14 Combinatoria

ACTIVIDADES INICIALES

14.I. Las placas de las matrículas de los coches de España están formadas por cuatro cifras y tres letras escogidas entre las 27 del alfabeto castellano, incluida la W, pero no las vocales ni la Ñ ni la Q. ¿Cuántas placas de matrícula diferentes se podrán hacer?

Para formar las matrículas se utilizan las 10 cifras significativas y un total de $27 - 5 - 2 = 20$ letras.

Aplicando el principio de multiplicación, se pueden formar un total de $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 = 8 \cdot 10^7$ matrículas diferentes.

14.II. En un restaurante ofrecen un menú del día formado por cinco primeros platos, cuatro segundos y cuatro postres. ¿Cuántos menús diferentes podrá servir el restaurante?

Aplicando el principio de multiplicación, habrá $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ menús diferentes.

EJERCICIOS PROPUESTOS

14.1. En una liga de baloncesto participan 18 equipos. ¿De cuántas formas diferentes se pueden ocupar los tres primeros puestos de la clasificación?

Al influir el orden y no haber elementos repetidos, se trata de variaciones de 18 elementos tomados de 3 en 3.

$V_{18,3} = 18 \cdot 17 \cdot 16 = 4896$ formas diferentes de ocupar los tres primeros puestos.

14.2. A la final de un concurso de poesía han llegado 10 alumnos. ¿De cuántas formas diferentes se pueden asignar el primero y el segundo premios? ¿Y si hubiera un tercer premio?

En el primer caso se trata de elegir ordenadamente a dos alumnos entre 10:

$$V_{10,2} = 10 \cdot 9 = 90 \text{ formas distintas}$$

En el segundo caso, como hay un tercer premio, se trata de elegir ordenadamente a tres alumnos entre 10:

$$V_{9,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 \text{ formas distintas}$$

14.3. Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7:

a) ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar?

b) ¿Cuántos de estos números son múltiplos de 2?

c) ¿Cuántos son mayores que 400?

a) $V_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ números diferentes.

b) Para que un número sea múltiplo de 2, su última cifra debe ser 2, 4 ó 6; por tanto, los números que hay que formar serán de la forma *ab*2, *ab*4 y *ab*6.

En los tres casos se trata de calcular cuántos números de dos cifras se pueden formar con seis cifras:

$$V_{6,2} = 6 \cdot 5 = 30$$

El número de múltiplos de 2 es: $3 \cdot 30 = 90$.

c) Para que un número sea mayor que 400, su primera cifra debe ser 4, 5, 6 ó 7; por tanto, los números que hay que formar serán de la forma 4*ab*, 5*ab*, 6*ab* y 7*ab*.

En los cuatro casos se trata de calcular cuántos números de dos cifras se pueden formar con seis cifras:

$$V_{6,2} = 6 \cdot 5 = 30$$

El número de números mayores que 400 es: $4 \cdot 30 = 120$.

14.4. ¿Cuántos números de dos cifras distintas se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 y 5?

Influye el orden y las cifras no se pueden repetir, se trata de:

$$V_{6,2} = 6 \cdot 5 = 30$$

Pero los números que empiezan por 0 no son considerados de dos cifras. Por tanto, habrá:

$$30 - 5 = 25 \text{ números diferentes}$$

14.5. Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9:

a) ¿Cuántos números diferentes de dos cifras, repetidas o no, se pueden formar?

b) ¿Y de tres cifras?

a) Influye el orden y puede haber cifras repetidas, por lo que se trata de:

$$VR_{9,2} = 9^2 = 81 \text{ números diferentes}$$

b) Para tres cifras se obtiene $VR_{9,3} = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ números diferentes.

14.6. Con las letras a, b, c, d y e:

a) ¿Cuántas palabras distintas de 3 letras, tengan sentido o no, se pueden formar?

b) ¿Cuántas de ellas empiezan por vocal?

a) Influye el orden y puede haber letras repetidas, por lo que se trata de:

$$VR_{5,3} = 5^3 = 125 \text{ palabras diferentes}$$

b) Las palabras que empiezan por vocal son de la forma *azt* y *ezt*. En los dos casos se trata de:

$$VR_{5,2} = 5^2 = 25$$

El número de palabras que empiezan por vocal es: $2 \cdot 25 = 50$.

14.7. ¿Cuántas apuestas habrá que rellenar para acertar seguro una quiniela de 14 resultados?

Hay que distribuir en 14 casillas de la quiniela los símbolos 1, X, 2. Como influye el orden y puede haber repetición, se trata de variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 14 en 14:

$$VR_{3,14} = 3^{14} = 4\,782\,969 \text{ apuestas diferentes}$$

14.8. ¿Cuántos números de la lotería nacional hay que no contengan el 0? (Nota: los números de la lotería van del 0 al 99 999).

Se trata de formar números de cinco cifras con las nueve cifras significativas no nulas:

$$VR_{9\ 5} = 9^5 = 59\,049$$

14.9. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9:

a) ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar?

b) ¿Cuántos números serán múltiplo de 5?

c) ¿Cuántos números serán múltiplo de 10?

a) Influye el orden y las cifras se pueden repetir, se trata de:

$$VR_{10,4} = 10^4 = 10\ 000$$

Pero los números que empiezan por 0 no son considerados de cuatro cifras. Por tanto, habrá:

$$10\,000 - 1000 = 9000 \text{ números diferentes}$$

b) Los múltiplos de 5 son de la forma *abc*5 y *abc*0. En los dos casos se trata de:

$$VR_{10,3} = 10^3 = 1000$$

Pero habrá que restar los números de la forma 0*ab*0 y 0*ab*5, ya que no se consideran números de 4 cifras. En ambos casos se trata de:

$$VR_{10,2} = 10^2 = 100$$

Concluyendo, el número de múltiplos de cinco de cuatro cifras es:

$$2 \cdot (1000 - 100) = 2 \cdot 900 = 1800$$

c) Los múltiplos de 10 son de la forma *abc*0. Teniendo en cuenta que hay que restar los de la forma *abc*0, hay:

$$VR_{10,3} - VR_{10,2} = 1000 - 100 = 900 \text{ números diferentes}$$

14.10*. ¿De cuántas formas se pueden alinear siete cartas de una baraja española?

$$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040 \text{ formas diferentes}$$

14.11. Con las letras de la palabra LATÍN, ¿cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer que empiecen por A?

Si fijamos la letra A para la primera posición, solo podemos permutar las cuatro letras restantes. Por tanto, habrá:

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ ordenaciones diferentes}$$

14.12. En un banquete de bodas, las mesas son redondas y con capacidad para ocho comensales.

a) ¿De cuántas formas podrán sentarse en una de las mesas?

b) ¿Cuántas distribuciones diferentes habrá en una mesa en la que dos personas quieren estar juntas?

a) Se trata de permutaciones circulares, podrán sentarse de

$$PC_8 = 7! = 5040 \text{ formas diferentes}$$

b) Como dos personas tienen que estar siempre juntas, las consideramos como una única persona. Se trataría de permutaciones circulares de 7 elementos:

$$PC_7 = 6! = 720 \text{ formas diferentes}$$

Como las dos personas que están juntas no tienen que estar en el mismo orden, hay

$$2 \cdot 720 = 1440 \text{ formas diferentes}$$

14.13. Con las letras de la palabra SOLIDARIDAD, ¿cuántas ordenaciones diferentes se pueden formar?

La palabra SOLIDARIDAD tiene 11 letras, donde la letra D aparece tres veces, la letra A aparece dos veces y la letra I aparece dos veces. Por tanto, habrá:

$$P_{11}^{3,2,2} = \frac{11!}{3!\ 2!\ 2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!\ 2!\ 2!} = 1\,663\,200 \text{ ordenaciones diferentes}$$

14.14. En una jaula hay siete conejos grises y cinco blancos, siendo indistinguibles entre sí los de cada color. Si salen de la jaula de uno en uno, ¿de cuántas formas diferentes lo podrán hacer?

Como hay conejos del mismo color, 7 grises y 5 blancos, se trata de permutaciones con repetición de 12 elementos, donde hay repetidos 7 y 5:

$$P_{12}^{7,5} = \frac{12!}{7!\ 5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 792 \text{ formas diferentes}$$

14.15. Con 1 uno, 2 doses y 3 treses:

a) ¿Cuántos números de seis cifras se pueden formar?

b) ¿Cuántos de ellos son pares?

c) ¿Cuántos son divisibles por 3?

d) ¿Cuántos empiezan y terminan por 3?

a) Se trata de ordenar 6 elementos en los que hay repeticiones:

$$P_6^{1,2,3} = \frac{6!}{1!\ 2!\ 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{1! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 60 \text{ números diferentes}$$

b) Los números pares serán de la forma *abcd*2. Se trata entonces de formar números de 5 cifras en los que hay 1 uno, 1 dos y 3 treses:

$$P_5^{1,1,3} = \frac{5!}{1!\ 1!\ 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{1! \cdot 1! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{1} = 20 \text{ múltiplos de 2}$$

c) Ninguno, ya que para que un número sea divisible por 3, la suma de sus cifras debe ser múltiplo de 3.

d) Los números que empiezan y terminan por 3 serán de la forma 3*abc*3. Se trata de hacer ordenaciones con 2 doses, 1 uno y un 3:

$$P_4^{1,1,2} = \frac{4!}{1!\ 1!\ 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{1!\ 1!\ 2!} = 12 \text{ números diferentes}$$

14.16. En una clase de 30 alumnos se quiere elegir una comisión formada por cinco personas. ¿De cuántas formas distintas se podrá hacer?

Una vez formada la comisión, el orden no influye; por tanto, se trata de:

$$C_{30,5} = \frac{30!}{(30 - 5)!\ 5!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25!}{25!\ 5!} = 142\,506 \text{ formas diferentes}$$

14.17. ¿Cuántos triángulos distintos se pueden formar con 12 puntos en el plano, sabiendo que no existen tres puntos alineados?

Hay que formar grupos de tres elementos, en los que no influye el orden. Se podrán formar:

$$C_{12,3} = \frac{12!}{3!\ (12 - 3)!} = 220 \text{ triángulos distintos}$$

14.18. En un restaurante de comida rápida se puede elegir entre hamburguesa con queso, sándwich vegetal, sándwich mixto y perrito caliente. ¿Cuántos pedidos diferentes puede hacer un grupo de 6 amigos?

El orden no influye. Si se piden en primer lugar 4 sándwiches vegetales y después 2 perritos es igual que si se han pedido en primer lugar 2 perritos y en segundo lugar 4 sándwiches.

Hay repetición, ya que el pedido puede estar formado solo por un producto.

Se trata de combinaciones con repetición de 4 elementos tomados de 6 en 6.

$$CR_{4,6} = C_{4+6-1,6} = C_{9,6} = \frac{9!}{6!\ 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!\ 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84 \text{ pedidos diferentes}$$

14.19. Si 4 amigos quieren ir al cine y al teatro, ¿de cuántas formas se pueden distribuir 6 entradas de cine y 7 de teatro, de tal modo que cada uno reciba al menos una entrada de teatro?

Cada amigo recibe una entrada de teatro. El resto se reparte entre los cuatro amigos, pudiendo recibir uno las tres entradas; por tanto, las entradas de teatro se pueden distribuir de:

$$CR_{4,3} = C_{4+3-1,3} = C_{7,3} = \frac{6!}{3!\ 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!\ 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20 \text{ formas diferentes}$$

Las entradas de cine se pueden distribuir de:

$$CR_{4,6} = C_{4+6-1,6} = C_{9,6} = \frac{9!}{6!\ 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!\ 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84 \text{ formas diferentes}$$

Los seis amigos pueden repartirse las entradas de $20 \cdot 84 = 1680$ formas diferentes.

EJERCICIOS

Principio de multiplicación

14.20. Una habitación tiene seis puertas. ¿De cuántas formas es posible entrar en ella por una puerta y salir por otra diferente?

Para entrar se tienen seis posibilidades, cada una de las seis puertas. Como la puerta de salida ha de ser diferente, habrá cinco posibilidades para salir.

Por tanto, aplicando el principio de multiplicación existen $6 \cdot 5 = 30$ formas diferentes.

14.21. Una representante de comercio puede ir de Madrid a Zaragoza realizando tres rutas para visitar a clientes de diferentes poblaciones, y de Zaragoza a Bilbao puede recorrer cuatro rutas diferentes. ¿Cuántas rutas de comercio puede organizar para ir de Madrid a Bilbao?

Aplicando el principio de multiplicación hay $3 \cdot 4 = 12$ rutas diferentes para ir de Madrid a Bilbao.

14.22. **Unos códigos cifrados en cierto idioma tienen que estar formados por cuatro consonantes seguidas de dos vocales y a continuación seis dígitos. Tanto las consonantes como las vocales y los dígitos se pueden repetir. ¿Cuántos códigos distintos se podrán formar teniendo en cuenta que el alfabeto de ese idioma tiene 21 consonantes y 5 vocales?**

Un código cualquiera puede ser XPMQAE123456.

Aplicando el principio de multiplicación resulta:

$$21^4 \cdot 5^2 \cdot 10^6 = 4\,862\,025\,000\,000 \text{ códigos diferentes}$$

14.23. **En un polideportivo se puede practicar pádel, tenis, gimnasia, natación, esgrima y saltos de trampolín. Para realizar cada una de estas actividades se puede escoger entre dos franjas horarias en la mañana y tres franjas horarias en la tarde. ¿Cuántas elecciones posibles puede hacer una persona que quiere realizar uno de estos deportes?**

Aplicando el principio de multiplicación hay $6 \cdot 5 = 30$ elecciones posibles.

Variaciones ordinarias

14.24. **Resuelve la ecuación:**

$$\frac{3\,V_{x+2,3}}{P_3} = \frac{5\,V_{x+1,2}}{P_2}$$

$$\frac{3\,V_{x+2,3}}{P_3} = \frac{5\,V_{x+1,2}}{P_2} \Rightarrow \frac{3\,(x+2)\,(x+1)\,x}{3 \cdot 2} = \frac{5\,(x+1)\,x}{2} \Rightarrow x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3$$

14.25. **A una junta de vecinos asisten 24 personas y tienen que elegir los cuatro cargos de la comunidad: presidente, vicepresidente, secretario y tesorero. ¿Cuántas juntas diferentes se podrán formar?**

Influye el orden, no intervienen todos y no se pueden repetir; por tanto, se pueden formar:

$$V_{24,4} = 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = 255\,024 \text{ juntas diferentes}$$

14.26. **En un determinado país, la Liga Profesional de Baloncesto está formada por 18 equipos. ¿De cuántas formas diferentes podrán quedar clasificados al final de la temporada los tres primeros equipos?**

Como influye el orden, no intervienen todos y no se pueden repetir, resulta que puede haber:

$$V_{18,3} = 18 \cdot 17 \cdot 16 = 4\,896 \text{ formas diferentes de quedar clasificados}$$

14.27. **¿De cuántas formas pueden combinarse los siete colores del arco iris agrupándolos de tres en tres?**

Como influye el orden, no intervienen todos y no se pueden repetir, resulta que existen:

$$V_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210 \text{ formas diferentes de combinarse los colores}$$

14.28. **En el salón del automóvil, una determinada marca tiene un espacio para exponer 7 coches diferentes alineados de los 12 vehículos que ha llevado para exponer. Si deciden variar todos los días la exposición con el fin de hacerla más atractiva, ¿cuántos días necesitarían para poder exponer de todas las formas posibles los vehículos?**

Influye el orden, no intervienen todos y no se pueden repetir, por tanto:

$$V_{12,7} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3\,991\,680$$

Necesitarán 3 991 680 días, que equivalen casi a 11 000 años.

Variaciones con repetición

14.29. Resuelve estas ecuaciones:

a) $VR_{x,2} - 5\ VR_{x+1,2} = 6x - 5$

b) $VR_{x,3} + VR_{x+1,2} = VR_{x-1,2} + 5\ VR_{x,2}$

c) $VR_{x+1,2} - V_{x-1,2} = V_{9,2}$

a) $VR_{x,2} - 5\ VR_{x+1,2} = 6x - 5$

$x^2 - 5(x+1)^2 = 6x - 5$

$x^2 - 5x^2 - 10x - 5 = 6x - 5$

$-4x(x-4) = 0$

$x = 4,\ x = 0$

Solución: $x = 4$

b) $VR_{x,3} + VR_{x+1,2} = VR_{x-1,2} + 5VR_{x,2}$

$x^3 + x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 + 5x^2$

$x^3 - 5x^2 + 4x = 0$

$x(x^2 - 5x + 4) = 0$

$x = 0,\ x = 4,\ x = 1$

Solución: $x = 4$

c) $VR_{x+1,2} - V_{x-1,2} = V_{9,2}$

$(x+1)^2 - (x-1)(x-2) = 81$

$x^2 + 2x + 1 - x^2 + 3x - 2 = 81$

$5x = 80$

$x = 16$

Solución: $x = 16$

14.30. a) ¿Cuántos números capicúas hay de cinco cifras?
b) ¿Y de seis cifras?

a) Los números capicúas de cinco cifras son de la forma ***abcba***.

Como las cifras cuarta y quinta vienen en función de la primera y segunda, el número de capicúas de cinco cifras coincide con el de números de tres cifras:

Con las 10 cifras significativas se pueden formar $VR_{10,3} = 10^3 = 1000$.

Pero hay que restar los que empiezan por 0, ya que no son números de 3 cifras. Estos son: $VR_{10,2} = 10^2 = 100$.

Teniendo en cuenta lo anterior, el número de capicúas de cinco cifras es:

$VR_{10,3} - VR_{10,2} = 1000 - 100 = 900$

b) Los números capicúas de seis cifras son de la forma *abccba*.

Como también hay tantos capicúas como ordenaciones *abc*, resulta que el número de capicúas de seis cifras es igual al número de capicúas de cinco cifras, es decir:

Número de capicúas de seis cifras = 900 números diferentes

14.31. Los números de los décimos de la lotería nacional tienen cinco cifras que se pueden repetir.

a) ¿Cuántos números diferentes se pueden hacer?

b) ¿Cuántos números hay en los que no aparece ningún 3?

a) $VR_{10,5} = 10^5 = 100\,000$ números diferentes

b) $VR_{9,5} = 9^5 = 59\,049$ números diferentes

14.32. ¿Cuántos resultados diferentes se obtienen al lanzar 7 monedas de un euro? ¿Y para *n* monedas?

$VR_{2,7} = 2^7 = 128$ resultados diferentes

Para n monedas: $VR_{2,n} = 2^n$ resultados distintos

14.33. En una urna hay 12 bolas numeradas del 1 al 12. Sacamos una bola, anotamos su número y la devolvemos a la urna. Repetimos la operación cuatro veces. ¿Cuántos resultados diferentes podemos obtener?

Como influye el orden, no intervienen todos y se pueden repetir, se trata de:

$$VR_{12,4} = 12^4 = 20\,736 \text{ resultados}$$

14.34. Una máquina tragaperras tiene una pantalla donde se ven tres ruedas. Si cada rueda tiene 12 figuras diferentes, ¿cuántas pantallas diferentes pueden aparecer?

Hay que formar grupos ordenados de tres elementos en los que puede haber repetición. En total puede haber:

$$VR_{12,3} = 12^3 = 1728 \text{ resultados}$$

Permutaciones ordinarias

14.35. Si $n \leqslant m$, demuestra que n! es un divisor de m!

En efecto, si $n \leqslant m \Rightarrow m! = m\,(m - 1)\ \dots\ (n + 1)\ n!$ Por tanto, $n!$ es divisor de $m!$

14.36. Con los dígitos pares, ¿cuántos números de cuatro cifras se pueden formar sin que se repita ninguno?

Tenemos las cifras 2, 4, 6 y 8. Influye el orden, intervienen todos y no se pueden repetir. Por tanto:

$$P_4 = 4! = 24 \text{ números diferentes}$$

14.37. a) Con las letras de la palabra PERMUTACIÓN, ¿cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer?
b) ¿Cuántas empiezan por P?
c) ¿Cuántas empiezan por PER?

a) Influye el orden, intervienen todos y no se pueden repetir.

$$P_{11} = 11! = 39\,916\,800 \text{ ordenaciones distintas}$$

b) Al dejar fija la letra P, se trata de hacer ordenaciones, sin repetición, de 10 letras; por tanto:

$$P_{10} = 10! = 3\,628\,800 \text{ ordenaciones distintas}$$

c) Es un caso análogo al anterior, solo que ahora se dejan fijas las tres primeras letras; por tanto, habrá:

$$P_8 = 8! = 40\,320 \text{ ordenaciones distintas}$$

14.38. En el banquete que sigue a una boda se sientan en la mesa presidencial 10 personas, incluidos los novios. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar con la condición de que los novios no se separen?

Al estar los novios juntos es como si solo se pudieran permutar nueve personas; por tanto, serán:

$$P_9 = 9! = 362\,880$$

Pero teniendo en cuenta que cabe la posibilidad de que el novio esté a la izquierda de la novia o al revés, resulta:

$$2 \cdot 9! = 725\,760 \text{ formas distintas de sentarse}$$

14.39. Los 11 jugadores de un equipo de fútbol se alinean para las fotografías.

a) ¿De cuántas formas diferentes podrán alinearse?
b) ¿De cuántas formas diferentes podrán alinearse si el capitán siempre ha de ocupar la primera posición por la izquierda?
c) ¿De cuántas formas diferentes podrán alinearse si el capitán y el portero siempre han de ocupar la primera y la segunda posición, respectivamente?

a) Influye el orden, intervienen todos y no se pueden repetir.

$$P_{11} = 11! = 39\,916\,800 \text{ ordenaciones distintas}$$

b) Al tener que permanecer el portero fijo en la primera posición, se trata de hacer ordenaciones con los 10 jugadores restantes; por tanto, habrá:

$$P_{10} = 10! = 3\,628\,800 \text{ alineaciones distintas}$$

c) Al tener que permanecer el portero y el capitán fijos en la primera y segunda posición, se trata de hacer alineaciones con los 9 jugadores restantes; por tanto, habrá:

$$P_9 = 9! = 362\,880 \text{ ordenaciones distintas}$$

14.40. a) Con las cifras 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, ¿cuántos números de siete cifras distintas se pueden hacer?
b) ¿Cuántos serán múltiplos de 2?

a) Influye el orden, no hay repetición e intervienen todos los elementos; por tanto, hay:

$$P_7 = 7! = 5040 \text{ números diferentes}$$

b) Los múltiplos de 2 son los números cuya última cifra sea 2, 4, 6 u 8. En todos los casos se trata de:

$$P_4 = 4! = 24$$

Por tanto, el número total de múltiplos de 2 es:

$$2 \cdot P_4 = 2 \cdot 24 = 48$$

Permutaciones con repetición

14.41. Si la quiniela de una jornada tiene 8 unos, 4 equis y 2 doses, ¿cuántas quinielas distintas se podrán rellenar con esa composición de resultados?

Se trata de hacer ordenaciones de 14 elementos entre los que hay repetidos. El número de quinielas diferentes que se pueden rellenar con esos resultados es:

$$P_{14}^{2,4,8} = \frac{14!}{2!\ 4!\ 8!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 9}{2!\ 4!} = 45\,045$$

14.42. ¿Cuántos números de nueve cifras se pueden escribir con las cifras 1, 2, 4 y 6, sabiendo que el 2 se repite tres veces y el 6 se repite 4 veces?

Es evidente que se trata de las permutaciones con repetición de 9 elementos de los cuales el 2 se repite tres veces y el 6 se repite cuatro veces. Por tanto, habrá:

$$P_9^{1,1,3,4} = \frac{9!}{3!\ 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 2520 \text{ números diferentes}$$

14.43. Doce montañeros deciden acampar, para lo cual disponen de tres tiendas de campaña de diferentes capacidades. En una pueden dormir siete personas; en otra, tres personas, y en otra, dos. ¿De cuántas formas diferentes se pueden organizar para dormir en las tres tiendas?

Se trata de distribuir las tres tiendas de campaña entre los 12 montañeros. Evidentemente, habrá repetición y el orden va a influir. Por tanto, los montañeros pueden dormir de:

$$P_{12}^{7,3,2} = \frac{12!}{7!\ 3!\ 2!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{3!\ 2!} = 7920 \text{ formas diferentes}$$

14.44. Los 11 interruptores de un cuadro eléctrico pueden estar en dos posiciones: ON y OFF. ¿De cuántas formas diferentes podrán estar los interruptores sabiendo que exactamente cuatro de ellos están en la posición OFF?

Hay que distribuir dos elementos, ON y OFF, en 11 lugares, teniendo en cuenta que OFF debe aparecer 4 veces, y ON, 7. Por tanto, los interruptores podrán estar de:

$$P_{11}^{4,7} = \frac{11!}{7!\ 4!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4!} = 330 \text{ formas diferentes}$$

14.45. ¿Cuántos números mayores que un millón existen que contengan exactamente los dígitos 0, 2, 2, 3, 3, 3, 4?

Primero calculamos cuántos números diferentes contienen las cifras del enunciado.

$$P_7^{1,2,3,1} = \frac{7!}{2!\ 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2!} = 420 \text{ números diferentes}$$

Los números que comienzan por la cifra 0 son menores que un millón; por tanto, no se deben considerar.

Los números que comienzan por 0 son: $420 : 7 = 60$.

Por tanto, hay $420 - 60 = 360$ números diferentes mayores que 1 millón.

14.46. ¿Cuántos números de siete cifras pueden formarse con los dígitos del número 7710222?

Con las cifras del enunciado se pueden formar un total de:

$$P_7^{1,2,3,1} = \frac{7!}{2!\ 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2!} = 420 \text{ números diferentes}$$

Hay que restar los números que empiezan por 0, ya que no se consideran de siete cifras. Por tanto, se pueden formar:

$$420 - 60 = 360 \text{ números diferentes de siete cifras}$$

14.47. ¿De cuántas formas se pueden distribuir 4 bolas blancas, 3 verdes y 2 rojas en 9 urnas etiquetadas de la A a la I, de tal forma que cada urna contenga una bola?

Se trata de distribuir 9 bolas en 9 urnas diferentes. Como entre las 9 bolas hay repetidas, se pueden distribuir de:

$$P_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4!\ 3!\ 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3!\ 2!} = 1260 \text{ formas diferentes}$$

14.48. ¿Cuántos números de siete cifras pueden formarse con los dígitos del número 4 433 555, de tal manera que sean menores que él? ¿Y cuántos serán mayores?

Los números menores que 4433555 serán de la forma:

43_ _ _ _ _ (1)

3_ _ _ _ _ _ (2)

En todos los casos se trata de permutaciones con repetición:

(1) $P_5^{1,1,3} = \frac{5!}{3}! = 20$ (2) $P_6^{1,2,3} = \frac{6!}{2!\ 3!} = 60$

El total de números menores que 4433555 que se pueden formar es: 20 + 60 = 80.

Los números mayores que 4433555 serán de la forma:

4435_ _ _ (1)

445_ _ _ _ (2)

5_ _ _ _ _ _ (3)

En todos los casos se trata de permutaciones con repetición.

(1) $P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!} = 3$ (2) $P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!\ 2!} = 6$ (3) $P_6^{2,2,2} = \frac{6!}{2!\ 2!\ 2!} = 90$

El total de números mayores que 4433555 que se pueden formar es: 3 + 6 + 90 = 99.

Combinaciones

14.49. Para hacer una apuesta de lotería primitiva hay que marcar con cruces seis números del 1 al 49. ¿De cuántas formas diferentes una persona puede rellenar un boleto de la lotería primitiva?

No influye el orden y no hay repetición. Un boleto de lotería primitiva se puede rellenar de:

$$C_{49,6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{43!\ 6!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13\,983\,816 \text{ formas diferentes}$$

14.50. De los 22 jugadores convocados por el seleccionador nacional de fútbol, 3 son porteros, 7 son defensas, 6 son centrocampistas y 6 son delanteros. ¿Cuántas alineaciones diferentes puede hacer si quiere que haya 4 defensas, 4 centrocampistas y 2 delanteros?

Formas de seleccionar al portero: 3.

Formas de seleccionar a los 4 defensas: $C_{7,4} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{3!\ 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$.

Formas de seleccionar a los 4 centrocampistas: $C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{2!\ 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = 15$.

Formas de seleccionar a los 2 delanteros: $C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{4!\ 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = 15$.

Aplicando el principio de multiplicación, el seleccionador puede hacer:

$$3 \cdot 35 \cdot 15 \cdot 15 = 23\,625 \text{ alineaciones diferentes}$$

14.51. Al unir siete vértices de un octógono obtenemos un heptágono. ¿Cuántos heptágonos distintos podemos obtener?

No influye el orden y no hay repetición. Se pueden formar:

$$C_{8,7} = \binom{8}{7} = 8 \text{ heptágonos diferentes}$$

14.52. En el sorteo del euromillón hay que marcar con cinco cruces cinco números del 1 al 50 y seleccionar dos estrellas numeradas del 1 al 9. ¿Cuántas apuestas diferentes se pueden hacer?

Formas diferentes de seleccionar las estrellas: $C_{9,2} = \binom{9}{2} = \frac{9!}{7!\ 2!} = \frac{9 \cdot 8}{2!} = 36.$

Formas de seleccionar los cinco números: $C_{50,5} = \binom{50}{5} = \frac{50!}{45!\ 5!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{5!} = 2\,118\,760.$

Aplicando el principio de multiplicación se pueden hacer:

$$36 \cdot 2\,118\,760 = 76\,275\,360 \text{ apuestas diferentes}$$

14.53. A la hora de hacer la maleta, María tiene que escoger cuatro camisetas de entre nueve que tiene en el armario y tres pantalones de entre seis. ¿Cuántas composiciones diferentes de maleta podrá efectuar María?

Formas de seleccionar las camisetas: $C_{9,4} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{5!\ 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = 126.$

Formas de seleccionar los pantalones: $C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\ 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20.$

Aplicando el principio de multiplicación, María tiene: $126 \cdot 20 = 2520$ formas diferentes de hacer la maleta.

14.54. Para jugar al dominó se reparten inicialmente a cada jugador 7 fichas. Sabiendo que el dominó tiene 28 fichas, ¿cuántos repartos diferentes se pueden hacer con ellas?

No influye el orden y no hay repetición; por tanto, se pueden hacer:

$$C_{28,7} = \frac{28!}{21!\ 7!} = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{7!} = 1\,184\,040 \text{ repartos diferentes}$$

14.55. Las materias troncales y optativas que oferta un centro para cuarto de ESO son:

Troncales: Matemáticas, Física y Química, Latín, Francés, Informática, Biología y Geología, Tecnología, Educación Plástica y Música.

Optativas: Botánica aplicada, Energías renovables, Imagen y Expresión y Cultura clásica.

Un alumno debe matricularse de cuatro materias troncales y dos optativas. ¿Cuántas elecciones diferentes puede hacer?

Formas de elegir las materias troncales: $C_{9,4} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{5!\ 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = 126.$

Formas de elegir las materias optativas: $C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\ 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$

Aplicando el principio de multiplicación, un alumno puede hacer $126 \cdot 6 = 756$ elecciones diferentes.

14.56. Cuatro amigos deciden organizar un torneo de tenis. En la primera fase se han de enfrentar de todas las formas posibles. ¿Cuántos partidos se deberían organizar?

No influye el orden y no hay repetición; por tanto, se pueden organizar:

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\ 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ partidos}$$

14.57. Una célebre marca de helados ofrece a sus clientes 20 sabores distintos. Si un cliente quiere que le preparen una copa con tres sabores diferentes, ¿cuántas copas de helado distintas le pueden ofrecer?

No influye el orden y no se pueden repetir los sabores; por tanto, la heladería ofrece:

$$C_{20,3} = \binom{20}{3} = \frac{20!}{17!\ 3!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1140 \text{ copas diferentes}$$

14.58. En un *casting* para elegir cuatro cantantes se presentan 18 personas. ¿De cuántas formas podrá efectuar la elección de los cantantes el director del *casting*?

No influye el orden y no puede haber repetición; por tanto, el director puede elegir los cantantes de:

$$C_{18,4} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{24} = 3060 \text{ formas diferentes}$$

14.59. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 15 lados?

Generaliza el resultado para hallar la fórmula del número de diagonales de un polígono de *n* lados en función del número de lados.

Una diagonal queda determinada por dos vértices no consecutivos. Se trata de seleccionar dos puntos entre 15, sin haber repetición ni influir el orden. Por tanto, un polígono tiene:

$$C_{15,2} = \binom{15}{2} = \frac{15!}{13!\ 2!} = \frac{15 \cdot 14}{2!} = 105 \text{ diagonales}$$

Generalizando el resultado, el número de diagonales de un polígono de *n* lados es:

$$C_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)!\ 2!} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

14.60. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $4V_{x,3} - 16C_{x,2} = V_{x,4}$
b) $C_{10,x} + C_{8,x} = 0$
c) $C_{10,x} + C_{10,x-1} + C_{11,x+1} = C_{12,x+2}$

a) $4V_{x,3} - 16C_{x,2} = V_{x,4}$

$$4\,x(x-1)(x-2) - 16 \cdot \frac{x!}{(x-2)!\ 2!} = x(x-1)(x-2)\,(x-3) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4x(x-1)(x-2) - \frac{16x(x-1)}{2} = x(x-1)(x-2)(x-3) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4x(x-1)(x-2) - 8x(x-1) - x(x-1)(x-2)\,(x-3) = 0 \Rightarrow \; x(x-1)[4(x-2) - 8 - (x-2)(x-3)] = 0$$

$\Rightarrow \quad x(x-1)[-x^2 + 9x + 22] = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, x = 1$ Ninguna de las soluciones es válida.

b) $C_{10,x} + C_{8,x} = 0$

$$\frac{10!}{x!(10-x)!} + \frac{8!}{x!(8-x)!} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{10! + 8!\,(10-x)(9-x)}{x!(10-x)!} = 0$$

$$8![10 \cdot 9 - 90 + 19x - x^2] = 0 \quad \Rightarrow \quad x(\,19 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 19$$

c) $C_{10,x} + C_{10,x-1} + C_{11,x+1} = C_{12,x+2}$

Aplicando las propiedades de los números combinatorios, la identidad se verifica para cualquier valor de *x*.

$$C_{10,x} + C_{10,x-1} + C_{11,x+1} = C_{12,x+2} \quad \Rightarrow \quad C_{11,x} + C_{11,x+1} = C_{12,x+2}$$

Combinaciones con repetición

14.61. ¿Cuántas soluciones enteras positivas tiene la ecuación x + y + z = 15?

Se trata de distribuir 15 unos en tres sumandos; por tanto, el número de soluciones positivas de la ecuación es:

$$CR_{3,15} = C_{3+15-1,15} = \frac{17!}{2!\ 15!} = \frac{17 \cdot 6}{2} = 136$$

14.62. Una frutería hace centros de frutas compuestos por peras, mangos y plátanos. Si en cada centro se ponen 12 piezas de fruta, ¿cuántos centros diferentes pueden hacerse?

En cada centro tiene que haber las tres clases de fruta; por tanto, una pera, un mango y un plátano tienen que ser fijos. Nos quedan por distribuir nueve piezas, que tenemos que elegir entre las tres que tenemos sin influir el orden; por tanto, se pueden hacer:

$$CR_{3,9} = C_{3+9-1,9} = \frac{11!}{2!\ 9!} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55 \text{ centros de frutas}$$

14.63. ¿Cuántas fichas tendrá un dominó en el que también intervienen el 7 y el 8?

Se trata de distribuir los dígitos del 0 al 8 en las dos casillas, indistinguibles, de una pieza de dominó; por tanto, habrá:

$$CR_{9,2} = C_{9+2-1,2} = \frac{10!}{8!\ 2!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \text{ piezas}$$

14.64. En una pizzería ofrecen cinco ingredientes diferentes para añadir a la base de *mozzarella*. Si la oferta del momento es elegir dos ingredientes, ¿cuántas pizzas diferentes se pueden elaborar?

El orden no influye y en una pizza se puede repetir el ingrediente; por tanto, puede haber:

$$CR_{5,2} = C_{5+2-1,2} = \frac{6!}{4!\ 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15 \text{ pizzas diferentes}$$

14.65. ¿De cuántas formas pueden distribuirse 7 bolas blancas en 5 urnas idénticas? ¿Y 5 bolas blancas en 7 urnas idénticas?

$$CR_{5,7} = C_{5+7-1,7} = \frac{11!}{4!\ 7!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4!} = 330 \text{ distribuciones}$$

$$CR_{7,5} = C_{7+5-1,5} = \frac{11!}{6!\ 5!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5!} = 462 \text{ distribuciones}$$

14.66. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 10 sacos de arroz y 8 de lentejas entre seis campamentos de refugiados de tal manera que cada uno reciba al menos un saco de arroz y otro de lentejas?

<u>Formas de distribuir los sacos de arroz:</u>

Como cada campamento debe recibir al menos un saco de arroz, hay que distribuir los 4 restantes entre los 6 campamentos; por tanto, el arroz puede distribuirse de:

$$CR_{6,4} = C_{6+4-1,4} = \frac{9!}{5!\ 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = 126 \text{ formas diferentes}$$

<u>Formas de distribuir los sacos de lentejas:</u>

Como cada campamento debe recibir al menos un saco de lentejas, hay que distribuir los 2 restantes entre los 6 campamentos; por tanto, las lentejas pueden distribuirse de:

$$CR_{6,2} = C_{6+2-1,2} = \frac{7!}{5!\ 2!} = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21 \text{ formas diferentes}$$

Aplicando el principio de multiplicación, hay $126 \cdot 21 = 2646$ formas de distribuir los alimentos.

PROBLEMAS

14.67. ¿Cuántos números naturales tienen las cuatro cifras distintas?

Para la primera posición hay nueve posibilidades, ya que el cero no es posible; para la segunda posición hay nueve posibilidades, para la tercera hay ocho y para la cuarta hay siete. Por tanto, aplicando el principio de multiplicación resulta:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536 \text{ números naturales con cuatro cifras distintas}$$

14.68. Los actores de una obra de teatro son 5 mujeres y 7 hombres. Al acabar la función salen a saludar al público, que les dedica una fuerte ovación. ¿De cuántas formas se podrán ordenar en el escenario, en los siguientes casos?

a) Salen todos en una fila.

b) Salen en dos filas, en la delantera, las mujeres, y en la trasera, los hombres.

a) $P_{12} = 12! = 479\,001\,600$ formas diferentes

b) $P_5\ P_7 = 5! \cdot 7! = 604\,800$ formas diferentes

14.69. Permutando de todos los modos posibles las cifras del número 111 223 se forman distintos números.

a) ¿Cuántos números distintos se obtienen?

b) Ordenados de menor a mayor, ¿qué número ocupa el lugar 50 en esta ordenación?

a) Los números distintos que se pueden formar son las permutaciones con repetición de 6 elementos de los cuales uno se repite tres veces, y otro, dos. Por tanto:

$$\text{Números diferentes} = P_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3!\ 2!\ 1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2!} = 60$$

b) 1) Los números que empiezan por 1 son de la forma 1*abcde*. Se trata de permutaciones de cinco elementos, en los que se repiten dos de ellos dos veces:

$$P_5^{2,2} = \frac{5!}{2!\ 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{4!} = 30$$

2) Los números que empiezan por 2 son de la forma 2*abcde*. Se trata de permutaciones de cinco elementos en los que uno se repite tres veces:

$$P_5^{3,1,1} = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$$

El número que ocupa el lugar 50 es el último de estos 20 números, es decir, el 232 111.

14.70. ¿Cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar con las cifras 2, 3, 4, 5 y 6 que sean menores de 65 000?

Números diferentes que se pueden formar: $P_5 = 5! = 120$.

De estos 120 números no cumplen la condición los que son mayores que 65 000, es decir, los que son de la forma 65*abc*. Se trata de hacer ordenaciones de tres elementos diferentes: $P_3 = 3! = 6$.

Números menores que 65 000: $120 - 6 = 114$

14.71. Colocadas en orden alfabético todas las permutaciones de las letras *A, B, C, D, E, F* y *G,* se desea saber qué lugar ocupa la permutación *CGADBEF*.

Permutaciones que empiezan por *A* y *B*: $2 \cdot P_6 = 2 \cdot 6! = 2 \cdot 720 = 1440$.

Permutaciones que empiezan por *CA*, *CB*, *CD*, *CE* y *CF*: $5 \cdot P_5 = 5 \cdot 5! = 5 \cdot 120 = 600$.

Permutaciones que empiezan por *CGAB*: $P3 = 3! = 6$.

La siguiente permutación es precisamente la pedida, es decir, *CGADBEF*, y ocupará, por tanto, el lugar 2047.

14.72. Seis compañeros de clase deciden hacerse una foto alineados junto a un monumento a la Constitución que existe en la ciudad en que viven:

a) ¿De cuántas formas diferentes se podrán hacer la foto?

b) ¿De cuántas formas diferentes se podrán hacer la foto si Teresa y Miguel quieren aparecer juntos?

c) ¿De cuántas formas diferentes se podrán hacer la foto si Teresa y Miguel quieren aparecer juntos estando siempre Teresa a la izquierda de Miguel?

a) $P_6 = 6! = 720$ formas diferentes

b) Consideramos a Teresa y Miguel como una sola persona, se trata de $P_5 = 5! = 120$ formas diferentes. Pero como Teresa y Miguel también pueden permutar, el número de fotos diferentes que se pueden hacer es:

$$2 \cdot 5! = 240$$

c) $P_5 = 5! = 120$ formas diferentes

14.73. De un total de cinco franceses y siete ingleses se forma un comité con dos franceses y tres ingleses. ¿De cuántas formas se pueden agrupar en los siguientes casos?

a) Puede pertenecer al comité cualquier francés o inglés.

b) Un inglés determinado debe pertenecer al comité.

c) Dos franceses determinados no pueden estar en el comité.

a) El número de elecciones distintas de dos franceses es $\binom{5}{2} = 10$.

El número de elecciones distintas de tres ingleses es $\binom{7}{3} = 35$.

Por tanto, el número de comités distintos es $10 \cdot 35 = 350$.

b) El número de elecciones distintas de dos franceses es 10.

El número de elecciones distintas de dos ingleses, ya que uno pertenece al comité, es $\binom{6}{2} = 15$.

Por tanto, el número de comités distintos es $10 \cdot 15 = 150$.

c) El número de elecciones distintas de dos franceses es $\binom{3}{2}$, puesto que dos franceses determinados no pueden estar en el comité.

El número de elecciones distintas de tres ingleses es 35.

Por tanto, el número de comités distintos es $3 \cdot 35 = 105$.

14.74. Halla el número mínimo de habitantes que debe tener una ciudad para que sea inevitable que al menos dos habitantes tengan las mismas iniciales de su nombre y dos apellidos. (Nota: el alfabeto está formado por 26 letras.)

Sean X, Y, Z las iniciales del nombre y dos apellidos de un habitante cualquiera. Vamos a calcular el número de ternas posibles con las 26 letras del alfabeto, repetidas o no.

Se trata, por tanto, de las variaciones con repetición de 26 elementos tomados de tres en tres. Su número es:

$$VR_{28,3} = 26^3 = 17\,576$$

Si asociamos a cada terna una sola persona, estaremos seguros de que ninguno de ellos repite las mismas iniciales de su nombre y dos apellidos. Luego si añadimos otra persona, necesariamente tendrán que coincidir dichas iniciales con alguna de las ternas. Por tanto, el número mínimo de individuos será:

$$n = 17\,576 + 1 = 17\,577$$

14.75. En un circuito de fórmula 1, por un determinado punto sólo pueden pasar, como máximo, tres coches a la vez. Se celebra una carrera en la que participan 12 coches de fórmula 1. ¿De cuántas maneras distintas podrán pasar los coches por el citado punto?

Como el número máximo de coches que pueden pasar por un determinado punto es 3, estos pueden hacerlo de uno en uno, de dos en dos y de tres en tres.

a) Si pasan de uno en uno, el número de formas distintas es $\binom{12}{1} = 15$.

b) Si pasan de dos en dos, el número de formas distintas es $\binom{12}{2} = 66$.

c) Si pasan de tres en tres, el número de formas distintas es $\binom{12}{3} = 220$.

Por tanto, el número total de formas en que los coches pueden pasar por ese punto es $15 + 66 + 220 = 301$.

14.76. **Tres chicas y cuatro chicos asisten a un concierto de rock y tienen siete entradas alineadas.**

a) ¿De cuántas formas distintas podrán sentarse?

b) ¿De cuántas formas distintas podrán sentarse con la condición de que no haya dos del mismo sexo juntos?

a) $P_7 = 7! = 5040$ formas distintas

b) $P_4\ P_3 = 4! \cdot 3! = 144$ formas distintas

14.77. **Una persona ha escrito 12 cartas dirigidas a 12 personas distintas y sus correspondientes sobres. A la hora de meter las cartas en los sobres le llaman por teléfono y, sin fijarse, va introduciendo al azar las cartas en los sobres.**

a) ¿De cuántas formas distintas podrá rellenar los sobres?

b) ¿En cuántas de las formas anteriores ocurriría que la carta dirigida a una persona concreta esté en su sobre correspondiente?

c) ¿En cuántas habría cuatro cartas dirigidas a las personas adecuadas?

a) $P_{12} = 12! = 479\,001\,600$ formas diferentes de rellenar los sobres.

b) $P_{11} = 11! = 39\,916\,800$ formas diferentes de rellenar los sobres de manera que la carta de una persona concreta sea enviada correctamente.

c) $P_8 = 8! = 40\,320$ formas diferentes de rellenar los sobres, de tal manera que haya cuatro cartas correctas.

14.78. **Al lanzarse cuatro dados, indica los resultados que pueden obtenerse en cada uno de los siguientes casos.**

a) Los cuatro dados son de distinto color.

b) Los cuatro dados son del mismo color.

a) Al considerar los dados de distinto color influye el orden. Por tanto, hay:

$$VR_{6,4} = 6^4 = 1296 \text{ resultados diferentes}$$

b) Al considerar los dados del mismo color, el orden no influye; por tanto, hay:

$$CR_{6,\,4} = C_{6+4-1,4} = \frac{9!}{5!\ 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = 126 \text{ resultados diferentes}$$

14.79. **Un estudiante tiene que contestar ocho de diez preguntas de un examen:**

a) ¿Cuántas formas diferentes tiene de contestar?

b) ¿Cuántas formas diferentes tiene de contestar si las tres primeras preguntas son obligatorias?

c) ¿Cuántas formas diferentes tiene de contestar si de las cinco primeras preguntas ha de contestar a cuatro?

a) Se trata de elegir de 10 preguntas 8; por tanto, son combinaciones de 10 elementos tomados de 8 en 8.

Número de formas diferentes de contestar: $C_{10,\,8} = \binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \dfrac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 45.$

b) Siendo las tres primeras preguntas obligatorias, debe elegir las otras cinco de las siete restantes.

Número de formas diferentes de contestar: $C_{7,\,5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \dfrac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21.$

c) Veamos las dos posibilidades siguientes:

1) Contesta las 5 primeras, entonces las otras 3 las puede elegir de las 5 restantes: $C_{5,\,3} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10.$

2) Contesta 4 de las 5 primeras, entonces las otras 4 las tiene que elegir entre las 5 restantes. Por tanto, puede elegir las 8 preguntas en este caso de $C_{5,\,4} = \binom{5}{4} \cdot \binom{5}{4} = 5 \cdot 5 = 25$ formas diferentes.

De los apartados 1 y 2 se deduce que el estudiante puede contestar a las preguntas de $10 + 25 = 35$ formas diferentes.

14.80. **a) ¿Cuántos números de cinco cifras, sin que se repita ninguna de ellas, se pueden formar con las cifras 0, 1, 2, 3 y 4?**

b) Halla la suma de todos los números obtenidos en el apartado a.

a) Cálculo del número de números que se pueden formar.

Con las cifras 0, 1, 2, 3, 4 se pueden formar $P_5 = 5! = 120$ números, es decir, los números que se obtienen permutando las cinco cifras.

De estos 120 números, no todos tienen 5 cifras, puesto que los que comienzan por la cifra 0 tienen en realidad 4 cifras.

1) Números que comienzan por 0: $\frac{120}{5} = 24$.

2) Números de cinco cifras: $120 - 24 = 96$

b) Cálculo de la suma de estos 96 números de cinco cifras:

1) Suma de las unidades: $24 \cdot 0 + 18 \cdot 1 + 18 \cdot 2 + 18 \cdot 3 + 18 \cdot 4 = 18(1 + 2 + 3 + 4) = 180$

Nótese que al quitar 24 números que empiezan en 0, hemos quitado 24 números, de los cuales 6 terminan en 1, 6 en 2, 6 en 3 y 6 en 4.

2) Suma de las decenas: $24 \cdot 0 + 18 \cdot 1 + 18 \cdot 2 + 18 \cdot 3 + 18 \cdot 4 = 18\ (1 + 2 + 3 + 4) = 180$

3) Suma de las centenas: $24 \cdot 0 + 18 \cdot 1 + 18 \cdot 2 + 18 \cdot 3 + 18 \cdot 4 = 18\ (1 + 2 + 3 + 4) = 180$

4) Suma de los millares: $24 \cdot 0 + 18 \cdot 1 + 18 \cdot 2 + 18 \cdot 3 + 18 \cdot 4 = 18\ (1 + 2 + 3 + 4) = 180$

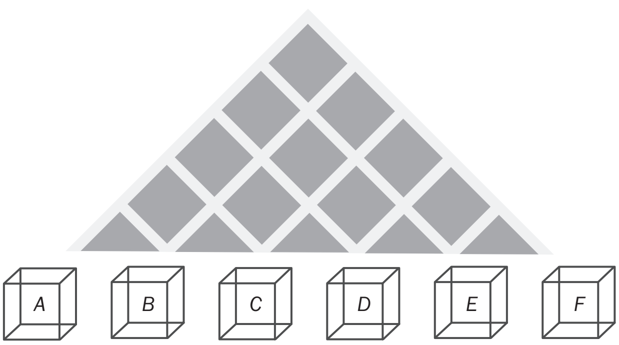
5) Suma de las decenas de millar: $24 \cdot 1 + 24 \cdot 2 + 24 \cdot 3 + 24 \cdot 4 = 24\ (1 + 2 + 3 + 4) = 180$

Nótese que ningún número comienza por 0, y hay 24 que comienzan por 1, 24 por 2, 24 por 3 y 24 por 4.

Sumando los números de los apartados anteriores se tiene:

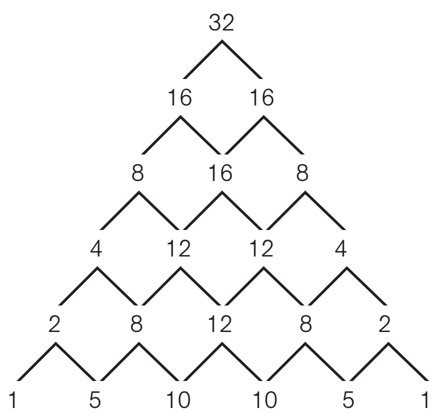
$\text{SUMA} = 180 \cdot 1 + 180 \cdot 10 + 180 \cdot 100 + 180 \cdot 1000 + 180 \cdot 10\,000 = 2\,599\,980$

14.81. **Se dejan caer 32 bolas en un laberinto hexagonal como el de la figura. En cada bifurcación, la mitad sigue un camino, y la otra mitad, el otro.**



a) ¿Cuántas bolas llegan a *A, B, C, D, E* y *F*?

b) ¿Qué relación tiene esto con el triángulo de Pascal?



a)

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1	5	10	10	5	1

b) Coinciden con la quinta fila del triángulo de Pascal.

14.82. Un instituto ha comprado libros para realizar préstamos. Los libros que se han adquirido son 7 de Lengua, 7 de Matemáticas, 5 de Inglés y 4 diccionarios. ¿De cuántas formas pueden colocarse los libros en un estante de tal manera que vayan juntos los de la misma materia?

Consideramos cada grupo de libros como un único elemento; por tanto, se trata de permutaciones de cuatro elementos:

$$P_4 = 24 \text{ formas de colocar los libros.}$$

14.83. Ocho estudiantes de medicina van a asistir a unas jornadas de atención primaria. A la misma hora hay programadas cuatro ponencias en salas distintas. ¿De cuántas formas pueden distribuirse en las diferentes ponencias?

Influye el orden y puede haber repetición; por tanto, los estudiantes pueden distribuirse de:

$$VR_{4,8} = 4^8 = 65\ 536 \text{ formas}$$

14.84. Los ácidos nucleicos, ARN y ADN, están constituidos por cadenas de nucleótidos. A su vez, un nucleótido está formado por una molécula de azúcar, ribosa o dexosirribosa; una de ácido fosfórico y una base nitrogenada que puede ser adenina, citosina, guanina y uracilo (ARN) o timina (ADN). Contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántas cadenas diferentes de 10 nucleótidos se pueden formar en un ácido nucleico?

b) Si un gen contiene 100 000 nucleótidos, ¿cuántos genes diferentes se podrían encontrar si todas las secuencias de bases fueran posibles?

a) Un nucleótido se diferencia de otro sólo en la base nitrogenada que contenga; por tanto, en un ácido nucleico se pueden formar:

$$VR_{4,10} = 4^{10} = 1\,048\,576 \text{ cadenas de 10 nucleótidos.}$$

b) $VR_{4,100000}$

14.85. En el código Morse, cada símbolo es una sucesión de puntos (·) y rayas (–).

a) ¿Cuántos símbolos diferentes se pueden formar con 3 rayas y 5 puntos?

b) ¿Cuántos símbolos se pueden representar con sucesiones de puntos y rayas de longitud como mucho 4?

c) ¿Hasta qué longitud de sucesiones de puntos y rayas hay que llegar si se quieren representar las 27 letras del alfabeto castellano y las 10 cifras significativas?

a) Influye el orden y hay que formar agrupaciones con ocho elementos, en los que uno se repite 3 veces, y otro, 5; por tanto, se pueden formar:

$$P_8^{3,5} = \frac{8!}{3!\ 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56 \text{ símbolos diferentes}$$

b) Hay que calcular el número de sucesiones con 1, 2, 3 y 4 símbolos.

Símbolos de 1 elemento: 2

Símbolos de 2 elementos: $VR_{2,2} = 2^2 = 4$

Símbolos de 3 elementos: $VR_{2,3} = 2^3 = 8$

Símbolos de 4 elementos: $VR_{2,4} = 2^4 = 16$

Total de símbolos: $2 + 4 + 8 + 16 = 30$

c) El número de elementos que hay que representar es $27 + 10 = 37$.

En el apartado anterior se observa que el número de símbolos de longitud menor o igual que n viene dado por la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón 2 y primer término 2.

Teniendo en cuenta lo anterior, basta con que la longitud de las sucesiones sea 5. Con esto se podrán representar 62 elementos diferentes.

PROFUNDIZACIÓN

14.86. Se consideran las permutaciones ordinarias de los números 1, 2, 3, 4 y 5. Se toma como permutación de referencia aquella en la que estas cifras aparecen ordenadas, es decir, la 12 345.

Dada cualquier otra permutación *abcde*, se dice que los elementos *a* y *b* forman inversión si figuran uno respecto al otro en distinto orden del que tienen en la permutación de referencia. Por ejemplo, en la permutación 12 453 hay dos inversiones: la que forman el 4 y el 3 y la que forman el 5 y el 3.

Calcula el número de inversiones que aparecen en las siguientes permutaciones respecto de la de referencia 12 345.

a) 13 524 | **c) 51 432**

b) 24 135 | **d) 54 321**

a) Hay tres inversiones: las que forman el 3 y el 5, el 5 y el 2, y el 5 y el 4.

b) Hay tres inversiones: las que forman el 2 con el 1, el 3 y el 2.

c) Hay siete inversiones: las que forman el 5 con los otros cuatro, el 4 con el 1, el 2 y el 3, y el 3 y el 2.

d) Hay diez inversiones, las que forman el 5 con los otros cuatro, el 4 con el 1, el 2 y el 3, el 3 con el 1 y el 2, y el 2 con el 1.

14.87. Con los números del 1 al 6 (ambos inclusive), ¿cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse que sean divisibles por tres?

Para que un número sea divisible por 3, sus cifras deben sumar 3 o múltiplo de 3.

Veamos cuántos grupos de 3 cifras de las 6 que tenemos cumplen esta condición:

$1 + 2 + 3 = 6$	$2 + 3 + 4 = 9$
$1 + 2 + 6 = 9$	$2 + 4 + 6 = 12$
$1 + 3 + 5 = 9$	$3 + 4 + 5 = 12$
$1 + 5 + 6 = 12$	$4 + 5 + 6 = 15$

Con las cifras de cada uno de estos grupos se pueden formar $P_3 = 3! = 6$ números de tres cifras; por tanto, con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se pueden formar $8 \cdot 6 = 48$ múltiplos de tres.

14.88. Se tienen tres dígitos cualesquiera *a*, *b* y *c*. Demuestra que:

a) La suma de los números obtenidos al formar todas las variaciones ordinarias de los tres dígitos tomados de dos en dos es múltiplo de 22.

b) La suma de los números obtenidos al formar todas las variaciones con repetición de los tres dígitos tomados de tres en tres es múltiplo de 37.

a) Las variaciones binarias de tres elementos son: $V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$.

También se pueden obtener directamente y son: *ab*, *ac*, *ba*, *ca*, *bc*, *cb*.

La suma de estos números es:

$$\begin{aligned} \text{SUMA} &= (a + b + c) \cdot 2 + && \text{suma de las unidades} \\ &+ (a + b + c) \cdot 2 \cdot 10 + && \text{suma de las decenas} \\ &= (a + b + c)(2 + 20) = (a + b + c) \cdot 22 \end{aligned}$$

Luego, la suma es un múltiplo de 22.

b) Las variaciones ternarias de tres elementos tomados de tres en tres son:

$$VR_{3,3} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

En estos 27 números, las cifras *a*, *b*, *c* se repiten 27 : 3 = 9 veces tanto en el lugar de las unidades como en los de las decenas y centenas.

$$\begin{aligned} \text{SUMA} = {} & 9(a + b + c) \cdot 1 + && \text{suma de las unidades} \\ & 9(a + b + c) \cdot 10 + && \text{suma de las decenas} \\ & 9(a + b + c) \cdot 100 + && \text{suma de las centenas} \\ & = 9(a + b + c)(1 + 10 + 100) = 999(a + b + c) = 37 \cdot 27(a + b + c) \\ & \Rightarrow \quad 37 \text{ divide a la SUMA.} \end{aligned}$$

14.89. **Con las cifras 6, 7, 8 y 9:**

a) ¿Cuántos números de 6 cifras pueden formarse?

b) Halla la suma de todos ellos.

c) Halla la suma de los que terminan en 6.

a) $VR_{4,6} = 4^6 = 4096$ números

b) En estos 4096 números entrará igual número de veces cada cifra, tanto en el lugar de las unidades como en el de las decenas, centenas o unidades de millar. Por tanto, hay:

4096 : 4 = 1024 números que terminan en 6, en 7, en 8 y en 9.

$$\begin{aligned} \text{SUMA} = {} & 1024(6+7+8+9)\cdot 1 + && \text{suma de unidades}\\ & + 1024(6+7+8+9)\cdot 10 + && \text{suma de decenas}\\ & + 1024(6+7+8+9)\cdot 100 + && \text{suma de centenas}\\ & + 1024(6+7+8+9)\cdot 1000 + && \text{suma de millares}\\ & + 1024(6+7+8+9)\cdot 10\,000 + && \text{suma de decenas de millar}\\ & + 1024(6+7+8+9)\cdot 100\,000 + && \text{suma de centenas de millar}\\ & = 1024(6+7+8+9)(1+10+100+1000+10\,000+100\,000) = \\ & = 1024\cdot 30\cdot 111\,111 = 3\,412\,329\,920 \end{aligned}$$

c) Hemos visto que los números que terminan en 6 son 1024.

En los lugares de las decenas, centenas, etc. entrarán por igual las cifras 6, 7, 8 y 9. Su número es: 1024 : 4 = 256.

$$\begin{aligned} \text{SUMA} = {} & 1024\cdot 6 + && \text{suma de unidades}\\ & + 256(6+7+8+9)\cdot 10 + && \text{suma de decenas}\\ & + 256(6+7+8+9)\cdot 100 + && \text{suma de centenas}\\ & + 256(6+7+8+9)\cdot 1000 + && \text{suma de millares}\\ & + 256(6+7+8+9)\cdot 10\,000 + && \text{suma de decenas de millar}\\ & + 256(6+7+8+9)\cdot 100\,000 + && \text{suma de centenas de millar}\\ & = 256(6+7+8+9)(1+10+100+1000+10\,000+100\,000) + 1024\cdot 6\\ & = 256\cdot 30\cdot 111\ 110 + 1024\cdot 6 = 853\,330\,944 \end{aligned}$$

14.90. **Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8:**

a) ¿Cuántos números de cinco cifras diferentes se pueden formar?

b) ¿Cuántos de ellos tienen repetida solo una cifra una vez?

c) ¿Cuántos de ellos tienen una cifra repetida 3 veces y otra 2 veces?

a) $V_{8,5} = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 46\,720$ números

b) Uno de los números sería de la forma 11*abc*, donde las cifras *a, b* y *c* no pueden ser el 1. Habría, por tanto:

$$V_{6,3} = 6\cdot 5\cdot 4 = 120 \text{ números de esta forma}$$

Fijadas las tres cifras que no se repiten, la cantidad de números de cinco cifras que se pueden formar que contengan 2 unos y esas tres cifras fijadas de antemano viene dada por $C_{5,2} = 10$ (formas de distribuir dos unos en cinco lugares).

Por tanto, habrá $10\cdot 120 = 1200$ números de cinco cifras que contienen el uno exactamente 2 veces.

Teniendo en cuenta que tenemos 8 cifras, hay $8\cdot 1200 = 9600$ números que tienen repetida solo una cifra

c) Supongamos que se tienen fijadas las cifras que se repiten 3 y 2 veces, entonces se pueden formar:

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{2!\ 3!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10 \text{ números diferentes}$$

Podemos seleccionar las dos cifras que se repiten de $V_{8,2} = 8\cdot 7 = 56$.

Por tanto, hay $56\cdot 10 = 560$ números diferentes que tienen repetida una cifra 3 veces y otra 2.

14.91. **En el ascensor de la planta baja de un edificio de oficinas de ocho plantas se suben seis personas. ¿De cuántas maneras pueden bajarse del ascensor?**

Influye el orden y puede haber repetición. Por tanto, las ocho personas pueden bajarse de:

$$VR_{6,8} = 1\,679\,616 \text{ formas diferentes}$$

14.92. Dados n puntos del espacio de los que se supone que no hay tres alineados, ni cuatro en un mismo plano. Se consideran las rectas que pasan por cada dos puntos y los planos que pasan por cada tres puntos.

a) Halla el número de rectas que determinan n puntos.

b) Halla el número de planos que determinan n puntos.

c) Halla n para que el número de rectas sea igual al número de planos.

d) Si se ordenan los n puntos, y se unen el primero con el segundo, este con el tercero, el tercero con el cuarto, etc., y el último con el primero, se obtiene una figura que podemos llamar polígono, cuyos lados son los segmentos anteriores, y son diagonales los otros segmentos que unen los puntos. Halla el número de diagonales.

e) Halla n para que el número de diagonales sea el doble que el de lados.

a) $C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ rectas

b) $C_{n,3} = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

c) $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, de donde $n = 5$

d) $C_{n,2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$

e) $\frac{n(n-3)}{2} = 2n \quad \Leftrightarrow \quad n - 3 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad n = 7$

14.93. Al desarrollar la expresión $(x + y + z)^3$ y agrupar en monomios semejantes, ¿cuántos términos diferentes aparecen?

Los términos están formados por tres elementos, en los que puede haber repetición (x^3); por tanto, aparecen:

$$CR_{3,3} = C_{5,3} = 10 \text{ términos diferentes}$$

14.94. En la feria de numismática del barrio hay un puesto en el que se venden sellos de la década de los cuarenta a 10 euros cada uno y sellos de la década de los ochenta a 2 euros cada uno. Un coleccionista de sellos ha salido de casa con 50 euros. ¿Cuántas posibilidades de elección de sellos tiene si en el puesto hay 100 sellos de cada década?

Posibles compras	Posibilidades de elección
5 sellos de los cuarenta	$C_{100,5}$
4 sellos de los cuarenta y 5 de los ochenta	$C_{100,4} \cdot C_{100,5}$
3 sellos de los cuarenta y 10 de los ochenta	$C_{100,3} \cdot C_{100,10}$
2 sellos de los cuarenta y 15 de los ochenta	$C_{100,2} \cdot C_{100,15}$
1 sello de los cuarenta y 20 de los ochenta	$C_{100,1} \cdot C_{100,20}$
25 sellos de los ochenta	$C_{100,20}$

Las posibilidades de elección serían la suma de la última columna.