{18}{39}$

g) $P(\text{no haya escogido ni inglés ni francés}) = \frac{5}{39}$

15.32. De 100 personas que fueron consultadas sobre sus preferencias respecto de tres marcas de coches *A*, *B* y *C*, 50 han mostrado preferencias por *A*, 40 por *B* y 30 por *C*. Además, 25 personas mostraban preferencias por *A* y *B*; 15, por *A* y *C*, y 12, por *B* y *C*. Por último, tan solo 5 personas mostraron preferencias por las tres marcas. El resto no sabe o no contesta. Elegida una persona al azar, halla las siguientes probabilidades:

a) Que prefiera la marca *A*.

b) Que prefiera la marca *B*.

c) Que prefiera las marcas *A* y *B*.

d) Que prefiera la marca *B* o *C*.

e) Que prefiera la marca *A* y no la marca *C*.

f) Que prefiera la marca *B* y no *C*.

g) Que no prefiera ni *A* ni *B*.

a) $P(A) = \frac{15 + 20 + 10 + 5}{100} = \frac{1}{2}$

b) $P(B) = \frac{20 + 8 + 7 + 5}{100} = \frac{2}{5}$

c) $P(A \cap B) = \frac{20 + 5}{100} = \frac{1}{4}$

d) $P(B \cup C) = \frac{20 + 8 + 7 + 5 + 10 + 8}{100} = \frac{29}{50}$

e) $P(A \cap \overline{B}) = \frac{15 + 10}{100} = \frac{1}{4}$

f) $P(B \cap \overline{C}) = \frac{20 + 8}{100} = \frac{28}{100}$

g) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{65}{100} = \frac{7}{20}$

15.33. Los números 1, 2, 3,…, n se alinean al azar.

a) Halla la probabilidad de que los números 2 y 3 aparezcan seguidos y en ese orden.

b) Halla la probabilidad de que los números 2 y 3 aparezcan juntos.

a) Casos posibles: ordenaciones de n números: $P_n = n!$

Casos favorables: consideremos la ordenación {2, 3} como un solo número; por tanto, habrá $P_{n-1} = (n-1)!$ ordenaciones posibles con el 2 seguido del 3.

En consecuencia, la probabilidad pedida es $P = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

b) Casos posibles: $P_n = n!$

Casos favorables: $2P_{n-1} = 2(n-1)!$, ya que ahora hay el doble número de ordenaciones, pues puede quedar el 2 seguido del 3 o el 3 seguido del 2.

En consecuencia, la probabilidad pedida es $P = \dfrac{2(n-1)!}{n!} = \dfrac{2}{n}$.

15.34. (PAU) Se considera el experimento consistente en lanzar una moneda equilibrada y un dado equilibrado.

a) Describe el espacio muestral de este experimento.

b) Halla la probabilidad del suceso "obtener una cara en la moneda y un número par en el dado".

a) El espacio muestral de lanzar una moneda es $E_{Moneda} = \{C, X\}$, y el de un dado, $E_{Dado} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si consideramos el suceso compuesto "Lanzar una moneda y un dado", su correspondiente espacio muestral viene dado por el producto cartesiano de los dos espacios muestrales anteriores, quedando:

$$E_{Dado\ +\ Moneda} = E_{Moneda} \times E_{Dado} =$$
$$= \{(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6), (X, 1), (X, 2), (X, 3), (X, 4), (X, 5), (X, 6)\}$$

b) $P(\text{Obtener una cara y un número par}) = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.

15.35. (PAU) Se dispone de tres tarjetas, dos blancas y una roja. Se reparten al azar entre tres personas *A*, *B* y *C*, entregando una tarjeta a cada una.

a) Construye el espacio muestral del experimento.

b) Halla las siguientes probabilidades:

1) *A* tiene una tarjeta blanca.

2) *B* tiene una tarjeta blanca.

3) *A* y *B* tienen cada uno una tarjeta blanca.

Disponemos de dos tarjetas blancas, B_1 y B_2, y una roja, R.

a) $E = \{B_1B_2R, B_2B_1R, B_1RB_2, B_2RB_1, RB_1B_2, RB_2B_1\}$

b) $P(\text{la primera persona tiene tarjeta blanca}) = P(\{B_1B_2R, B_2B_1R, B_1RB_2, B_2RB_1\}) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

$P(\text{la segunda persona tiene tarjeta blanca}) = P(\{B_1B_2R, B_2B_1R, RB_1B_2, RB_2B_1\}) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

$P(\text{la primera y la segunda persona tienen tarjeta blanca}) = P(\{B_1B_2R, B_2B_1R\}) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Probabilidad compuesta. Sucesos independientes

15.36. (PAU) Sean A y B dos sucesos cualesquiera del mismo espacio de sucesos, tales que:

$P(A) = \frac{3}{8}$ $\qquad$ $P(B) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Halla:

a) $P(A \cup B)$ $\qquad$ **c) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$** $\qquad$ **e) $P(A \cap \overline{B})$**

b) $P(\overline{A})$ $\qquad$ **d) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$** $\qquad$ **f) $P(B \cap \overline{A})$**

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$

b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = A - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

c) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

d) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

e) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

f) $P(A \cap \overline{B}) = P(A - B) = P(A - (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

15.37. (PAU) Un dominó normal consta de 28 fichas: blanca-blanca, blanca-1,…, 6-6. Siete de estas fichas son dobles: blanca-blanca, 1-1, 2-2,…, 6-6. Calcula la probabilidad de encontrar alguna doble al tomar cuatro fichas al azar del dominó.

Sean los sucesos D = “encontrar una ficha doble” y su contrario, $\overline{D}$. La probabilidad pedida es:

$P(\text{encontrar alguna doble}) = P(\{\overline{D}, \overline{D}, \overline{D}, D\}) + P(\{\overline{D}, \overline{D}, D, \overline{D}\}) + P(\{\overline{D}, D, \overline{D}, \overline{D}\}) + P(\{D, \overline{D}, \overline{D}, \overline{D}\}) =$

$$= \frac{21}{28}\cdot\frac{20}{27}\cdot\frac{19}{26}\cdot\frac{7}{25} + \frac{21}{28}\cdot\frac{20}{27}\cdot\frac{7}{26}\cdot\frac{19}{25} + \frac{21}{28}\cdot\frac{7}{27}\cdot\frac{20}{26}\cdot\frac{19}{25} + \frac{7}{28}\cdot\frac{21}{27}\cdot\frac{20}{26}\cdot\frac{19}{25} = 0{,}477$$

15.38. (PAU) Sacamos al azar, y sin reposición, cuatro cartulinas numeradas del 1 al 4.

a) Averigua la probabilidad de que salgan ordenadas.

b) Razona si la probabilidad sería menor o mayor si solo hubiera tres cartulinas.

a) Casos posibles: $P_4 = 4! = 24$

Casos favorables: $\{(1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1)\}$

Luego la probabilidad pedida es $P = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} = 0{,}083$.

b) Los casos posibles disminuyen, mientras que los favorables permanecen constantes, por lo que la probabilidad de que salgan ordenadas es mayor para $n = 3$ que para $n = 4$.

15.39. (PAU) En una rifa hay 100 números y se han comprado 2. Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

a) Si solo hay un premio, ¿cuál es la probabilidad de conseguirlo?

b) Si en la rifa hay dos premios, ¿cuál es la probabilidad de conseguir los dos? ¿Y de conseguir al menos uno?

a) Si solo hay un premio, cada número tiene la probabilidad de 0,01 de ser premiado. Si poseemos dos números, tendremos una probabilidad de ganar igual a 0,02.

b) Si hay dos premios, cada número tiene una probabilidad de 0,02 de ser premiado.

Para obtener los dos premios solo hay un caso favorable, cuando los dos números son premiados; mientras que los casos posibles son $C_{100,2} = 4950$, quedando una probabilidad de $2 \cdot 10^{-4}$.

Obtener al menos un premio es el suceso contrario de no obtener ningún premio. Este último tiene un número de casos favorables igual a $C_{98,2} = 4753$, quedando una probabilidad de no obtener ningún premio igual a 0,96. Así, la probabilidad pedida de obtener al menos un premio es 0,04.

15.40. (PAU) De dos tiradores se sabe que uno de ellos hace dos dianas cada tres disparos, y el otro consigue tres dianas de cada cuatro disparos. Si los dos disparan simultáneamente, halla:

a) La probabilidad de que ambos acierten.

b) La probabilidad de que uno acierte y el otro no.

c) La probabilidad de que ninguno de los dos acierte.

d) La probabilidad de que alguno acierte.

Sean los sucesos S_1 = "el primer tirador acierta" y S_2 = "el segundo tirador acierta".

a) Suponiendo que los disparos de ambos tiradores son independientes, la probabilidad pedida es:

$P(S_1 \cap S_2) = P(S_1) \cdot P(S_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

b) $P((S_1 \cap \overline{S}_2) \cup (\overline{S}_1 \cap S_2)) = P(S_1 \cap \overline{S}_2) + P(\overline{S}_1 \cap S_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$

c) $P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2) = P(\overline{S}_1) \cdot P(\overline{S}_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

d) $P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{11}{12}$, y se cumple $P(S_1 \cup S_2) = 1 - P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2)$

15.41. Sean A, B y C tres sucesos independientes tales que $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}8$ y $P(C) = 0{,}7$. Halla las probabilidades de los sucesos siguientes: $A \cup B$, $A \cup C$ y $A \cup B \cup C$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0{,}2 + 0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}84$

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A) \cdot P(C) = 0{,}2 + 0{,}7 - 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}76$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A) \cdot P(B) - P(A) \cdot P(C) - P(B) \cdot P(C) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \\ &= 0{,}2 + 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}2 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}7 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}952 \end{aligned}$$

15.42. (PAU) Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{2}$ y $P(B) = \frac{3}{5}$. Calcula razonadamente para qué valor de $P(A \cup B)$ los sucesos A y B son independientes.

Dos sucesos A y B son independientes cuando $A \cap B = \varnothing$, es decir, cuando $P(A \cap B) = 0$. Por tanto, para dos sucesos independientes se cumple que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Según los datos del enunciado, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{11}{10} > 1$, por lo que los sucesos A y B no pueden ser independientes.

15.43. (PAU) Una investigación de mercado que se realiza sobre 800 personas revela los siguientes datos sobre la capacidad de recordar un anuncio televisivo de un producto concreto y la adquisición de dicho producto.

	Recuerdan el anuncio	No recuerdan el anuncio
Compran el producto	160	80
No compran el producto	240	320

a) Halla la probabilidad de que una persona recuerde el anuncio o compre el producto.

b) Si una persona recuerda el anuncio del producto, ¿qué probabilidad hay de que lo compre?

c) ¿El hecho de comprar el producto depende, o no, de recordar el anuncio?

Definimos los sucesos A = "Recuerdan el anuncio" y C = "Compran el producto".

a) $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{160 + 240}{800} + \frac{160 + 80}{800} - \frac{160}{800} = \frac{3}{5}$

b) $P(C/A) = \dfrac{P(C \cap A)}{P(A)} = \dfrac{\frac{160}{800}}{\frac{160 + 240}{800}} = \frac{2}{5}$

c) $P(C) = \frac{160 + 80}{800} = \frac{3}{10} \neq P(C/A) \Rightarrow$ Los sucesos C y A son dependientes.

15.44. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, $P(\overline{A}) = \frac{2}{5}$ y $P(\overline{B}) = \frac{1}{2}$.

a) ¿Son A y B incompatibles?

b) ¿E independientes?

a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A}) + 1 - P(\overline{B}) - P(A \cup B) = 2 - \frac{2}{5} - \frac{1}{2} - \frac{4}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Los sucesos A y B son compatibles.

b) $P(A) \cdot P(B) = [1 - P(\overline{A})] \cdot [1 - P(\overline{B})] = \left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{10} \neq P(A \cap B) \Rightarrow$ Los sucesos A y B son dependientes.

15.45. (PAU) La probabilidad de que tenga lugar el contrario de un suceso A es de $\frac{1}{3}$, la probabilidad de un suceso B es de $\frac{3}{4}$, y la probabilidad de que ocurran a la vez los sucesos A y B es de $\frac{5}{8}$. Determina:

a) Probabilidad de que se verifique el suceso A o el suceso B.

b) Probabilidad de que no se verifiquen ni A ni B.

c) Probabilidad de que ocurra A sabiendo que se ha verificado B.

d) Independencia de los sucesos A y B.

e) $P(\overline{A}/B)$ y $P(B/A)$.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{19}{24}$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{19}{24} = \frac{5}{24}$

c) $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{6}$

d) $P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \neq P(A/B) \Rightarrow$ Los sucesos A y B son independientes.

e) $P(\overline{A}/B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A/B) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

$P(B/A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{2}{3}} = \frac{15}{16}$

15.46. Prueba que si los sucesos A y B son independientes, también lo son los sucesos siguientes.

a) A y $\overline{B}$ b) $\overline{A}$ y $\overline{B}$ c) $\overline{A}$ y B

a) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}/A) = P(A) \cdot [1 - P(B/A)] = P(A) \cdot [1 - P(B)] = P(A) \cdot P(\overline{B})$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot P(\overline{A}/\overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot [1 - P(A/\overline{B})] = P(\overline{B}) \cdot [1 - P(A)] = P(\overline{B}) \cdot P(\overline{A})$

c) $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P(B/\overline{A}) = P(\overline{A}) \cdot [1 - P(\overline{B}/\overline{A})] = P(\overline{A}) \cdot [1 - P(\overline{B})] = P(\overline{A}) \cdot P(B)$

15.47. (PAU) Sea A un suceso con $0 < P(A) < 1$.

a) ¿Puede ser A independiente de su contrario $\overline{A}$?

b) Sea B otro suceso tal que $A \subset B$. ¿Serán A y B independientes?

c) Sea C un suceso independiente de A. ¿Serán A y $\overline{C}$ independientes?

Justifica las respuestas.

a) $P(A \cap \overline{A}) = 0 \neq P(A) \cdot P(\overline{A}) \Rightarrow$ Los sucesos A y $\overline{A}$ son dependientes.

b) $P(A \cap B) = P(A)$, por lo que $P(B/A) = 1$. Entonces, si $P(B) = 1$, ambos sucesos son independientes, ya que $P(B/A) = P(B)$ y $P(A/B) = P(A)$. En el caso de que $0 < P(B) < 1$, $P(B/A) = 1 \neq P(B) < 1$, y ambos sucesos son dependientes.

c) $P(A \cap \overline{C}) = P(A) \cdot P(\overline{C}/A) = P(A) \cdot [1 - P(C/A)] = P(A) \cdot [1 - P(C)] = P(A) \cdot P(\overline{C}) \Rightarrow$ los sucesos A y $\overline{C}$ son independientes.

15.48. Sean A y B dos sucesos cualesquiera de probabilidad no nula e independientes. Justifica si son ciertas las siguientes afirmaciones.

a) $P(\overline{A}/\overline{B}) = P(A)$ **b) $P(\overline{B}/A) = P(\overline{B})$** **c) $P(A \cup \overline{A}) = 0,5$**

a) Falsa: $P(\overline{A}/\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{1 - P(A \cup B)}{P(\overline{B})} = \dfrac{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{P(\overline{B})} =$

$= \dfrac{P(\overline{B}) - P(A) + P(A) \cdot P(B)}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(\overline{B}) - P(A)[1 - P(B)]}{P(\overline{B})} = 1 - P(A) = P(\overline{A})$

b) Cierta: $P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A) = 1 - P(B) = P(\overline{B})$

c) Falsa: $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) - P(A \cap \overline{A}) = 1$

15.49. Si los sucesos A y B son independientes y compatibles, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

a) $P((A \cup B)/B) = 1$ **b) $P(B/\overline{A}) = P(B)$**

a) Cierta: $P((A \cup B)/B) = \dfrac{P((A \cup B) \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P((A \cap B) \cup (B \cap B))}{P(B)} = \dfrac{P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1$

b) Cierta: $P(B/\overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B)[1 - P(A)]}{P(\overline{A})} = P(B)$

Teorema de la probabilidad total

15.50. En una caja tenemos 15 bolas blancas, 30 bolas negras y 45 bolas verdes. Si extraemos tres bolas simultáneamente, ¿cuál es la probabilidad de que salga una bola de cada color?

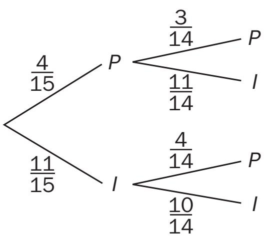
Sean los sucesos B = "Se extrae una bola blanca", N = "Se extrae una bola negra" y V = "Se extrae una bola verde". El suceso que queremos estudiar es $B \cap N \cap V$. Este suceso puede ocurrir de $P_3 = 3! = 6$ formas distintas, todas ellas equiprobables. Así pues, calculamos la probabilidad de una de las configuraciones posibles y la probabilidad pedida queda:

$P(B \cap N \cap V) = 6 \cdot P(B_1) \cdot P(N_2/B_1) \cdot P(V_3/(B_1 \cap N_2)) = 6 \cdot \dfrac{15}{90} \cdot \dfrac{30}{89} \cdot \dfrac{45}{88} = 0,17$

15.51. (PAU) En una bolsa hay 5 bolas con el número 1, 4 bolas con el número 2 y 6 bolas con el número 3. Se extraen dos bolas, una a una, sin reemplazamiento. Se pide:

a) Probabilidad de que la segunda bola tenga número impar.

b) Probabilidad de que las dos bolas tengan números pares.



a) $P(\text{segunda impar}) = \dfrac{4}{15} \cdot \dfrac{11}{14} + \dfrac{11}{15} \cdot \dfrac{10}{14} = \dfrac{154}{210} = \dfrac{11}{15}$

b) $P(\text{las dos son pares}) = \dfrac{4}{15} \cdot \dfrac{3}{14} = \dfrac{12}{210} = \dfrac{2}{35}$

15.52. La ciudad A tiene el triple de habitantes que la ciudad B, pero la proporción de universitarios en la ciudad B es el doble que en la A.

a) ¿En qué ciudad hay más universitarios?

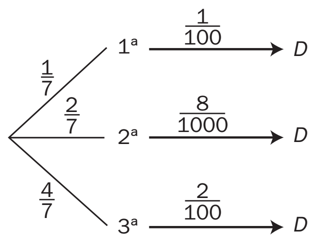
b) Se elige un habitante al azar de una ciudad al azar. Averigua la probabilidad de que sea universitario, sabiendo que la proporción de estos en la ciudad A es del 10%.

a) Sea p_A la proporción de universitarios en A, y sea x_A el número de habitantes de esta ciudad. Por tanto, $E_A = p_A \cdot x_A$ es el número de habitantes en A. En la ciudad B se tiene que $E_B = p_B \cdot x_B = 2p_A\dfrac{x_A}{3} = \dfrac{2}{3}E_A$, por lo que en la ciudad A hay más universitarios.

b) Sea el suceso U = "Habitante universitario". La probabilidad pedida es:

$P(U) = P(A) \cdot P(U/A) + P(B) \cdot P(U/B) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{8}$

15.53. (PAU) El volumen de fabricación de un producto en tres plantas diferentes de una empresa es de 500 unidades en la primera, 1000 en la segunda y 2000 en la tercera. Sabiendo que el porcentaje de unidades defectuosas producidas en cada planta es del 1%, 0,8% y 2%, respectivamente, calcula la probabilidad de que al seleccionar al azar una unidad sea defectuosa.



$$P(D) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{100} + \frac{2}{7} \cdot \frac{8}{1000} + \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{100} = \frac{53}{3500}$$

15.54. (PAU) Ana, Juan y Raúl están esperando para realizar una consulta médica y sortean el orden en que van a entrar.

a) Halla la probabilidad de que los dos últimos en entrar sean hombres.

b) Determina si son independientes los sucesos:

S_1 = "la mujer entra antes que alguno de los hombres".

S_2 = "los dos hombres entran consecutivamente".

Llamamos A_i al suceso "Ana entra en la posición i-ésima".

a) $P(A_1) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

b) $P(S_1) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

$P(S_2) = P(A_1 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_3) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

$P(S_1/S_2) = \dfrac{P(S_1 \cap S_2)}{P(S_2)} = \dfrac{P(A_1)}{P(S_2)} = \dfrac{1}{2} \neq P(S_1) \Rightarrow$ Son sucesos dependientes.

15.55. (PAU) En una caja hay 10 bombillas, 2 de las cuales son defectuosas. Con el fin de detectarlas, se va probando una tras otra. ¿Cuál es la probabilidad de que la tarea finalice exactamente en el tercer intento?

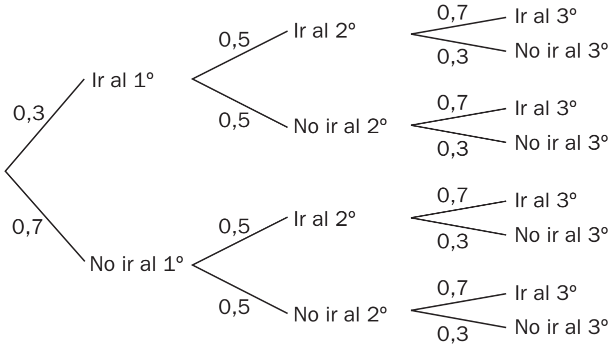
$$P = P(\overline{D}, D, D) + P(D, \overline{D}, D) = 2 \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{45}$$

15.56. (PAU) En una determinada ciudad hay tres lugares de diversión a los que suele ir un grupo de amigos. Las probabilidades de que vayan al primero, segundo o tercero son, respectivamente, de 0,3, 0,5 y 0,7. Halla la probabilidad de que el grupo de amigos vaya:

a) Solamente a uno de los lugares.

b) Únicamente a dos de los lugares.

c) A los tres lugares.



a) P[(1.º y no 2.º y no 3.º) $\cup$ (no 1.º y 2.º y no 3.º) $\cup$ $\cup$ (no 1.º y no 2.º y 3.º)] =
$= 0,3 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,7 =$
$= 0,395$

b) P[(1.º y 2.º y no 3.º) $\cup$ (1.º y 3.º y no 2.º) $\cup$ $\cup$ (2.º y 3.º y no 1.º)] =
$= 0,3 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,7 =$
$= 0,395$

c) P(1.º y 2.º y 3.º) $= 0,3 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,105$

Teorema de Bayes

15.57. (PAU) Un estudiante cuenta para un examen con la ayuda de un despertador, el cual consigue despertarlo en el 80% de los casos. Si oye el despertador, la probabilidad de que realice el examen es de 0,9, y en caso contrario es de 0,5.

a) Si va a realizar el examen, ¿cuál es la probabilidad de que haya oído el despertador?

b) Si no realiza el examen, ¿cuál es la probabilidad de que no haya oído el despertador?

Sean los sucesos D = "Oye el despertador" y E = "Realiza el examen". Las probabilidades pedidas son:

a) $P(D/E) = \dfrac{P(D \cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(D) \cdot P(E/D)}{P(D) \cdot P(E/D) + P(\overline{D}) \cdot P(E/\overline{D})} = \dfrac{0{,}8 \cdot 0{,}9}{0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}5} = 0{,}878$

b) $P(\overline{D}/\overline{E}) = \dfrac{P(\overline{D} \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \dfrac{P(\overline{D}) \cdot P(\overline{E}/\overline{D})}{P(\overline{D}) \cdot P(\overline{E}/\overline{D}) + P(D) \cdot P(\overline{E}/D)} = \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}5}{0{,}2 \cdot 0{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}1} = 0{,}56$

15.58. (PAU) En un IES se organiza una excursión que consiste en pasar una semana en la nieve. De los alumnos de Bachillerato van 20 chicas y 25 chicos de un total de 43 chicas y 50 chicos. Si se elige un alumno al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea chico y no vaya a la excursión.

b) Vaya a la excursión y sea chica.

c) Sea chica y vaya a la excursión.

d) ¿Son sucesos independientes "sea chica" e "ir a la excursión"?

Sean los sucesos A = "Es chica" y E = "Va a la excursión".

a) $P(\overline{A} \cap \overline{E}) = \dfrac{25}{93}$

b) $P(E \cap A) = \dfrac{20}{93}$

c) $P(A \cap E) = \dfrac{20}{93}$

d) $P(A) \cdot P(E) = \dfrac{43}{93} \cdot \dfrac{45}{93} = \dfrac{215}{961} \neq P(A \cap E) \Rightarrow$ Son sucesos dependientes.

15.59. (PAU) Supongamos que el 5% de la población puede padecer apendicitis (2% en estado agudo, A, y 3% en estado crónico, C) y el 95% no. Uno de los síntomas es el dolor de estómago. Las probabilidades de tener dolor de estómago padeciendo el estado A, el estado C o no teniendo la enfermedad son del 90%, 70% y 10%, respectivamente. Halla la probabilidad de que una persona con dolor de estómago sufra realmente el estado A de apendicitis.

Llamamos E al suceso "tener dolor de estómago", y N al suceso "no tener apendicitis". La probabilidad pedida es:

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A) \cdot P(E/A)}{P(A) \cdot P(E/A) + P(C) \cdot P(E/C) + P(N) \cdot P(E/N)} = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}9}{0{,}02 \cdot 0{,}9 + 0{,}03 \cdot 0{,}7 + 0{,}95 \cdot 0{,}1} = 0{,}134$$

15.60. (PAU) Una encuesta revela que el 30% de la población tiene estudios, de los cuales el 12% no tiene trabajo. Del 70% que no tiene estudios, un 25% no tiene trabajo. Determina razonadamente:

a) El tanto por ciento de la población que no tiene trabajo.

b) La probabilidad de que tenga estudios una persona elegida al azar entre las que tienen trabajo.

c) La probabilidad de que tenga estudios una persona elegida al azar entre las que no tienen trabajo.

Sean los sucesos E = "Tener estudios" y T = "Tener trabajo".

a) $P(\overline{T}) = P(E) \cdot P(\overline{T}/E) + P(\overline{E}) \cdot P(\overline{T}/\overline{E}) = 0{,}3 \cdot 0{,}12 + 0{,}7 \cdot 0{,}25 = 0{,}211 \Rightarrow$ Un 21,1% no tiene trabajo.

b) $P(E/T) = \dfrac{P(E \cap T)}{P(T)} = \dfrac{P(E \cap T)}{1 - P(\overline{T})} = \dfrac{0{,}3 \cdot 0{,}88}{1 - 0{,}211} = 0{,}335$

c) $P(E/\overline{T}) = \dfrac{P(E \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{P(E \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{0{,}3 \cdot 0{,}12}{0{,}211} = 0{,}171$

15.61. (PAU) Tras un estudio realizado sobre los taxistas de una ciudad española, se ha observado que el 70% tiene más de 40 años, y de estos, el 60% es propietario del vehículo que conduce. También se ha averiguado que el porcentaje de taxistas que, no superando los 40 años, es propietario del vehículo que conduce se reduce al 30%.

a) Halla la probabilidad de que un taxista, elegido al azar, sea propietario del vehículo que conduce.

b) Se elige un taxista al azar, y se comprueba que es propietario del vehículo que conduce. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 40 años?

Sean los sucesos P = "Ser propietario del coche" y E = "Ser mayor de 40 años".

a) $P(P) = P(E) \cdot P(P/E) + P(\overline{E}) \cdot P(P/\overline{E}) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}51$

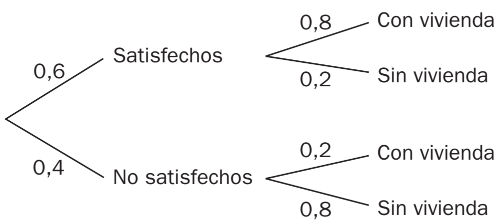
b) $P(E/P) = \dfrac{P(E \cap P)}{P(P)} = \dfrac{0{,}7 \cdot 0{,}6}{0{,}51} = 0{,}824$

15.62. (PAU) El 60% de los habitantes de una ciudad está satisfecho con su situación económica, y el 80% de esos habitantes tiene vivienda propia. De los no satisfechos con su situación económica, solo el 20% tienen vivienda propia.

a) ¿Qué tanto por ciento de habitantes tiene vivienda propia?

b) ¿Qué tanto por ciento de los habitantes que tienen vivienda propia está satisfecho con su situación económica?

c) ¿Qué tanto por ciento de los habitantes sin vivienda propia está satisfecho con su situación económica?



a) $P(\text{con vivienda}) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}56.$
El 56% de los habitantes tiene vivienda.

b) $P(\text{satisfechos / con vivienda}) = \dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}8}{0{,}56} = 0{,}857.$
El 85,7% de los habitantes.

c) $P(\text{satisfechos / sin vivienda}) = \dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}2}{0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}8} = 0{,}273.$
El 27,3% de los habitantes.

PROBLEMAS

15.63. (PAU) Un 30% de los trabajadores de una empresa trabajan a media jornada y tienen contrato temporal. En dicha empresa, el 40% de los trabajadores trabajan a media jornada. Además, de los trabajadores con contrato temporal, un 40% trabajan a media jornada.

a) ¿Qué probabilidad hay de que un trabajador tenga contrato temporal?

b) ¿Qué porcentaje de trabajadores tiene contrato temporal y no trabaja a media jornada?

c) De los trabajadores que no trabajan a media jornada, ¿qué porcentaje tiene contrato temporal?

Sean los sucesos M = "Trabajar a media jornada" y T = "Tener contrato temporal". Según el enunciado, sabemos que $P(M \cap T) = 0{,}3$, $P(M) = 0{,}4$ y $P(M/T) = 0{,}4$.

a) $P(T) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(M/T)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}4} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

b) $P(T \cap \overline{M}) = P(T) - P(T \cap M) = 0{,}75 - 0{,}3 = 0{,}45 \Rightarrow$ El 45% tiene trabajo temporal y no trabaja a media jornada.

c) $P(T/\overline{M}) = \dfrac{P(T \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \dfrac{0{,}45}{1 - 0{,}4} = 0{,}75 \Rightarrow$ El 75% de los trabajadores que no trabajan a media jornada tiene contrato temporal.

15.64. Si se elige al azar una permutación de las cifras 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuál es la probabilidad de que haya cifras impares juntas?

Hallamos la probabilidad del suceso contrario, "no haber cifras impares juntas". Los casos favorables a este suceso son $P_3 \cdot P_2 = 3! \cdot 2! = 6 \cdot 2 = 12$, así la probabilidad pedida es:

$$P = 1 - \frac{12}{P_5} = 1 - \frac{12}{5!} = 1 - \frac{12}{120} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

15.65. (PAU) Una empresa tiene dos fábricas. En la primera son mujeres el 60% de los trabajadores, y en la segunda son hombres el 55% de los trabajadores. Se elige al azar un trabajador de cada fábrica para pertenecer al comité de empresa.

a) Halla la probabilidad de los siguientes sucesos.

A = "ambos son hombres".

B = "solo uno es mujer".

C = "ambos son mujeres".

b) Razona si el suceso contrario del suceso C es el A, el B, el $A \cap B$, el $A \cup B$, o algún otro suceso, y calcula su probabilidad.

a) $P(A) = P(H_1 \cap H_2) = P(H_1) \cdot P(H_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}55 = 0{,}22$

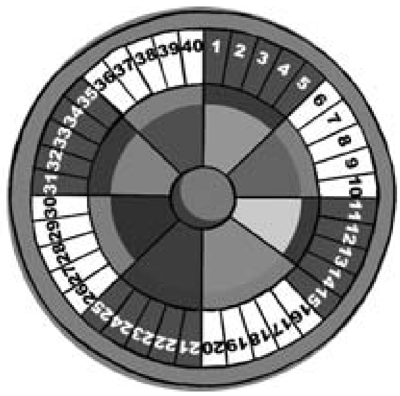
$P(B) = P(M_1 \cap H_2) + P(H_1 \cap M_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}55 + 0{,}4 \cdot 0{,}45 = 0{,}51$

$P(C) = P(M_1 \cap M_2) = P(M_1) \cdot P(M_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}45 = 0{,}27$

b) El suceso contrario de C es "que alguno sea hombre", por lo que $\overline{C} = A \cup B$, y, por tanto,

$P(\overline{C}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}22 + 0{,}51 - 0 = 0{,}73 = 1 - 0{,}27 = 1 - P(C)$.

15.66. (PAU) Se considera la ruleta de la figura. Puesta en marcha la ruleta, se consideran los sucesos siguientes:



A = "el resultado es un número de la primera decena".

B = "el resultado es un número par".

C = "el resultado es un número rojo".

Halla:

a) La probabilidad $P(C - A)$.

b) La probabilidad de que el número sea de la primera decena, sabiendo que es rojo.

c) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Y los sucesos A y C?

a) $P(C - A) = \dfrac{15}{40} = \dfrac{3}{8}$

b) $P(A/C) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} = \dfrac{\frac{5}{40}}{\frac{20}{40}} = \dfrac{1}{4}$

c) $P(A \cap B) = \dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$ Los sucesos A y B son independientes.

$P(A \cap C) = \dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8} = P(A) \cdot P(C) \Rightarrow$ Los sucesos A y C son independientes.

15.67. Halla la probabilidad de que, disponiendo de dos mazos de la baraja española de 40 cartas, al tomar una carta de cada uno de ellos, alguna de las dos no sea figura y sea impar.

Consideremos los sucesos A = "La carta 1 es figura o par" y B = "La carta 2 es figura o par". La probabilidad pedida es $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A) \cdot P(B) = 1 - \dfrac{24}{40} \cdot \dfrac{24}{40} = 0{,}64$.

15.68. (PAU) En una celebración familiar, 15 personas (9 adultos y 6 niños) comieron alimentos contaminados con cierta bacteria. Es sabido que una vez se entra en contacto con esa bacteria, hay un 25% de posibilidades de que un adulto manifieste cierta enfermedad intestinal y un 40% de que la manifieste un niño. En la madrugada, un paciente ha ingresado en el hospital aquejado de esta enfermedad. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un niño?

Sean los sucesos A = "Se trata de un adulto", E = "Está enfermo". La probabilidad pedida es:

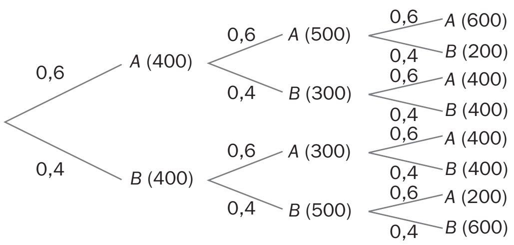
$$P(\overline{A}/E) = \frac{P(\overline{A} \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{6}{15} \cdot 0{,}4}{\frac{6}{15} \cdot 0{,}4 + \frac{9}{15} \cdot 0{,}25} = 0{,}516$$

15.69. (PAU) Dos jugadores A y B inician un juego con 300 puntos cada uno. Al finalizar cada partida, el ganador recibe 100 puntos del perdedor. Sabiendo que A tiene probabilidad 0,6 de ganar cada partida y que el juego finaliza cuando alguno de los dos se queda sin puntos, contesta justificando las respuestas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que A tenga 200 puntos tras jugar dos partidas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que A tenga 400 puntos tras jugar tres partidas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de finalizar el juego tras jugar tres partidas?



Según el diagrama, las probabilidades pedidas son:

a) $P = 0$

b) $P = 2 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}48$

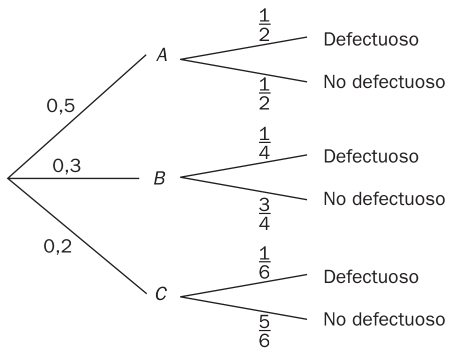
c) $P = 0{,}6^3 + 0{,}4^3 = 0{,}28$

15.70. (PAU) Una fábrica tiene tres cadenas de producción: A, B y C. La cadena A fabrica el 50% del total de coches producidos; la B, el 30%, y la C, el resto. La probabilidad de que un coche resulte defectuoso es de $\frac{1}{2}$ en la cadena A, de $\frac{1}{4}$ en la cadena B y de $\frac{1}{6}$ en la cadena C. Halla:

a) La probabilidad de que un coche sea defectuoso y haya sido producido por la cadena A.

b) La probabilidad de que un coche sea defectuoso.

c) Si un coche no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la cadena C?



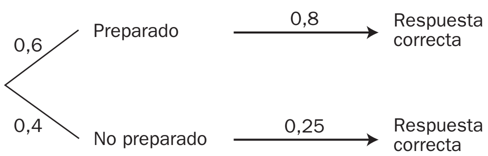
a) $P(\text{defectuoso y producido por } A) = 0{,}5 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}25$

b) $P(\text{defectuoso}) = 0{,}5 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}3 \cdot \frac{1}{4} + 0{,}2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{43}{120}$

c) $P(\text{producido por } C/\text{no es defectuoso}) =$

$$= \frac{0{,}2 \cdot \frac{5}{6}}{0{,}2 \cdot \frac{5}{6} + 0{,}3 \cdot \frac{3}{4} + 0{,}5 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{20}{77}$$

15.71. (PAU) Un estudiante se presenta a un examen tipo test compuesto por 100 preguntas, cada una de las cuales va acompañada de cuatro respuestas (y solo una es correcta). Sesenta de las preguntas corresponden a la parte del programa que el estudiante ha preparado y en las que tiene una probabilidad del 80% de contestar acertadamente. En las preguntas restantes señalará al azar una de las cuatro respuestas. Si se elige al azar una de las preguntas, ¿cuál es la probabilidad de que su respuesta sea la correcta?



Es una aplicación del teorema de la probabilidad total.

$P(\text{correcta}) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}58$

15.72. En una oficina de atención al consumidor saben que el 70% de los clientes de una cierta empresa están satisfechos son el servicio prestado. Sin embargo, la empresa dice que solo un 5% de sus clientes presenta reclamación. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente insatisfecho reclame? ¿Y de que no lo haga?

Sean los sucesos R = "Presentar reclamación" y S = "Estar satisfecho". Las probabilidades pedidas son:

$$P(R/\overline{S}) = \frac{P(R \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{0{,}05}{0{,}3} = 0{,}167 \qquad P(\overline{R}/\overline{S}) = 1 - P(R/\overline{S}) = 0{,}833$$

15.73. (PAU) Un dado con las caras numeradas del 1 al 6 está trucado de modo que la probabilidad de obtener un número es directamente proporcional a dicho número.

a) Halla la probabilidad de que salga 3 si se sabe que salió impar.

b) Calcula la probabilidad de que salga par si se sabe que salió mayor que 3.

$P(1) = x; \quad P(2) = 2x; \quad P(3) = 3x; \quad P(4) = 4x; \quad P(5) = 5x; \quad P(6) = 6x$

$P(E) = 1 = x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x; \quad 1 = 21x; \quad x = \frac{1}{21}$

a) $P(3/\text{salió impar}) = \dfrac{P(3)}{P(1, 3, 5)} = \dfrac{\frac{3}{21}}{\frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21}} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

b) $P(\text{par}/\text{mayor que } 3) = \dfrac{P(4, 6)}{P(4, 5, 6)} = \dfrac{\frac{4}{21} + \frac{6}{21}}{\frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21}} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$

15.74. Se tienen dos urnas U_1 y U_2. La urna U_1 contiene cinco bolas verdes, cuatro rojas y dos amarillas. La urna U_2 contiene seis bolas verdes, tres rojas y cuatro amarillas.

Se lanza un dado. Si sale un número primo, se extraen dos bolas sin devolución de la urna U_1; en caso contrario, de la urna U_2. Halla la probabilidad de:

a) Salir dos bolas del mismo color.

b) Salir dos bolas de distinto color.

c) Habiendo salido dos bolas verdes, procedan de la urna U_1.

a) La probabilidad de salir dos bolas del mismo color en la urna U_1 es:

$P(CC/U_1) = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} = \frac{17}{55}$

La probabilidad de salir dos bolas del mismo color en la urna U_2 es:

$P(CC/U_2) = \frac{6}{13} \cdot \frac{5}{12} + \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} + \frac{4}{13} \cdot \frac{3}{12} = \frac{4}{13}$

La probabilidad pedida es:

$P(CC) = P(U_1) \cdot P(CC/U_1) + P(U_2) \cdot P(CC/U_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{17}{55} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{13} = 0{,}31$

b) $P(C_1C_2) = 1 - P(CC) = 1 - 0{,}31 = 0{,}69$

c) $P(U_1/VV) = \dfrac{P(U_1 \cap VV)}{P(VV)} = \dfrac{P(U_1) \cdot P(VV/U_1)}{P(U_1) \cdot P(VV/U_1) + P(U_2) \cdot P(VV/U_2)} = \dfrac{\frac{4}{6} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{4}{6} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{13} \cdot \frac{5}{12}} = 0{,}654$

15.75. Las llamadas que realiza un usuario son urbanas, provinciales, internaciones y móviles, siendo las probabilidades 0,85; 0,1; 0,04 y 0,01, respectivamente. Si está realizando una llamada urbana, la probabilidad de que esta dure más de 10 minutos es de 0,75; de 0,8 si la llamada es provincial; de 0,15 si es internacional, y de 0,1 si es una llamada a móvil.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una de sus llamadas dure más de 10 minutos?

b) Si en este momento lleva más de 10 minutos hablando, ¿cuál es la probabilidad de que la llamada pertenezca a cada una de las modalidades?

Definimos los sucesos: U = "Hacer una llamada urbana", P = "Hacer una llamada provincial", I = "Hacer una llamada internacional", M = "hacer una llamada a un móvil" y D = "Hacer una llamada de más de 10 minutos". Las probabilidades pedidas son:

a) $P(D) = P(U) \cdot P(D/U) + P(P) \cdot P(D/P) + P(I) \cdot P(D/I) + P(M) \cdot P(D/M) =$

$= 0{,}85 \cdot 0{,}75 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}04 \cdot 0{,}15 + 0{,}01 \cdot 0{,}1 = 0{,}7245$

b) $P(U/D) = \dfrac{P(U \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}85 \cdot 0{,}75}{0{,}7245} = 0{,}8799; \qquad P(P/D) = \dfrac{P(P \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}1 \cdot 0{,}8}{0{,}7245} = 0{,}1104$

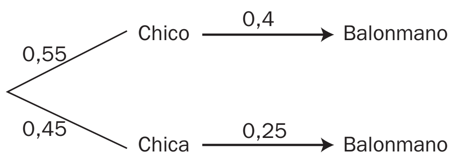
$P(I/D) = \dfrac{P(I \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}04 \cdot 0{,}15}{0{,}7245} = 0{,}0083; \qquad P(M/D) = \dfrac{P(M \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}01 \cdot 0{,}1}{0{,}7245} = 0{,}0014$

15.76. (PAU) En una clase de primero de Bachillerato compuesta por el 55% de chicos y el resto de chicas, practica el balonmano el 40% de los chicos y una de cada cuatro chicas. Si se elige un alumno al azar de la clase:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que practique balonmano?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que practique balonmano y sea chica?

c) Si resulta que no practica balonmano, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?



a) $P(\text{balonmano}) = 0{,}55 \cdot 0{,}4 + 0{,}45 \cdot 0{,}25 = 0{,}3325$

b) $P(\text{balonmano y chica}) = 0{,}45 \cdot 0{,}25 = 0{,}1125$

c) $P(\text{chica}/\text{balonmano}) = \dfrac{0{,}1125}{0{,}3325} = 0{,}338$

15.77. Se han guardado cinco pares de calcetines en tres cajones.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer cajón esté vacío?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que alguno de los cajones esté vacío?

Consideramos cada par como una unidad.

a) $P = \dfrac{VR_{2,5}}{VR_{3,5}} = \dfrac{2^5}{3^5} = 0{,}132$

b) $P = 3 \cdot \dfrac{VR_{2,5}}{VR_{3,5}} + 3 \cdot \dfrac{1}{VR_{3,5}} = 3 \cdot \dfrac{2^5}{3^5} + 3 \cdot \dfrac{1}{3^5} = 0{,}408$

15.78. En una escuela se imparten tres idiomas. Se dispone de un mazo de 450 fichas de estudiantes de la es cuela. Cada estudiante cursa un solo idioma. El número de mujeres es $\dfrac{3}{2}$ del de hombres, y los estudian tes de inglés representan el 80% del alumnado. El número de estudiantes de francés duplica al de estudiantes de alemán. Sea M el suceso "sacar una ficha de mujer" al extraer una ficha al azar del citado mazo (análogamente, sean H, I, F y A sacar un hombre, inglés, francés y alemán, respectivamente).

Sabiendo que M/A es el suceso seguro y que M/F y H/F son equiprobables, determina:

a) $P(F)$ y $P(M \cap I)$ b) $P(F/M)$

Según los datos del enunciado, hay 270 mujeres y 180 hombres. Podemos formar la siguiente tabla:

	Inglés	Francés	Alemán
Mujeres	210	30	30
Hombres	150	30	0

a) $P(F) = \dfrac{60}{450} = \dfrac{2}{15}$, $P(M \cap I) = \dfrac{210}{450} = \dfrac{7}{15}$

b) $P(F/M) = \dfrac{P(F \cap M)}{P(M)} = \dfrac{\frac{30}{450}}{\frac{270}{450}} = \dfrac{1}{9}$

15.79*. Bradley Efron, estadístico de la Universidad de Standford, diseñó el siguiente juego de dados. Se dispone de cuatro dados, A, B, C y D, con las caras numeradas de la siguiente forma: A, 2 ceros y 4 cuatros; B, 6 treses; C, 4 doses y 2 seises, y D, 3 unos y 3 cincos.

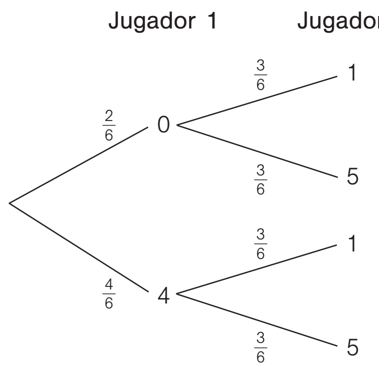
Un jugador escoge un dado y lo lanza una vez. A continuación, un segundo jugador escoge otro de los tres dados restantes y lanza también otra vez. Gana el jugador que obtenga mayor puntuación en el dado. ¿Es posible diseñar una estrategia ganadora?

Lo realmente asombroso de este juego es que el jugador que escoge en primer lugar, cualquiera que sea el dado que escoja, siempre está en desventaja respecto del jugador que elige en segundo lugar.

Estudiemos detalladamente un caso:

Supongamos que el jugador 1 escoge el dado A, entonces el jugador 2 debe escoger el dado D y ganará.

Veámoslo con un diagrama de árbol:



Gana el jugador 2 con probabilidad $\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$.

Gana el jugador 2 con probabilidad $\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$.

Gana el jugador 1 con probabilidad $\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$.

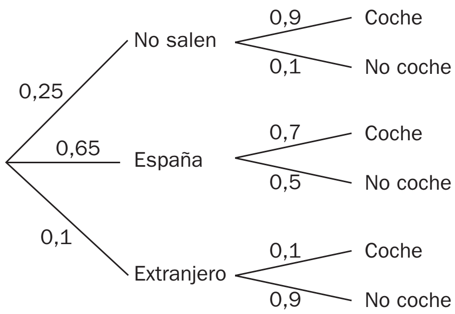
Gana el jugador 2 con probabilidad $\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$.

$P(\text{ganar el jugador 1}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{36}$; $\qquad P(\text{ganar el jugador 2}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{24}{36}$.

15.80. (PAU) El 25% de las familias de cierta comunidad autónoma española no sale fuera de la misma durante las vacaciones de verano. El 65% veranea por el resto de España, y el 10% restante se va al extranjero. De los que se quedan en su comunidad, solo un 10% no utiliza el coche en sus desplazamientos. Esta cantidad aumenta al 30% entre los que salen por el resto de España, y al 90% entre los que viajan al extranjero.

a) Halla el porcentaje de familias de esa comunidad que utiliza el coche en sus desplazamientos de vacaciones de verano.

b) Una familia no usa el coche en sus vacaciones de verano. ¿Cuál es la probabilidad de que salga de su comunidad moviéndose por el resto de España?



a) $P(\text{utilizar coche}) = 0{,}25 \cdot 0{,}9 + 0{,}65 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}69$

El 69% de familias de esa comunidad utiliza el coche.

b) $P(\text{resto de España/no usa coche}) = \dfrac{0{,}65 \cdot 0{,}3}{1 - 0{,}69} = 0{,}629$

15.81. Supongamos que una moneda ha sido trucada de manera que la probabilidad de obtener cara es de 0,6, y la de obtener cruz, de 0,4. ¿Cómo se debería efectuar un sorteo con la moneda anterior para que el juego sea *limpio*, en el sentido de que dos jugadores tengan las mismas oportunidades de ganar, independientemente de que elijan cara o cruz?

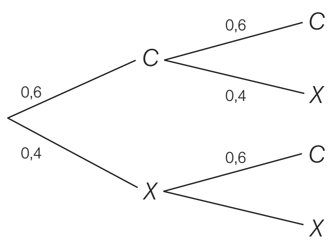
El matemático norteamericano de origen húngaro John Von Newman (1903-1957) ideó la siguiente estrategia:

Se lanza dos veces la moneda. Si sale:

CARA - CRUZ, gana quien apostó por CARA.
CRUZ - CARA, gana quien apostó por CRUZ.

CARA - CARA o CRUZ - CRUZ no hay nada decidido y se vuelve a lanzar otras dos veces la moneda.

En el diagrama de árbol se ve que el juego es "limpio", pues cada jugador (en cada par de lanzamientos) tiene la misma probabilidad de ganar: 0,24.



Nada decidido

$0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$

$0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$

Nada decidido

PROFUNDIZACIÓN

15.82. (PAU) a) Halla la probabilidad de obtener al menos un seis doble en n tiradas de dos dados.

b) ¿Cuántas partidas habrá que jugar para que la probabilidad anterior sea de $\frac{1}{2}$?

a) Sea A_i el suceso "sacar 6 doble en la tirada i-ésima".

La probabilidad pedida será: $P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n}) =$

$= 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap ... \cap \overline{A}_n) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) ... P(\overline{A}_n) =$ (Al ser los sucesos independientes)

$= 1 - [P(\overline{A}_1)]^n = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$ Ya que todos los sucesos tienen la misma probabilidad.

P(al menos un 6 doble en n tiradas de dos dados) $= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$

b) $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 = \left(\frac{36}{35}\right)^n$. Tomando logaritmos: $\ln 2 = n \ln\frac{36}{35} \Rightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 36 - \ln 35} \approx 25$ partidas

15.83. Demuestra la siguiente igualdad: $P[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

$P[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) - P[(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cap B)] = P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A}) =$

$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

15.84. Sean A, B y C tal que $P(C) > 0$. Demuestra que $P[(A \cup B)/C] = P(A/C) + P(B/C) - P[(A \cap B)/C]$.

$$P[(A \cup B)/C] = \frac{P[(A \cup B) \cap C]}{P(C)} = \frac{P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]}{P(C)} = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} - \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} =$$

$$= P(A/C) + P(B/C) - P[(A \cap B)/C]$$

15.85. Demuestra la regla de Laplace a partir de la definición axiomática de probabilidad.

Sea $A_1, A_2 ... A_n$ un sistema completo de sucesos que supondremos equiprobables; entonces se tiene:

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1$$

Por ser equiprobables los sucesos, resulta: $P(A_1) = P(A_2) = ... = P(A_n) = \frac{1}{n}$

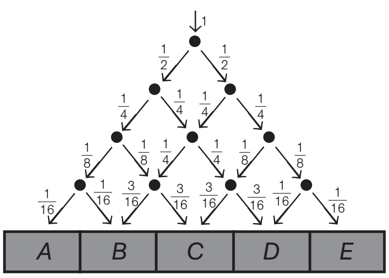
Supongamos ahora que un suceso cualquiera B se puede obtener como unión de h sucesos de los n anteriormente considerados, es decir: $B = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$

Tomando probabilidades en los dos miembros de la igualdad anterior, resulta:

$$P(B) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n} = \frac{h}{n}$$

Que es la expresión de la regla de Laplace que dice: "Si el espacio muestral de un experimento se puede descomponer en n posibles sucesos equiprobables e incompatibles entre sí, y de ellos h son favorables a la realización de un cierto suceso B, la probabilidad de este es $\frac{h}{n}$; es decir, la razón entre el número de casos favorables al suceso B y el número de casos posibles".

15.86*. (PAU) Se deja caer una bola por el orificio de entrada del aparato de la figura. En cada bifurcación, la bola tiene igual probabilidad de ir a la izquierda que de ir a la derecha. Halla la probabilidad de que la bola llegue a las casillas A, B, C, D y E.



$P(A)$	$P(B)$	$P(C)$	$P(D)$	$P(E)$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

15.87. **En un área geográfica determinada, el 60% de los votos han sido para el partido *A*. Si se consideran 5 votantes de dicha área:**

a) ¿Qué probabilidad existe de que hayan votado exactamente 3 a dicho partido?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno lo haya votado?

a) El número de agrupaciones que se pueden hacer con 3 votantes del partido *A* de entre un grupo de 5 habitantes es $PR_{5;3,2}$. Así, la probabilidad pedida es:

$$P = PR_{5;3,2}P(A)^3P(\overline{A})^2 = \frac{5!}{3!2!} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}3456$$

b) $P = P(\overline{A})^5 = 0{,}4^5 = 0{,}01024$

15.88. **De una urna que contiene 6 bolas blancas y *n* negras se extraen *k* bolas. Calcula la probabilidad de que sean *r* bolas blancas:**

a) Devolviendo la bola a la urna después de cada extracción. **b) Sin devolverla.**

a) Un suceso favorable sería: $B \cap B \cap \overset{r}{\ldots} \cap B \cap N \cap N \cap \overset{k-r}{\ldots} \cap N$, cuya probabilidad es:

$$P(B \cap B \cap \overset{r}{\ldots} \cap B \cap N \cap N \cap \overset{k-r}{\ldots} \cap N) = [P(B)]^r[P(N)]^{k-r} = \left(\frac{b}{b+n}\right)^r\left(\frac{n}{b+n}\right)^{k-r}$$

Pero como todos los sucesos que se obtengan de permutar las *r* letras *B* y las $k - r$ letras *N* serán igualmente favorables y equiprobables, resulta que la probabilidad pedida será:

$$p = P_k^{r,\,k-r} = \left(\frac{b}{b+n}\right)^r\left(\frac{n}{b+n}\right)^{k-r} = \binom{k}{r}\left(\frac{b}{b+n}\right)^r\left(\frac{n}{b+n}\right)^{k-r}$$

Esta distribución de probabilidad se llama binomial por recordar sus términos el desarrollo del binomio de Newton.

b) Casos posibles: sacar *k* bolas de una urna que contiene $b + n$ es: $\binom{b+n}{k}$.

Casos favorables: Obtener *r* blancas de *b* es: $\binom{b}{r}$.

Obtener $k - r$ negras de *n* es: $\binom{n}{k-r}$.

Por tanto, la probabilidad pedida es: $p = \dfrac{\binom{b}{r}\binom{n}{k-r}}{\binom{b+n}{k}}$.

Esta distribución de probabilidad se llama distribución hipergeométrica.

15.89. **El daltonismo es un carácter determinado por un gen recesivo situado en el cromosoma *X*. Si en dicho cromosoma aparece el gen, lo denominaremos X'. Por ello, para que una mujer sea daltónica, este gen debe aparecer en los dos cromosomas *X*, es decir, solo las mujeres $X'X'$ son daltónicas, mientras que las XX, XX', $X'X$ no lo son, aunque en los dos últimos casos sí son portadoras. Sin embargo, los hombres, al tener un cromosoma *X* y otro *Y*, serán daltónicos si son $X'Y$ y no lo serán si son XY.**

Un hombre daltónico y una mujer portadora van a tener un hijo, pero no saben aún cuál será su sexo. ¿Cuál es la probabilidad de que sea daltónico?, ¿son independientes para esta pareja los sucesos de tener un hijo daltónico y tener un hijo varón?

Sean los sucesos V = "El hijo es varón", D = "El hijo es daltónico". Las posibilidades para el hijo son XX' (hembra no daltónica), XY (varón no daltónico), $X'X'$ (hembra daltónica) y $X'Y$ (varón daltónico), y las probabilidades pedidas son:

$P(D) = P(V) \cdot P(D/V) + P(\overline{V}) \cdot P(D/\overline{V}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $\quad P(V \cap D) = \frac{1}{4} = P(V) \cdot P(D) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Son independientes.