11 Derivadas y representación gráfica

ACTIVIDADES INICIALES

11.I. Escribe las siguientes expresiones como exponenciales de la base indicada.

a) x^3, base 2 b) $\sqrt{x}$, base 10 c) sen x, base e d) 2^x, base e

a) x^3, base 2; $x^3 = 2^{\log_2 x^3} = 2^{3 \log_2 x}$

b) $\sqrt{x}$, base 10; $\sqrt{x} = 10^{\log_{10}\sqrt{x}} = 10^{\frac{1}{2}\log_{10} x}$

c) sen x, base e; sen $x = e^{\log_e \operatorname{sen} x} = e^{\ln(\operatorname{sen} x)}$

d) 2^x, base e; $2^x = e^{\log_e 2^x} = e^{x \log_e 2} = e^{x \ln 2}$

11.II. Toma logaritmos en las siguientes expresiones y aplica las propiedades de los mismos.

a) $f(x) = x^4$ b) $f(x) = e^x$ c) $f(x) = x^x$ d) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{x+3}$

a) $f(x) = x^4$; $\ln f(x) = 4 \ln x$

b) $f(x) = e^x$; $\ln f(x) = x \ln e = x$

c) $f(x) = x^x$; $\ln f(x) = x \ln x$

d) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{x+3}$; $\ln f(x) = (x + 3) \ln(\operatorname{sen} x)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

11.1. Comprueba, utilizando la derivada de la función inversa, que la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es la que ya conoces.

$(\sqrt{x})^2 = x$. Entonces, $(2\sqrt{x})(\sqrt{x})' = 1$, por lo que $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

11.2. Calcula la derivada en $x = 11$ de la inversa de la función $f(x) = x^3 + x + 1$.

Si g es la inversa de f, hay que calcular $g'(11)$.

$g(f(x)) = x$, así que $g(x^3 + x + 1) = x$, por lo que $g'(x^3 + x + 1) \cdot (3x^2 + 1) = 1$, es decir, $g'(x^3 + x + 1) = \dfrac{1}{3x^2 + 1}$.

Como $x^3 + x + 1 = 11$ solo si $x = 2$, tenemos que $g'(11) = \dfrac{1}{3 \cdot 2^2 + 1} = \dfrac{1}{13}$.

11.3*. Halla la derivada de la inversa de la función $f(x) = x + \sqrt{x + 5}$ en el punto $x = -3$.

Si g es la inversa de f, hay que calcular $g'(-3)$.

$g(f(x)) = x$, así que $g\left(x + \sqrt{x + 5}\right) = x$, por lo que $g'\left(x + \sqrt{x + 5}\right)\left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x + 5}}\right)' = 1$, es decir,

$g'\left(x + \sqrt{x + 5}\right) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x + 5}}}$. Hay que encontrar x para que $x + \sqrt{x + 5} = -3$, o sea, $x + 5 = x^2 + 6x + 9$, de donde $x = -1$ y $x = -4$. Al comprobar las soluciones vemos que -1 no lo es y -4 sí, con lo que $g'(-3) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2\sqrt{-4 + 5}}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$.

11.4. Calcula la ecuación de la tangente a la curva $y = \sqrt[5]{x}$ en el punto de abscisa 32, previa deducción de la derivada de dicha función.

Como $(\sqrt[5]{x})^5 = x$, tenemos que $5(\sqrt[5]{x})^4(\sqrt[5]{x})' = 1$, es decir, $(\sqrt[5]{x})' = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$. Si $x = 32$, la derivada de $y = \sqrt[5]{x}$ en $x = 32$ es $\dfrac{1}{5\sqrt[5]{32^4}} = \dfrac{1}{80}$, por lo que la ecuación de la recta pedida será $y - 2 = \dfrac{1}{80}(x - 32) \Rightarrow y = \dfrac{x}{80} + \dfrac{8}{5}$.

11.5. Obtén las derivadas de las funciones siguientes.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x}$ b) $f(x) = \sqrt[4]{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + x + 1$ c) $f(x) = 3\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{x^3} - x^2 - 2x$

a) $f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} + 2\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ c) $f'(x) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x}} - 2x - 2$

b) $f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} + 1 = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1$

11.6. ¿Existe algún punto en la gráfica de $y = \sqrt[5]{x}$ en el que la tangente sea paralela a la recta $3x - y = 0$?

Como la pendiente de la recta dada es 3, y la derivada de $y = \sqrt[5]{x}$ es $y' = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$, nos piden ver si hay algún valor de x para el que $\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} = 3$, ecuación que obviamente tiene solución, dada por la ecuación $\frac{1}{x^4} = 15^5$, es decir, $x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{15^5}}$, por lo que los puntos pedidos son los de abscisas $\pm\frac{1}{\sqrt[4]{15^5}}$ y ordenada $\pm\sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt[4]{15^5}}} = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{15}}$

11.7. Halla las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2}$ b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[5]{x^3}}$

a) $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2} = x^{-\frac{7}{4}}$ $f'(x) = -\frac{7}{4}x^{-\frac{11}{4}} = \frac{-7}{4\sqrt[4]{x^{11}}} = \frac{-7}{4x^2\sqrt[4]{x^3}}$

b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[5]{x^3}} = x^{\frac{2}{5}}$ $f'(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

11.8. Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{5x + 3}$:

a) Calcula $f'(1)$.

b) Obtén $f^{-1}(x)$ y su derivada $(f^{-1})'(x)$.

c) Calcula $(f^{-1})'(f(1))$ y compáralo con $f'(1)$.

¿Obtienes el resultado esperado?

a) $f'(x) = \frac{1}{3}(5x + 3)^{-\frac{2}{3}}\cdot 5 = \frac{5}{3\sqrt[3]{(5x + 3)^2}}$, por lo que $f'(1) = \frac{5}{12}$.

b) $y^3 = 5x + 3 \Rightarrow x = \frac{y^3 - 3}{5}$, así que $f^{-1}(x) = \frac{x^3 - 3}{5}$ $(f^{-1})'(x) = \frac{3x^2}{5}$.

c) $f(1) = \sqrt[3]{8} = 2$, de donde $(f^{-1})'(f(1)) = (f^{-1})'(2) = \frac{12}{5}$, es decir, $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))}$, como debía ser.

11.9. Obtén la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = e^{3x^3 - 5x + 1}$ c) $f(x) = \frac{e^{x^3} + x^3}{x}$

b) $f(x) = e^x\cdot(x^2 - 7x - 3)$ d) $f(x) = \sqrt{x}\cdot e^x$

a) $f'(x) = e^{3x^2 - 5x + 1}(6x - 5)$

b) $f'(x) = e^x(x^2 - 7x - 3) + e^x(2x - 7) = e^x(x^2 - 5x - 10)$

c) $f'(x) = \frac{x(3x^2e^{x^3} + 3x^2) - (e^{x^3} + x^3)}{x^2} = \frac{e^{x^3}(3x^3 - 1) + 2x^3}{x^2}$

d) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^x + \sqrt{x}\,e^x = e^x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) = \frac{e^x(1 + 2x)}{2\sqrt{x}}$

11.10. Halla los máximos y mínimos, si los hubiera, de la función $f(x) = e^{x^2 - 6x}$.

Al ser derivable en todo su dominio la función en cuestión, los posibles máximos o mínimos relativos se encontrarán en puntos con tangente horizontal.

Analicemos, entonces, $f'(x) \Rightarrow f'(x) = (2x - 6)e^{x^2 - 6x}$. Así pues, $f'(x) = 0$ solo si $x = 3$.

Si $x > 3$, $f'(x) > 0$, por lo que f es creciente, y si $x < 3$, $f'(x) < 0$, es decir, f decreciente, con lo que el punto $P(3, f(3)) = (3, e^{-9})$ es un mínimo relativo.

11.11. Deriva:

a) $f(x) = 7^{2x}$ b) $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$ c) $f(x) = 3^{x^3 - x}$ d) $f(x) = 5^{2x^2}$ e) $f(x) = 9^{\sqrt{x}+1}$ f) $f(x) = 8^{x^4}$

a) $f'(x) = 2 \ln 7 \cdot 7^{2x}$

b) $f'(x) = \dfrac{\ln 2}{2\sqrt{x}} 2^{\sqrt{x}}$

c) $f'(x) = \ln 3(3x^2 - 1)3^{x^3 - x}$

d) $f'(x) = 4 \ln 5x \cdot 5^{2x^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{\ln 9}{2\sqrt{x}} \cdot 9^{\sqrt{x}+1}$

f) $f'(x) = 4 \ln 8x^3 \cdot 8^{x^4}$

11.12. Halla las siguientes derivadas.

a) $f(x) = \ln (x^3 - 2x + 1)$

b) $f(x) = e^x \ln x$

c) $f(x) = \log_2 (3x^2 - 1)$

d) $f(x) = \ln \left(\sqrt{x^2 + e^x}\right)$

e) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

f) $f(x) = 5x \cdot \log_2 x$

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 1}$

b) $f'(x) = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \dfrac{1}{x} = e^x\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{6x}{3x^2 - 1}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + e^x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + e^x}} \cdot (2x + e^x) = \dfrac{2x + e^x}{2(x^2 + e^x)}$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

f) $f'(x) = 5 \cdot \log_2 x + 5x \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln 2} = \dfrac{5 \ln x}{\ln 2} + \dfrac{5}{\ln 2} =$

$= \dfrac{5}{\ln 2}(\ln x + 1)$

11.13. Determina los máximos y mínimos de la función $f(x) = \ln (x^2 + 4)$.

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$, por lo que el único posible máximo o mínimo es el punto donde $f'(x) = 0$, es decir, $x = 0$.

Para determinar de qué tipo de punto se trata, observamos que si $x < 0$, $f'(x) < 0$, es decir, f es decreciente, y si $x > 0$, $f'(x) > 0$, f es creciente, por lo que el punto $P(0, \ln 4)$ es un mínimo relativo.

11.14. Calcula mediante derivación logarítmica las derivadas de:

a) $f(x) = x^x$

b) $f(x) = x^{\ln x}$

c) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{e^x}$

d) $f(x) = x^{x^2}$

e) $f(x) = x^{2x+1}$

f) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

a) $\ln f(x) = \ln (x^x) = x \ln x \cdot \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1$; así que $f'(x) = (\ln x + 1) \cdot f(x) = (\ln x + 1)x^x$

b) $\ln f(x) = \ln (x^{\ln x}) = (\ln x)^2$. Entonces, $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{2 \ln x}{x}$, de donde $f'(x) = \dfrac{2 \ln x}{x} \cdot x^{\ln x} = 2 \ln x \cdot x^{\ln x - 1}$

c) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{e^x} = x^{\frac{e^x}{2}}$, $\ln f(x) = \ln \left(x^{\frac{e^x}{2}}\right) = \dfrac{e^x}{2} \ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{e^x}{2} \ln x + \dfrac{e^x}{2x} \Rightarrow f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{e^x} \cdot \dfrac{e^x}{2}\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$

d) $\ln f(x) = x^2 \cdot \ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2x \ln x + x \Rightarrow f'(x) = x^{x^2}x(2 \ln x + 1) = x^{x^2+1}(2 \ln x + 1)$

e) $\ln f(x) = (2x + 1) \cdot \ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2 \ln x + \dfrac{2x + 1}{x} \Rightarrow f'(x) = x^{2x+1}\left(2 \ln x + \dfrac{2x + 1}{x}\right)$

f) $\ln f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \dfrac{\sqrt{x}}{x} \Rightarrow f'(x) = x^{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\dfrac{\ln x}{2} + 1\right)$

11.15. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \text{sen } x$ en el origen.

$f'(x) = \cos x$, $f'(0) = 1$, así que la recta pedida es $y - 0 = 1\ (x - 0)$, es decir, $y = x$.

11.16. Obtén la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \text{sen } (x^2 + e^{2x})$

b) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

c) $f(x) = \text{tg}^2\, x$

d) $f(x) = x \text{ sen } (3x - 2)$

a) $f'(x) = \cos (x^2 + e^{2x})(2x + 2e^{2x})$

b) $f'(x) = \dfrac{-\text{sen } x}{2\sqrt{\cos x}}$

c) $f'(x) = 2 \text{ tg } x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{2 \text{ sen } x}{\cos^3 x}$

d) $f'(x) = \text{sen } (3x - 2) + 3x \cos (3x - 2)$

11.17. ¿En qué puntos la recta tangente a la función $f(x) = \text{tg } 2x$ está menos inclinada que la bisectriz del primer cuadrante?

Nos piden encontrar los puntos en los que $|f'(x)| < 1$. Como $f'(x) = \dfrac{2}{\cos^2 2x}$, y $\cos^2 2x \leqslant 1$ siempre, $f'(x) \geqslant 2$ sea cual fuese x, por lo que no hay ningún punto con la condición requerida.

11.18. Encuentra los puntos con abscisa en $[0, 2\pi]$ para los que la tangente a la curva $f(x) = \text{sen } x + \cos x$ es horizontal.

Al ser $f'(x) = \cos x - \text{sen } x$, debemos hallar los valores de x en $[0, 2\pi]$ para los que $f'(x) = 0$, es decir, $\cos x = \text{sen } x$, o sea, $\text{tg } x = 1$, siendo esos valores $x = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{5\pi}{4}$, dando lugar entonces a los puntos $A\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y $B\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

11.19. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \text{arcsen } (e^x)$

b) $f(x) = \text{arctg } (1 + x^2)$

c) $f(x) = \sqrt{\arccos x}$

d) $f(x) = \ln (\text{sen } x + \text{arcsen } x)$

a) $f'(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

b) $f'(x) = \dfrac{2x}{1 + (1 + x^2)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\arccos x}} \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = -\dfrac{1}{2\sqrt{(1 - x^2) \arccos x}}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{\text{sen } x + \text{arcsen } x}\left(\cos x + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$

11.20. Halla los puntos en que la recta tangente a la función arco tangente es horizontal.

Como $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, no existe ningún valor de x que anule $f'(x)$, así que no hay ningún punto en la función arco tangente en el que la tangente sea horizontal.

11.21. Deriva y simplifica todo lo que puedas la función: $f(x) = \text{arctg}\,(x) + \text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{x^2+1} \cdot \frac{1}{x^2} = 0$$

El resultado era el esperado, pues arctg x y arctg $\frac{1}{x}$ son arcos complementarios, es decir, $f(x) = \frac{\pi}{2}$, por lo que $f'(x) = 0$.

11.22. Calcula la derivada del arco cotangente. $\left(\text{Recuerda que ctg } x = \frac{1}{\text{tg } x}\right)$.

Como arccotg x = arctg $\frac{1}{x}$, tenemos que arccotg x + arctg $x = \frac{\pi}{2}$, por lo que la derivada de y = arccotg x es $y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

11.23. Determina los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = 3x^4 - 6x^2$.

$f'(x) = 12x^3 - 12x$, así que $f'(x) = 0$ solo si $12x(x^2 - 1) = 0$, es decir, $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

Aplicando el test de la derivada segunda, tenemos que $f''(x) = 36x^2 - 12$, por lo que $f''(0) < 0$, $f''(1) > 0$ y $f''(-1) > 0$, así que f presenta en (0, 0) un máximo relativo, y en (1, −3) y (−1, −3), mínimos relativos.

11.24. Estudia la curvatura y determina la abscisa de los puntos de inflexión de $f(x)$ sabiendo que:

$$f''(x) = (x+1)(x-3)^2(x-7)$$

Los únicos posibles puntos de inflexión vienen dados por los de abscisa x con $f''(x) = 0$, así que en este caso $x = -1$, $x = 3$, $x = 7$.

Estudiando el signo de $f''(x)$ en los intervalos determinados por estos valores, tenemos que:

Si $x < -1 \Rightarrow f''(x) > 0$, $-1 < x < 3$, $f''(x) < 0$, así que el punto de abscisa −1 es de inflexión, pues al pasar por él ha cambiado la posición de la curva respecto de la tangente.

Si $3 < x < 7 \Rightarrow f''(x) < 0$, de donde el punto de abscisa 3 no es punto de inflexión, pues tanto a la izquierda como a la derecha de él es $f''(x) < 0$, es decir, f está por debajo de la tangente.

Finalmente, si $x > 7$, $f''(x) > 0$, con lo que en $x = 7$ la curva cambia de posición respecto de la tangente y $P(7, f(7))$ es punto de inflexión.

En cuanto a la curvatura, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1, 7)$.

11.25. Halla la ecuación de la recta tangente a $y = \frac{x}{x^2+1}$ en su punto de inflexión de abscisa positiva.

Si $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ y $f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)2x \cdot 2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} =$

$$= \frac{-2x(1+x^2) - 4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3}$$

Así que el punto de inflexión de abscisa positiva tiene por abscisa la solución positiva de la ecuación $2x^3 - 6x = 0$, es decir, $x = \sqrt{3}$, y de ordenada, $\frac{\sqrt{3}}{4}$, siendo $f'(\sqrt{3}) = \frac{-2}{4^2} = -\frac{1}{8}$, por lo que la ecuación de la recta pedida es $y - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{8}(x - \sqrt{3}) \Rightarrow y = -\frac{x}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

11.26. ¿Tiene algún punto de inflexión la gráfica de $f(x) = x^2 + \cos x + 1$?

Al ser $f'(x) = 2x - \operatorname{sen} x$, es $f''(x) = 2 - \cos x$, con lo que $f''(x)$ nunca se hace cero, y $f(x)$ no tiene ningún punto de inflexión.

11.27. Haz el estudio completo de las siguientes funciones polinómicas y dibuja sus gráficas.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

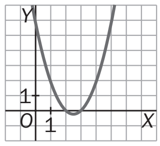
b) $f(x) = x^2 - x + 3$

c) $f(x) = -x^2 + 9$

d) $f(x) = x^2 - 1$

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Cortes con los ejes: eje Y: $(0, 6)$; eje X: $(3, 0)$ y $(2, 0)$

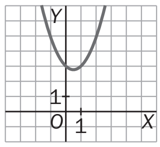
Puntos con tangente horizontal: $f'(x) = 2x - 5 = 0$, $x = \frac{5}{2}$



b) $f(x) = x^2 - x + 3$

Cortes con los ejes: eje Y: $(0, 3)$; eje X: no existe, pues la ecuación $x^2 - x + 3 = 0$ carece de raíces reales.

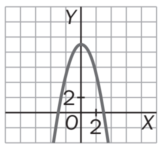
Puntos con tangente horizontal: $f'(x) = 2x - 1 = 0$, $x = \frac{1}{2}$



c) $f(x) = -x^2 + 9$

Cortes con los ejes: eje Y: $(0, 9)$; eje X: $(3, 0)$ y $(-3, 0)$

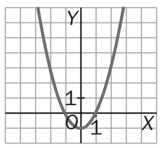
Puntos con tangente horizontal: $f'(x) = -2x = 0$, $x = 0$



d) $f(x) = x^2 - 1$

Cortes con los ejes: eje Y: $(0, -1)$; eje X: $(-1, 0)$ y $(1, 0)$

Puntos con tangente horizontal: $f'(x) = -2x = 0$, $x = 0$



11.28. Realiza un estudio completo de las siguientes funciones y dibuja sus gráficas.

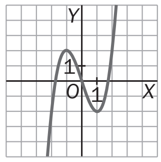
a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

c) $f(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 4)$

d) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

a) $f(x) = x\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$



– Cortes con los ejes: eje Y: (0, 0); eje X: (0, 0), $\left(\sqrt{3}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{-3}, 0\right)$

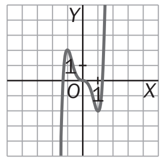
– $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

– Puntos con tangente horizontal: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ si $x = 1$, $x = -1$

– Curvatura y puntos de inflexión.

$f''(x) = 6x$. Así que el único posible punto de inflexión tiene por abscisa $x = 0$. Por otra parte, $f''(1) > 0$ y $f''(-1) < 0$, con lo que $P(1, -2)$ es un mínimo relativo y $Q(-1, 2)$ es un máximo relativo. Como entre un máximo y un mínimo relativo hay algún punto de inflexión, el posible punto de inflexión ($x = 0$) es efectivamente punto de inflexión.

b) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$



– Cortes con los ejes: eje Y: (0, 0); eje X: $x^3(3x^2 - 5) = 0$, $x = 0$, $x = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$, $x = -\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

– $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

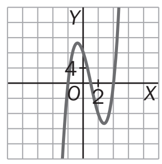
– Puntos con tangente horizontal: $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$ si $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$

– Curvatura y puntos de inflexión: $f''(x) = 60x^3 - 30x = 30x(2x^2 - 1)$. Se anula si $x = 0$, $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Como $f''(0) = 0$, $f''(1) > 0$ y $f''(-1) < 0$, el test de la 2.ª derivada nos dice que de los puntos con tangente horizontal, los de abscisa 1 y -1 son mínimo y máximo relativo, respectivamente, pero no nos da ninguna información sobre el punto de abscisa 0.

Analizando, entonces $f'(x) = 15x^2(x^2 - 1)$, vemos que si $-1 < x < 0$, $f'(x) < 0$ y si $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$, de donde deducimos que el punto de abscisa 0 no es ni máximo ni mínimo relativo, ya que en el intervalo $(-1, 1)$ la función es decreciente. Por tanto, se trata de un punto de inflexión de tangente horizontal.

c) $f(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 4) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$



– Cortes con los ejes: eje Y: (0, 8); eje X: (1, 0), (−2, 0) y (4, 0)

– $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

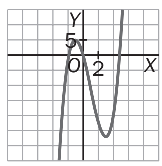
– Puntos con tangente horizontal:

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 6 = 3(x^2 - 2x - 2) = 0$ si $x = 1 + \sqrt{3}$, $x = 1 - \sqrt{3}$

– Curvatura y puntos de inflexión: $f''(x) = 6x - 6 = 0$ si $x = 1$

d) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

– Cortes con los ejes: eje Y: (0, 0); eje X: $x(x^2 - 3x - 9) = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{3 + 3\sqrt{5}}{2}$, $x = \dfrac{3 - 3\sqrt{5}}{2}$



– $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

– Puntos con tangente horizontal: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1)$ se anula si $x = 3$, $x = -1$.

– Curvatura y puntos de inflexión: $f''(x) = 6x - 6$, si $x = 1$

13.29. Esboza la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 36x + 5$

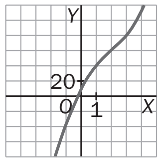
b) $f(x) = 9x^4 - 17x^3 - 46x^2 + 35x + 4$

c) $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 12x + 5$

a) Cortes con los ejes:

eje Y: (0, 0);

eje X: No es fácil obtener las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, sin embargo se observa que $f(0) = 5 > 0$ mientras que $f(-1) = -38 < 0$. Como se trata de una función continua, la conclusión es que al menos hay un punto de corte con el eje X situado en el intervalo $(-1, 0)$.



– $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

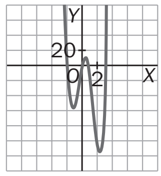
– Puntos con tangente horizontal: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 36$. No tiene raíces reales, así que esta curva no presenta ningún punto con tangente horizontal.

– Curvatura y puntos de inflexión.

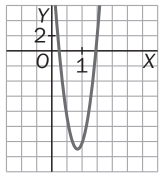
$f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$ se anula si $x = 2$.

Si $x < 2$, $f''(x) < 0$, por lo que $f(x)$ es cóncava hacia abajo, y si $x > 2$, f es cóncava hacia arriba. En $x = 2$ hay, por tanto, un punto de inflexión.

b) No merece la pena ver si la ecuación $f(x) = 0$ tiene raíces enteras, pues al observar con facilidad que $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$ y $f(1) < 0$, y tratarse de una función continua, hay cortes con el eje horizontal al menos en los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$. Por otra parte, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, por lo que hay otros dos cortes con el eje horizontal, uno a la izquierda de -1 y otro a la derecha de 1, con lo que la gráfica de f sería algo así:

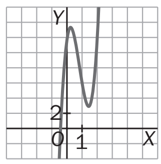


c) No es cómodo obtener los ceros de la función, es decir, los cortes con el eje horizontal, ni siquiera los ceros de la derivada, $f'(x) = 12x^3 - 30x^2 + 12x + 12$. Así que vamos a obtener $f''(x)$, que, al ser un polinomio de 2.º grado, es más fácil de manejar.



$f''(x) = 36x^2 - 60x + 12 = 12(3x^2 - 5x + 1)$, y como $3x^2 - 5x + 1 = 0$ si $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{6} \approx$ $\approx 1{,}4$ y $0{,}25$, $f''(x) \approx 36(x - 1{,}4)(x - 0{,}25)$, por lo que la gráfica de $f''(x)$ es aproximadamente como se muestra en la figura de la derecha.

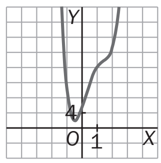
Conocida la gráfica de $f''(x)$ y con el dato de $f'(0) = 12$, podemos esbozar la forma de f', que sería algo como lo mostrado en la figura derecha.



Obsérvese que en $x = 0{,}25$, punto en el que anula $f''(x)$, $f'(x)$ presenta un mínimo, pero con ordenada positiva.

$f'(-1) < 0$ y $f'(-1) > 0$, por lo que el punto de corte de f' con el eje horizontal está entre -1 y 0.

Finalmente, con la gráfica de f' y el dato de que $f(0) = 5$, podemos esbozar la gráfica de f, haciendo notar que presenta un mínimo entre -1 y 0 (punto donde se anula f'), pero como $f(-1) = 12$ y $f(0) = 5$, la ordenada de ese punto es positiva, por lo que la forma de la gráfica de f será algo así:



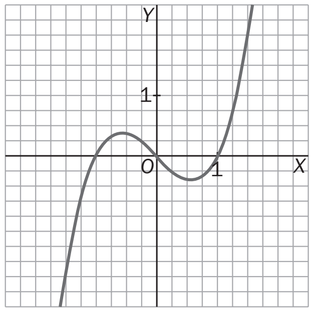
11.30*. Escribe una función polinómica de tercer grado, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $b \neq 0$, que no tenga ni máximos ni mínimos relativos.

Para que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ no tenga ni máximos ni mínimos relativos, es suficiente que la derivada nunca se haga cero, es decir, que $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \neq 0$ para todo x. Para ello basta con que el discriminante de la ecuación de 2.º grado $3ax^2 + 2bx + c = 0$ verifique $4b^2 - 12ac < 0$, situación que se presenta, por ejemplo, con $b = 1$, $c = 1$, $a = 1$.

Así pues, $f(x) = x^3 + x^2 + x + d$ no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

11.31. Escribe una función polinómica de tercer grado que tenga un máximo y un mínimo.

Una función como la de la figura, es decir, $f(x) = x(x - 1)(x + 1)$, presenta un máximo y un mínimo relativo.



11.32. ¿Es posible encontrar una función polinómica de tercer grado que no tenga ningún punto de inflexión?

La condición necesaria y suficiente para que $y = f(x)$ presente un punto de inflexión con abscisa p es que $f''(p) < 0$ a la izquierda de p y $f''(p) > 0$ a la derecha de p o viceversa.

Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, entonces $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$ con $a \neq 0$, por lo que la ecuación de 1.er grado $6ax + 2b = 0$ siempre tiene solución y el signo del binomio $6ax + 2b$ cambia cuando pasa por la solución de dicha ecuación.

Así pues, todas las curvas de 3.er grado presentan un único punto de inflexión, de abscisa $p = -\dfrac{2b}{6a} = \dfrac{-b}{3a}$.

11.33. Realiza un estudio completo de las siguientes funciones y dibuja sus gráficas.

a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{4x^2 + 1}$

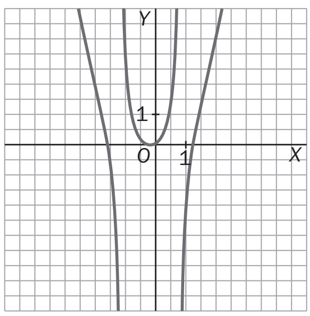
c)* $f(x) = \dfrac{9x^2}{x^2 + x - 2}$

d) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$

a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2}{x^2 - 1}$

- $f(x) = f(-x)$, por lo que f es simétrica respecto del eje vertical.
- $\text{Dom } f = \mathbf{R} - \{1, -1\}$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$ así que $x = 1$ es una asíntota vertical. Además, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.
- No estudiamos el comportamiento de f para valores negativos de x por la observación hecha al comienzo. No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.
- Si $x = 0$, $f(x) = 0$ y $f(x) = 0$ si $x^2(x^2 - 2) = 0$, $x = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$
- $f'(x) = \dfrac{(x^2 - 1)(4x^3 - 4x) - 2x(x^4 - 2x^2)}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{2x^5 - 4x^3 + 4x}{(x^2 - 1)^2}$

  $\dfrac{2x(x^4 - 2x^2 + 2)}{(x^2 - 1)^2} = 0$ solo si $x = 0$
- Si $x < 0$, $f'(x) < 0$, y si $x > 0$, $f'(x) > 0$, por lo que f presenta un mínimo relativo en $x = 0$. Así pues, la gráfica de $y = f(x)$ para $x > 0$ es así:



b) $f(x) = \dfrac{x^3}{4x^2 + 1}$

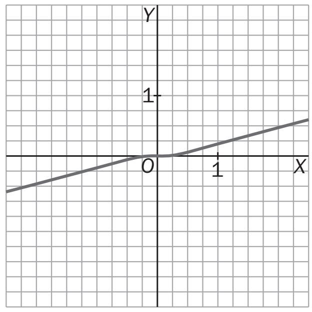
Al no anularse nunca el denominador, se trata de una función continua en R y que corta a los ejes solamente en el origen. Por otra parte, tiene una asíntota oblicua que, al ser $\dfrac{x^3}{4x^2 + 1} = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{4}\dfrac{x}{4x^2 + 1}$, es la recta $y = \dfrac{1}{4}x$. Puesto que $f(-x) = -f(x)$, se trata de una función impar y solo corta a la asíntota oblicua en $x = 0$.

Para obtener los posibles máximos y mínimos relativos, derivamos la función.

$$f'(x) = \frac{(4x^2 + 1) \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 8x}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{4x^4 + 3x^2}{(4x^2 + 1)} = \frac{x^2(4x^2 + 3)}{(4x^2 + 1)^2} \geqslant 0 \text{ siempre,}$$

por lo que la gráfica de f no presenta ningún máximo ni mínimo relativo y tiene un único punto con tangente horizontal en $x = 0$.

Como, por otra parte, $f(x) - \dfrac{1}{4}x = -\dfrac{x}{4(4x^2 + 1)}$, para valores altos de x, $f(x) < -\dfrac{1}{4}x$, así que la gráfica será así:



c) $f(x) = \dfrac{9x^2}{x^2 + x - 2}$

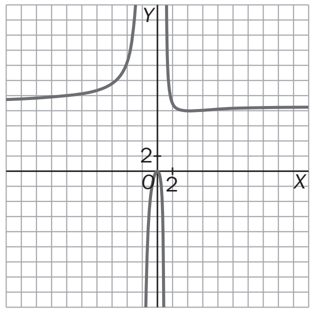
$x^2 + x - 2 = 0$ si $x = 1$ y $x = -2$

Así que $f(x) = \dfrac{9x^2}{(x - 1)(x + 2)}$, y al ser $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 9$, la gráfica de f presenta asíntotas verticales en $x = 1$, $x = -2$, y asíntota horizontal en $y = 9$.

Solo corta a los ejes en $x = 0$.

Su derivada es $f'(x) = \dfrac{9x(x - 4)}{(x^2 + x - 2)^2}$, que cambia de signo en $x = 0$ y en $x = 4$, puntos en los que la función presenta, respectivamente, un máximo y un mínimo relativos.

Con esta información se puede representar la función tal y como aparece a la derecha.



d) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$

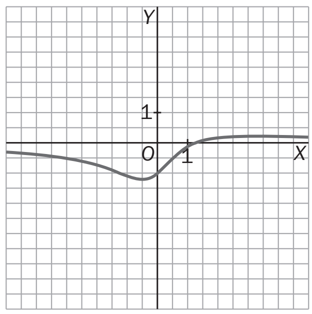
Se trata de una función continua en R, pues $x^2 + 1 \neq 0$ siempre que presenta una asíntota horizontal en $y = 0$.

Si $x = 0$, $f(x) = -1$, y $f(x) = 0$ solo si $x = 1$.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x(x - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 + 2x - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \quad \text{si } x = 1 + \sqrt{2},\ x = 1 - \sqrt{2}$$

Para estos valores la derivada cambia de signo y representa, por tanto, las posiciones de un máximo y de un mínimos relativos, respectivamente.

Como solo corta a la asíntota horizontal (eje de las abscisas) en $x = 1$, su gráfica es:

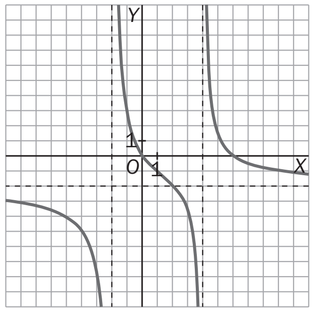


11.34*. **Representa una función racional que cumpla las siguientes condiciones.**

- **Las rectas $y = -2$, $x = 4$, $x = -2$ son sus únicas asíntotas.**
- **Su derivada no se anula nunca y es negativa en todos los puntos en que está definida.**

a) ¿Cuántas veces se anula una función con estas propiedades?

b) ¿Puede la derivada segunda no anularse nunca?



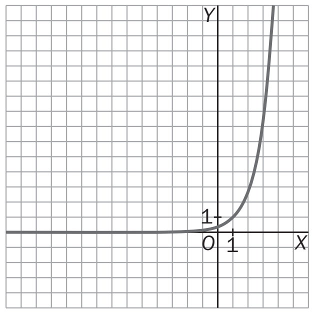
Se trata de un cociente de polinomios de igual grado en el numerador y en el denominador, anulándose este en $x = -2$, $x = 4$. Por otra parte, al ser la función siempre decreciente, debe ocurrir que $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$, por lo que entre -2 y 4 debe anularse alguna vez y haber algún punto de inflexión, con lo que es seguro que su derivada segunda se anulará alguna vez. La función se anula dos veces, pues f' nunca se hace cero.

Una posible gráfica sería la de la derecha.

11.35. **Realiza el estudio completo de las siguientes funciones y dibuja sus gráficas.**

a) $f(x) = e^{x-1}$ b) $f(x) = \ln(x + 1)$ c) $f(x) = \text{sen } x + \cos x$ d) $f(x) = e^{-x^2}$

a) $f(x) = e^{x-1}$



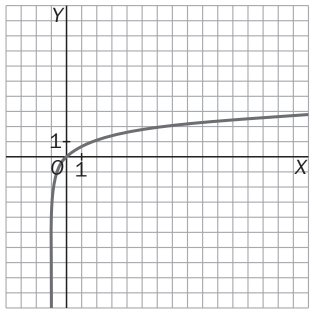
$D = R$, es siempre continua, no corta al eje X, corta al eje Y en el punto $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x-1} = 0$, luego $y = 0$ es asíntota horizontal por la izquierda. Cuando $x \to \infty$, el límite es también infinito y no tiene asíntota ni horizontal ni oblicua.

Como $f'(x) = e^{x-1} > 0$ y $f''(x) = e^{x-1} > 0$ $\forall x \in D$, la función no tiene máximos ni mínimos relativos ni puntos de inflexión. Es monótona creciente y cóncava hacia arriba.

A la derecha se ha representado f. En realidad se trata de la gráfica de la función exponencial $y = e^x$, desplazada una unidad hacia la derecha.

b) $f(x) = \ln(x + 1)$



Igual que en el apartado anterior, la podemos dibujar a partir de $y = \ln x$ desplazándola, en este caso, una unidad a la izquierda.

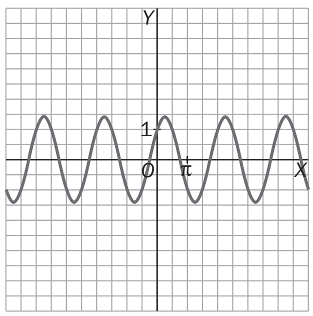
Dominio $D = (-1, +\infty)$, continua en todo el dominio y cortes con los ejes en (0, 0).

Como $\lim\limits_{x \to -1^+} \left(\ln(x + 1)\right) = -\infty$, tiene asíntota vertical en $x = -1$, por la derecha, la función es monótona creciente y cóncava para abajo.

c) $f(x) = \text{sen } x + \cos x$

Esta función es continua en $\mathbb{R}$, $f(x) = f(x + 2\pi)$, por lo que bastará dibujarla en $[0, 2\pi)$, si $x = 0$, $f(x) = 1$ y $f(x) = 0$ si $\text{sen } x = -\cos x$, o sea, $\text{tg } x = -1$, por lo que en $x = \dfrac{3\pi}{4}$ y $x = \dfrac{7\pi}{4}$ cortará al eje X.

Con $f'(x) = \cos x - \text{sen } x = 0$ solo si $\text{tg } x = 1$, los únicos puntos con tangente horizontal en $[0, 2\pi]$ son los de abscisas $x = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{5\pi}{4}$.



Finalmente, al ser $f''(x) = -\text{sen } x - \cos x$, es $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) < 0$ y $f''\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) > 0$, con lo que tenemos en esos puntos un máximo y un mínimo relativo, respectivamente, habiendo puntos de inflexión cuando $f''(x) = 0$, es decir, $x = \dfrac{3\pi}{4}$, $x = \dfrac{7\pi}{4}$. Con toda esta infomación, la gráfica de f queda como se ve a la derecha.

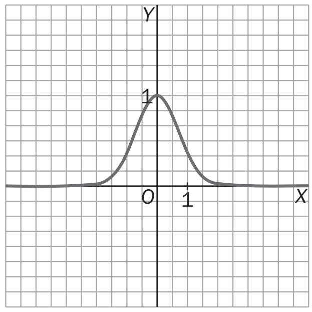
d) $f(x) = e^{-x^2}$. Esta función es continua y positiva en R. Es par: $f(x) = f(-x)$.

Como $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Así pues, presenta una asíntota horizontal que es $y = 0$.

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$ solo se anula si $x = 0$, siendo $f'(x) < 0$ si $x > 0$ y $f'(x) > 0$ si $x < 0$, con lo que en $P(0, 1)$ presenta un máximo relativo que es también absoluto, pues $f(0) \geq f(x)$ sea cual fuere el número x.

Finalmente, $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(-2 + 4x^2)$ se anula en $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, posiciones en las que la función presenta puntos de inflexión.

La gráfica se muestra a la derecha.



11.36. Haz el estudio de las siguientes funciones y dibújalas.

a) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ **b)** $f(x) = x + \text{sen } x$ **c)** $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ **d)** $f(x) = \text{tg }(2\pi x)$

a) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$. Como f es par, bastará dibujar en $(0, \infty)$ y, en este conjunto, f está definida solo si $x > 1$.

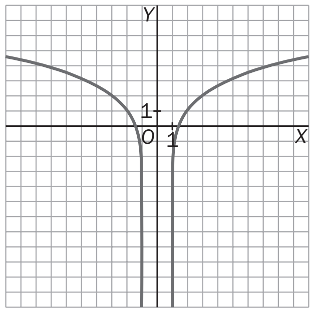
Si $x \to 1^+$, $f(x) \to -\infty$, siendo entonces $x = 1$ una asíntota vertical.

No hay asíntota horizontal, pues si $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$.

Cuando $x^2 - 1 = 1$, es decir, $x = \sqrt{2}$, habrá un corte con el eje horizontal.

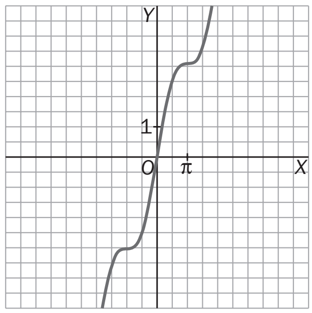
$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$ no se anula en ningún punto del dominio de f y

$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2}$ es siempre negativa, así que la curva es siempre cóncava hacia abajo, y su gráfica es la de la derecha:



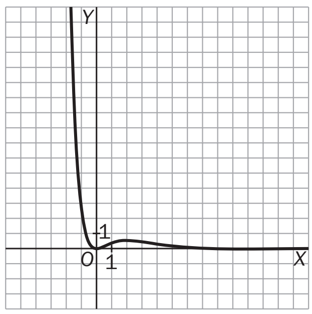
b) $f(x) = x + \text{sen } x$. Su dominio es R, es continua y corta a los ejes solo en el origen, pues $x + \text{sen } x = 0$ únicamente cuando $x = 0$.

$f'(x) = 1 + \cos x$ se anula en $x = k\pi$ con k impar, pero $f'(x) \geqslant 0$ siempre. Así que f es creciente en R y con tangente horizontal en los puntos de abscisa $k\pi$ con k impar. Por otra parte, $f''(x) = -\text{sen } x$ se anula en los puntos de abscisa $k\pi$ para cualquier entero k, cambiando el signo de f'' en esos puntos, que serán, entonces, puntos de inflexión:



c) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$. f es continua en R y corta a los ejes solo en el origen.

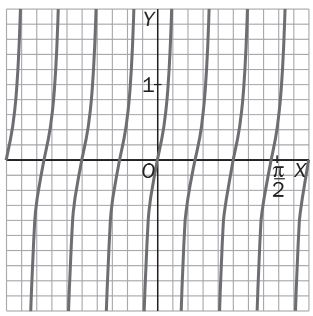
- Si $x \to +\infty$, $f(x) \to 0$, y si $x \to -\infty$, $f(x) \to +\infty$. Así pues, hay una asíntota horizontal (por la derecha) en $y = 0$.
- $f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x} = 0$ solo si $x = 0$, $x = 2$ (mínimo y máximo relativos, respectivamente)
- $f''(x) = \frac{2 - 4x + x^2}{e^x}$, que se anula para $x = 2 \pm \sqrt{2}$ (puntos de inflexión).



d) $f(x) = \text{tg }(2\pi x)$. Es la gráfica de la tangente de x comprimida un factor 2π.

Es periódica de período $T = \frac{1}{2}$ y tiene asíntotas verticales

$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}k \ \forall k \in Z$.



EJERCICIOS

Función recíproca

11.37. Deriva las siguientes funciones.

a)* $f(x) = \sqrt{x - 2}$ b) $f(x) = \sqrt[5]{3x + 1}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \sqrt[3]{x} - \dfrac{x}{\sqrt[6]{x^4 + 1}}$ d) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x^2}{x^2 + 1}}$

a) $f(x) = \sqrt{x - 2}$, la función inversa es $g(x) = x^2 + 2$ y $g'(x) = 2x$. Entonces:

$$g[f(x)] = x \Rightarrow g'[f(x)] \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'[f(x)]};\ g'[f(x)] = 2 \cdot f(x) = 2\sqrt{x - 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 2}}$$

b) $f(x) = \sqrt[5]{3x + 1}$, la función inversa es $g(x) = \dfrac{x^5 - 1}{3}$ y $g'(x) = \dfrac{5}{3}x^4$. Por tanto:

$$g[f(x)] = x \Rightarrow g'[f(x)] \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'[f(x)]};\ g'[f(x)] = \frac{5}{3}(f(x))^4 = \frac{5\sqrt[5]{(3x + 1)^4}}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{5\sqrt[5]{(3x + 1)^4}}$$

En general, se obtiene que para $f(x) = \sqrt[n]{x}$, su inversa es $g(x) = x^n$ y $g'(x) = nx^{n-1}$, con lo que

$$g[f(x)] = x \Rightarrow g'[f(x)] \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'[f(x)]};\ g'[f(x)] = n(f(x))^{n-1} = n\sqrt[n]{x^{n-1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

y con este resultado y la regla de la cadena, se puede derivar cualquier raíz.

c) $$f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt[3]{x} - \frac{x}{\sqrt[6]{x^4 + 1}};\ f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\sqrt[6]{x^4 + 1} - x \cdot \dfrac{4x^3}{6\sqrt[6]{(x^4 + 1)^5}}}{\sqrt[3]{x^4 + 1}} =$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6(x^4 + 1) - 4x^4}{6\sqrt[6]{(x^4 + 1)^5} \cdot \sqrt[6]{(x^4 + 1)^2}} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{x^4 + 3}{3(x^4 + 1)\sqrt[6]{x^4 + 1}}$$

d) $$f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2}{x^2 + 1}};\ f'(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{(x^2 + 1)2x - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x}{2\sqrt[4]{\left(\dfrac{x^2}{x^2 + 1}\right)^3}(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{x}{2(x^2 + 1)\sqrt[4]{x^6 \cdot (x^2 + 1)}}$$

11.38. Halla la derivada de la inversa de la función $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ en el punto $x = 2$.

Llamemos g a la inversa de f, entonces: $g(x^2 + \sqrt{x}) = x$ y $g'(x^2 + \sqrt{x})\left(2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 1$. Si $x^2 + \sqrt{x} = 2$, $x = 1$.

Así pues, $g'(2)\left(2 + \dfrac{1}{2}\right) = 1$, de donde $g'(2) = \dfrac{2}{5}$.

11.39. Calcula la ecuación de la tangente a la curva $y = \sqrt[3]{x - 2}$ en el punto de abscisa 10, deduciendo previamente la derivada de dicha función.

$\left(\sqrt[3]{x - 2}\right)^3 = x - 2$. Así que, derivando, obtenemos $3\left(\sqrt[3]{x - 2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt[3]{x - 2}\right)' = 1$, por lo que $\left(\sqrt[3]{x - 2}\right)' = \dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x - 2}\right)^2}$, con lo que el punto de esa curva de abscisa 10 tiene por ordenada 2 y la pendiente de la tangente en dicho punto es $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \dfrac{1}{12}$, por lo que la recta pedida tiene por ecuación $y - 2 = \dfrac{1}{12}(x - 10) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{x}{12} + \dfrac{7}{6}$.

11.40. Dada la función $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 8}$

a) Calcula, si es posible, $f'(3)$ y $f'(2)$.

b) ¿Dónde está definida $f(x)$? ¿Y $f'(x)$?

c) Halla los extremos relativos de f.

$f'(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 8)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2x = \frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2 - 8)^3}}$ en los puntos en que estén definidas tanto f como f'.

a) $f'(3) = \frac{3}{2\sqrt[4]{1}} = \frac{3}{2}$, $f'(2)$ no está definida, pues $(2^2 - 8)^3 < 0$.

b) $D(f) = \{x \in \mathrm{R} \;/\; x^2 - 8 \geqslant 0\} = \left(-\infty, -2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2}, \infty\right) = D(f')$

c) El único posible extremo relativo de f tendrá por abscisa $x = 0$, pero como 0 no está en el dominio de f, no existen extremos relativos para f. Hay que hacer notar que en $x = \pm 2\sqrt{2}$ la función alcanza su valor mínimo absoluto, que es 0, aunque no sean puntos de tangente horizontal.

11.41. De dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ sabemos que:

- $g(x) > 0$ para todo x, y $(f \circ g)(x) = x$.
- $f'(x) = \frac{1}{x}\ \forall x > 0$.

a) Si $g(0) = 1$, calcula $g'(0)$.

b) Calcula $g'(x)$ en función de $g(x)$.

Nos dicen que $(f \circ g)(x) = x$, de lo que sigue que $f'\big(g(x)\big)g'(x) = 1$, o sea, $f'\big(g(0)\big) \cdot g'(0) = 1$.

a) Como $g(0) = 1$ y $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(1) \cdot g'(0) = 1 \Rightarrow 1 \cdot g'(0) = 1$, así que $g'(0) = 1$.

b) Al ser $f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = 1$, $g'(x) = \frac{1}{f'\big(g(x)\big)}$, y como $f'\big(g(x)\big) = \frac{1}{g(x)}$, tenemos que $g'(x) = g(x)$.

Potencias

11.42. Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)^{\frac{2}{3}}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x - 1} + \left(\frac{1}{x}\right)^{-3}$

c) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} - (x^2 + 1)^{-\frac{2}{5}} + \sqrt[3]{(x - 1)^2}$

a) $f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{3(x^2 + 1)^2\sqrt[3]{\frac{x}{x^2 + 1}}} = \frac{2(1 - x^2)}{3(x^2 + 1)\sqrt[3]{x(x^2 + 1)^2}}$

b) $f'(x) = \frac{1}{3}(2x - 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 + 3x^2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x - 1)^2}} + 3x^2$

c) $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{5}(x^2 + 1)^{-\frac{7}{5}} \cdot 2x + \frac{2}{3}(x - 1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2 + 1)^7}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x - 1}}$

11.43. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt[3]{x^2 + 4}}$ en el punto $x = 2$.

El punto en cuestión es (2, 3), y la pendiente de la tangente viene dada por el valor de la derivada de $f(x)$ en $x = 2$.

$$f'(x) = -2(x^2 + 4)^{-\frac{4}{3}} \cdot 2x = \frac{-4x}{\sqrt[3]{(x^2 + 4)^4}};\ m = f'(2) = -\frac{1}{2}$$

La tangente será, entonces, $y - 3 = -\dfrac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -\dfrac{x}{2} + 4$.

11.44. Si $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$, calcula la derivada de:

a) La inversa de f b) $\left(f(x)\right)^{\frac{2}{3}}$ c) $f\left(f(x)\right)$ d) $\dfrac{1}{\left(f(x)\right)^2}$

a) Obtengamos $f^{-1}(x)$.

$$y = \frac{1}{1 + x};\ 1 + x = \frac{1}{y};\ x = \frac{1}{y} - 1 = \frac{1 - y}{y}, \text{ así que } f^{-1}(x) = \frac{1 - x}{x} = \frac{1}{x} - 1,\ (f^{-1})'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

b) $y = \left(f(x)\right)^{\frac{2}{3}};\ y' = \dfrac{2}{3}\left(f(x)\right)^{-\frac{1}{3}} f'(x) = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{1 + x}}} \cdot \dfrac{-1}{(1 + x)^2} = -\dfrac{2\sqrt[3]{1 + x}}{3(1 + x)^2}$

c) $y = f\left(f(x)\right);\ y' = f'\left(f(x)\right) \cdot f'(x)$

Como $f'(x) = \dfrac{-1}{(1 + x)^2}$, $f'\left(f(x)\right) = \dfrac{-1}{(1 + f(x))^2} = -\dfrac{1}{\left(\dfrac{x + 2}{x + 1}\right)^2} = -\dfrac{(x + 1)^2}{(x + 2)^2}$, por lo que la derivada pedida es

$$[f(f(x))]' = -\frac{(x + 1)^2}{(x + 2)^2} \cdot \frac{(-1)}{(1 + x)^2} = \frac{1}{(x + 2)^2}.$$

d) $y = \dfrac{1}{(f(x))^2};\ y' = \dfrac{-1 \cdot 2f(x)f'(x)}{(f(x))^4} = \dfrac{-2f'(x)}{(f(x))^3} = \dfrac{\dfrac{2}{(1 + x)^2}}{\dfrac{1}{(1 + x)^3}} = 2(1 + x)$

Funciones exponenciales y logarítmicas

11.45. Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = e^{x^2 - 5x + 2}$

c) $f(x) = 2^{-2x^3 + x^2 - 4}$

d) $f(x) = (2x^2 - 4x)^{5 - x}$

e) $f(x) = \sqrt{e^{5x - 1}}$

f) $f(x) = \ln (x^2 + 4x - 1)$

g) $f(x) = \ln (2^x - 3x)$

h) $f(x) = \log_5 (x^4 - x^2)$

i) $f(x) = \dfrac{\ln x}{e^{-x}}$

j) $f(x) = \ln^2 (6x + 4)$

a) $f'(x) = e^x$

b) $f'(x) = e^{x^2 - 5x + 2}(2x - 5)$

c) $f'(x) = \ln 2 \cdot (-6x^2 + 2x)2^{-2x^3 + x^2 - 4}$

f) $f'(x) = \dfrac{2x + 4}{x^2 + 4x - 1}$

g) $f'(x) = \dfrac{\ln 2 \cdot 2^x - 3}{2^x - 3x}$

h) $f'(x) = \dfrac{1}{\ln 5} \cdot \dfrac{4x^3 - 2x}{x^4 - x^2}$

d) $\ln f(x) = (5 - x) \cdot \ln(2x^2 - 4x) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\ln(2x^2 - 4x) + (5 - x) \cdot \left(\dfrac{4x - 4}{2x^2 - 4x}\right)$

Por tanto, $f'(x) = (2x^2 - 4x)^{(5-x)} \cdot \left[-\ln(2x^2 - 4x) + \dfrac{(5 - x)(4x - 4)}{2x^2 - 4x}\right]$

e) $f(x) = \sqrt{e^{5x-1}} = e^{\frac{5x-1}{2}}$; $f'(x) = e^{\frac{5x-1}{2}} \cdot \dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{2}\sqrt{e^{5x-1}}$

i) $f'(x) = e^x \ln x + \dfrac{e^x}{x}$

j) $f'(x) = 2\ln(6x + 4) = \dfrac{6}{6x + 4} = \dfrac{6\ln(6x + 4)}{3x + 2}$

11.46. (PAU) Considera la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$.

a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Determina los extremos relativos de f.

a) f es continua en R por ser composición de las funciones continuas $y = e^x$, $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$, así que no tiene asíntotas verticales. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e^0 = 1$, así que $y = 1$ es asíntota horizontal, y como $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ también, lo es por ambos lados.

b) $f'(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}} \cdot \dfrac{2(x^2 + 1) - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = e^{\frac{2x}{x^2+1}} \cdot \dfrac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$, así que $f'(x) = 0$ si $x = 1$, $x = -1$

Si $x < -1$, $f'(x) < 0$, con lo que f es decreciente.

Si $-1 < x < 1$, $f'(x) > 0$, por lo que f es creciente, y si $x > 1$, $f'(x) < 0$, f es decreciente, resultando que f es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y creciente en $(-1, 1)$.

c) El punto $P(-1, f(-1)) = (-1, e^{-1})$ es un mínimo relativo, y el punto $Q(1, f(1)) = (1, e)$ es un máximo relativo.

11.47. (TIC) Sean las funciones $f(x) = 3^x$ y $g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$. Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a dichas gráficas en el punto de abscisa $x = 2$.

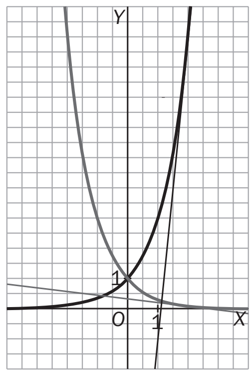
¿Cómo son entre sí esas dos rectas tangentes?

Representa las gráficas y las rectas tangentes y, con ayuda de la calculadora, haz una tabla de valores y comprueba que dichas rectas cumplen lo que has averiguado.

$f(x) = 3^x$, $f'(x) = \ln 3 \cdot 3^x$, $f'(2) = 9\ln 3$, así que $y - 9 = 9\ln 3\,(x - 2)$ es una de las rectas pedidas.

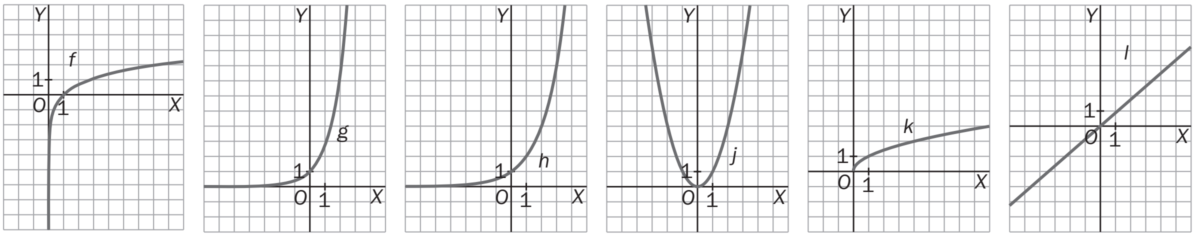
$g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x = \dfrac{1}{f(x)}$, $g'(x) = \dfrac{-f'(x)}{f^2(x)} = \dfrac{-\ln(3) \cdot 3^x}{3^{2x}} = -\dfrac{\ln 3}{3^x}$

Luego $g'(2) = -\dfrac{\ln 3}{9}$, y la otra recta pedida es $y - \dfrac{1}{9} = -\dfrac{\ln 3}{9}(x - 2)$. Como 3 es un poco mayor que e, la recta tangente a f en el punto en cuestión tiene pendiente algo mayor que 9, y la tangente a g tiene pendiente algo menor que $-\dfrac{1}{9}$, por lo que formarán un ángulo próximo a 90°. $m' \cdot m = (-\ln 3) \cdot \ln 3 \approx -1{,}2$, que es próximo a -1.



11.48. (TIC) Las siguientes funciones tienen en común que sus límites en $+\infty$ son $+\infty$. Con ayuda de la calculadora haz una tabla de valores y representa sobre los mismos ejes estas funciones y a continuación ordénalas según su crecimiento, de mayor a menor.

$f(x) = \ln x$ $\quad g(x) = e^x$ $\quad h(x) = 2^x$ $\quad j(x) = x^2$ $\quad k(x) = \sqrt{x}$ $\quad l(x) = x$



El crecimiento viene determinado por los valores de la derivada, pero en cada punto y en cada intervalo pueden presentar crecimiento diferente unas funciones y otras, es decir, puede ser que en un intervalo una función tenga crecimiento más fuerte que otra, pero en otro intervalo ocurra lo contrario.

Se sobreentiende que la cuestión se formula para valores grandes de x. Para ello analizamos las derivadas de las seis funciones.

$(e^x)' = e^x \qquad (2^x)' = 2^x \cdot \ln 2 \qquad (x^2)' = 2x \qquad x' = 1 \qquad \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$e^x > 2x \cdot \ln 2;\quad \forall x > 0 \qquad 2^x \cdot \ln 2 > 2x;\quad \forall x > 4 \qquad 2x > 1;\quad \forall x > \dfrac{1}{2}$

$1 > \dfrac{1}{2\sqrt{x}};\quad \forall x > \dfrac{1}{4} \qquad \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > \dfrac{1}{x};\quad \forall x > 4$

Luego se puede asegurar que a partir de $x = 4$ el orden de mayor a menor crecimiento de las funciones dadas es:

$e^x,\ 2^x,\ x^2,\ x,\ \sqrt{x},\ \ln x$

11.49. Deriva las siguientes funciones donde sea posible:

a) $f(x) = (x^2 - 3x)^{x^2}$ $\qquad$ b) $f(x) = (\text{sen}\, x)^{\cos x}$ $\qquad$ c) $f(x) = (x + \ln x)^{\sqrt{x}}$ $\qquad$ d) $f(x) = x^{\text{tg}\, x}$

a) $\ln f(x) = x^2 \ln (x^2 - 3x).\ \dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2x \ln (x^2 - 3x) + \dfrac{x^2(2x - 3)}{x^2 - 3x}$

$$f'(x) = (x^2 - 3x)^{x^2}\left[2x \ln (x^2 - 3x) + \frac{x^2(2x - 3)}{x^2 - 3x}\right] \quad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$$

b) $\ln f(x) = \cos x \cdot \ln \text{sen}\, x \qquad \dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\text{sen}\, x \ln \text{sen}\, x + \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}\, x}$

$$f'(x) = (\text{sen}\, x)^{\cos x}\left[-\text{sen}\, x \ln \text{sen}\, x + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}\, x}\right] \quad \forall x \in \big(2k\pi, (2k + 1)\pi\big)\ k \in Z$$

c) $\ln f(x) = \sqrt{x} \ln (x + \ln x).\ \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln (x + \ln x) + \sqrt{x}\,\dfrac{\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}{x + \ln x} \quad \forall x > -\ln x$. Es decir, $\forall x > 0{,}567\ldots$

d) $\ln f(x) = \text{tg}\, x \cdot \ln x\ \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\cos^2 x} \ln x + \dfrac{\text{tg}\, x}{x} \qquad f'(x) = x^{\text{tg}\, x}\left[\dfrac{\ln x}{\cos^2 x} + \dfrac{\text{tg}\, x}{x}\right] \quad \forall x > 0,\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

11.50. (PAU) Halla los extremos relativos de la función $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$.

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot 2(x+1) - (x+1)^2 e^x}{e^{2x}} = \frac{1 - x^2}{e^x} = 0 \text{ solo si } x = 1,\ x = -1$$

Si $x < -1$, $\quad f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decreciente

Si $-1 < x < 1$, $\quad f'(x) > 0 \Rightarrow f$ creciente

Si $x > 1$, $\quad f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decreciente

Así pues, $P(-1, 0)$ es un mínimo relativo y $Q\left(1, \dfrac{4}{e}\right)$ es un máximo relativo.

11.51. ¿Cuál es el valor mínimo que puede tomar la función $f(x) = 2^{x^2 - 2x}$?

El valor mínimo que toma el exponente $x^2 - 2x$ lo alcanza en la ordenada del vértice de la parábola $y = x^2 - 2x$, que es $V(1, -1)$, así que el valor mínimo de f es $2^{-1} = \dfrac{1}{2}$.

11.52. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y las asíntotas de la función $f(x) = e^x + \ln(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

$f'(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$, por lo que en $(0, \infty)$ f es creciente.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, así que no hay asíntotas horizontales.

La pendiente de la posible asíntota oblicua vendría dada por $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, por lo que tampoco hay asíntota oblicua. Finalmente, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, con lo que la recta $x = 0$ es la única asíntota vertical de esta función.

11.53. Sea f la función definida en todo **R** mediante la fórmula $f(x) = x \cdot e^{2x} - 1$. Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Para todo x se verifica que $f'(x) = (x+1)e^{2x}$.

b) La función f es creciente en $\left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

e) La ecuación $f(x) = 0$ admite una única solución.

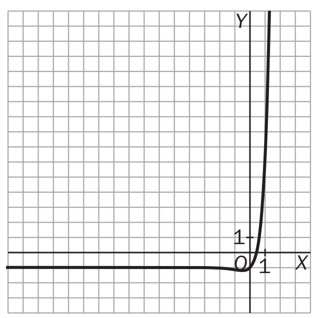
a) $f'(x) = e^{2x} + xe^{2x} \cdot 2 = (1 + 2x)e^{2x}$, por lo que la afirmación *a* es falsa.

b) Si $x > -\dfrac{1}{2}$, $f'(x) > 0$, con lo que f es creciente, y la afirmación *b* es verdadera.

c) La afirmación *c* es verdadera, pues si $x \to +\infty$, tanto $g(x) = x$ como $h(x) = e^{2x}$ se hacen grandes, por lo que $f(x)$ también.

d) Si $x \to -\infty$, $g(x) = x \cdot e^{2x}$ tiende a 0 ($y = e^{2x}$ decrece a 0, mucho más rápido que $x \to -\infty$), por lo que $f(x) \to -1$ y d es falsa.

e) La curva $y = f(x)$ tiene esta forma con un mínimo en $x = -\dfrac{1}{2}$ con $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) < 0$ y, al ser estrictamente creciente en $\left(-\dfrac{1}{2}, \infty\right)$, cortará una sola vez al eje horizontal, por lo que *e* es verdadera.



11.54. Sea f la función definida por $f(x) = x \cdot e^{-x}$. Indica si las siguientes afirmaciones son o no correctas.

a) Para todo $x \in R$, se verifica que $f(x) \cdot f(-x) \leqslant 0$.

b) Para todo $x \in R$, se verifica que $f'(x) + f(x) = e^{-x}$.

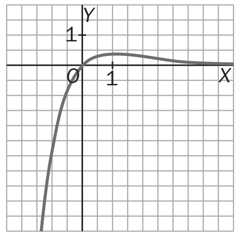
c) Para todo $x \in R$, se verifica que $f(x) \leqslant 1$.

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

e) $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

a) Al ser $g(x) = e^{-x}$ siempre positiva, $f(x) > 0$ si $x > 0$, $f(x) < 0$ si $x < 0$ y $f(0) = 0$, por lo que $f(x) \cdot f(-x) \leqslant 0$ siempre y a es **correcta**.

b) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$, con lo que $f(x) + f'(x) = e^{-x}$ y b es **correcta**.



c) Como $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$, se anula en $x = 1$, cuya imagen es $\frac{1}{e} < 1$ y que corresponde a un máximo relativo de la función. Como la función es derivable en todo **R** y no tiene más extremos relativos, necesariamente el máximo relativo es también absoluto con lo que $f(x) \leqslant \frac{1}{e} < 1$ para todo x de **R**, por lo que e es **correcta**.

d) Como hemos dicho antes, d es **correcta**.

e) Si $x \to +\infty$, la función $g(x) = e^{-x}$ se aproxima a **0** mucho más rápido que $1 - x \to -\infty$, así que e es **correcta**.

Observación: Nótese que al tener $f(x)$ una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$, entonces $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

Funciones trigonométricas y sus inversas

11.55. Halla la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \text{sen}\,(3x^2 - x)$

b) $f(x) = \text{sen}\,(\ln x + 3x)$

c) $f(x) = \cos\left(\sqrt{x} + 4x^3 - 1\right)$

d) $f(x) = \cos\,(\ln x + 5x)$

e) $f(x) = \text{sen}^3\,(x^2 - 4)$

f) $f(x) = \cos^5\,(x^5 + 1)^5$

g) $f(x) = x^3 \cdot \text{sen}\,(x^2)$

h) $f(x) = e^{-x} \cdot \text{sen}\,(x^3)$

i) $f(x) = \text{tg}\,(2x^2 + x)$

j) $f(x) = \text{tg}\,(\text{sen}\,x)$

k) $f(x) = x^2\,\text{tg}\,(x^2)$

l) $f(x) = \text{cotg}\,(\ln x)$

a) $f'(x) = (\cos\,(3x^2 - x))(6x - 1)$

b) $f'(x) = (\cos\,(\ln x + 3x))\left(\frac{1}{x} + 3\right)$

c) $f'(x) = -\left(\text{sen}\left(\sqrt{x} + 4x^3 - 1\right)\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 12x^2\right)$

d) $f'(x) = -(\text{sen}\,(\ln x + 5x))\left(\frac{1}{x} + 5\right)$

e) $f'(x) = 3\,\text{sen}^2\,(x^2 - 4)(\cos\,(x^2 - 4)) \cdot 2x$

f) $f'(x) = 5\cos^4\,(x^5 + 1)^5(-\text{sen}\,(x^5 + 1)^5) \cdot 5(x^5 + 1)^4 \cdot 5x^4$

g) $f'(x) = 3x^2\,\text{sen}\,x^2 + x^3(\cos x^2)2x$

h) $f'(x) = -e^{-x}\,\text{sen}\,x^3 + e^{-x}(\cos x^3) \cdot 3x^2$

i) $f'(x) = \frac{4x + 1}{\cos^2(2x^2 + x)}$

j) $f'(x) = \frac{\cos x}{\cos^2(\text{sen}\,x)}$

k) $f'(x) = 2x \cdot \text{tg}\,x^2 + \frac{2x^3}{\cos^2 x^2}$

l) $f'(x) = \frac{-1}{x\,\text{sen}^2 \ln x}$

11.56. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \text{arcsen}\,(x - e^{-x})$

b) $f(x) = \text{arcsen}\left(\frac{x}{x + 1}\right)$

c) $f(x) = \arccos\left(2x - \sqrt{x}\right)$

d) $f(x) = \arccos\,(1 - \ln x)$

e) $f(x) = \text{arctg}\,(3x - 1)$

f) $f(x) = \text{arctg}\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$

a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x - e^{-x})^2}}(1 + e^{-x})$

b) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{(x+1)^2}}} \cdot \frac{x + 1 - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)\sqrt{1 + 2x}}$

(Nótese que al simplificar hemos supuesto $\sqrt{(x+1)^2} = x + 1$ cuando realmente $\sqrt{(x+1)^2} = |x + 1|$, pero en este caso coincide, pues si $x < -1$, f no está definida.)

c) $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(2x - \sqrt{x}\right)^2}}\left(2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

d) $f'(x) = +\frac{1}{\sqrt{1 - (1 - \ln x)^2}} \cdot \frac{1}{x}$

e) $f'(x) = \frac{3}{1 + (3x - 1)^2}$

f) $f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1 + x}{1 - x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}} \cdot \frac{1 - x + 1 + x}{(1 - x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}$

11.57. Escribe la expresión más simplificada de la derivada de la función $f(x) = \ln(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)$.

Como $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$, entonces $f(x) = \ln(\cos 2x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-2 \text{ sen } 2x}{\cos 2x} = -2 \text{ tg } 2x$

11.58. ¿Existe algún punto de la gráfica de $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1 + \text{sen } x}{1 - \text{sen } x}}$ con tangente horizontal?

$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1 + \text{sen } x}{1 - \text{sen } x}} = \frac{1}{2}[\ln(1 + \text{sen } x) - \ln(1 - \text{sen } x)] \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1 + \text{sen } x} - \frac{-\cos x}{1 - \text{sen } x}\right) =$

$= \frac{2\cos x}{1 - \text{sen}^2 x} = \frac{1}{\cos x}$

$f'(x) \neq 0$ para todo x; por tanto, no existe ningún punto en la gráfica de dicha función con tangente horizontal.

11.59. Calcula el valor máximo que puede tener la suma $S = 4 \cdot \text{sen } \alpha + 3 \cdot \cos \alpha$ sabiendo que el ángulo α (en radianes) cumple que $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

¿Para qué valor del ángulo α se alcanza dicho valor máximo?

$S'(\alpha) = 4\cos\alpha - 3\text{ sen }\alpha$

Si $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $S'(\alpha) = 0$ si $\left(1 - \frac{3\text{ sen }\alpha}{4\cos\alpha}\right)4\cos\alpha = 0$, es decir, si $\frac{4}{3} = \text{tg }\alpha$. Si $0 < \alpha < \text{arctg }\frac{4}{3}$, entonces $S'(\alpha) > 0$, por lo que $S(\alpha)$ es creciente, y si $\text{arctg }\frac{4}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $S'(\alpha) < 0$, con lo que f es decreciente y el valor máximo en dicho intervalo se alcanza, pues, en $\alpha = \text{arctg }\frac{4}{3}$, y como $1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, tenemos que $1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ y $\text{sen }\alpha = \frac{4}{5}$, por lo que el máximo valor de $S(\alpha)$ es $4 \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5} = 5$.

Curvatura e inflexión

11.60. Calcula las abscisas de los puntos de inflexión de $f(x)$ si $f''(x) = (x - 2)(x - 4)^2(x + 5)$.

Los posibles puntos de inflexión son los de abscisas $x = 2$, $x = 4$, $x = -5$, y como $f''(x)$ cambia el signo solo al pasar por $x = 2$ y por $x = -5$, los únicos puntos de inflexión de $f(x)$ son los de abscisas $x = 2$ y $x = -5$.

11.61. Estudia la curvatura de la función $f(x) = e^{2x} + 12e^x + 4x^2 + \pi x + e$.

$f'(x) = 2e^{2x} + 12e^x + 8x + \pi$; $f''(x) = 4e^{2x} + 12e^x + 8$

Así pues, $f''(x) > 0$ siempre, ya que e^x lo es, por lo que, en todo **R**, la gráfica de f es cóncava hacia arriba.

11.62. Determina la posición de los puntos de inflexión de las siguientes funciones indicando, en su caso, si son o no de tangente horizontal.

a) $f(x) = x^4 - x^2$ **b)** $f(x) = x^5 + 3x^3 - 1$ **c)** $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$

a) $f'(x) = 4x^3 - 2x$, $f''(x) = 12x^2 - 2 = 12\left(x + \sqrt{\frac{1}{6}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{1}{6}}\right)$. Como f'' cambia el signo al pasar por esos dos valores, $-\sqrt{\frac{1}{6}}$ y $\sqrt{\frac{1}{6}}$, dichos números son abscisas de puntos de inflexión, y al ser $f'\left(-\sqrt{\frac{1}{6}}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{6}} + 2\sqrt{\frac{1}{6}} \neq 0$ en dicho punto la tangente no es horizontal, al igual que en el otro, por tratarse de una función par.

b) $f'(x) = 5x^4 + 9x^2$, $f''(x) = 20x^3 + 18x = 2x(10x^2 + 9) = 0$ solo si $x = 0$, donde cambia el signo de $f''(x)$.

Así pues, se trata de un punto de inflexión con tangente horizontal, pues $f'(0) = 0$.

Nótese que al ser la gráfica de f igual que la de función impar $g(x) = x^5 + 3x^3$, solo que desplazada una unidad hacia abajo, el punto de abscisa 0 tenía obligatoriamente que ser punto de inflexión por serlo en la gráfica de g, y en esta lo era por ser dicha gráfica simétrica respecto del origen y cambiar, por tanto, la curvatura en dicho punto.

c) $f'(x) = 3\operatorname{sen}^2 x \cos x$. $f''(x) = 6\operatorname{sen} x \cos^2 x - 3\operatorname{sen}^3 x = 3\operatorname{sen} x(2\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 3\operatorname{sen} x(3\cos^2 x - 1)$

$f''(x) = 0$ si $\operatorname{sen} x = 0$ o si $\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, es decir, si $x = k\pi$ con k entero o si $x = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$ o $x = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Como en todos esos valores cambia el signo de $f''(x)$, pues el factor $3\cos^2 x - 1$ se factoriza en factores lineales en $\cos x$, todos esos puntos son puntos de inflexión, y los únicos en los que la tangente es horizontal son $x = k\pi$.

11.63. Se considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente en su punto de inflexión.

b) ¿Hay algún punto de esta curva en el que la recta tangente sea perpendicular a $x - 4y + 5 = 0$?

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f''(x) = 6x - 6 = 0$ si $x = 1$, que es un punto de inflexión ya que cambia en él el signo de $f''(x)$.

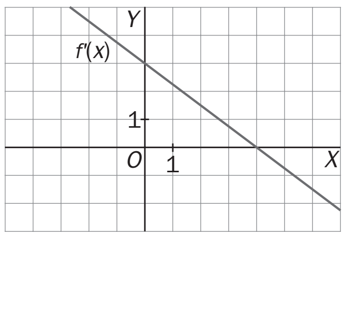
Como $f'(1) = -3$, la ecuación de la tangente en dicho punto es $y + 1 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 2$.

b) La pendiente de la recta es $m = \frac{1}{4}$. Cualquier perpendicular a ella debe tener por pendiente el número -4 y la derivada $f'(x)$ nunca es -4, pues su mínimo lo alcanza en $x = 1$, y es $f'(1) = -3$, así que la respuesta a b es no.

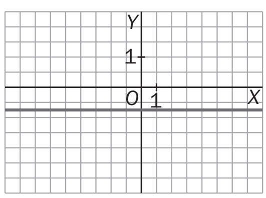
11.64. La siguiente gráfica corresponde a la derivada primera de una función continua y derivable.

a) Esboza la gráfica de la derivada segunda de la misma función.

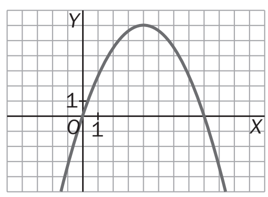
b) Esboza la gráfica de la función.



a)



b)



La función $f'(x)$ tiene pendiente constante $m = -\frac{3}{4}$, luego $f''(x) = -\frac{3}{4}$.

Como $f'(x) > 0$ $\forall x \in (-\infty, 4)$ y $f'(x) < 0$ $\forall x \in (4, +\infty)$, la función $f(x)$ será creciente en $(-\infty, 4)$ y decreciente en $(4, +\infty)$, teniendo, por tanto, un máximo relativo para $x = 4$.

11.65. **Analiza si las siguientes afirmaciones son o no verdaderas, sabiendo que las funciones f y g tienen segunda derivada continua en todo $\mathbf{R}$.**

a) Si $f''(a) = g''(a)$, entonces f y g tienen tangentes paralelas en a.

b) Si $f''(a) = 0$, entonces f tiene tangente horizontal en a.

c) Si $f''(a) \cdot g''(a) < 0$, entonces es posible que f o g tengan un punto de inflexión en a.

d) Si $f''(a) > 0$ y $f''(b) < 0$, entonces entre a y b hay un punto de inflexión.

e) Si $f''(a) = 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en a.

a) Falsa, pues $f'(a)$ no tiene por qué ser $g'(a)$. Basta que f y g presenten puntos de inflexión en $x = a$ con tangentes de diferente inclinación en ese punto.

b) Falsa, pues $f'(a)$ no tiene por qué ser cero.

c) Falsa. Es imposible que f o g presenten punto de inflexión en a, pues $f''(a) \neq 0$ y $g''(a) \neq 0$.

d) Verdadera. Al ser $f''(x)$ continua en R, es seguro que habrá algún número en (a, b) donde $f''(c) = 0$ y que cambie de signo en un intervalo centrado en c, por lo que el punto de abscisa c será punto de inflexión.

e) Falsa. Por ejemplo, $f(x) = x^4$, en $a = 0$ no cambia el signo de la segunda derivada y $f''(0) = 0$.

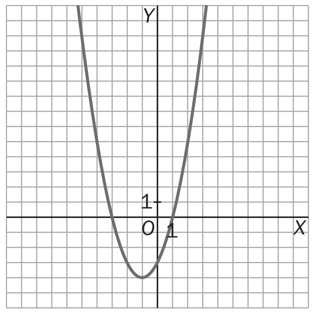
Representación de funciones polinómicas

11.66. **Realiza un estudio completo de las siguientes funciones polinómicas y dibuja su gráfica.**

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ **c) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 4x - 8$** **e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$**

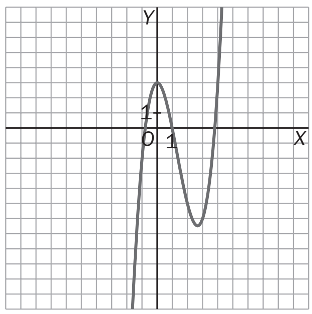
b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ **d) $f(x) = x^3 - 4x$** **f) $f(x) = x^3 - x^2$**

a) Se trata de una parábola con vértice en $V(a, f(a))$ tal que $2a + 2 = 0$, $a = -1$, es decir, $V(-1, -4)$ y corte con el eje Y en $(0, -3)$.



b) Cortes con los ejes: eje Y: $(0, 3)$

Eje X: como $x^3 - 4x^2 + 3 = (x - 1)(x^2 - 3x - 3)$, esta curva corta al eje horizontal en $(1, 0)$, $\left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2}, 0\right)$ y en $\left(\frac{3 - \sqrt{21}}{2}, 0\right)$.



Al ser $f'(x) = 3x^2 - 8x$, los puntos con tangente horizontal son los de abscisas 0 y $\frac{8}{3}$, presenta un máximo relativo en $M(0, 3)$ y un mínimo relativo en $m\left(\frac{8}{3}, -\frac{175}{27}\right)$.

$f''(x) = 6x - 8$ se anula para $x = \frac{4}{3}$, que corresponde al punto de inflexión $I\left(\frac{4}{3}, -\frac{47}{27}\right)$.

Además, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

c) Corte con el eje Y: $(0, -8)$.

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 4 = 4\,(x^3 + 3x^2 - 1)$, polinomio sin raíces enteras y, por tanto, no muy cómodo de manejar.

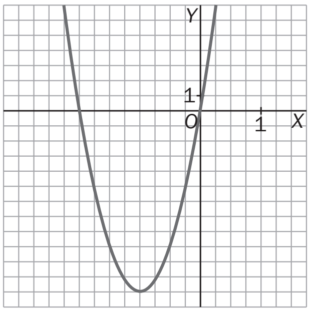
En cambio, $f''(x) = 12x^2 + 24x$ sí es manejable y su gráfica es como se ha representado al final.

Observando la gráfica de $f''(x)$, vemos que $f'(x)$ tiene un máximo en $x = -2$ y un mínimo en $x = 0$, siendo $f'(-2) > 0$ y $f'(0) < 0$.

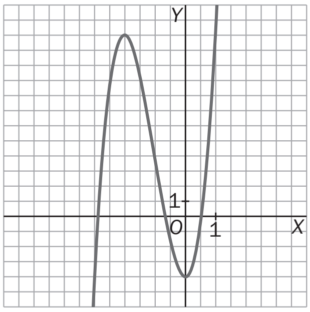
Por otra parte, $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Así que la gráfica de $y = f'(x)$ es algo así.

Observamos que f' se anula entre -3 y -2, pues $f'(-3) < 0$ y $f'(-2) > 0$, entre -1 y 0 y entre 0 y 1 por la misma razón.

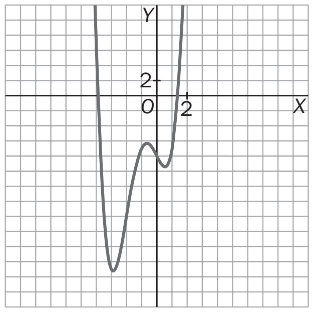
Hallando unos cuantos puntos con una tabla de valores se obtiene la gráfica aproximada de la función $f(x)$.



$f''(x) = 12x^2 + 24x$



$f''(x) = 4(x^3 + 3x^2 - 1)$



$f(x) = x^4 + 4x^3 - 4x - 8$

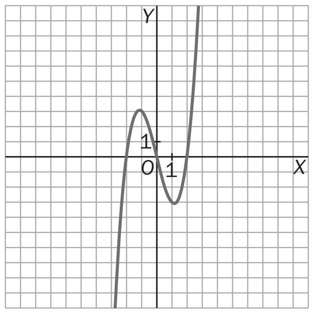
d) $f(x) = x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2)$. Raíces $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$

Es una función impar, simétrica respecto del origen de coordenadas.

$f'(x) = 3x^2 - 4$, que se anula para $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx \pm 1{,}15$.

Máximo $M\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{16\sqrt{3}}{9}\right)$, mínimo $m\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{16\sqrt{3}}{9}\right)$

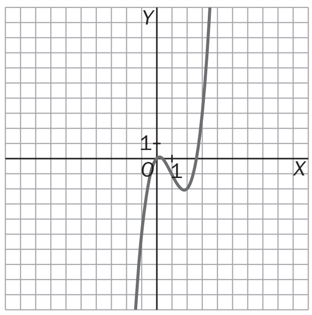
$f''(x) = 6x$, que nos indica que el punto $(0, 0)$ es de inflexión.



e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x = x(x^2 - 3x + 1)$. Raíces $x = 0$, $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$. Máximo $M\left(\dfrac{3 - \sqrt{6}}{3}, 0{,}0\widehat{8}\right)$,

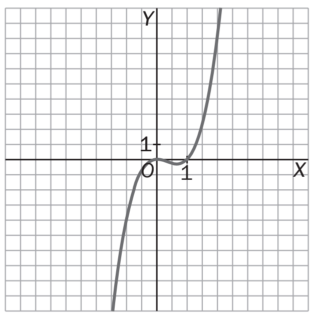
mínimo $m\left(\dfrac{3 + \sqrt{6}}{3}, -2{,}0\widehat{8}\right)$; $f''(x) = 6x - 6$. Inflexión $I(1, -1)$



f) $f(x) = x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$. Raíces $x = 0$ (doble), $x = 1$

$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$. Máximo $M(0, 0)$, mínimo $m\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{27}\right)$

$f''(x) = 6x - 2$. Inflexión en $I\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{27}\right)$



Representación de funciones racionales

11.67. Haz un estudio completo de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2 - x}$ y dibuja su gráfica. Basándote en la gráfica obtenida, ¿sabrías dibujar ahora la gráfica de $g(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$?

$f(x) = \dfrac{x^2}{2 - x}$, $f'(x) = \dfrac{4x - x^2}{(2 - x)^2}$, $f''(x) = \dfrac{8}{(2 - x)^3}$

– La función se anula para $x = 0$. Cortes con los ejes $(0, 0)$.

– La derivada se anula para $x = 0$, $x = 4$ y estudiando su signo, se comprueba que hay un máximo relativo en $M(0, 0)$ y un mínimo relativo en $m(4, -8)$.

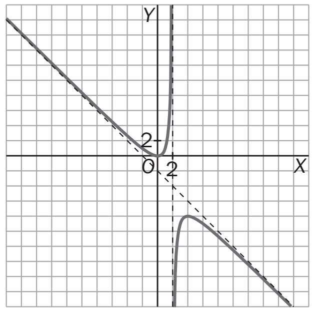
– La segunda derivada no se anula. No hay puntos de inflexión.

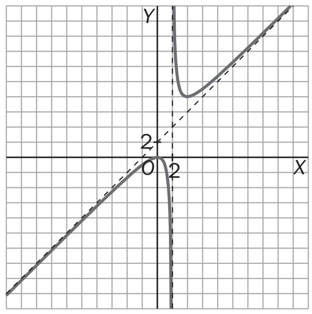
– Asíntotas: $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{2 - x} = +\infty$, así que $x = 2$ es asíntota vertical.

Además, $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2}{2 - x} = -\infty$

No hay asíntotas horizontales, y como $\dfrac{x^2}{2 - x} = -x - 2 + \dfrac{4}{2 - x}$, tenemos que la recta $y = x - 2$ es asíntota oblicua.

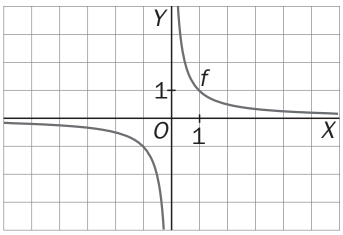
La función $g(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$ verifica que $g(x) = -f(x)$, así que su gráfica será simétrica de $f(x)$ respecto del eje X.

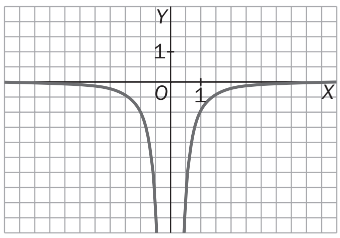




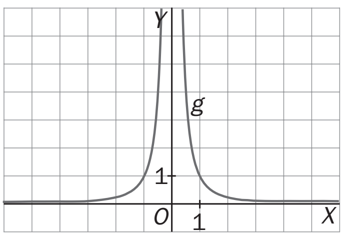
11.68. Representa las gráficas de las derivadas de las funciones que se corresponden con las siguientes gráficas.

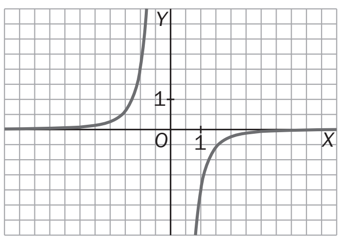
a)



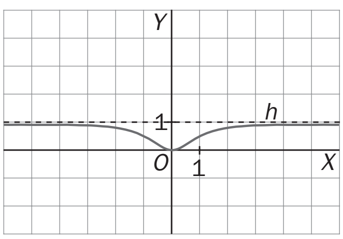


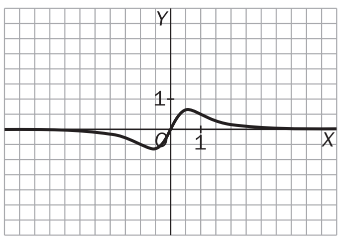
b)





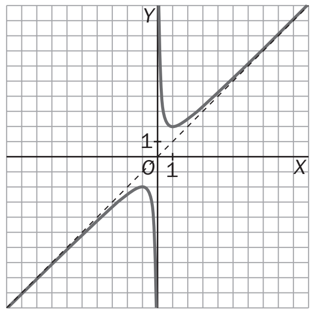
c)





11.69. Representa la gráfica de la función $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, realizando previamente el estudio completo de la misma.

$f(x) = x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2 + 1}{x}$.



– Cortes con los ejes: no existen.

– Asíntotas: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, así que $x = 0$ es asíntota vertical.

Además, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.

No hay asíntotas horizontales, y la recta $y = x$ es asíntota oblicua, pues

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

No hay cortes con la asíntota oblicua.

Las coordenadas de los extremos relativos de esta función son cómodas de obtener, pues $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ se anula solo si $x = 1$, $x = -1$. Así que $P(1, 2)$ es un mínimo relativo, y $Q(-1, -2)$, un máximo relativo.

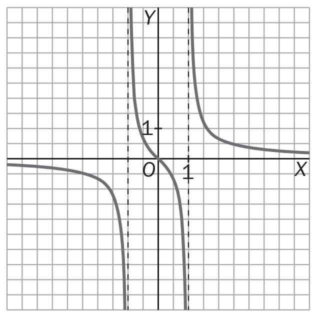
11.70. (TIC) Realiza el estudio completo de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ y dibuja su gráfica.

– Cortes con los ejes: (0, 0).

– Asíntotas $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, así que $x = 1$ es una asíntota vertical.

Análogamente, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$, por lo que $x = -1$ también lo es.

Por otra parte, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$.



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, así que $y = 0$ es una asíntota horizontal (por ambos lados, al tratarse de una función racional).

No hay asíntota oblicua.

– Esta función es decreciente en su dominio.

En efecto: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{-1 - x^2}{(x^2 - 1)^2} < 0$ sea cual fuere el número x el dominio de f.

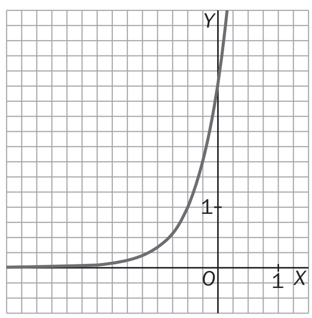
Representación de otros tipos de funciones

11.71. Representa las siguientes funciones.

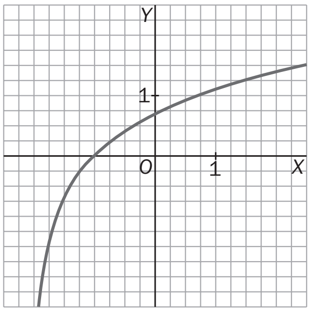
a) $f(x) = 3^{2x+1}$ b) $f(x) = \text{sen } 4x$ c) $f(x) = \ln (x + 2)$ d) $f(x) = \text{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

a) $f(x) = 3^{2x+1} = 3 \cdot 3^{2x}$

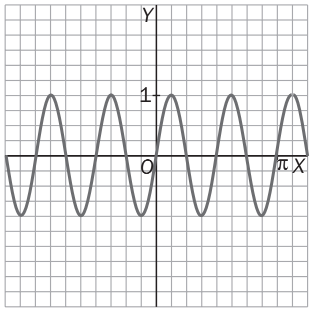
Dibujamos en primer lugar la exponencial $y = 3^{2x}$ y posteriormente la gráfica de $f(x) = 3^{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}$ sin más que aplicar la traslación de media unidad a la izquierda correspondiente.



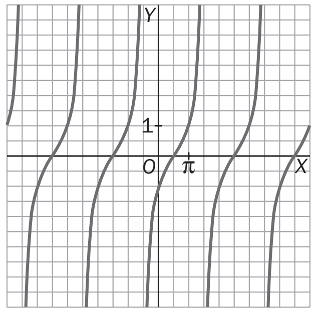
b) $f(x) = \ln(x + 2)$. A partir de la función $y = \ln x$, bastaría desplazarla 2 unidades a la izquierda.



c) $f(x) = \text{sen } 4x$. A partir de $y = \text{sen } x$, se comprime el periodo 4 veces.



d) $f(x) = \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Desplazamos la gráfica de $y = \text{tg } x$, $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda.

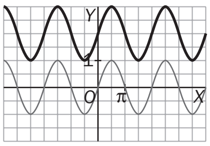


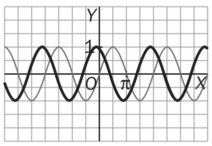
11.72. (TIC) A partir de la gráfica de $y = \text{sen } x$, dibuja la gráfica de estas funciones.

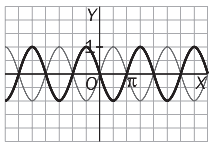
a) $f(x) = \text{sen } x + 2$ c) $f(x) = \text{sen }(x + 2)$ e) $f(x) = -\text{sen } x$ g) $f(x) = |\text{sen } x|$ i) $f(x) = 2 \cdot \text{sen } x$

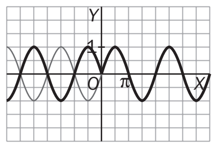
b) $f(x) = \text{sen } x - 2$ d) $f(x) = \text{sen }(x - 2)$ f) $f(x) = \text{sen }(-x)$ h) $f(x) = \text{sen } |x|$ j) $f(x) = \text{sen }(2x)$

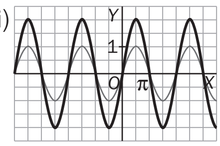
Comprueba los resultados con ayuda de la calculadora gráfica o el ordenador.

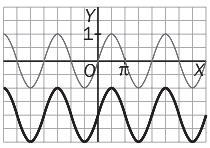
a) 

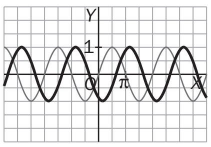
c) 

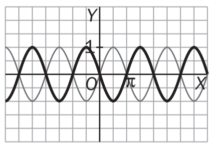
e) 

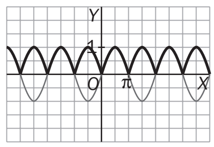
g) 

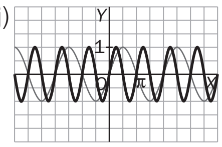
i) 

b) 

d) 

f) 

h) 

j) 

11.73. (PAU) Sea $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 2}{2x - 1}\right)$, se pide:

a) Dominio, cortes con los ejes y asíntotas.

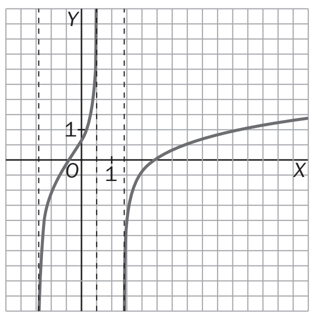
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) A partir de los datos obtenidos, representa gráficamente la función.

a) $D = \left\{x \in \mathrm{R} \;/\; \frac{x^2 - 2}{2x - 1} > 0\right\} = \left(-\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$

Corte con Y: $(0, \ln 2)$. Cortes con X: $0 = \ln\left(\frac{x^2 - 2}{2x - 1}\right) \Rightarrow \frac{x^2 - 2}{2x - 1} = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \in D$

Asíntotas verticales $x = \frac{1}{2}$ porque $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \ln\left(\frac{x^2 - 2}{2x - 1}\right) = +\infty$. Además, en $x = -\sqrt{2}$ por la derecha y en $x = \sqrt{2}$ por la izquierda, ya que la función tiende a $-\infty$ en ambos puntos.



b) $f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 4}{(x^2 - 2)(2x - 1)} > 0$ para todo $x \in D(f) \Rightarrow f$ es siempre creciente.

11.74. Representa gráficamente una función que satisfaga todas estas condiciones:

a) $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$

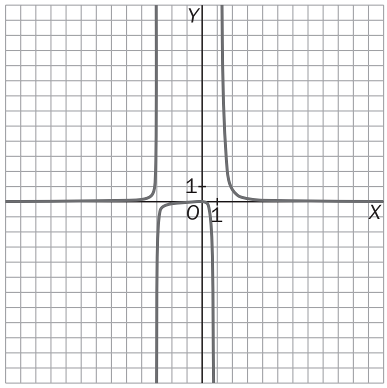
b) La recta $x = -3$ es una asíntota vertical.

c) Creciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$

d) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

e) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

f) Decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$



Podría ser una función como la representada, cuya ecuación es $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+3)(x-1)^3}$.

11.75. Representa gráficamente, en cada caso, una función que cumpla:

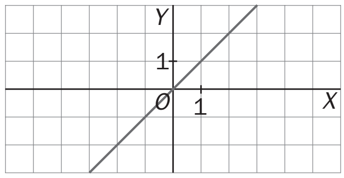
a) Dom $f = R - \{-2, 2\}$. Corta los ejes en $(-3, 0)$, $(0, 0)$ y $(3, 0)$.

b) Tiene dos asíntotas verticales.

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

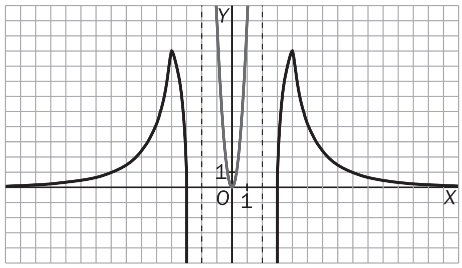
d) Su derivada se anula en $x = -4$, $x = 0$ y $x = 4$.

e) La derivada segunda tiene como representación gráfica la siguiente:



Una función que cumpla las cuatro primeras condiciones puede ser como la dibujada a la izquierda:

Una función que cumpla la condición e podría ser $y = x^3$.



Síntesis

11.76. Calcula la derivada de todas estas funciones identificando previamente de qué tipo de función se trata.

a) $f(x) = x \cdot \ln(x) - x$

b) $f(x) = \text{sen}(x^2 - 2x)$

c) $f(x) = e^{\text{sen}^2 x} + e^{\cos^2 x}$

d) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

e) $f(x) = -\ln(\cos x)$

f) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

g) $f(x) = (\text{sen}\, x)^{e^x}$

h) $f(x) = (e^x)^{\text{sen}\, x}$

i) $f(x) = \text{arcsen}\, e^x$

j) $f(x) = \ln(\text{tg}\, x)$

k) $f(x) = \sqrt{\text{tg}(\ln x)}$

l) $f(x) = 2\,\text{sen}\, x \cos x$

m) $f(x) = \dfrac{\cos x}{e}$

n) $f(x) = \text{sen}\sqrt{\ln(\cos x)}$

a) Producto de logaritmos y polinomios $\quad f'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

b) Trigonométrica $\quad f'(x) = (2x - 2)\cos(x^2 - 2x)$

c) Exponencial $\quad f'(x) = e^{\text{sen}^2 x} \cdot 2\,\text{sen}\, x \cos x - e^{\cos^2 x}\, 2\,\text{sen}\, x \cos x =$
$= \text{sen}\, 2x\,(e^{\text{sen}^2 x} - e^{\cos^2 x})$

d) Logarítmica $\qquad f'(x) = \dfrac{x-1}{x+1}\dfrac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2}{1-x^2}$

e) Logarítmica $\qquad f'(x) = \dfrac{-1}{\cos x}(-\text{sen } x) = \text{tg } x$

f) Exponencial $\qquad f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

g) Potencial-exponencial $\qquad \ln f(x) = e^x \ln \text{sen } x,\ \dfrac{f'(x)}{f(x)} = e^x \ln \text{sen } x + \dfrac{e^x}{\text{sen } x}\cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = (\text{sen } x)^{e^x} e^x (\ln \text{sen } x + \text{cotg } x)$

h) Exponencial. $\qquad f'(x) = e^{x \text{ sen } x}(\text{sen } x + x\cos x)$

i) Inversa de una trigonométrica $\qquad f'(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

j) Logarítmica $\qquad f'(x) = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\text{sen } x \cdot \cos x}$

k) Raíz cuadrada $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\text{tg }(\ln x)}}\,\dfrac{1}{\cos^2(\ln x)}\cdot\dfrac{1}{x}$

l) Trigonométrica $\qquad f'(x) = 2\cos 2x$

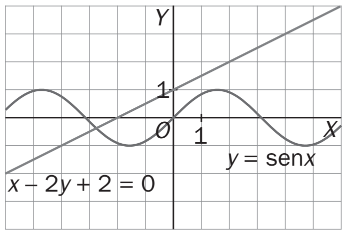
m) Cociente de trigonométrica y exponencial $\qquad f'(x) = \dfrac{-e^x \text{ sen } x - e^x \cos x}{e^{2x}} = -\dfrac{\text{sen } x + \cos x}{e^x}$

n) Trigonométrica $\qquad f'(x) = \cos\sqrt{\ln \cos x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\ln \cos x}}\cdot\dfrac{1}{\cos x}(-\text{sen } x)$

11.77. Halla un punto de la curva $y = \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}$ en el que la recta tangente forme un ángulo de 45° con la horizontal.

Nos piden hallar un punto de la función $f(x) = \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ en el que $f'(x) = 1$. $f'(x) = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = 1 \Rightarrow x = 1$ y el punto pedido es $P\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$.

11.78. Encuentra todas las rectas tangentes a la curva $y = \text{sen } x$ que sean paralelas a la recta indicada en la figura.



La recta en cuestión tiene pendiente $\frac{1}{2}$, así que $y' = \cos x = \frac{1}{2}$ hace que $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ o $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, y el seno de los ángulos es $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ o $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

Así pues, todas las rectas buscadas son las de ecuación

$y - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3} - 2k\pi\right)$ o $y + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\pi}{3} - 2k\pi\right)$ con $k \in Z$.

11.79. (PAU) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$ y g(x) = ln $(x + 8)$, escribe la función $g \circ f$ y calcula su derivada.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln\left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8\right)$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8} \cdot \frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x + 1) =$$

$$= \frac{2x + 1}{3\left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8\right) \cdot \sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^2}} = \frac{2x + 1}{3\left(x^2 + x + 1 + 8\sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^2}\right)}$$

11.80. (PAU) Considera las funciones definidas para $x \geqslant 0$: $f(x) = \text{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$ y $f(x) = \text{arccos}\left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$.

a) Calcula $f'(x)$ y $g'(x)$, y exprésalas del modo más simplificado posible.

b) Compara los resultados y deduce justificadamente la diferencia entre $f(x)$ y $g(x)$.

a) $$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1 + x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1 + x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{1 + x^2}}}{1 + x^2} = \sqrt{1 + x^2} \cdot \frac{1 + x^2 - x^2}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{1 + x_2} = -f'(x)$$

b) Puesto que arcsen x + arccos $x = \frac{\pi}{2}$, las derivadas de estas funciones son, efectivamente, opuestas.

Es interesante hacer notar que $f(x) = \text{arcsen}\,\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ y $g(x) = \text{arctg}\,x$ tienen la misma derivada. ¿La razón? Son la misma función, pues el arco cuya tangente es x coincide con el arco cuyo seno es $\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$, ya que si α es tal arco, sen $\alpha = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$, por lo que $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2}$, y al ser $1 + \text{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, es $\text{tg}^2\,\alpha = 1 + x^2 - 1 = x^2$, por lo que tg $\alpha = x$ (recordar $x \geqslant 0$).

11.81. Explica con claridad por qué la función $f(x) = \cos 2x - 4x$ no tiene extremos relativos.

La derivada de esta función, $f'(x) = -2$ sen $2x - 4$, nunca se anula, pues sen $2x$ nunca puede ser -2.

11.82. (PAU) Halla los máximos y mínimos de $f(x) = e^{x^2}$.

Como $x^2 \geqslant 0$, el mínimo de esta función se alcanza en $x = 0$ y vale 1.

No hay máximos absolutos, pues $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Tampoco hay máximos relativos, pues $f'(x) = 2xe^{x^2}$ solo se anula en $x = 0$, puesto que ya hemos visto que se trata de un mínimo absoluto.

11.83. Explica con claridad por qué $f(x) = \text{tg}\, x$ tiene un máximo en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ y, en cambio, no lo tiene en el intervalo $[0, \pi]$.

$f(x) = \text{tg}\, x$ es continua en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, por lo que alcanzará el máximo y, al tratarse de una función creciente, dicho máximo lo alcanza en $x = \frac{\pi}{4}$.

En cambio, al presentar una asíntota vertical en $x = \frac{\pi}{2}$, dicha función no tiene máximo en $[0, \pi]$.

11.84. PAU Se considera la función $f(x) = \dfrac{1}{2 + \text{sen}\, x - \cos x}$.

Calcula sus extremos relativos y/o globales en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

$f'(x) = \dfrac{\cos x + \text{sen}\, x}{(2 + \text{sen}\, x - \cos x)^2}$; $f'(x) = 0$ si $\cos x = -\text{sen}\, x$, es decir, $\text{tg}\, x = -1$, que en $[-\pi, \pi]$ se alcanza en $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$.

Para obtener, entonces, los extremos globales se calcula: $f(-\pi)$, $f(\pi)$, $f\left(\frac{-\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$:

$f(-\pi) = \frac{1}{3}$, $f(\pi) = \frac{1}{3}$, $f\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2 - \sqrt{2}}$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2 + \sqrt{2}}$, con lo que en el intervalo $[-\pi, \pi]$, f alcanza el máximo absoluto en $x = -\frac{\pi}{4}$ y el mínimo absoluto en $x = \frac{3\pi}{4}$, y no existe ningún otro punto donde f pueda presentar un extremo local.

11.85. Sea la función $f(x) = \text{sen}\,(e^x)$. Calcula la derivada de la función $(f \circ f)(x)$.

$(f \circ f)'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$. Como $f'(x) = e^x \cdot \cos e^x$, tenemos que $f'(f(x)) = e^{f(x)} \cos e^{f(x)}$, es decir: $e^{\text{sen}\, e^x} \cdot \cos e^{\text{sen}\, e^x}$, por lo que la derivada pedida $(f \circ f)'(x)$ será $e^{\text{sen}\, e^x} \cdot \cos e^{\text{sen}\, e^x} \cdot e^x \cos e^x$.
Es posible que el estudiante tenga menos dificultad si obtiene previamente la función $(f \circ f)(x)$.

Procediendo así, diría: $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\text{sen}\, e^x) = \text{sen}\, e^{\text{sen}\, e^x}$, por lo que $(f \circ f)'(x) = \cos (e^{\text{sen}\, e^x}) e^{\text{sen}\, e^x} \cdot \cos e^x \cdot e^x$, expresión que, obviamente, coincide con la obtenida anteriormente.

11.86. Calcula $f'(0)$ sabiendo que $f(x) = [g(x)]^{\cos x}$ y que $g(0) = g'(0) = e$.

Para obtener $f'(x)$, apliquemos la derivación logarítmica: $\ln f(x) = \cos x \cdot \ln g(x)$.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\text{sen}\, x \cdot \ln g(x) + \frac{\cos x \cdot g'(x)}{g(x)}$$

Así pues, $f'(x) = (g(x))^{\cos x}\left(-\text{sen}\, x \cdot \ln g(x) + \dfrac{\cos x \cdot g'(x)}{g(x)}\right)$, por lo que $f'(0) = e^1 \cdot \frac{e}{e} = \text{e}$.

11.87. Realiza un estudio completo de la función $f(x) = x^2 \cdot e^x$ y a continuación dibuja su gráfica.

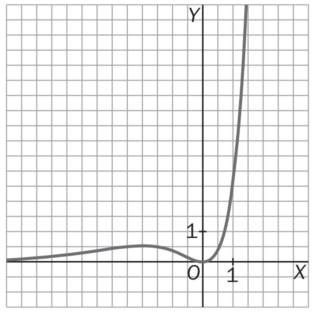
Cortes con los ejes: (0, 0).

Al tratarse de una función continua no tiene asíntotas verticales y $\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot e^x = +\infty$, por lo que no hay asíntotas horizontales por la derecha. Tampoco hay oblicuas por la derecha, pues $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot e^x = 0$ (como el estudiante no maneja el teorema de L'Hôpital, debe confirmar este resultado utilizando la calculadora).

Así pues, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal por la izquierda.

$f'(x) = x \cdot e^x \cdot (x + 2)$ se anula en $x = -2$ y en $x = 0$. Como $f(x) \geqslant 0$ y $f(0) = 0$, el punto de abscisa $x = 0$ es un mínimo absoluto, y como $y = 0$ es una asíntota horizontal por la izquierda, el punto de abscisa $x = -2$ es un máximo relativo.



11.88. Sea la función $f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{x}{1000}}$. Calcula sus máximos y mínimos en el intervalo cerrado [−3000, 3000].

$$f'(x) = 2x\,e^{\frac{x}{1000}} + \frac{x^2}{1000}\,e^{\frac{x}{1000}} = x\,e^{\frac{x}{1000}}\left(2 + \frac{x}{1000}\right)$$

Así pues, en el intervalo [−3000, 3000], la derivada se anula en $x = 0$, $x = -2000$, por lo que en dicho intervalo, tanto el máximo como el mínimo se encontrarán en alguno de estos puntos:

$x = -3000$, $x = 3000$, $x = 0$, $x = -2000$. Calculemos el valor de f en cada uno de ellos y decidamos.

$f(-3000) = 9 \cdot 10^6 \cdot e^{-3}$

$f(3000) = 9 \cdot 10^6 \cdot e^3$

$f(0) = 0$

$f(-2000) = 4 \cdot 10^6 \cdot e^{-2}$

Tenemos entonces que el valor mínimo se alcanza en $x = 0$, y el máximo, en $x = 3000$.

En $x = -2000$ hay un máximo relativo, pues $f'(-2000) = 0$, y si $-3000 < x < -2000$, $f'(x) > 0$, y si $-2000 < x < 0$, $f'(x) < 0$.

11.89. (PAU) Realiza un estudio completo de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ y dibuja su gráfica.

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$; $f''(x) = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$

Dominio R − {−1, 1} es una función par.

Corte con los ejes (0, 0)

Asíntotas: verticales $x = -1$, $x = 1$. Horizontal $y = 1$

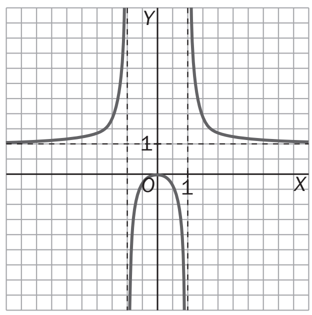
Monotonía: creciente en $(-\infty, 0) - \{-1\}$ y decreciente en $(0, +\infty) - \{1\}$.

Máximo relativo en (0, 0).

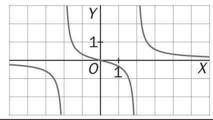
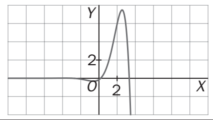
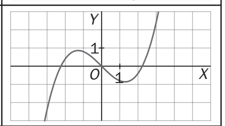
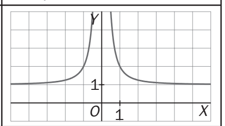
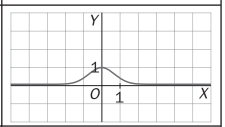
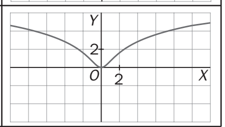
Curvatura: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ cóncava para arriba $[f''(x) > 0]$

$(-1, 1)$ cóncava para abajo $[f''(x) < 0]$

No tiene puntos de inflexión.



11.90. Asocia cada función de la izquierda con su correspondiente gráfica de la derecha.

$f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$	
$f(x) = e^{-x^2}$	
$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$	
$f(x) = \ln(x^2 + 1)$	
$f(x) = e^x \text{ sen } x$	
$f(x) = \dfrac{x^3}{5} - x$	

I $\rightarrow f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

II $\rightarrow f(x) = e^x \text{ sen } x$

III $\rightarrow f(x) = \dfrac{x^3}{5} - x$

IV $\rightarrow f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$

V $\rightarrow f(x) = e^{-x^2}$

VI $\rightarrow f(x) = \ln(x^2 + 1)$

PROBLEMAS

11.91. Se llama recta normal a una curva en un punto de la misma a la perpendicular a la tangente a la curva en dicho punto. Calcula la recta normal a la gráfica $y = \ln x$ en el punto de abscisa $x = \dfrac{1}{2}$.

Punto de tangencia: $A\left(\dfrac{1}{2}, -\ln 2\right)$. Pendiente de la tangente $m_t = f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Pendiente de la normal $m_n = -\dfrac{1}{m_t} = -\dfrac{1}{2}$. Ecuación de la normal $y + \ln 2 = -\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4} - \ln 2$.

11.92. Un meteorito se mueve, en un cierto sistema de referencia, según una trayectoria dada por la curva $y = \dfrac{x}{x + 3}$. Desde el punto $A(5, 1)$ se lanza en línea recta una sonda que se quiere que intercepte al meteorito cuando ambos tengan velocidades paralelas. Calcula la ecuación de la trayectoria de la sonda. (Fíjate que el problema equivale a calcular la recta tangente a la curva que sigue el meteorito desde el punto de partida de la sonda).

La recta buscada pasará por $A(5, 1)$ y $B\left(b, \dfrac{b}{b + 3}\right)$, siendo tangente en B. Así pues, la pendiente de esta recta será $\dfrac{\frac{b}{b+3} - 1}{b - 5}$ y también $f'(b)$, o sea, $\dfrac{3}{(b + 3)^2}$. Tenemos entonces que $\dfrac{-3}{(b + 3)(b - 5)} = \dfrac{3}{(b + 3)^2}$, y como $b \neq -3$, podemos escribir $-(b + 3) = b - 5$, es decir, $b = 1$, y la ecuación de dicha recta es $y - 1 = \dfrac{3}{16}(x - 5)$.

11.93. La posición de una partícula en función del tiempo en un movimiento rectilíneo viene dada por la expresión $x(t) = -2t^3 + 12t^2 - 5t + 1$. Calcula:

a) La velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo.

b) Los valores máximo y mínimo de la velocidad.

c) Los intervalos de tiempo en los cuales la partícula tiene aceleración positiva y negativa.

a) $v(t) = \dfrac{d(x(t))}{dt} = (x(t))' = -6t^2 + 24t - 5$ $\qquad a(t) = \dfrac{d(v(t))}{dt} = (v(t))' = -12t + 24$

b) Entenderemos como valor máximo o mínimo de la velocidad el valor absoluto de dicha velocidad.

$-12t + 24 = 0 \Rightarrow t = 2$ s. Como $v'(t) > 0\ \forall t \in (-\infty, 2)$ y $v'(t) < 0\ \forall t \in (2, +\infty)$. La velocidad máxima se alcanza para $x = 2$ m y será $v_{\text{máx}} = v(2) = 23$ ms^{-1}. La velocidad mínima será $v = 0$ y se alcanza para $t = \dfrac{24 + \sqrt{456}}{12} \cong 3{,}8$ s.

c) Aceleración negativa en el intervalo $(2, +\infty)$ y positiva en $(-\infty, 2)$.

11.94. Un móvil se mueve con una velocidad que varía con el tiempo t (en segundos) según la ecuación $v(t) = \sqrt[3]{t^2 - 10t}$. ¿Cuál es la velocidad del móvil a los 2 segundos de comenzar a moverse? ¿Y a los 9 segundos? ¿Cuándo es máxima? ¿Cuál es la velocidad inicial?

$v(2) = \sqrt[3]{-16} \cong -2{,}52$ m/s $\qquad v(9) = \sqrt[3]{-9} \cong -2{,}08$ ms^{-1}

$v'(t) = \dfrac{2t - 10}{3\sqrt[3]{(t^2 - 10t)^2}}$ se anula para $t = 5$ s, y como $v(t)$ es decreciente en $(-\infty, 5)$ y creciente en $(5, +\infty)$, en $t = 5$ tiene un mínimo relativo. La función no alcanza un valor máximo, pues $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{t^2 - 10t}\right) = +\infty$.

La velocidad inicial es $v(0) = 0$ ms^{-}1

11.95. (PAU) Halla a y b para que la función $f(x) = a \ln x + bx^2 + x$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = 2$. ¿Qué tipo de extremos son (máximos o mínimos)?

$$f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1 \begin{cases} f'(1) = 0 \Rightarrow a + 2b + 1 = 0 & a = -\dfrac{2}{3} \\ f'(2) = 0 \Rightarrow \dfrac{a}{2} + 4b + 1 = 0 & b = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Como $f''(x) = \dfrac{2}{3x^2} - \dfrac{1}{3}$ y $f''(1) > 0$, $f''(2) < 0$ en $x = 1$ hay un mínimo relativo y en $x = 2$ hay un máximo relativo.

11.96. La ecuación del espacio recorrido por un móvil según cierto movimiento en un tiempo t viene dada por la función $s(t) = A \cdot e^{kt} + B \cdot e^{-kt}$, donde A, B y k son constantes. Demuestra que la aceleración es proporcional al espacio y calcula la constante de proporcionalidad.

$a(t) = s''(t)$

$s'(t) = kAe^{kt} - kBe^{-kt}$

$s''(t) = k^2Ae^{kt} + k^2Be^{-kt} = k^2 \cdot s(t)$; así pues, $a(t)$ es proporcional a $s(t)$, siendo k^2 la constante de proporcionalidad.

11.97. **Calcula el valor del parámetro *a* para que la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + 2a}$ tenga un solo punto en el que su derivada primera se anule. ¿Qué tipo de extremo es?**

$f'(x) = \dfrac{e^x(x^2 - 2x + 2a)}{(x^2 + 2a)^2}$ como $e^x \neq 0\ \forall x$, deberá verificarse que $x^2 - 2x + 2a = 0$ con solución doble, y esto solamente ocurre cuando su discriminante es cero. $\Delta = 4 - 8a = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

Como $f'(x) = \dfrac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + 2a)^2} = \dfrac{e^x\,(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2} > 0\ \forall x \neq 1$, la función es siempre creciente y no tiene extremos relativos.

11.98. **Sea la función $f(x) = \text{sen}\, x$, calcula sus primeras derivadas f', f'', f''', … y deduce una fórmula para encontrar su derivada enésima.**

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\text{sen}\, x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{IV}(x) = \text{sen}\, x$. En general:

$$f^n(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } n = 4k + 1 \\ -\text{sen}\, x & \text{si } n = 4k + 2 \\ -\cos x & \text{si } n = 4k + 3 \\ \cos x & \text{si } n = 4k \end{cases} \quad k = 1, 2\ldots$$

11.99. **En una plantación se pone en marcha un plan para eliminar una plaga de roedores que está afectando al cultivo. Se espera que de esta forma la población de roedores se comporte de acuerdo a la siguiente ley:**

$$N(t) = (2 + t) \cdot e^{-\frac{t}{10}}$$

donde *t* es el tiempo en semanas, correspondiendo el valor $t = 0$ al momento en que se empiezan a aplicar las medidas del plan, y *N* es el número de roedores en miles.

a) Determina hasta qué momento no comenzará a observarse una reducción en el número de roedores.

b) A partir de una tabla de valores, calcula cuánto tiempo deberá transcurrir hasta que la población de roedores esté por debajo del 10 % de su valor inicial.

a) $N(t) = (2 + t) \cdot e^{-\frac{t}{10}} \Rightarrow N'(t) = e^{-\frac{t}{10}} + (2 + t) \cdot e^{-\frac{t}{10}} \cdot \left(-\dfrac{1}{10}\right) = e^{-\frac{t}{10}} \cdot \dfrac{8 - t}{10}$. Se anula para $t = 8$ semanas.

Como $N'(t) > 0$ si $t < 8$ y $N'(t) < 0$ si $t > 8$, quiere decir que hasta dentro de 8 semanas no comenzará a observarse una reducción del número de roedores. A las 8 semanas se dará, por tanto, el máximo en la población de roedores.

b) El 10 % de la población actual es $\dfrac{1}{10}N(0) = \dfrac{1}{10} \cdot 2 \cdot e^0 = 0{,}2$ miles de roedores.

t	8	20	40	50	55	56	57
$N(t)$	4,49…	2,977…	0,769…	0,35…	0,23…	0,21…	0,197…

Deberán transcurrir entre 56 y 57 semanas.

11.100. Las pérdidas o ganancias (y) en millones de euros de una empresa fundada hace medio año vienen dadas por la expresión $y = \frac{t}{t+3}$, donde t es el tiempo expresado en años y el valor de $t = 0$ corresponde al momento actual.

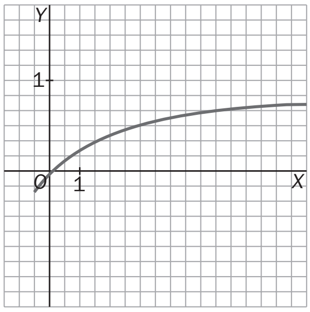
a) Representa gráficamente la función.

b) Calcula la ganancia máxima previsible en el futuro, si existe, y el momento en que se producirá.

c) Halla para qué tiempo las ganancias igualan a las pérdidas que hubo en el momento de fundarse la empresa.

d) Razona si tendría sentido aplicar esta misma función al caso de una empresa fundada hace tres años.

a) La gráfica es la de la derecha. No tiene sentido representarla para valores menores que $-0,5$ que corresponde al momento en que se fundó la empresa.



b) $y' = \frac{3}{(t+3)^2} > 0 \ \forall t \neq -3$. Las ganancias aumentarán constantemente, tendiendo a un millón de euros, pero sin llegar a alcanzarlo nunca.

c) Cuando se fundó la empresa, $t = -0,5$ $f(-0,5) = \frac{-0,5}{2,5} = -0,2$ millones de euros de pérdidas.

Las ganancias serán de 0,2 millones de euros cuando $0,2 = \frac{t}{t+3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,2t + 0,6 = t \Rightarrow t = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$ años. Dentro de 9 meses.

d) No tendría sentido porque hace 3 años esta función no esta definida.

11.101*. Supón que f y g son funciones derivables para las que se verifican las dos condiciones siguientes:

1) $f(0) = 0$ y $g(0) = 1$

2) $f'(x) = g(x)$ y $g'(x) = -f(x)$

a) Sea $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$, calcula $h'(x)$ y utiliza el resultado que obtengas para demostrar que $h(x) = 1$ para todo x.

b) Supón que F y G son otro par de funciones derivables que satisfacen las condiciones 1 y 2, y sea $k(x) = [F(x) - f(x)]^2 + [G(x) - g(x)]^2$. Calcula $k'(x)$ y utiliza el resultado que obtengas para deducir qué relación existe entre f y F y entre g y G.

c) Muestra un par de funciones f y g que satisfagan las condiciones 1 y 2. ¿Puede haber otras?

a) $h'(x) = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f'(x)f(x) = 0$ para todo x. Así pues, $h(x)$ es constante, y como $h(0) = 0^2 + 1^2 = 1$, $h(x) = 1$ para todo x.

b) $k'(x) = 2[F(x) - f(x)][F'(x) - f'(x)] + 2[G(x) - g(x)][G'(x) - g'(x)] =$

$= 2[F(x) - f(x)][F'(x) - f'(x)] + 2[F'(x) - f'(x)][-F(x) + f(x)] =$

$= 2[F'(x) - f'(x)][F(x) - f(x) - F(x) + f(x)] = 0$

Así pues, $k(x)$ es constante, y como $k(0) = [0 - 0]^2 + [1 - 1]^2 = 0$, $k(x)$ es la función idénticamente nula que, al ser suma de dos cuadrados, cada uno de ellos es 0, por lo que $F(x) = f(x)$ y $G(x) = g(x)$.

c) $f(x) = \text{sen } x$, $g(x) = \cos x$ verifican 1 y 2, y, por el apartado b, son las únicas funciones f y g tales que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f'(x) = g(x)$ y $g'(x) = -f(x)$.

PROFUNDIZACIÓN

11.102. **Calcula una función $f(x)$ tal que su derivada sea $f'(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + \sqrt[3]{x^2}$.**

¿Existe una función $f(x)$ cuya derivada es $f'(x)$ y que verifica que $f(0) = 5$?

$f(x) = x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C$, así que la función

$f(x) = x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + 5$ verifica que $f'(x)$ es la función dada y $f(0) = 5$.

11.103*. **Calcula $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\text{sen}\left(\sqrt{\pi} + t\right)^2 - \text{sen}\ \pi}{t}$.**

(Aplica la definición de derivada en un punto de una determinada función.)

La derivada de la función $f(x) = \text{sen}\ x^2$ en el punto dado por $x = \sqrt{\pi}$ es: $f'\left(\sqrt{\pi}\right) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f\left(\sqrt{\pi} + t\right) - f\left(\sqrt{\pi}\right)}{t} =$
$= \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\text{sen}\left(\sqrt{\pi} + t\right)^2 - \text{sen}\ \pi}{t}$ que es el límite pedido.

Así pues, como la derivada de dicha función es $f'(x) = 2x \cos x^2$, el límite pedido será $2\sqrt{\pi} \cos \pi = -2\sqrt{\pi}$.

11.104. **Prueba que la exponencial $y = a^x$ que es tangente a la recta $y = x$ es aquella cuya base es $a = \sqrt[e]{e}$.**

La exponencial buscada, $y = a^x$, verifica que existe $x_0 > 0$ con $f(x_0) = x_0$ y $f'(x_0) = 1$.

$f(x) = a^x$, $f'(x) = \ln a \cdot a^x$.

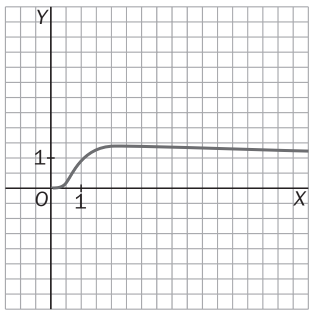
Así pues, $a^{x_0} = x_0$ y $\ln a \cdot a^{x_0} = 1$, es decir, $\ln a \cdot x_0 = 1$, $\ln a = \dfrac{1}{x_0}$, $a = e^{\frac{1}{x_0}}$, $\left(e^{\frac{1}{x_0}}\right)^{x_0} = x_0$, $x_0 = e$ y $a = e^{\frac{1}{e}} = \sqrt[e]{e}$.

11.105. **(TIC) Sea $x > 0$. Dibuja con la calculadora la gráfica de $f'(x) = \sqrt[x]{x}$. ¿En qué punto crees que alcanza el máximo absoluto? ¿Cuánto vale este?**

$\ln f'(x) = \dfrac{1}{x} \ln x$

$\dfrac{f''(x)}{f'(x)} = -\dfrac{1}{x^2} \ln x + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}(1 - \ln x)$, $f'(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1 - \ln x)$ se anula sólo cuando $1 - \ln x = 0$, $x = e$.

Si $x < e$, $f''(x) > 0$, es decir, f' es creciente, y si $x > e$, $f''(x) < 0$, por lo que el punto $\left(e, \sqrt[e]{e}\right)$ es el máximo absoluto de dicha función.



11.106*. Calcula el área del triángulo equilátero formado por el eje horizontal y las tangentes a la curva $y = \text{sen } 2x$ en puntos de abscisa del intervalo $[0, \pi]$.

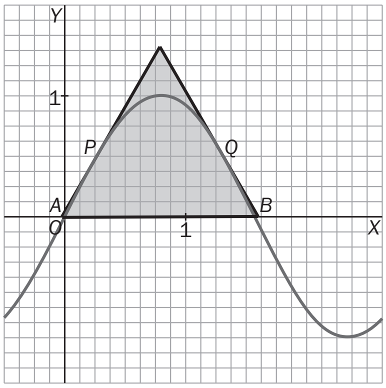
Para la curva $y = \text{sen } x$ es fácil ver que no existe tal triángulo. En efecto, dos lados del triángulo deben tener de pendiente $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$, respectivamente. Así pues, como $f'(x) = \cos x$, no hay ningún punto a donde $f'(a) = \sqrt{3}$ o $f'(a) = -\sqrt{3}$, por lo que no hay ningún triángulo equilátero formado por el eje horizontal y tangentes a la curva $y = \text{sen } x$ en puntos de $[0, \pi]$.

Para la curva del enunciado, $y = \text{sen } 2x$, la derivada es $y = 2 \cos 2x$. Como la pendiente tiene que ser $\pm\sqrt{3}$, entonces $2 \cos 2x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{12} \\ 2x = \dfrac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{12} \end{cases}$$

Puntos de tangencia $P\left(\frac{\pi}{12}, \frac{1}{2}\right)$ $Q\left(\frac{5\pi}{12}, \frac{1}{2}\right)$

Rectas tangentes: $y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ e $y - \frac{1}{2} = -\sqrt{3}\left(x - \frac{5\pi}{12}\right)$



Puntos de corte con el eje horizontal: $0 - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow x = -\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{12} \cong -0{,}027$

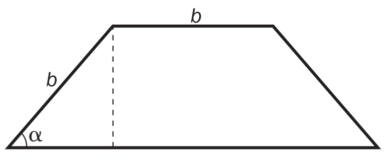
$0 - \frac{1}{2} = -\sqrt{3}\left(x - \frac{5\pi}{12}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{5\pi}{12} \cong 1{,}598.$ $A\left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, 0\right)$ $B\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, 0\right)$

El lado del triángulo mide: $AB = \frac{5\pi}{12} + \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi + \sqrt{3}}{3} \cong 1{,}62$ u.

El área $S = \frac{1}{2} \cdot AB^2 \cdot \text{sen } 60° = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi + \sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(\pi + \sqrt{3})^2\sqrt{3}}{36} \cong 1{,}14$ u^2

11.107. De todos los trapecios que tienen tres lados iguales, encuentra aquel que tiene área máxima. (Ayuda: toma como variable el ángulo que forma la base mayor con uno de los lados oblicuos.)

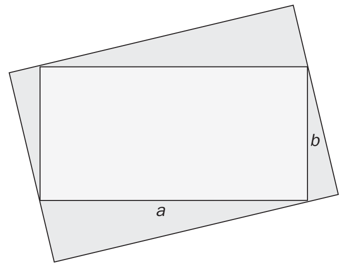
Obtengamos el área en función del ángulo α. Llamando b a la longitud de cada uno de los tres lados iguales, la altura de dicho trapecio es $b \text{ sen } \alpha$, y la base mayor es $b + 2b \cos \alpha$. Así pues, el área es $\frac{b + b + 2b \cos \alpha}{2} b \text{ sen } \alpha = b^2(1 + \cos \alpha) \text{ sen } \alpha$, función que depende solamente de α, pues la longitud b la suponemos fija.



$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, siendo $\alpha = 0$ el valor para el que el trapecio degeneraría en un segmento, y $\alpha = \frac{\pi}{2}$, el valor para el que degeneraría en un rectángulo.

Maximicemos $f(x) = b^2(1 + \cos \alpha) \text{ sen } \alpha = b^2\left(\text{sen } \alpha + \frac{\text{sen } 2\alpha}{2}\right)$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. $f'(x) = b^2 (\cos \alpha + \cos 2\alpha) = 0$ si $\cos \alpha = -\cos 2\alpha$, es decir, si $\alpha + 2\alpha = \pi$, o sea, $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Calculemos los valores $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, y elijamos el mayor: $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = b^2$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = b^2\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}b^2$, que es el mayor valor de los tres. Así pues, el trapecio que con 3 lados iguales tiene máxima área es el que tiene la forma de la mitad de un hexágono regular.

11.108*. Un rectángulo de dimensiones a y b se inscribe en otro como indica la figura. Halla las dimensiones de este último para que su área sea máxima.



Calculemos las dimensiones del rectángulo exterior en función de los números fijos a y b y del ángulo variable α, formado por el lado a y el lado inferior del rectánngulo exterior.

$p = a \cos\alpha + b \operatorname{sen}\alpha$

$q = b \cos\alpha + a \operatorname{sen}\alpha$

Área $= p \cdot q = (a \cos\alpha + b \operatorname{sen}\alpha)(b \cos\alpha + a \operatorname{sen}\alpha) = ab \cos^2\alpha +$
$+ a^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + b^2 \operatorname{sen}\alpha \cos a + ab \operatorname{sen}^2\alpha = ab + \dfrac{a^2 + b^2}{2} \operatorname{sen} 2\alpha =$
$= f(\alpha)$

El valor máximo de esta función corresponde a $\operatorname{sen} 2\alpha = 1$, es decir, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, por lo que el rectángulo exterior de área máxima será un cuadrado de lado $p = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(a + b)$.

11.109*. Observa que si f es derivable y corta en dos puntos el eje horizontal, es seguro que entre ellos va a haber algún valor que anule la derivada. Partiendo de este hecho, demuestra que la función $f(x) = x^2 - x \cdot \operatorname{sen} x - \cos x$ solo corta dos veces el eje horizontal.

$f'(x) = 2x - (\operatorname{sen} x + x \cos\alpha) + \operatorname{sen} x = x(2 - \cos\alpha)$, que solo se anula una vez, en $x = 0$, por lo que la gráfica de f cortará dos veces como máximo al eje horizontal.

El hecho de que corta dos veces a dicho eje es evidente, pues se trata de una función continua y, por ejemplo, en $[-\pi, \pi]$ verifica: $f(-\pi) = \pi^2 + 1$, $f(0) = -1$, $f(\pi) = \pi^2 + 1$. Así pues, cortará una vez en $(-\pi, 0)$ y otra en $(0, \pi)$.

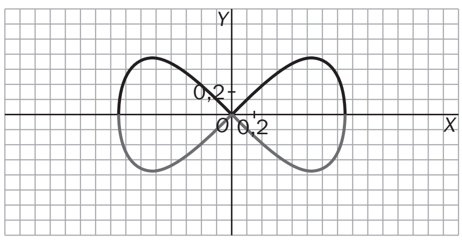
11.110. Dibuja la gráfica de la curva $y = \pm\sqrt{x^2 - x^4}$.

Como $f(x) = f(-x)$ y a cada valor de x del intervalo $[-1, 1]$ (en el que $x^2 \geqslant x^4$) le corresponden dos valores opuestos de y, la curva es simétrica respecto de ambos ejes y solo está definida en $[-1, 1]$, por lo que se dibuja la gráfica de $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$ en $[0, 1]$ y se extiende por simetría.

$f'(x) = \dfrac{2x - 4x^3}{2\sqrt{x^2 - x^4}} = 0$ solo si $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, siendo $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$. Aunque $f'(0)$ y $f'(1)$ no están definidas según la fórmula anterior, podemos escribir $f'(x) = \dfrac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$ si $x \neq 0$ y $x \neq 1$, por lo que $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$.

En los puntos $x = 1$, $x = -1$, la tangente es vertical, pues $\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty$.

Como $f(0) = f(1) = 0$, la gráfica de $y = \pm\sqrt{x^2 - x^4}$, quedará así:



11.111. **Si dibujas la gráfica de $f(x) = e^x$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + 1$, parece que cuando $x > 0$, siempre va a ocurrir que $e^x > \dfrac{x^2}{2} + x + 1$. Justifica con rigor esta afirmación.**

$f(0) = g(0) = 1$ y $f'(x) = e^x$, $g'(x) = x + 1$

Como $f'(x) > g'(x)$ para todo $x > 0$, la función $(f - g)(x)$ es estrictamente creciente en $x > 0$, por lo que $f(x) > g(x)$ si $x > 0$, es decir, $e^x > \dfrac{x^2}{2} + x + 1$ si $x > 0$.

11.112. **Dibuja la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x - 1|} + \dfrac{1}{1 + |x - 4|}$.**

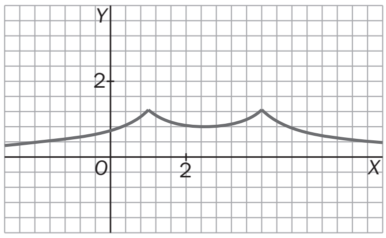
Se trata de una función continua, pues es suma de cocientes de funciones continuas y los denominadores nunca se hacen cero.

Por otra parte, es simétrica respecto de la recta $x = \dfrac{5}{2}$, pues $f\left(\dfrac{5}{2} + t\right) = \dfrac{1}{1 + \left|\dfrac{3}{2} + t\right|} + \dfrac{1}{1 + \left|t - \dfrac{3}{2}\right|}$ y

$f\left(\dfrac{5}{2} - t\right) = \dfrac{1}{1 + \left|\dfrac{3}{2} + t\right|} + \dfrac{1}{1 + \left|-\dfrac{3}{2} + t\right|}$, y al ser $|a| = |-a|$, ambos números son iguales.

Definámosla, pues, en $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right]$ y dibujemos en $\left[\dfrac{5}{2}, \infty\right)$ igual.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2 - x} + \dfrac{1}{5 - x} & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{5 - x} & \text{si } 1 < x \leqslant \dfrac{5}{2} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{7 - 2x}{(2 - x)(5 - x)} & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{5}{x(5 - x)} & \text{si } 1 < x \leqslant \dfrac{5}{2} \end{cases}.$$



Como $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, la gráfica de f es la de la derecha.

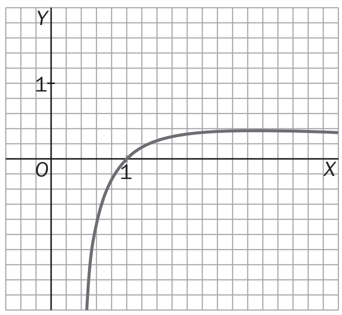
Función obviamente no derivable en $x = 1$, $x = 4$ como era de esperar por la existencia de $|x - 1|$ y $|x - 4|$.

11.113. **Un problema que aparece en muchos libros de análisis es deducir qué es mayor: e^π o π^e. Con lo que ya sabes, puedes hacerlo: estudia la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ y decide.**

La gráfica de f no corta al eje de ordenadas. $f(x) = 0$ si $\ln x = 0$, o sea, $x = 1$.

Por otra parte, solo está definida en $(0, \infty)$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Como $f'(x) = \dfrac{x \cdot \dfrac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0$ solo si $x = e$



Así pues, nuestra función es decreciente en (e, ∞), o sea, $f(e) > f(\pi)$, es decir, $\dfrac{\ln e}{e} > \dfrac{\ln \pi}{\pi} \Leftrightarrow \pi \ln e > e \ln \pi \Leftrightarrow \ln e^\pi > \ln \pi^e$, y como la función logaritmo es creciente, concluimos que $e^\pi > \pi^e$.

Nota. Una extensión curiosa de este resultado es decidir qué es mayor, a^b o b^a, si $0 < a < b$. El mismo argumento que hemos utilizado nos lleva a afirmar: si $e \leqslant a < b$, entonces $a^b > b^a$; y si si $0 < a < b \leqslant e$, entonces $a^b < b^a$.

11.114. Halla los dos puntos en los que la curva $y = x^4 - 2x^3 - x$ tiene la misma tangente.

Es el mismo que el 99 del tema anterior. He aquí otro procedimiento.

Se trata de los puntos $P(a, a^4 - 2a^2 - a)$ y $Q(b, b^4 - 2b^2 - b)$.

La recta que une P y Q es tangente a $f(x) = x^4 - 2x^2 - x$ tanto en P como en Q. Así pues, su pendiente, $m = \dfrac{b^4 - 2b^2 - b - (a^4 - 2a^2 - a)}{b - a}$, coincide con $f'(a)$ y con $f'(b)$.

$$m = \frac{b^4 - 2b^2 - b - a^4 + 2a^2 + a}{b - a} = \frac{b^4 - a^4 - 2(b^2 - a^2) - (b - a)}{b - a} =$$

$= \dfrac{(b - a)(b^2 + a^2)(b + a) - 2(b + a)(b - a) - (b - a)}{b - a}$, y como $a \neq b$, esta fracción se puede escribir como $m = (b^2 + a^2)(b + a) - 2(b + a) - 1$

$f'(a) = 4a^3 - 4a - 1$

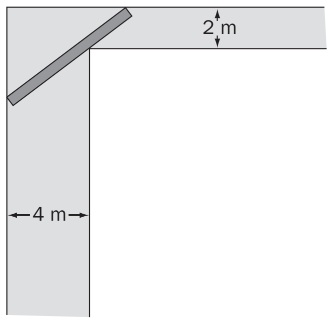
$f'(b) = 4b^3 - 4b - 1$

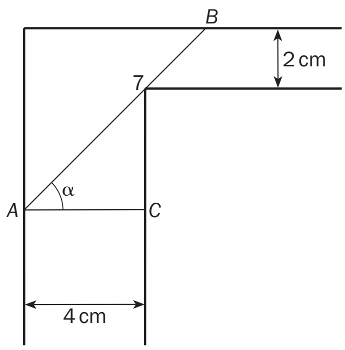
De la igualdad de estos tres números podemos concluir:

$4a^3 - 4a - 1 = 4b^3 - 4b - 1 \Rightarrow a^3 - b^3 = a - b \Rightarrow a^2 + ab + b^2 = 1$, pues $a \neq b$.

Cualquier sistema de dos ecuaciones con incógnitas a y b que formemos a partir de las igualdades $m = f'(a) = f'(b)$ es difícil de resolver, pero si nos fijamos un poco, cuando $a + b = 0$, $m = -1$, y tomando como a y b los números 1 y -1 también se verifican las igualdades $f'(a) = -1 f'(b) = -1$, así que los puntos buscados son $P(1, -2)$ y $Q(-1, 0)$, que, efectivamente, son la solución del problema, pues la tangente en P es la recta de ecuación $y + 2 = -1(x - 1)$ y la tangente en Q es la recta $y = -1(x + 1)$, que, como se observa, son la misma recta.

11.115. Un túnel en forma de codo está formado por dos pasillos perpendiculares de anchuras 2 y 4 metros. ¿Cuál es la longitud máxima que puede tener un listón de madera para pasarlo horizontalmente a través del túnel?





Sea α el ángulo que forma el listón más corto de los que no pueden pasar horizontalmente con AC.

La longitud $AB = AT + TB = \dfrac{4}{\cos\alpha} + \dfrac{2}{\operatorname{sen}\alpha} = f(x)$. Busquemos el mínimo de f en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$f'(\alpha) = \dfrac{4 \operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha} - \dfrac{2\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = 0$ si $\operatorname{tg}^3\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$.

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$, el valor de α obtenido representa el de menos longitud del listón, siendo esta $l = \dfrac{4}{\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\right)} + \dfrac{2}{\operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\right)} \approx 8{,}32$ cm.

11.116. **Definimos la función f como:**

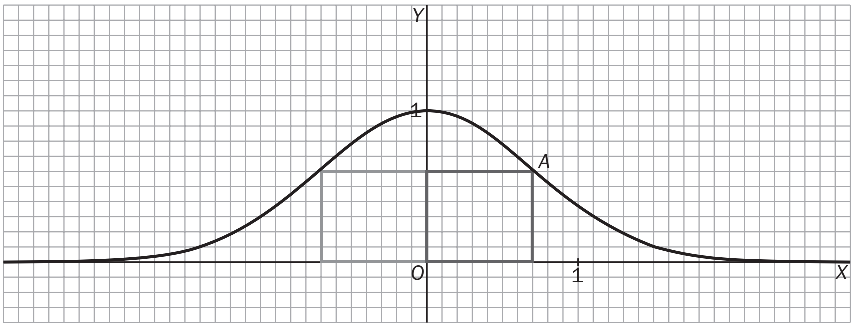
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \text{sen } \dfrac{1}{x} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Calcula $f'(0)$. ¿Es continua la función $f'(x)$ en $x = 0$?

$f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h \text{ sen } \dfrac{1}{h} = 0$, pues sen $\dfrac{1}{h}$ es una función acotada y $\lim\limits_{h\to 0} h = 0$.

Si $x = 0$, $f'(x) = 2x \text{ sen } \dfrac{1}{x} - x^2\left(\cos \dfrac{1}{x}\right) \cdot \dfrac{1}{x^2} = 2x \text{ sen } \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$. Como existe $\lim\limits_{x\to 0} 2x \text{ sen } \dfrac{1}{x}$ y no existe $\lim\limits_{x\to 0} \cos \dfrac{1}{x}$, no existe $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$, por lo que la función $f'(x)$ no es continua en $x = 0$.

11.117*. **Demuestra que el rectángulo que descansando sobre el eje horizontal tiene dos vértices en la curva $y = e^{-x^2}$ encierra área máxima cuando estos dos vértices son los puntos de inflexión de dicha curva.**

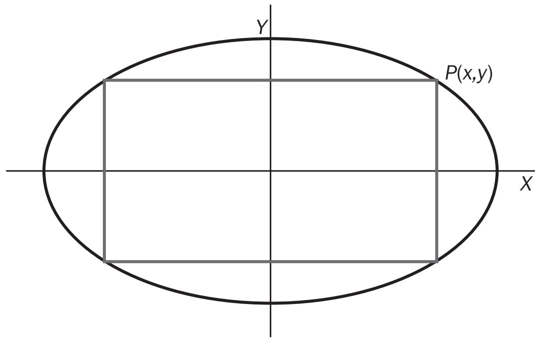


Determinemos el punto A para que el rectángulo de la figura tenga área máxima y observemos, posteriormente, que coincide con el punto de inflexión de la curva de abscisa positiva. La simetría de la curva respecto del eje vertical hará que el otro vértice del rectángulo sea el otro punto de inflexión.

$A(x, e^{-x^2})$. Área del rectángulo $= 2x e^{-x^2} = f(x)$. Busquemos el máximo de f en $(0, \infty)$:

$f'(x) = 2x e^{-x^2} - 4x^2 e^{-x^2} = 0$ solo si $x = 0, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Como $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ y $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$, el máximo se alcanza en $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Si observamos que la función que hemos maximizado, $f(x) = 2x e^{-x^2}$, es precisamente $-g'(x)$, siendo $g(x) = e^{-x^2}$ la función dada, es inmediato constatar que el máximo de f y el punto que anula la derivada de g', o sea, el punto de inflexión, deben coincidir.

11.118. De todos los rectángulos inscritos en una elipse, ¿coinciden el de mayor área y el de mayor perímetro?



Consideremos la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. El área del rectángulo de la figura es $4xy$, siendo x e y las coordenadas de P. Así pues, Área $= \frac{4b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{4b}{a}\sqrt{a^2x^2 - x^4} = f(x)$.

Busquemos el máximo de f en $[0, a]$.

$f'(x) = \frac{4b}{a}\frac{2a^2x - 4x^3}{2\sqrt{a^2x^2 - x^4}}$; $a^2x - 2x^3 = 0$ si $x = 0$ o $x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$

Como $f(0) = 0$, $f(a) = 0$ y $f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) > 0$, el máximo se alcanza en $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{b}{a}\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}$.

El perímetro del rectángulo de la figura es $4(x + y)$, es decir, Perímetro $= 4\left(x + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right) = g(x)$.

Busquemos el máximo de g en $[0, a]$.

$g'(x) = 4\left(1 - \frac{b}{a}\frac{2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}\right) = 0$ si $\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 1$, es decir:

$\frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)} = 1$, $b^2x^2 = a^4 - a^2x^2$, $x^2(a^2 + b^2) = a^4$, $x = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Calculemos $g(0)$, $g(a)$ y $g\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$. En cualquier caso, ya veremos que la respuesta a nuestro problema es **no,** pues $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ solo es $\frac{a}{\sqrt{2}}$ si $b = a$. $g(0) = 4b$ $\quad g(a) = 4a$

$g\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = 4\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}}\right) = 4\left(\frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = 4\sqrt{a^2 + b^2}$, que es mayor que $g(0)$ y $g(a)$, con lo que el máximo se alcanza en $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, cuyas dimensiones no coinciden con las del rectángulo de máxima área.