4 Vectores

ACTIVIDADES INICIALES

4.I. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $(5, -3) + (2, -4)$ c) $5(3, -1) + (-1, 4)$ e) $\frac{1}{2}(7, 4) + (1, 2)$ g) $-(3, 6) + \frac{3}{2}(-2, -1)$

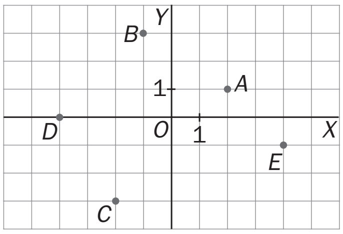
b) $(6, 4) - (7, -2)$ d) $-3(0, 1) + \frac{1}{3}(0, 3)$ f) $-4(2, -1) + 6(4, -1)$ h) $-(5, 3) - (-2, -2)$

a) $(7, -7)$ c) $(15, -5) + (-1, 4) = (14, -1)$ e) $\left(\frac{7}{2}, 2\right) + (1, 2) = \left(\frac{9}{2}, 4\right)$ g) $(-3, -6) + \left(-3, -\frac{3}{2}\right) = \left(-6, -\frac{15}{2}\right)$

b) $(-1, 6)$ d) $(0, -3) + (0, 1) = (0, -2)$ f) $(-8, 4) + (24, -6) = (16, -2)$ h) $(-5, -3) + (2, 2) = (-3, -1)$

4.II. Escribe los pares de números reales representados en la ilustración.

A(2, 1), *B*(−1, 3), *C*(−2, −3), *D*(−4, 0), *E*(4, −1)

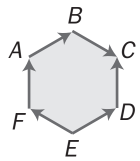


EJERCICIOS PROPUESTOS

4.1. En el hexágono regular de la figura, indica qué vectores son equipolentes.

Son equipolentes $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{ED}$ y $\overrightarrow{FA} \sim \overrightarrow{DC}$.

En cambio, los vectores *BC* y *EF* son opuestos.



4.2. Contesta verdadero o falso y razona la contestación:

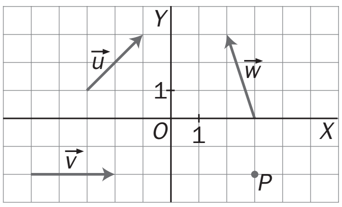
a) Si dos vectores fijos tienen el mismo módulo y dirección, determinan el mismo vector libre.

b) Dos vectores fijos son equipolentes si tienen el mismo módulo, sentido y sus rectas soportes son paralelas.

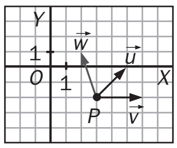
a) Falso, tienen que tener también el mismo sentido.

b) Cierto, ya que las rectas paralelas indican la misma dirección.

4.3. Dados los vectores libres $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y el punto *P*, elige representantes de cada uno de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ que tengan su origen en *P*.



Teniendo cuidado de no alterar el módulo, la dirección y el sentido de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, se eligen otros representantes de los mismos cuyo origen común sea *P*.



4.4. Contesta verdadero o falso y razona tu respuesta.

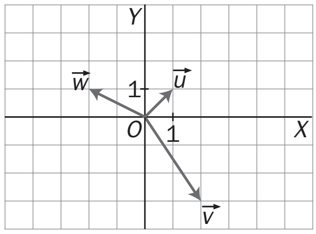
a) El vector libre nulo tiene módulo *0*, y dirección, la del eje de abscisas.

b) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores equipolentes, y *O*, un punto cualquiera del plano. Si llevamos representantes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al origen común, obtenemos dos vectores paralelos.

a) Falso, el vector libre nulo carece de dirección y sentido.

b) Falso, ya que si son equipolentes, al llevarlos al origen común coincidirán ambos vectores. Por tanto, son coincidentes y no paralelos.

4.5. A partir de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ representados en la figura, calcula:



a) $\vec{u} + \vec{v}$ c) $-\vec{u} + 2\vec{w}$

b) $3\vec{v}$ d) $2[\vec{u} + \vec{v}] - 3\vec{w}$

De la figura: $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (2, -3)$ y $\vec{w} = (-2, 1)$; por tanto:

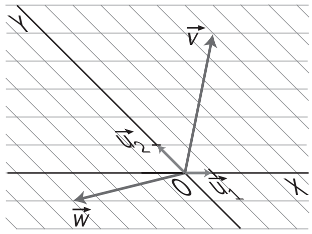
a) $\vec{u} + \vec{v} = (1, 1) + (2, -3) = (3, -2)$

b) $3\vec{v} = (6, -9)$

c) $-\vec{u} + 2\vec{w} = (-1, -1) + (-4, 2) = (-5, 1)$

d) $2[\vec{u} + \vec{v}] - 3\vec{w} = (6, -4) + (6, -3) = (12, -7)$

4.6. Dados los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, expresa los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{u}_2$.



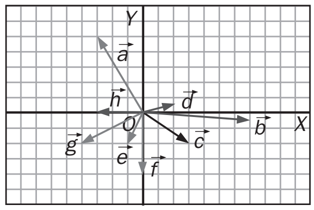
De la figura es inmediato que $\vec{v} = 6\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2$; $\vec{w} = -5\vec{u}_1 - \vec{u}_2$

4.7. Representa los vectores siguientes.

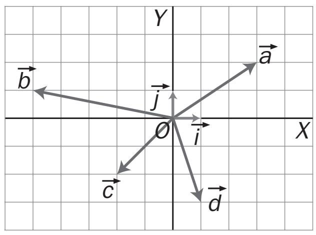
$\vec{a} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$ $\vec{c} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ $\vec{e} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$ $\vec{g} = -4\vec{i} - 2\vec{j}$

$\vec{b} = 7\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j}$ $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{j} + 2\vec{i}$ $\vec{f} = -4\vec{j}$ $\vec{h} = -\vec{i} + (-2)\vec{i}$

Los vectores están representados en la figura derecha.



4.8. Expresa los vectores de la figura como combinación lineal de los vectores de la base canónica.



$\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ $\vec{c} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$

$\vec{b} = -5\vec{i} + \vec{j}$ $\vec{d} = \vec{i} - 3\vec{j}$

4.9. Dados los vectores: $\vec{u} = (-4, 2)$, $\vec{v} = (0, -3)$ y $\vec{w} = (-3, 3)$. Halla:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ c) $5\vec{u} - 3\vec{v}$ e) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ g) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{u} + \vec{v}|$

b) $4\vec{u}$ d) $-2\vec{v}$ f) $3\vec{u} - (5\vec{v} + \vec{w})$ h) $\vec{u} + (2\vec{v} + 3\vec{w})$

a) $\vec{u} + \vec{v} = (-4, 2) + (0, -3) = (-4, -1)$

b) $4\vec{u} = 4(-4, 2) = (-16, 8)$

c) $5\vec{u} - 3\vec{v} = 5(-4, 2) - 3(0, -3) = (-20, 10) + (0, 9) = (-20, 19)$

d) $-2\vec{v} = -2(0, -3) = (0, 6)$

e) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (-4, 2) + (0, -3) + (-3, 3) = (-7, 2)$

f) $3\vec{u} - (5\vec{v} + \vec{w}) = 3(-4, 2) - [5(0, -3) + (-3, 3)] = (-12, 6) - (-3, -12) = (-9, 18)$

g) $|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$; $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} + \vec{v}| = |(-4, -1) = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$

h) $\vec{u} + (-\vec{v} + 3\vec{w}) = (-4, 2) + [-(0, -3) + 3(-3, 3)] = (-4, 2) + (-9, 12) = (-13, 14)$

4.10. Dados los vectores: $\vec{u} = (5, -7)$, $\vec{v} = (0, 4)$, comprueba que:

a) $2(\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$ b) $(4 - 7)\vec{v} = 4\vec{v} - 7\vec{v}$

a) $2(\vec{u} + \vec{v}) = 2[(5, -7) + (0, 4)] = 2(5, -3) = (10, -6)$; $2\vec{u} = 2(5, -7) + 2(0, 4) = (10, -14) + (0, 8) = (10, -6)$

b) $(4 - 7)\vec{v} = -3\vec{v} = -3(0, 4) = (0, -12)$; $4\vec{v} - 7\vec{v} = 4(0, 4) - 7(0, 4) = (0,16) - (0, 28) = (0, -12)$

4.11. Un vector libre tiene por coordenadas $\vec{u} = (-4, 1)$. Un representante suyo tiene el punto $A(2, 5)$ como origen. Halla las coordenadas del extremo.

Si $\vec{a} = (2, 5)$ y $\vec{b} = (x, y)$ son los vectores que unen el origen de coordenadas con los extremos A y B del representante del vector $\vec{u}$, se cumple que $\vec{a} + \vec{u} = \vec{b}$. Por tanto, $(2, 5) + (-4, 1) = (-2, 6) = (x, y)$, es decir, las coordenadas del extremo B son $B(-2, 6)$.

4.12. Un vector tiene por extremos los puntos $A(-7, 5)$ y $B(3, -2)$. Calcula las coordenadas del vector $\vec{AB}$.

Sea $\vec{a} = (-7, 5)$ y $\vec{b} = (3, -2)$. Se tiene que $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (3, -2) - (-7, 5) = (10, -7)$.

4.13. Un vector fijo tiene su origen en el punto $A(6, -2)$, y sus coordenadas son $(4, 5)$. Halla las coordenadas de su extremo B.

Sea $\vec{a} = (6, -2)$ y $\vec{b} = (x, y)$. Como $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} \Rightarrow (x, y) - (6, -2) = (4, 5)$, se tiene que $(x, y) = (4, 5) + (6, -2) = (10, 3)$. Por tanto, las coordenadas del extremo son $B(10, 3)$.

4.14. Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 1)$ y $\vec{v} = (3, 5)$ referidos a la base canónica, calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

c) Ángulo de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

d) Un vector ortogonal a $\vec{v}$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2, 1) \cdot (3, 5) = -6 + 5 = -1$

b) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{-1}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{34}} = -\dfrac{\sqrt{34}}{34}$

c) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{34}} = \dfrac{-1}{\sqrt{170}} \Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos\left(\dfrac{-1}{\sqrt{170}}\right) = 94° \ 23' \ 55{,}3''$

d) Por ejemplo, el vector $\vec{w} = (-5, 3)$ es ortogonal a $\vec{v}$, ya que $\vec{u} \cdot \vec{w} = (3, 5) \cdot (-5, 3) = 3(-5) + 5 \cdot 3 = 0$.

4.15. Determina el valor de m para que el producto escalar de $\vec{v}$ por $\vec{w}$ sea:

a) Igual a 4, siendo $\vec{v} = (m, 1)$ y $\vec{w} = (2, -3)$.

b) Igual a -2, siendo $\vec{v} = (m, 2)$ y $\vec{w} = (3, m)$.

c) Igual a -3, siendo $\vec{v} = (m, -3)$ y $\vec{w} = (m, 4)$.

d) Igual a 0, siendo $\vec{v} = (3, m)$ y $\vec{w} = (-m, m)$.

a) $\vec{v} \cdot \vec{w} = (m, 1) \cdot (2, -3) = 2m - 3 = 4 \Rightarrow 2m = 7 \Rightarrow m = \dfrac{7}{2}$

b) $\vec{v} \cdot \vec{w} = (m, 2) \cdot (3, m) = 3m + 2m = -2 \Rightarrow 5m = -2 \Rightarrow m = -\dfrac{2}{5}$

c) $\vec{v} \cdot \vec{w} = (m, -3) \cdot (m, 4) = m^2 - 12 = -3 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$

d) $\vec{v} \cdot \vec{w} = (3, m) \cdot (-m, m) = -3m + m^2 = 0 \Rightarrow m(m - 3) = 0 \Rightarrow m = 0, m = 3$

EJERCICIOS

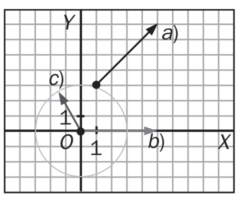
Vectores fijos del plano

4.16. En cada caso, representa el vector fijo indicado:

a) Vector $\vec{AB}$, siendo $A(1, 3)$ y $B(5, 7)$.

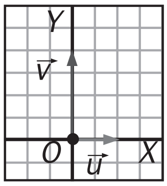
b) Un vector de módulo 5 unidades en la dirección del eje OX y sentido positivo.

c) Un vector de módulo 3 unidades y que forma un ángulo de 120° con la semirrecta origen de ángulos.



4.17. Dibuja dos vectores fijos que tienen uno módulo doble que el otro, el origen común y forman un ángulo de 90°.

Respuesta abierta, por ejemplo:

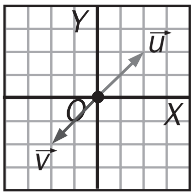


4.18. Traza dos vectores fijos del plano que tengan el origen común y además:

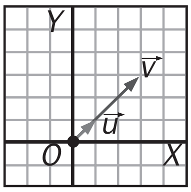
a) Módulo y dirección iguales, pero sentidos opuestos.
b) Dirección y sentido iguales, pero que el módulo de uno sea triple que el módulo del otro.
c) Que las direcciones sean perpendiculares y el módulo de uno sea la mitad que el módulo del otro.

Respuesta abierta, por ejemplo:

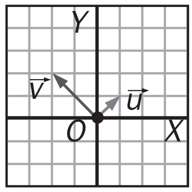
a)



b)



c)

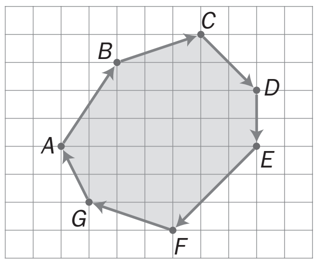


Operaciones con vectores libres del plano

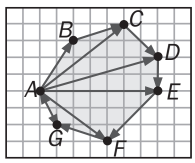
4.19. Dado el heptágono irregular de la figura.

Dibuja los siguientes vectores libres.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$
d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$
e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$



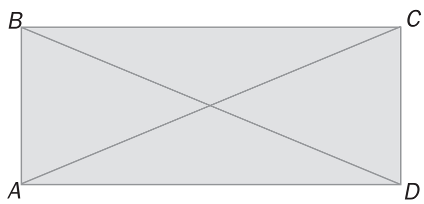
Los vectores pedidos se dan en la figura:



4.20. Dado el rectángulo de vértices *ABCD*.

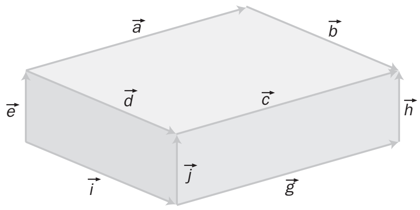
Completa las siguientes igualdades:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$ ________ ; $\overrightarrow{AD} +$ ________ $= \overrightarrow{AC}$
b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} =$ ________ ; $\overrightarrow{CB} +$ ________ $= \overrightarrow{AB}$
c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} =$ ________ ; $\overrightarrow{BC} +$ ________ $= \overrightarrow{BA}$



a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD} + \vec{x} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{x} = \overrightarrow{AC} - AD = \overrightarrow{DC}$
b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CB} + \vec{y} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{y} = \overrightarrow{AB} - CB = \overrightarrow{AC}$
c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BC} + \vec{z} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \vec{z} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$

4.21. De acuerdo con el paralelepípedo de la figura, di cuáles de las siguientes igualdades son ciertas.



a) $\vec{a} = \vec{g}$ c) $\vec{c} = -\vec{g}$ e) $\vec{h} = \vec{e}$ g) $\vec{i} = \vec{e}$

b) $\vec{a} = -\vec{g}$ d) $\vec{b} = -\vec{d}$ f) $\vec{h} = -\vec{j}$ h) $\vec{i} = \vec{d}$

a) Cierta c) Falsa e) Cierta g) Falsa

b) Falsa d) Falsa f) Falsa h) Cierta

Coordenadas de un vector. Operaciones

4.22. Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 3)$ y $\vec{v}$ (5, 4), calcula:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} - \vec{v}$ c) $5\vec{v}$ d) $3\vec{u} - 2\vec{v}$

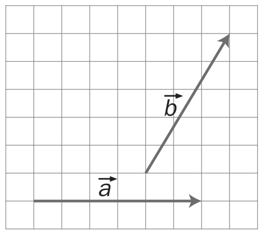
a) $\vec{u} + \vec{v} = (-1, 3) + (5, 4) = (4, 7)$

b) $\vec{u} - \vec{v} = (-1, 3) - (5, 4) = (-6, -1)$

c) $5\vec{v} = 5(5, 4) = (25, 20)$

d) $3\vec{u} - 2\vec{v} = 3(-1, 3) - 2(5, 4) = (-3, 9) + (-10, -8) = (-13, 1)$

4.23. Dados los vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura, calcula:



a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{a} - \vec{b}$ c) $3\vec{a}$ d) $3\vec{a} - 2\vec{b}$

De la figura se deduce que: $\vec{a} = (6, 0)$; $\vec{b} = (3, 5)$.

a) $\vec{a} + \vec{b} = (6, 0) + (3, 5) = (9, 5)$

b) $\vec{a} - \vec{b} = (6, 0) - (3, 5) = (3, -5)$

c) $3\vec{a} = 3(6, 0) = (18, 0)$

d) $3\vec{a} - 2\vec{b} = 3(6, 0) - 2(3, 5) = (18,0) + (-6, -10) = (12, -10)$

4.24. Se consideran los siguientes vectores: $\vec{u} = (3, 4)$, $\vec{v} = (-1, 7)$ y $\vec{w} = (8, 5)$. Comprueba que:

a) $5(\vec{u} + \vec{v}) = 5\vec{u} + 5\vec{v}$ b) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{u} + \vec{v})$ c) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

a) $5(\vec{u} + \vec{v}) = 5[(3, 4) + (-1, 7)] = 5(2, 11) = (10, 55)$
$5 + 5\vec{v} = 5(3, 4) + 5(-1, 7) = (15, 20) + (-5, 35) = (10, 55)$

b) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = [(3, 4) + (-1, 7)] + (8, 5) = (2, 11) + (8, 5) = (10,16)$
$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (3, 4) + [(-1, 7) + (8, 5)] = (3, 4) + (7, 12) = (10, 16)$

c) $\vec{u} + \vec{v} = (3, 4) + (-1, 7) = (2, 11)$
$\vec{v} + \vec{u} = (-1, 7) + (3, 4) = (2, 11)$

Dependencia lineal

4.25. Halla los valores de x e y para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a) $(5, 3) + x(2, 4) = (-5, y)$ b) $x(2, -4) + (7, -1) = (-3, y)$

a) $(5, 3) + x(2, 4) = (5 + 2x, 3 + 4x) = (-5, y) \Rightarrow \begin{cases} 5 + 2x = -5 \\ 3 + 4x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -17 \end{cases}$

b) $x(2, -4) + (7, -1) = (2x + 7, -4x - 1) = (-3, y) \Rightarrow \begin{cases} 3x + 7 = -3 \\ -4x - 1 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 19 \end{cases}$

4.26. ¿Para qué valores de x e y se verifica la siguiente igualdad?

$(-4, 2) + (2, x) = (y, 7)$

$$(-4, 2) + (2, x) = (-2, 2 + x) = (y, 7) \Rightarrow \begin{cases} -2 = y \\ 2 + x = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

4.27. Expresa el vector $\vec{u} = (-5, 3)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v} = (-1, 0)$ y $\vec{w} = (3, 4)$.

Se trata de encontrar a y b tales que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

Por tanto, ha de ser $(-5, 3) = a(-1, 0) + b(3, 4) \Rightarrow (-5, 3) = (-a + 3b, 4b) \Rightarrow \begin{cases} -a + 3b = -5 \\ 4b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{29}{4} \end{cases}$

Por tanto, $\vec{u} = \dfrac{29}{4}\vec{v} + \dfrac{3}{4}\vec{w}$

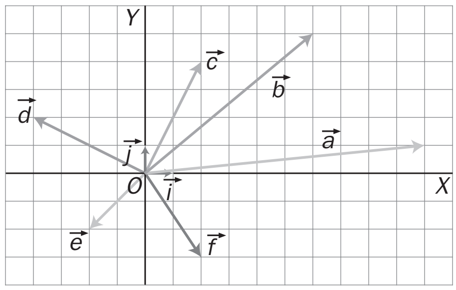
4.28. Halla los valores de a y b para que $\vec{u} = (-3, 5)$ se pueda expresar como la siguiente combinación lineal de los vectores $\vec{v} = (2, 0)$ y $\vec{w} = (-7, 3)$:

$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$

Se trata de encontrar a y b tales que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w} \Rightarrow (-3, 5) = a(2, 0) + b(-7, 3) = (2a - 7b, 3b) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - 7b = -3 \\ 3b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{13}{3} \\ b = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

4.29. Dados los vectores de la figura, exprésalos como combinación lineal de los vectores de la base canónica y da sus coordenadas.



$\vec{a} = (10, 1) = 10\vec{i} + \vec{j}$ $\qquad$ $\vec{d} = (-4, 2) = -4\vec{i} + 2\vec{j}$

$\vec{b} = (6, 5) = 6\vec{i} + 5\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{e} = (-2, -2) = -2\vec{i} - 2\vec{j}$

$\vec{c} = (2, 4) = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{f} = (2, -3) = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

4.30. Comprueba si el vector $\vec{u} = (3, -7)$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores

$\vec{v} = (-3, 2)$ y $\vec{w} = (-6, 4)$.

Si se puede expresar $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$, existen a, b tales que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$. Por tanto:

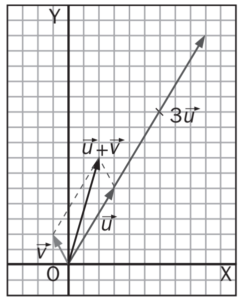
$$(3, -7) = a(-3, 2) + b(-6, 4) \Rightarrow \begin{cases} -3a - 6b = 3 \\ 2a + 4b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = -1 \\ a + 2b = -\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Por tanto, el sistema es incompatible, y $\vec{u}$ no se puede expresar como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
(Hay que hacer notar que $\vec{w} = 2\vec{v}$, por lo que son linealmente dependientes y no forman base).

4.31. Halla los valores de los escalares a y b, que permiten expresar el vector $\vec{u} = (-2, 11)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v} = (3, 4)$ y $\vec{w} = (-1, 5)$ en la forma $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

$$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w} \Rightarrow (-2,11) = a(3, 4) + b(-1, 5) \Rightarrow \begin{cases} 3a - b = -2 \\ 4a + 5b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{19} \\ b = \dfrac{41}{19} \end{cases}$$

4.32. Sean $\vec{u} = (3, 5)$ y $\vec{v} = (-1, 2)$ dos vectores libres del plano. Halla $\vec{u} + \vec{v}$ y $3\vec{u}$. Comprueba gráficamente que las coordenadas obtenidas para $\vec{u} + \vec{v}$ y $3\vec{u}$ son las obtenidas anteriormente.



$\vec{u} + \vec{v} = (3, 5) + (-1, 2) = (2, 7)$

$3\vec{u} = 3\,(3, 5) = (9, 15)$

Módulo y argumento

4.33. Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores.

a) $\vec{u}_1 = (3, 5)$ c) $\vec{u}_3 = (-4, 5)$ e) $\vec{u}_5 = (8, 9)$

b) $\vec{u}_2 = (3, -2)$ d) $\vec{u}_4 = (0, 3)$ f) $\vec{u}_6 = (-5, -1)$

Para elegir correctamente el argumento, hay que tener en cuenta el cuadrante en que se encuentra el vector.

a) $|\vec{u}_1| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$; $\arg(\vec{u}_1) = \text{arc tg}\left(\frac{5}{3}\right) = 59°\ 2'\ 10{,}5''$

b) $|\vec{u}_2| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$; $\arg(\vec{u}_2) = \text{arc tg}\left(\frac{-2}{3}\right) = 326°\ 18'\ 35{,}8''$

c) $|\vec{u}_3| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$; $\arg(\vec{u}_3) = \text{arc tg}\left(\frac{-5}{4}\right) = 128°\ 39'\ 35{,}3''$

d) $|\vec{u}_4| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$; $\arg(\vec{u}_4) = 90°$

e) $|\vec{u}_5| = \sqrt{8^2 + 9^2} = \sqrt{64 + 81} = \sqrt{145}$; $\arg(\vec{u}_5) = \text{arc tg}\left(\frac{9}{8}\right) = 48°\ 21'\ 59{,}3''$

f) $|\vec{u}_6| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$; $\arg(\vec{u}_6) = \text{arc tg}\left(\frac{1}{5}\right) = 191°\ 18'\ 35{,}7''$

4.34. ¿Cómo varía el módulo de un vector si se multiplica por el número real *k*? Aplica el caso al vector $\vec{u} = (-3, 5)$ y $k = 7$.

Si se multiplica un vector por el número real k, el módulo queda multiplicado por k. En efecto:
Sea $\vec{u} = (u_1, u_2) \Rightarrow k\vec{u} = (ku_1, ku_2)$. Por tanto, $|k\vec{u}| = \sqrt{(ku_1)^2 + (ku_2)^2} = \sqrt{k^2\,(u_1{}^2 + u_2{}^2)} = k\sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2} = k|\vec{u}|$
Si $\vec{u} = (-3, 5)$ y $k = 7 \Rightarrow 7\vec{u} = (-21, 35)$. Por tanto:
$|7\vec{u}| = \sqrt{(-21)^2 + 35^2} = \sqrt{1666} = \sqrt{7^2 \cdot 34} = 7\sqrt{34} = 7\sqrt{(-3)^2 + 5^2} = 7|\vec{u}|$

4.35. Calcula el valor de *m* para que el vector $\vec{u} = (m, -4)$ sea unitario.

$\vec{u}$ es unitario si $|\vec{u}| = 1$. $|\vec{u}| = \sqrt{m^2 + (-4)^2} = \sqrt{m^2 + 16} = 1 \Rightarrow m^2 + 16 = 1 \Rightarrow m^2 = -15 \Rightarrow$ no existe solución real.

4.36. Halla el valor de *n* para que el argumento α del vector sea el indicado en cada caso.

a) $\vec{u}_1 = (-1, n)$, $\alpha = 180°$ c) $\vec{u}_3 = (n, -2)$, $\alpha = 225°$

b) $\vec{u}_2 = (3, n)$, $\alpha = 60°$ d) $\vec{u}_4 = (-1, n)$, $\alpha = 150°$

a) $tg\ (180°) = 0 = \frac{n}{-1} \Rightarrow n = 0$

b) $tg\ (60°) = \sqrt{3} = \frac{n}{3} \Rightarrow n = 3\sqrt{3}$

c) $tg\ (225°) = 1 = \frac{-2}{n} \Rightarrow n = -2$

d) $tg\ (150°) = \frac{-\sqrt{3}}{3} = \frac{n}{-1} \Rightarrow n = \frac{\sqrt{3}}{3}$

4.37. Calcula un vector unitario en la misma dirección y sentido que los siguientes.

a) $\vec{u}_1 = (3, -5)$ b) $\vec{u}_2 = (-2, 4)$ c) $\vec{u}_3 = (1, -2)$

Basta multiplicar cada vector por el inverso de su módulo:

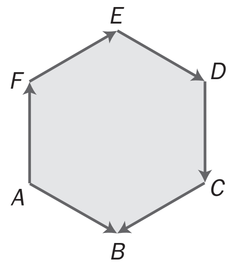
a) $|\vec{u}_1| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34} \Rightarrow$ El vector pedido es $\dfrac{1}{\sqrt{34}}\,\vec{u}_1 = \left(\dfrac{3}{\sqrt{34}}, \dfrac{-5}{\sqrt{34}}\right) = \left(\dfrac{3\sqrt{34}}{34}, \dfrac{-5\sqrt{34}}{34}\right)$

b) $|\vec{u}_2| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow$ El vector pedido es $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\vec{u}_2 = \left(\dfrac{-2}{2\sqrt{5}}, \dfrac{4}{2\sqrt{5}}\right) = \left(\dfrac{-\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

c) $|\vec{u}_3| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow$ El vector pedido es $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{u}_3 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \dfrac{-2\sqrt{5}}{5}\right)$

Puntos y vectores

4.38. Sean A, B, C, D, E y F los vértices del hexágono regular de la figura. Expresa los vectores de los lados como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AF}$.



$\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\ \overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AF} = 0\ \overrightarrow{AB} - 1\ \overrightarrow{AF}$

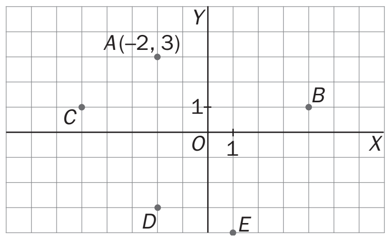
$\overrightarrow{FE} = 1\ \overrightarrow{AB} + 1\ \overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{FE} = -1\ \overrightarrow{AB} - 1\ \overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB} = 1\ \overrightarrow{AB} + 0\ \overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{AB} = 1\ \overrightarrow{AB} + 0\ \overrightarrow{AF}$

4.39. Escribe las coordenadas de los vectores con origen A y extremos los puntos indicados.



$\overrightarrow{AB} = (4, 1) - (-2, 3) = (6, -2)$ $\overrightarrow{AD} = (-2, -3) - (-2, 3) = (0, -6)$

$\overrightarrow{AC} = (-5, 1) - (-2, 3) = (-3, -2)$ $\overrightarrow{AE} = (1, -4) - (-2, 3) = (3, -7)$

4.40. Sea un vector $\vec{u}$ un representante del vector libre $[\overrightarrow{AB}]$:

a) Halla las coordenadas de $\vec{u}$, sabiendo que $A(5, -3)$ y $B(3, 4)$.

b) Halla las coordenadas del punto B sabiendo que $A(-3, 1)$ y $\vec{u} = (5, 4)$.

c) Halla las coordenadas del punto A sabiendo que $B(-1, 7)$ y $\vec{u} = (3, 4)$.

Llamando $\vec{a} = (5, -3)$ y $\vec{b} = (3, 4)$, a los respectivos representantes de los vectores que unen el origen de coordenadas con los puntos A y B, se tiene:

a) $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (3, 4) - (5, -3) = (-2, 7)$

b) $\vec{b} = \vec{a} + \vec{u} = (-3, 1) + (5, 4) = (2, 5)$

c) $\vec{a} = \vec{b} - \vec{u} = (-1, 7) - (3, 4) = (-4, 3)$

4.41. Dados los puntos $A(3, 3)$, $B(0, 4)$, $C(-2, 2)$ y $D(1, 1)$, comprueba que el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo. (Nota: utiliza la idea de equipolencia.)

Se tiene que:

$\overrightarrow{AB} = (0, 4) - (3, 3) = (-3, 1)$ y $\overrightarrow{DC} = (-2, 2) - (1, 1) = (-3, 1)$. Por tanto, los lados AB y DC son paralelos.

$\overrightarrow{BC} = (-2, 2) - (0, 4) = (-2, -2)$ y $\overrightarrow{AD} = (1, 1) - (3, 3) = (-2, -2)$. Por tanto, los lados BC y AD son paralelos.

En consecuencia, $ABCD$ es un paralelogramo.

4.42. Sea M el punto medio del segmento *AB*. Expresa el vector $\overrightarrow{OM}$ como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$

Por ser *M* el punto medio de *AB*, se tiene que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Además, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Por tanto, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

4.43. Calcula los puntos medios del triángulo de vértices *A*(2, 0), *B*(−1, 4) y *C*(3, 2).

Sean M_1, M_2 y M_3 los puntos medios de *AB, BC* y *CA*, respectivamente. Entonces:

$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}[(-1, 4) - (2, 0)] = \frac{1}{2}(-3, 4) \Rightarrow \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_1} = (2, 0) + \left(-\frac{3}{2}, 2\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

$\overrightarrow{BM_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}[(3,2) - (-1,4)] = \frac{1}{2}(4, -2) \Rightarrow \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM_2} = (-1, 4) + (2, -1) = (1, 3)$

$\overrightarrow{CM_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}[(2,0) - (3,2)] = \frac{1}{2}(-1, -2) \Rightarrow \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM_3} = (3,2) + \left(-\frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{5}{2}, 1\right)$

Por tanto, los puntos medios son: $M_1\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $M_2(1, 3)$, $M_3\left(\frac{5}{2}, 1\right)$.

4.44. Dado el romboide de vértices *A*(1, 1), *B*(7, 1), *C*(5, 3) y *D*(−1, 3), demuestra vectorialmente que el cuadrilátero que se obtiene al unir los puntos medios de cada lado es un paralelogramo.

Sean *M*, *N*, *P* y *Q* los puntos medios de los lados *AB*, *BC*, *CD* y *DA*. Es fácil ver que las coordenadas de estos puntos medios son: *M*(4, 1), *N*(6, 2), *P*(2, 3) y *Q*(0, 2).

Se tiene que $\overrightarrow{MN} \sim \overrightarrow{QP}$ y que $\overrightarrow{MQ} \sim \overrightarrow{NP}$. En efecto:

$\overrightarrow{MN} = (6, 2) - (4, 1) = (2, 1)$; $\overrightarrow{Q}P = (2, 3) - (0, 2) = (2, 1) \Rightarrow \overrightarrow{MN} \sim \overrightarrow{QP}$

$\overrightarrow{MQ} = (0, 2) - (4, 1) = (-4, 1)$; $\overrightarrow{NP} = (2, 3) - (6, 2) = (-4, 1) \Rightarrow \overrightarrow{MQ} \sim \overrightarrow{NP}$

Por tanto, el cuadrilátero que se obtiene al unir los puntos medios de cada lado es un paralelogramo.

4.45. Dados los puntos *A*(−3, 5), *B*(4, 6), *C*(−1, 9) y *D*(8, 6):

a) Halla el módulo, el argumento y las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.

b) Calcula las coordenadas de dos vectores unitarios de la misma dirección y sentido que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.

c) Calcula las coordenadas de un vector de módulo 2 en la dirección de *BC* y en sentido opuesto.

a) $\overrightarrow{AB} = (4, 6) - (-3, 5) = (7, 1)$;
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
$\arg(\overrightarrow{AB}) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{7}\right) = 8°\ 7'\ 48{,}4''$

$\overrightarrow{CD} = (8, 6) - (-1, 9) = (9, -3)$
$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$
$\arg(\overrightarrow{CD}) = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{3}{9}\right) = 341°\ 33'\ 54{,}2''$

b) Basta multiplicar $\vec{A}B$ y $\vec{C}D$ por el inverso de su módulo:

$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \left(\frac{7}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{5\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{7\sqrt{2}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{10}\right)$ $\qquad$ $\frac{\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} = \left(\frac{9}{3\sqrt{10}}, \frac{-3}{3\sqrt{10}}\right) = \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{-\sqrt{10}}{10}\right)$

c) $\overrightarrow{BC} = (-1, 9) - (4, 6) = (-5, 3)$, y $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$. Multiplicando $\overrightarrow{BC}$ por $\frac{-2}{\sqrt{34}}$ se obtiene un vector de módulo 2 y sentido opuesto a *BC*:

$$\frac{-2}{\sqrt{34}}\overrightarrow{BC} = \frac{-2}{\sqrt{34}}(-5, 3) = \left(\frac{5\sqrt{34}}{17}, \frac{-3\sqrt{34}}{17}\right)$$

Producto escalar. Ángulo entre vectores

4.46. a) Comprueba si el vector $\vec{u} = (-\cos a, \operatorname{sen} a)$ es unitario.

b) Elige un vector unitario y ortogonal al vector $\vec{u}$. ¿Es único?

a) $|\vec{u}| = \sqrt{(-\cos a)^2 + (\operatorname{sen} a)^2} = \sqrt{\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a} = 1$. Por tanto, el vector $\vec{u}$ es unitario.

b) Un posible vector unitario y ortogonal a $\vec{u}$ es el vector $\vec{v} = (\operatorname{sen} a, \cos a)$, ya que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ y además $|\vec{v}| = 1$.

No es el único vector que cumple las condiciones anteriores, también las cumple el vector $\vec{w} = (-\operatorname{sen} a, -\cos a)$.

4.47. Da razonadamente dos ejemplos de vectores tales que:

a) Su producto escalar sea 1.

b) Su producto escalar sea −2.

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $\vec{u}_1 = (1, 1)$, y $\vec{u}_2 = (1, 0)$, ya que $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$

b) $\vec{u}_1 = (1, 1)$, y $\vec{u}_2 = (-1, -1)$, ya que $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = -2$

4.48. Calcula las coordenadas del vector $\vec{u}$, sabiendo que se verifica: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ y $\vec{u} \cdot \vec{w} = 2$, siendo $\vec{v} = (3, -4)$ y $\vec{w} = (2, -3)$.

Sea $\vec{u} = (x, y)$. Del enunciado se deduce:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (x, y) \cdot (3, -4) = 3x - 4y = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 2 \Rightarrow (x, y)\ (2, -3) = 2x - 3y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -8,\ y = -6.$$

Por tanto, el vector es $\vec{u} = (-8, -6)$.

4.49. Dados los vectores de la figura:

a) Determina las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respecto de la base canónica.

b) Halla $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{u} + \vec{v}|$.

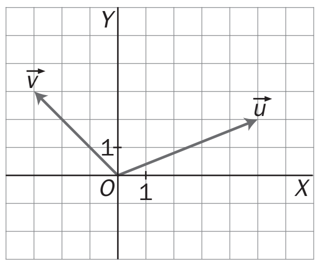
c) Halla $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

d) Halla la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

e) Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

f) Encuentra un vector unitario en la dirección y el sentido del vector $\vec{u}$.

g) Halla un vector ortogonal a $\vec{u}$ de módulo unitario.



a) $\vec{u} = (5, 2)$; $\quad \vec{v} = (-3, 3) \quad \vec{u} + \vec{v} = (2, 5)$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$; $|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (5, 2) \cdot (-3, 3) = -15 + 6 = -9$

d) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{-9}{3\sqrt{2}} = \dfrac{-3}{\sqrt{2}}$

e) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\ |\vec{v}|} = \dfrac{-9}{\sqrt{29} \cdot 3\sqrt{2}} = \dfrac{-3}{\sqrt{58}} \Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos\left(\dfrac{-3}{\sqrt{58}}\right) = 113°\ 11'\ 54{,}93''$

f) Basta multiplicar el vector $\vec{u}$ por el inverso de su módulo: $\vec{w} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\dfrac{5}{\sqrt{29}}, \dfrac{2}{\sqrt{29}}\right)$.

g) El vector $\vec{p} = (-2, 5)$ es ortogonal a $\vec{u}$, ya que $\vec{p} \cdot \vec{u} = 0$. Por tanto, $\left(\dfrac{-2}{\sqrt{29}}, \dfrac{5}{\sqrt{29}}\right)$ es unitario y ortogonal a $\vec{u}$.

4.50. Dados los vectores $\vec{u} = (3, 4)$ y $\vec{v} = (4, 3)$, halla:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$
b) $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$
c) El ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
d) La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.
e) Un vector unitario en la dirección de $\vec{v}$ sentido opuesto.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 4) \cdot (4, 3) = 12 + 12 = 24$
b) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ y $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$
c) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \dfrac{24}{25} \Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos\left(\dfrac{24}{25}\right) = 16^\circ\ 15'\ 36{,}74''$
d) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{24}{5}$
e) El vector $-\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$ es unitario y tiene la dirección de $\vec{v}$ y el sentido opuesto.

4.51. Calcula el valor de k para que el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (3, k)$ y $\vec{w} = (2, -1)$ sea:

a) 90° b) 0° c) 45° d) 60°

$\vec{u} \cdot \vec{w} = (3, k) \cdot (2, -1) = 6 - k$; $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + k^2} = \sqrt{9 + k^2}$; $|\vec{w}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

a) Como $(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = 90^\circ$, se tiene que $0 = \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}|\,|\vec{w}|} = \dfrac{6 - k}{\sqrt{9 + k^2}\sqrt{5}} \Rightarrow 6 - k = 0 \Rightarrow k = 6$

b) Como $(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = 0^\circ$, se tiene que $1 = \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = \dfrac{6 - k}{\sqrt{9 + k^2}\sqrt{5}} \Rightarrow 4k^2 - 2k - 9 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{-3 \pm 3\sqrt{2}}{2}$

c) Como $(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = 45^\circ$, se tiene que $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = \dfrac{6 - k}{\sqrt{9 + k^2}\sqrt{5}} \Rightarrow 6k^2 + 48k - 54 = 0 \Rightarrow k = 1$ o $k = -9$

d) Como $(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = 60^\circ$, se tiene que $\dfrac{1}{2} = \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = \dfrac{6 - k}{\sqrt{9 + k^2}\sqrt{5}} \Rightarrow k^2 - 99 = 0 \Rightarrow k = \pm 3\sqrt{11}$

4.52. a) Halla el valor de k para que el vector $\vec{u} = (3, k)$ sea ortogonal al vector $\vec{v} = (-1, 4)$.
b) Halla el módulo de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
c) Halla el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

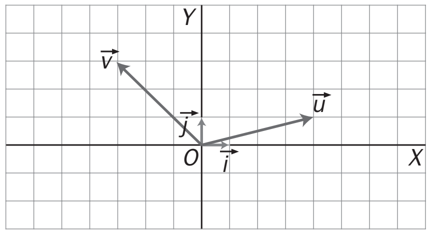
a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Por tanto, se tiene que $(3, k) \cdot (-1, 4) = -3 + 4k = 0 \Rightarrow k = \dfrac{3}{4}$.
b) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{4}$; $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$
c) Como son ortogonales, $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$.

4.53. Halla el valor de k para que el vector $\vec{u} = (k, 2)$ sea:

a) Unitario
b) Perpendicular al vector de coordenadas (2, 3)

a) El vector es unitario si su módulo es igual a 1. Luego:
$|\vec{u}| = \sqrt{k^2 + 4} = 1 \Rightarrow 4 + k^2 = 1 \Rightarrow k^2 = -3 \Rightarrow$ no existe k real que haga el vector unitario.
b) Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es 0. Luego:
$(k, 2) \cdot (2, 3) = 0 \Rightarrow 6 + 2k = 0 \Rightarrow k = -3$

4.54. **Se tiene la base canónica $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$, y respecto de ella, los vectores $\vec{u}$ y dados por la siguiente figura:**



a) Halla las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respecto de la base B.

b) Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

c) Halla el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

d) Halla un vector unitario ortogonal al vector $\vec{u} + \vec{v}$.

a) $\vec{u} = 4\vec{i} + \vec{j} \Rightarrow \vec{u} = (4, 1)$; $\vec{v} = -3\vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow \vec{v} = (-3, 3)$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (4, 1) \cdot (-3, 3) = -12 + 3 = -9$

c) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \dfrac{-9}{\sqrt{4^2+1^2}\sqrt{3^2+3^2}} = \dfrac{-9}{\sqrt{17}\sqrt{18}} = \dfrac{-9}{\sqrt{306}} = \dfrac{-3}{\sqrt{34}}$, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos\left(\dfrac{-3}{\sqrt{34}}\right) = 120°\,57'\,49{,}5''$

d) $\vec{u} + \vec{v} = (4, 1) + (-3, 3) = (1, 4)$

Un vector ortogonal al vector $\vec{u} + \vec{v} = (1, 4)$ puede ser $(-4, 1)$, y para que sea unitario basta con dividir por su módulo:

$$\vec{w} = \left(-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$$

4.55. **a) Calcula el valor de k para que los vectores $\vec{u} = (1, k)$ y $\vec{v} = (-4, k)$ sean ortogonales.**

b) Calcula $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{u} + \vec{v}|$.

c) Halla el ángulo formado por los vectores $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$.

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Por tanto, se tiene que $(1, k) \cdot (-4, k) = -4 + k^2 = 0 \Rightarrow k = \pm 2$.

b) $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$; $|\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$; $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

c) Como son ortogonales, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 90°$.

4.56. **Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, sabiendo que se verifican las siguientes condiciones:**

$|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 6$ y $|\vec{u} + \vec{v}| = 7$

Sea α el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Por el teorema del coseno:

$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\,|\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\alpha \Rightarrow 7^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos\alpha \Rightarrow 49 = 16 + 36 - 48\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow -3 = -48\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{16} \Rightarrow \alpha = 86°\,25'\,0{,}04''$

4.57. **¿Puede ser el módulo del vector suma de dos vectores de módulo 10 y 5, respectivamente, mayor que 15? ¿Y menor que 4?**

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores tales que $|\vec{a}| = 10$ y $|\vec{b}| = 5$.

Para hallar el módulo del vector suma, se aplica el teorema del coseno del siguiente modo:

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\alpha \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 100 + 25 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 125 - 100\cos\alpha$

Como $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, se tiene que $25 \leqslant |\vec{a} + \vec{b}|^2 \leqslant 225$, luego $5 \leqslant |\vec{a} + \vec{b}| \leqslant 15$.

Así pues, es imposible que el módulo del vector $\vec{a} + \vec{b}$ sea mayor que 15 o menor que 4.

4.58. **Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $(\vec{u} + \vec{v})^2 = 25$ y $(\vec{u} - \vec{v})^2 = 9$. Calcula el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.**

Se tiene que:

$25 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

$9 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Restando ambas expresiones se obtiene: $16 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$. Luego $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$.

4.59. **Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $\vec{u} = 9$ y $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 17$. Calcula el módulo del vector $\vec{v}$.**

Se tiene que $(\vec{u} + \vec{v})\,(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2} = 17$. Por tanto, $|\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 17 = 9^2 - 17 = 64$.

En consecuencia, $|\vec{v}| = \sqrt{64} = 8$

4.60. Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son tales que $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 10\sqrt{3}$, y $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$. Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Aplicando el teorema del coseno, se tiene que $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}| \Rightarrow$
$20^2 = 10^2 + (10\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10\sqrt{3}\cos\alpha \Rightarrow 400 = 100 + 300 - 200\sqrt{3}\cos\alpha$
$0 = 200\sqrt{3}\cos a \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$
Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales.

4.61. Sean *A*, *B*, *C* y *D* cuatro puntos arbitrarios del plano. Demuestra que siempre se verifica:

$[\overrightarrow{AB}] \cdot [\overrightarrow{CD}] + [\overrightarrow{AC}] \cdot [\overrightarrow{DB}] + [\overrightarrow{AD}] \cdot [\overrightarrow{BC}] = 0$

Llamando $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}]$, $\vec{v} = [\overrightarrow{AC}]$ y $\vec{w} = [\overrightarrow{AD}]$, se tiene que $[\overrightarrow{CD}] = \vec{w} - \vec{v}$, $[\overrightarrow{DB}] = \vec{u} - \vec{w}$ y $[\overrightarrow{BC}] = \vec{v} - \vec{u}$
Sustituyendo estos valores en la expresión inicial:
$[\overrightarrow{AB}] \cdot [\overrightarrow{CD}] + [\overrightarrow{AC}] \cdot [\overrightarrow{DB}] + [\overrightarrow{AD}] \cdot [BC] = \vec{u}\,(\vec{w} - \vec{v}) + \vec{v}\,(\vec{u} - \vec{w}) + \vec{w}\,(\vec{v} - \vec{u}) =$
$= \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{v} - \vec{w} \cdot \vec{u} = 0$

4.62. Pon un contraejemplo para probar que de la igualdad $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ no se deduce que $\vec{v} = \vec{w}$.

Respuesta abierta, por ejemplo:
Sean $\vec{u} = (4, -1)$, $\vec{v} = (1, -2)$ y $\vec{w} = (2, 2)$. Se cumple que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = 6$, pero $\vec{v} \neq \vec{w}$.

4.63. Dados los vectores $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (5, 3)$, expresa el vector $\vec{v}$ como suma de dos vectores, uno de la misma dirección que $\vec{u}$ y otro que sea ortogonal al vector $\vec{u}$.

Un vector en la misma dirección de $\vec{u} = (2, 1)$ es $\vec{u}\,' = (2k, k)$. Un vector ortogonal al vector $\vec{u} = (2, 1)$ es $\vec{w} = (-h, 2h)$. Como ha de ser $\vec{v} = \vec{u}\,' + \vec{w}$, se tiene que $(5, 3) = (2k, k) + (-h, 2h)$. Luego:

$$\begin{cases} 5 = 2k - h \\ 3 = k + 2h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{13}{5} \\ h = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Por tanto, los vectores pedidos son $\vec{u}\,' = (2k, k) = \left(\dfrac{26}{5}, \dfrac{13}{5}\right)$ y $\vec{w} = (-h, 2h) = \left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$.

PROBLEMAS

4.64. Dado el triángulo de vértices *A*(2, 3), *B*(5, 2) y *C*(7, 9):

a) Halla la medida de los lados.
b) Halla la medida de los ángulos.

a) Medida de los lados:
Lado $AB = |\overrightarrow{AB}| = |(5, 2) - (2, 3)| = |(3, -1)| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$
Lado $BC = |\overrightarrow{BC}| = |(7, 9) - (5, 2)| = |(2, 7)| = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$
Lado $CA = |\overrightarrow{CA}| = |(2, 3) - (7, 9)| = |(-5, -6)| = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$

b) Medida de los ángulos:
$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = (-3, 1)$; $\overrightarrow{BC} = (7, 9) - (5, 2) = (2, 7)$

$$\cos\alpha = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}|} = \frac{-6+7}{\sqrt{10}\sqrt{53}} = -\frac{1}{\sqrt{530}} \Rightarrow \alpha = 87°\ 30'\ 37{,}61''$$

$\overrightarrow{AB} = (3, -1)$; $\overrightarrow{AC} = (7, 9) - (2, 3) = (5, 6)$

$$\cos\beta = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \frac{15-6}{\sqrt{10}\sqrt{61}} = \frac{9}{\sqrt{610}} \Rightarrow \beta = 68°\ 37'\ 45{,}76''$$

$\gamma = 180° - 87°\ 30'\ 37{,}61'' - 68°\ 37'\ 45{,}76'' = 23°\ 51'\ 36{,}63''$

4.65. Dibuja una circunferencia de centro O y radio 4 unidades. Inscribe en la circunferencia anterior un hexágono regular de vértices A, B, C, D, E y F. Halla los siguientes productos.

a) $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OE}$ b) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}$

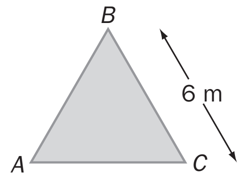
a) $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OE} = |\overrightarrow{OC}|\,|\overrightarrow{OE}| \cos 120° = 4 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -8$

b) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OB}|\,|\overrightarrow{OC}| = 4 \cdot 4 \cos 60° = 8$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{BC}| \cos 120° = -8$

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = |\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{DE}| \cos 180° = 4 \cdot 4\,(-1) = -16$

4.66. En el triángulo equilátero de la figura, de 6 m de lado, se consideran los siguientes vectores:



$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ y $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.

Halla $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$ y $\vec{w} \cdot \vec{u}$

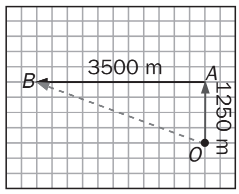
De la figura se deduce: $(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = 120° \Rightarrow (\vec{v}\,,\,\vec{w}) = (\vec{w}\,,\,\vec{u}) = -60°$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = 6 \cdot 6\,(-0,5) = -18$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}|\,|\vec{w}| \cos(\vec{v}\,,\,\vec{w}) = 6 \cdot 6\,(0,5) = 18$

$\vec{w} \cdot \vec{u} = |\vec{w}|\,|\vec{u}| \cos(\vec{w}\,,\,\vec{u}) = 6 \cdot 6\,(-0,5) = 18$

4.67. Ana ha salido de la playa en una tabla de windsurfing arrastrada por un viento que tiene una velocidad de 15 km/h en sentido norte. A los 5 minutos se ha caído y ha estado descansando sobre la tabla 10 minutos. Al levantar la vela observa que se ha levantado un fuerte viento de 30 km/h en sentido oeste. Después de navegar 7 minutos, ¿a qué distancia se encuentra del punto de partida?



15 km/h $= 15\,000$ m/h $= \dfrac{15\,000}{60}$ m/min $= 250$ m/min

30 km/h $= 500$ m/min.

Ana se encuentra inicialmente en el punto O.

A los 5 minutos, Ana ha recorrido $250 \cdot 5 = 1250$ m, y llega al punto A.

Tras levantar la vela, navega durante 7 minutos en la dirección del viento; por tanto, recorre: $500 \cdot 7 = 3500$ m, llegando al punto B.

Luego la distancia desde el punto de partida es: $|\overrightarrow{OB}|\ \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2} = \sqrt{1250^2 + 3500^2} = 3716{,}5$ m.

La distancia recorrida en total por Ana es: $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB} = 1250 + 3500 = 4750$ m.

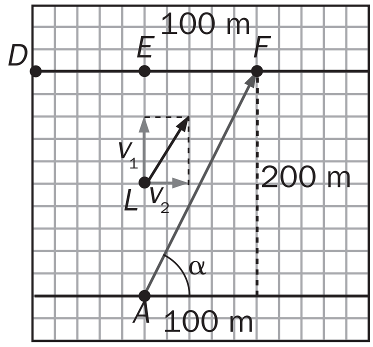
4.68. Dos barquitas ayudan a salir de un puerto a un gran barco tirando de él con el mismo ángulo y simétricamente, con una fuerza de 300 N. Haz una tabla variando el ángulo desde 10° hasta 80° de 10 en 10 y obteniendo en cada caso la fuerza resultante sobre el barco remolcado. ¿Cuál es el mejor ángulo para llevar a cabo el arrastre?

El ángulo, a, es el forman entre sí los dos cables que unen las barquitas con el barco.

a	$R = 600 \cdot \cos \dfrac{\alpha}{2}$
10°	600 cos 5° = 597,7 N
20°	600 cos 10° = 590,9 N
30°	600 cos 15° = 579,6 N
40°	600 cos 20° = 563,8 N
50°	600 cos 25° = 543,8 N
60°	600 cos 30° = 519,6 N
70°	600 cos 35° = 491,5 N
80°	600 cos 40° = 459,6 N

En la tabla están los resultados. Observa que cuanto menor es el ángulo a, mayor es la resultante y, en consecuencia, mejor es el arrastre. Por tanto, el mejor ángulo es $\alpha = 10°$.

4.69. José Luis se lanza al agua desde el punto *A* con intención de llegar al embarcadero que se encuentra situado al otro lado del río, a 200 m, en perpendicular a la corriente desde el punto *A*. Observa que por mucho esfuerzo que hace, y nadando a una velocidad de 3 km/h, no puede llegar al embarcadero, sino a un árbol que se encuentra a 100 m del embarcadero. ¿Qué velocidad tiene la corriente del río? ¿Cuántos metros nadó en realidad? ¿Qué tendría que haber hecho para llegar con seguridad al embarcadero?



Sea $\vec{v}_1$ el vector velocidad a la que nada José Luis, y $\vec{v}_2$, el vector velocidad de la corriente del río.

Se tiene que $|\vec{v}_1| = 3000$ m/h, arg $(\vec{v}_1) = 90°$, arg $(\vec{v}_2) = 0°$. Se busca calcular $|\vec{v}_2|$.

La dirección en la que se mueve José Luis es la del vector suma $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, y coincide con $\overrightarrow{AF}$.

Se verifica que tg $\alpha = \frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{v}_2|} = \frac{|200|}{|100|} = 2 \Rightarrow |\vec{v}_2| = \frac{|\vec{v}_1|}{2} = 1500$ m/h.

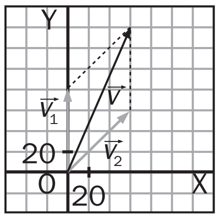
Por tanto, la velocidad de la corriente del río es de 1,5 km/h.

En realidad nadó:

$|\overrightarrow{AF}| = \sqrt{|\overrightarrow{AE}^2| + |\overrightarrow{EF}^2|} = \sqrt{200^2 + 100^2} = 223{,}6$ m.

Para llegar con seguridad al embarcadero debería haber nadado en dirección $\overrightarrow{AD}$.

4.70. Un globo se desplaza en sentido norte a 80 km/h, y en un determinado instante comienza a soplar un viento de 60 km/h en una dirección que forma un ángulo de 45° con la dirección del globo. ¿Qué dirección llevará a partir de ese instante? ¿Cuál será su velocidad?



Sea $\vec{v}_1$ el vector velocidad inicial del globo.

Se tiene que $|\vec{v}_1| = 80$, arg $(v_1) = 0°$. Por tanto, $\vec{v}_1$ es el vector (0, 80).

Sea $\vec{v}_2$ el vector velocidad del viento.

Se tiene que $|\vec{v}_2| = 60$ y arg $(\vec{v}_2) = 45°$. Por tanto, $\vec{v}_2$ es el vector (60, 60).

A partir de ese instante, el vector velocidad del globo es $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (0, 80) + (60, 60) = (60,140)$.

La velocidad es, por tanto, $|\vec{v}| = \sqrt{60^2 + 140^2} = 152{,}32$ km.

La dirección es la del vector $\vec{v}$. Como arg $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \text{arctg}\left(\frac{140}{60}\right) = 66°\ 48'\ 5''$, ese es el ángulo que forma la nueva dirección con la dirección inicial.

4.71. ¿Qué lugar geométrico forman los extremos de los vectores de módulo 5 y origen el origen de coordenadas, en el sistema de referencia euclídeo $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$?

Una circunferencia de centro O y radio 5 unidades

4.72. Un avión vuela a una velocidad de 900 km/h y lanza un paquete con ayuda humanitaria de 50 kg. El vector velocidad del paquete tiene dos componentes: la horizontal, que es constante e igual a 900 km/h, y la vertical, que viene dada por la gravedad según la ley $v_y = 9{,}8\,t$, siendo t el tiempo en segundos. ¿Es posible describir la trayectoria del paquete lanzado? Razona tu respuesta.

El paquete lanzado sigue una trayectoria parabólica. En efecto, sea h la altura del avión.

El espacio recorrido en la dirección horizontal verifica la ecuación: $e(t) = e_0 + v_t = 0 + 900t$

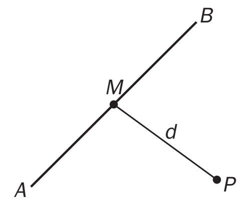
El espacio recorrido en el eje vertical verifica la ecuación: $e(t) = e_0 + vt = h - 9{,}8t^2$

Así, en el instante t, el paquete estará en la posición: $r(t) = (x, y) = (900t, h - 9{,}8t^2)$. Despejando el tiempo:

La parábola es $y = h - \frac{9{,}8}{900^2}x^2$.

4.73. Sea $\vec{AB}$ un segmento de longitud m, y M su punto medio. Si P es un punto cualquiera del plano y d es su distancia a M, demuestra que se cumple:

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = d^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$



A la vista de la figura adjunta se observa que: $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}$ y $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB}$.

Así, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MA} =$

$= |\overrightarrow{PM}|^2 + |\overrightarrow{PM}| \cdot |\overrightarrow{MB}| \cdot \cos\,(180° - \alpha)\,|\overrightarrow{PM}| \cdot |\overrightarrow{MA}| \cdot \cos\alpha + |\overrightarrow{MB}| \cdot |\overrightarrow{MA}| \cdot \cos\,(180°) =$

$= d^2 - d \cdot \frac{m}{2} \cdot \cos\,\alpha + d \cdot \frac{m}{2} \cdot \cos\,\alpha - \left(\frac{m}{2}\right)^2 = d^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$

4.74. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores libres no nulos, y $\vec{w} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} + \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$:

a) Demuestra que los múltiplos no nulos de $\vec{w}$ forman el mismo ángulo con $\vec{u}$ y con $\vec{v}$. (Estos vectores reciben el nombre de vectores bisectores de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.)

b) Halla un vector bisector de los vectores $\vec{u} = (-3, 4)$ y $\vec{v} = (8, 6)$ que tenga módulo 5.

a) $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} + \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{|u|} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{|\vec{u}|^2}{|\vec{u}|} + \frac{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})}{|\vec{v}|} = |\vec{u}| + |\vec{u}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = |\vec{u}|\ (1 + \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}))$

Por tanto,

$\cos(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{|\vec{u}|\,(1 + \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}))}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{1 + \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})}{|\vec{w}|}$; $\quad \cos(\vec{v}, w) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|} =$

$= \frac{|\vec{u}|\,(1 + \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{1 + \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})}{|\vec{w}|}$

Por lo que $\vec{w}$ forma el mismo ángulo con $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Lo mismo ocurre con los múltiplos de $\vec{w}$, ya que tienen la misma dirección que $\vec{w}$.

b) Sustituyendo será $\vec{w} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} + \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{5}(-3{,}4) + \frac{1}{10}(8{,}6) = \left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$. Para que tenga módulo 5, dividimos por su módulo y multiplicamos por 5, obteniéndose finalmente: $\vec{x} = 5 \cdot \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = 5 \cdot \frac{5}{\sqrt{50}}\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right) = \left(\frac{\sqrt{50}}{10}, \frac{7\sqrt{50}}{10}\right)$

4.75. Un vector de módulo 10 se descompone en suma de otros dos módulos iguales y que forman un ángulo de 45°. Halla el módulo de cada uno de los vectores sumados.

Si se descompone el vector $\vec{u}$, de módulo 10, como suma de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de módulos iguales. Por ser $|\vec{v}| = |\vec{w}|$, se deduce que los ángulos que forma $\vec{u}$ con $\vec{v}$ y $\vec{u}$ con $\vec{w}$ son iguales:

$(\vec{v}\ ,\ \vec{u}) = (\vec{u}\ ,\ \vec{w}) = 22°\ 30' \qquad \Rightarrow \qquad (\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{BC}) = 135°$

Aplicando el teorema del coseno, se obtiene:

$|\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 - 2|\vec{v}|\ |\overrightarrow{BC}|\ \cos\ 135° = |\vec{v}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{v}|\ |\vec{v}|^2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (2 + \sqrt{2})\ |\vec{v}|^2$

$100 = (2 + 2)\ |\vec{v}|^2 \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{v}| = |\vec{u}| = \frac{10}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}$

4.76. Demuestra que si dos vectores tienen el mismo módulo, entonces los vectores suma y diferencia son ortogonales.

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $|\vec{u}| = |\vec{v}|$. Veamos que los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son ortogonales.

$(\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v}) \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v})\,(\vec{u} - \vec{v}) = 0$

$(\vec{u} + \vec{v})\,(\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - |\vec{u}|^2 = 0$

Luego, en efecto, $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son ortogonales.

4.77. Demuestra que el vector $\vec{a} = (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{d} - (\vec{b} \cdot \vec{d})\,\vec{c}$ es ortogonal al vector $\vec{b}$.

Se tiene que $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Por tanto, basta comprobar que $[(\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{d} - (\vec{b} \cdot \vec{d})\,\vec{c}]\,\vec{b} = 0$.

$(\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{d} \cdot \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{d})\,\vec{c} \cdot \vec{b} = (\vec{c} \cdot \vec{b})\,(\vec{d} \cdot \vec{b}) - (\vec{d} \cdot \vec{b})\,(\vec{c} \cdot \vec{b}) = 0$

En efecto, ambos vectores son ortogonales.

4.78. Demuestra las siguientes igualdades entre vectores.

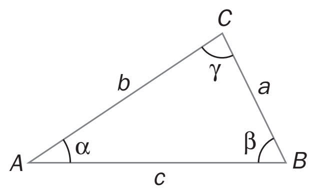
a) $(\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v})^2 - \vec{w}^2$

b) $(\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}^2 - (\vec{v} + \vec{w})^2$

a) $(\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v})^2 + (\vec{u} + \vec{v})\,\vec{w} - \vec{w}\,(\vec{u} + \vec{v}) - \vec{w}^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 - \vec{w}^2$

b) $(\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}^2 + \vec{u}\,(\vec{v} + \vec{w}) + (-\vec{v} - \vec{w})\,\vec{u} + (-\vec{v} - \vec{w})\,(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}^2 - (\vec{v} + \vec{w})^2$

4.79. Prueba, con ayuda del producto escalar, el teorema del coseno que dice así: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.



En el triángulo ABC de la figura construimos los vectores

$\vec{a} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ y $\vec{c} = \overrightarrow{BA}$ De esta forma: $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Multiplicando esta igualdad escalarmente por sí misma:

$\vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{b} + \vec{c})\,(\vec{b} + \vec{c}) \Rightarrow |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\,\vec{b} \cdot \vec{c}$

Luego se puede escribir $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos(\vec{b}, \vec{c}) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

4.80. Demuestra vectorialmente que las bisectrices de los ángulos $(\vec{u}, \vec{v})$ y $(-\vec{u}, \vec{v})$ se cortan perpendicularmente. (Sugerencia: utiliza los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con el mismo módulo.)

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores cualesquiera que forman un ángulo α. Los vectores $-\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de $180° - \alpha$. La bisectriz del ángulo α es la recta soporte del vector $\vec{u} + \vec{v}$. La bisectriz del ángulo $180 - \alpha$ es la recta soporte del vector $-\vec{u} + \vec{v}$.

Basta ver que los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $-\vec{u} + \vec{v}$ son ortogonales. Para ello, se comprueba que su producto escalar es nulo.

$(\vec{u} + \vec{v})\,(-\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}\,(-\vec{u}) + \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = -\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = 0,$

ya que si $|\vec{u}| = |\vec{v}|$, entonces $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{v}$.

Por tanto, los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $-\vec{u} + \vec{v}$ son ortogonales y, en consecuencia, las bisectrices se cortan perpendicularmente.

4.81. Demuestra que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, si y solo si $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$.

Si $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Por tanto, $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. En consecuencia,

$|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}| - 2\,|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}| + |\vec{v}|$

$|\vec{u} - \vec{v}| = |\vec{u} + (-\vec{v})| = |\vec{u}| + |-\vec{v}| - 2|\vec{u}| \cdot |-\vec{v}| \cos(\vec{u}, -\vec{v}) = |\vec{u}| + |\vec{v}|$

Luego $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$

Elevando al cuadrado: $(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2$

$\vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\,\vec{u}\,\vec{v} = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}\,\vec{v} \quad \Rightarrow \quad 4\,\vec{u}\,\vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$

Por tanto, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales.

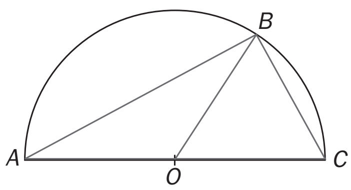
4.82. Demuestra vectorialmente que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Sean $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, entonces

$\overrightarrow{AB} = \vec{v} + \vec{u}$ y $\overrightarrow{BC} = \vec{v}\ 2\ \vec{u}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (\vec{v} + \vec{u})\,(\vec{v} - \vec{u}) = |\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 = r^2 - r^2 = 0$

Luego los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son ortogonales.



4.83. Demuestra vectorialmente que las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente.

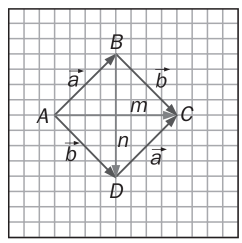
Considerando el rombo de la figura adjunta, se tiene que $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, ya que un rombo tiene sus cuatro lados iguales.

Los vectores de las diagonales son $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{n} = \vec{b} - \vec{a}$.

Para ver que son ortogonales hagamos su producto escalar:

$\vec{m} \cdot \vec{n} = (\vec{a} + \vec{b})\,(\vec{b} - \vec{a}) = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0$

Luego las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente.



4.84. Demuestra vectorialmente que las tres alturas de un triángulo concurren en un punto.

Sea H el punto de intersección de las alturas que parten de los vértices A y B.

Se tiene que $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ y $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Se trata de probar que $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} =$

$= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$

Por tanto, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{HC}$ son también ortogonales; es decir, la altura del vértice C pasa también por el punto H (ortocentro del triángulo).